

Э. Хайрер Г. Ваннер



$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$



МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ В СВЕТЕ ЕГО ИСТОРИИ

Научный мир

Undergraduate Texts in Mathematics

Readings in Mathematics

**E. Hairer
G. Wanner**

**Analysis by
Its History**

With 173 Illustrations

Corrected third printing 2000

Springer

New York

Berlin

Heidelberg

Barcelona

Hong Kong

London

Milan

Paris

Singapore

Tokyo

Э. Хайрер
Г. Ваннер

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
АНАЛИЗ
в свете его истории

Перевод с третьего английского издания
под редакцией С.С. Филиппова

МОСКВА
Научный мир
2008

УДК 517
ББК 22.161
X 12

X 12 Хайрер Э., Ваннер Г.

Математический анализ в свете его истории. Пер. с англ. — М.: Научный мир, 2008. — 396 с.

В книге излагаются основы математического анализа приблизительно в той последовательности, в какой они создавались и совершенствовались великими математиками прошлого. В первых двух главах показано, как вычисления, связанные с решением практических задач, привели к открытию бесконечных рядов, дифференциального и интегрального исчисления и дифференциальных уравнений. Становлению математически строгой теории в этих областях анализа функций одной и нескольких переменных в 19-м столетии посвящены главы III и IV.

Книга содержит большое число примеров, расчетов и иллюстраций, что позволяет лучше понять побудительные причины многих математических открытий и дать им глубокие объяснения. Прочсть эту книгу будет интересно и приятно как студентам, так и преподавателям.

УДК 517
ББК 22.161

ISBN 978-5-89176-485-9 (русск.)
ISBN 0-387-94551-2 (англ.)

Originally published in English under
the title: "Analysis by Its History"
by E. Hairer and G. Wanner
© 1996 Springer-Verlag New York, Inc.
All Rights Reserved
© Научный мир, 2008,
перевод на русский язык.

Предисловие

... который отличался от традиционного сухого учебника математики.
(М. Клайн, из предисловия к изданию книги Клайна в мягкой обложке, 1972)

Также по этой причине я взял на себя труд сделать большое число рисунков. (Брискорн и Кнёррер, *Плоские алгебраические кривые*, р. ii)

... Я хотел бы еще раз подчеркнуть ... пункты, в которых мое изложение существенно отличается от обычного изложения в учебниках:

1. Иллюстрирование абстрактных рассуждений с помощью чертежей.
2. Акцентирование их связи со смежными областями, такими как исчисление конечных разностей и интерполяция ...
3. Упор на историческое развитие.

Мне представляется крайне важным, чтобы именно будущий учитель принимал во внимание все это. (Ф. Клейн 1908, англ. издание, р. 236)

Традиционно строгое изложение начального курса анализа дается приблизительно в следующем порядке:

множества, пределы,
отображения \Rightarrow непрерывные \Rightarrow производные \Rightarrow интегрирование.
функции

С другой стороны, историческое развитие этих понятий происходило в обратном порядке:

Кантор 1875 \Leftarrow Коши 1821 \Leftarrow Ньютон 1665 \Leftarrow Архимед
Дедекинд \Leftarrow Вейерштрасс \Leftarrow Лейбниц 1675 \Leftarrow Кеплер 1615
Ферма 1638

В этой книге, содержащей четыре главы

- Глава I. Введение в анализ бесконечных
- Глава II. Дифференциальное и интегральное исчисление
- Глава III. Основания классического анализа
- Глава IV. Функции нескольких переменных,

мы попытались восстановить исторический порядок. В главе I мы начинаем с Кардано, Декарта, Ньютона и знаменитого *Introductio* Эйлера. Затем в главе II дается интегральное и дифференциальное исчисление 17-го и 18-го столетий, "исполненное на инструментах той эпохи", как сказал бы музыкант. Строгое математическое обоснование анализа в 19-м веке для одного и нескольких переменных, связанное с именами Коши, Вейерштрасса и Пеано, является темой глав III и IV.

Эта книга — плод многолетней практики преподавания анализа обоими авторами. В 1968 году второй из авторов впервые читал лекции по анализу в университете Иннсбрука, где первый автор был студентом-первокурсником. С тех пор мы оба читали эти лекции в нескольких университетах на немецком и французском языке, испытывая влияние многих книг и многих манер изложения. Настоящий текст был в конце концов записан для наших студентов в Женеве на французском языке. Он пересматривался и исправлялся каждый год, затем был переведен на английский и снова пересмотрен и исправлен с неоценимой помощью нашего коллеги Джона Штейнига. Он исправил так много ошибок, что мы едва можем представить себе, что бы мы без него делали.

Нумерация. Каждая глава разбита на разделы. Формулы, теоремы, рисунки и упражнения в каждом разделе нумеруются последовательно, при этом указывается также номер раздела. Так, например, 7-я формула в разд. II.6 занумерована “(6.7)”. Ссылки на эту формулу в других главах даются в виде “(II.6.7)”.

Библиографические ссылки. Когда мы пишем, скажем, “Эйлер (1737)” или “(Эйлер 1737)”, мы ссылаемся на работу Эйлера, опубликованную в 1737 г., полная ссылка на которую дана в разделе “Библиография” в конце книги. Иногда мы даем более точные указания, как, например, “(Эйлер 1737, р. 25)” — страница 25 в оригинале, чтобы помочь читателю, который пожелает взглянуть на оригинальные источники и оценить нередко изящные и вдохновенные тексты первооткрывателей. Если в списке библиографии нет соответствующей ссылки, мы либо опускаем скобки, либо пишем, например, “(в 1580 г.)”.

Цитаты. Мы включили много цитат из литературы. Те, которые появляются в тексте, обычно переведены. Чтобы читатель мог ощутить дух математики как интернациональной науки с долгой историей, иногда чтобы позабавить, а также для тех, у кого нет легкого доступа к библиотеке со старыми книгами, в разделе Приложение приводятся цитаты на языках оригиналов. Если источник цитирования не включен в список библиографии, его название указывается в тексте, как для приведенной выше цитаты из книги Врискорна и Кнёррера.

Благодарности. Текст был подготовлен в Женевском университете на нашей рабочей станции Sun в редакторе plain TeX с использованием макросов издательства Шпрингер, Нью-Йорк. Мы признательны за помощь, которую оказал нам Ж.М. Наеф (“Mr. Sun” из “Службы информатики” нашего университета). Рисунки либо копировались из старых книг (фотографировали Ж.М. Мейлан из библиотеки Женевского университета и А. Перрюшу), либо были рассчитаны по нашим программам на фортране и включены как постскрипт-файлы. Завершающая печать выполнена на лазерном принтере с разрешением 1200dpi на факультете психологии в Женеве. Мы также благодарны сотрудникам библиотеки математического факультета и многим коллегам; ценные замечания и советы дали, в частности, Р. Булирш, П. Дойфлхард, К. Любих, Р. Мерц, А. Остерманн, Ж.-К. Понт и Х.М. Санс-Серна. Большую благодарность, наконец, мы хотим выразить д-ру Инне Линдемманн и ее “команде” из издательства Шпрингер, Нью-Йорк за всю ее помощь, компетентные замечания и доброжелательное сотрудничество.

Март 1995

Э. Хайрер и Г. Ваннер

Предисловие ко второму и третьему исправленным изданиям. Эти новые издания позволили нам исправить несколько опечаток и улучшить текст во многих местах. В частности, мы привели геометрически более наглядное представление решения кубического уравнения, которое нашел Тарталья, улучшили трактовку огибающих и дали более полное доказательство формулы преобразования кратных интегралов. Мы благодарны многим студентам и коллегам; в частности, Р.Б. Буркель, Х. Фишер, Ж.-Л. Годен и Х.-М. Мэр помогли нам обнаружить ошибки и предложили возможные исправления. Особую благодарность мы хотим выразить И. Кани, переводчику японского издания.

Март 1997, апрель 2000

Э. Хайрер и Г. Ваннер

Оглавление

Глава I Введение в анализ бесконечных. Перевод С.С. Филиппова

I.1	Декартовы координаты и полиномиальные функции	2
	Алгебра	2
	“Algebra Nova”	6
	“Геометрия” Декарта	8
	Полиномиальные функции	10
	Упражнения	14
I.2	Показательные функции и биномиальная теорема	17
	Биномиальная теорема	18
	Показательная функция	24
	Упражнения	27
I.3	Логарифмы и площади	29
	Вычисление логарифмов	31
	Вычисление площадей	33
	Площадь под гиперболой и натуральные логарифмы	35
	Упражнения	39
I.4	Тригонометрические функции	40
	Основные соотношения и их следствия	43
	Разложения в ряды	46
	Обратные тригонометрические функции	49
	Вычисление числа π	52
	Упражнения	54
I.5	Комплексные числа и функции	57
	Формула Эйлера и следствия из нее	58
	Новый взгляд на тригонометрические функции	61
	Эйлерово произведение для синуса	62
	Упражнения	66
I.6	Непрерывные дроби	68
	Источники	68
	Подходящие дроби	71
	Иррациональность	76
	Упражнения	78

Глава II Дифференциальное и интегральное исчисление. Перевод О.Б. Москалева

II.1	Производная	81
	Производная	81
	Правила дифференцирования	84
	Параметрическое представление и неявные уравнения	88
	Упражнения	89
II.2	Высшие производные и ряд Тейлора	91
	Вторая производная	91
	De Conversione Functionum in Series	94
	Упражнения	97
II.3	Огибающие и кривизна	98
	Огибающая семейства прямых линий	98
	Каустика окружности	99
	Огибающая баллистических кривых	101
	Кривизна	101
	Упражнения	105
II.4	Интегральное исчисление	107
	Первообразные	107
	Приложения	109

	Техника интегрирования	112
	Формула Тейлора с остаточным членом	116
	Упражнения	117
II.5	Функции, имеющие элементарные интегралы	118
	Интегрирование рациональных функций	118
	Полезные подстановки	123
	Упражнения	125
II.6	Приближенное вычисление интегралов	126
	Разложения в ряды	126
	Численные методы	128
	Асимптотические разложения	131
	Упражнения	132
II.7	Обыкновенные дифференциальные уравнения	134
	Некоторые типы интегрируемых уравнений	139
	Дифференциальные уравнения второго порядка	140
	Упражнения	142
II.8	Линейные дифференциальные уравнения	144
	Однородное уравнение с постоянными коэффициентами	145
	Неоднородные линейные уравнения	148
	Уравнение Коши	151
	Упражнения	152
II.9	Численное решение дифференциальных уравнений	154
	Метод Эйлера	154
	Метод рядов Тейлора	156
	Уравнения второго порядка	158
	Упражнения	159
II.10	Формула суммирования Эйлера—Маклорена	160
	Вывод формулы по Эйлеру	160
	De Usu Legitimo Formulae Summatoriae Maclaurinianaе	163
	Формула Стирлинга	165
	Гармонический ряд и постоянная Эйлера	167
	Упражнения	169
Глава III Основания классического анализа. Перевод О.В. Москалева		
III.1	Бесконечные последовательности и действительные числа	172
	Сходимость последовательности	172
	Понятие действительного числа	177
	Монотонные последовательности и наименьшая верхняя грань	181
	Точки накопления	183
	Упражнения	185
III.2	Бесконечные ряды	188
	Критерии сходимости	189
	Абсолютная сходимость	192
	Двойные ряды	195
	Произведение Коши двух рядов	197
	Изменение порядка суммирования и предельных переходов в бесконечных рядах	199
	Упражнения	200
III.3	Действительные функции и непрерывность	202
	Непрерывные функции	204
	Теорема о промежуточном значении	206
	Теорема о максимуме	207
	Монотонные и обратные функции	208
	Предел функции	209
	Упражнения	211
III.4	Равномерная сходимость и равномерная непрерывность	213
	Предел последовательности функций	213

	Критерий Вейерштрасса равномерной сходимости	216
	Равномерная непрерывность	217
	Упражнения	220
III.5	Интеграл Римана	221
	Определения и критерии интегрируемости	221
	Интегрируемые функции	226
	Неравенства и теорема о среднем значении	228
	Интегрирование бесконечных рядов	230
	Упражнения	232
III.6	Дифференцируемые функции	235
	Фундаментальная теорема дифференциального исчисления	239
	Правила Лопиталя	242
	Производные бесконечных рядов	245
	Упражнения	246
III.7	Степенные ряды и ряды Тейлора	248
	Определение радиуса сходимости	249
	Непрерывность	250
	Дифференцирование и интегрирование	251
	Ряд Тейлора	252
	Упражнения	255
III.8	Несобственные интегралы	257
	Ограниченные функции на бесконечном интервале	257
	Неограниченные функции на конечном интервале	260
	Гамма-функция Эйлера	261
	Упражнения	262
III.9	Две теоремы о непрерывных функциях	263
	Непрерывные, но нигде не дифференцируемые функции	263
	Аппроксимационная теорема Вейерштрасса	265
	Упражнения	270
Глава IV Функции нескольких переменных. Перевод В.В. Новиковой и В.М. Суслина		
IV.1	Топология n-мерного пространства	273
	Расстояния и нормы	273
	Сходимость последовательностей векторов	275
	Окрестности, открытые и замкнутые множества	278
	Компактные множества	283
	Упражнения	285
IV.2	Непрерывные функции	287
	Непрерывные функции и компактность	289
	Равномерная непрерывность и равномерная сходимость	290
	Линейные отображения	293
	Хаусдорфово описание непрерывных функций	294
	Интегралы с параметрами	297
	Упражнения	298
IV.3	Дифференцируемые функции нескольких переменных	300
	Дифференцируемость	302
	Контрпримеры	304
	Геометрическая интерпретация градиента	305
	Теорема о среднем значении	308
	Теорема о неявной функции	309
	Дифференцирование интегралов по параметру	311
	Упражнения	313
IV.4	Производные высших порядков и ряд Тейлора	316
	Ряд Тейлора двух переменных	319
	Ряд Тейлора для случая n переменных	320
	Задачи на максимум и минимум	323
	Условный минимум (множитель Лагранжа)	325
	Упражнения	327

IV.5 Кратные интегралы	330
Двойные интегралы по прямоугольной области	330
Множества меры нуль и разрывные функции	334
Произвольные ограниченные области	336
Формула замены переменных в двойных интегралах	338
Интегралы по неограниченной области	345
Упражнения	347
Приложение: Цитаты на языках оригиналов	351
Библиография	358
Указатель обозначений	374
Алфавитный указатель	376

I

Введение в анализ бесконечных

... наши студенты-математики получили бы гораздо больше пользы от изучения *Introductio in Analysin Infinitorum* Эйлера, чем от чтения доступных современных учебников.

(Андре Вейль 1979, цитируется по книге: Дж. Д. Блантон 1988, р. xii)

... так как учитель был достаточно здравомыслящим, чтобы позволить своему необычному ученику (Якоби) заниматься *Introductio* Эйлера, в то время как другие ученики с большим трудом (Дирихле 1852, речь, посвященная памяти Якоби и приведенная в Jacobi, *Werke*, vol. I, p. 4)

Эта глава объясняет, как возникли элементарные функции и какое влияние на их вычисление оказала "Геометрия" Декарта. От интерполяционного многочлена — к биномиальной теореме Ньютона и к бесконечным рядам для показательных, логарифмических и тригонометрических функций. Глава заканчивается обсуждением комплексных чисел, бесконечных произведений и непрерывных дробей. Изложение следует историческому развитию этой темы на том уровне математической строгости, который был тогда принят. Обоснование заключений, которые могут показаться сомнительными, дает еще один повод для строгого рассмотрения сходимости в главе III.

Книга *Introductio in Analysin Infinitorum* (Эйлер 1748) оказала большое влияние на написание значительной части материала этой главы и дала ей название.

I.1 Декартовы координаты и полиномиальные функции

Пока Алгебра и Геометрия были разделены, их прогресс был медленным, а приложения ограничены. Но когда эти науки объединились, они оказали друг другу взаимную поддержку и вместе двинулись вперед к совершенству. Приложением Алгебры к Геометрии мы обязаны Декарту, это стало ключом к величайшим открытиям во всех областях математики.

(Лагранж 1795, *Oeuvres*, vol. 7, p. 271)

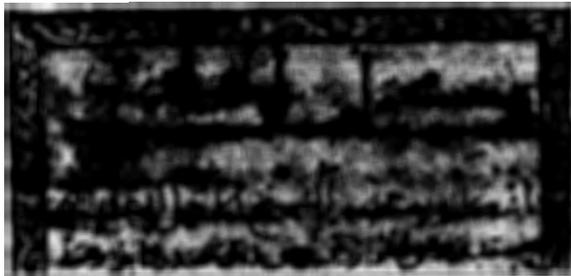
Греческая цивилизация привела к первому большому расцвету математических талантов. Начиная с эры Евклида (ок. 300 г. до Р.Х.), Александрия становится мировым научным центром. Город был опустошен трижды (в 47 г. до Р.Х. римлянами, в 392 г. христианами и, наконец, в 640 г. мусульманами), что привело к закату этой цивилизации. После усовершенствования арабской письменности (для нужд Корана), арабские писатели с рвением взялись переводить уцелевшие фрагменты трудов греков (Евклида, Аристотеля, Платона, Архимеда, Аполлония, Птолемея), а также индийских арифметиков, и сами начали новые исследования в области математики. Наконец, во время крестовых походов (1100–1300 гг.) европейцы открыли для себя эту цивилизацию; Герхард Кремона (1114–1187), Роберт из Честера (XII век), Леонардо из Пизы — “Фибоначчи” (ок. 1200 г.) и Региомонтан (ок. 1460 г.) были основными переводчиками и первыми учеными Западной Европы. В то время математика четко разделялась на *алгебру*, с одной стороны, и *геометрию* — с другой.

Алгебра

Диофанта можно считать изобретателем Алгебры; ...

(Лагранж 1795, *Oeuvres*, vol. 7, p. 219)

Алгебра является наследием Древней Греции и Востока. В своей знаменитой книге *Китаб мутасар ал-джебр ва-л-мукабала* (Краткая книга восполнений и противопоставлений, ок. 830 г.) Мохаммед бен Муса аль-Хорезми¹ положил начало изучению квадратных уравнений. Наиболее старый из известных списков этого сочинения датируется 1342 годом и начинается так:²



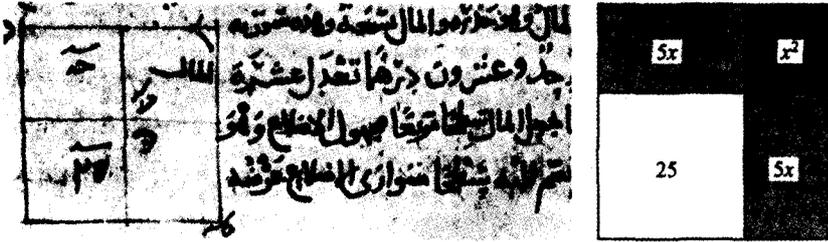
¹ Слова “алгебра” и “алгоритм” происходят от “аль-джебр” и “аль-Хорезми”.

² Воспроизводится (как и рисунки 1.1 и 1.2) с разрешения Бодлеевской библиотеки Оксфордского университета (Bodleian Library, University of Oxford, Ms. Huntington 214, folios 1R, 4R and 4V). Английский перевод см. Ф. Розен (1831).

Примеры аль-Хорезми. Рассмотрим квадратное уравнение

$$(1.1) \quad x^2 + 10x = 39.$$

Неизвестное решение x такого уравнения арабы называли *dshidr* (корень). Это слово первоначально означало сторону квадрата заданной площади. (“Корень — некоторая величина, которую надо умножить на себя”, см. Ф. Розен 1831, с. 6).

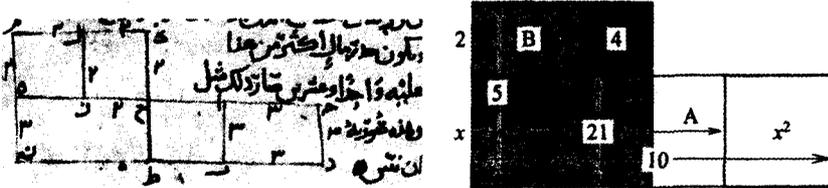


Рукопись 1342 г.

Современный чертеж

Рис. 1.1. Решение уравнения $x^2 + 10x = 39$.

Решение. Аль-Хорезми нарисовал квадрат со стороной x , чтобы изобразить x^2 , и два прямоугольника со сторонами 5 и x , изображающими член $10x$ (см. рис. 1.1). Уравнение (1.1) показывает, что площадь области, заштрихованной на рис. 1.1, равна 39. Следовательно, площадь полного квадрата равна $39 + 25 = 64 = 8 \cdot 8$, так что $5 + x = 8$ и $x = 3$.



Рукопись 1342 г.

Современный чертеж

Рис. 1.2. Решение $x^2 + 21 = 10x$.

Второй пример из трактата аль-Хорезми — уравнение

$$(1.2) \quad x^2 + 21 = 10x,$$

которое в оригинале записано так: “Substantia vero et 21 dragmata 10 rebus equiparantur” (перевод с арабского языка на латинский Роберта из Честера). Этим примером мы хотим показать, что другие знаки членов требуют другого чертежа. Чтобы получить *решение* x , начертим квадрат для x^2 и прибавим к нему прямоугольник ширины x и неизвестной длины, который должен изображать число 21 (рис. 1.2). Но согласно уравнению (1.2) полная длина всей полученной

фигуры равна 10. Разделим фигуру вертикальной линией пополам и малый прямоугольник (А), содержащийся между линией деления и квадратом x^2 , переместим наверх (В). Получится фигура (серая) высоты 5, имеющая площадь, равную 21. Площадь же полного квадрата (серый и черный цвет) будет $5 \cdot 5 = 25$. Следовательно, малый черный квадрат должен иметь площадь $25 - 21 = 4 = 2 \cdot 2$, и мы получаем $x = 3$. С помощью аналогичного чертежа (попробуйте это сделать!) аль-Хорезми нашел и второе решение $x = 7$. Вот как описал свое решение сам Мохаммед бен Муса аль-Хорезми (см. Розен 1831, с. 11):

... например, “некоторый квадрат и двадцать один равны в числах десяти корням того квадрата.” Иначе говоря, какова должна быть величина такого квадрата, который, если добавить к нему двадцать один дирхем, станет равным по величине десяти корням этого квадрата? Решение: Раздели пополам число корней; половина есть пять. Умножь это на себя; произведение будет двадцать пять. Вычти из этого двадцать один, что было прибавлено к квадрату, останется четыре. Извлеки из этого корень, он равен двум. Вычти это из половины корней, которая равна пяти, останется три. Это есть корень того квадрата, величину которого надо найти, а сам квадрат равен девяти. Или можешь прибавить корень к половине корней; сумма будет семь, это корень того квадрата, который ты ищешь, а сам квадрат есть сорок девять.

В качестве примера аль-Хорезми дает решение следующей «загадки»: “Я разбил число 10 на две части и, умножив одну часть на другую, получил в результате 21. Чему равны эти части?” Полагая одну часть равной x , а другую $10 - x$ и перемножив их, мы получим

$$(1.3) \quad x \cdot (10 - x) = 21,$$

что эквивалентно уравнению (1.2). Следовательно, решение дается двумя корнями уравнения (1.2), т.е. 3 и 7 или наоборот.

Решение уравнений третьей степени

Тарталья представил свое решение в плохих итальянских стихах ...
(Лагранж 1795, *Oeuvres*, vol. 7, p. 22)

... Я открыл общее правило, но пока я хочу сохранить его в секрете по нескольким причинам.

(Тарталья 1530, см. М. Кантор 1891, vol. II, p. 485)

Попробуем решить, например, уравнение

$$(1.4) \quad x^3 + 6x = 20,$$

или, выражаясь «плохими» итальянскими стихами, “Quando che'l cubo con le cose appresso, Se agguaglia à qualche numero discreto ...” (“Когда какой-то куб с каким-либо добавком Приравнен некому разумному числу ...”, — *ит.*) (см. М. Кантор 1891, vol. II, p. 488). Николо Тарталья (1499–1557) и Сципионе даль Ферро (1465–1526) нашли метод решения задачи, но они сохраняли его в тайне, чтобы победить на состязаниях. Под давлением и соблазненный ложными обещаниями, Тарталья раскрыл секрет Джероламо Кардано (1501–1576), зашифрованный в стихах и без вывода (“*suppressa demonstratione*” — опустив доказательство, *ит.*). Кардано восстановил вывод с большим трудом (“*quod difficillimum fuit*”) и опубликовал его в своей книге “*Ars Magna*” — “Великое искусство” в 1545 г. (см. ди Паскуале 1957, а также Стройк 1969, p. 63–67). Постараемся восстановить этот

Вывод. Представим x^3 кубом с ребрами длины x (а как же иначе?), он закрашен серым на рис. 1.3а; член $6x$ добавляется к кубу в виде трех призм с квадратным основанием объема x^2v и еще трех объема xv^2 (белые на рис. 1.3а). Согласно (1.4), мы получили тело объема 20, который является разностью объемов кубов u^3 и v^3 (см. рис. 1.3а), т.е.

$$u^3 - v^3 = 20,$$

где

$$(1.5) \quad u = x + v.$$

Расположив шесть добавленных призм как показано на рис. 1.3б, мы видим, что их общий объем будет равен $6x$ (что и требуется), если

$$(1.6) \quad 3uvx = 6x \quad \text{или} \quad uv = 2.$$

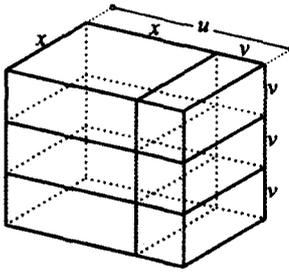
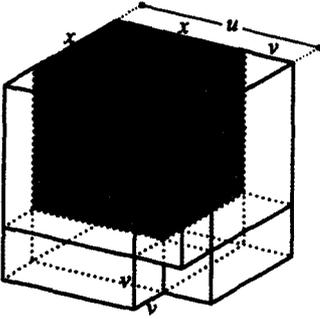


Рис. 1.3а. Кубическое уравнение (1.4).

Рис. 1.3б. Обоснование формул (1.6).

*Estimatio. Exemplum. cubus & 6 pos-
iones, x quantur 20, ducito 2, tertiam par-
tem 6, ad cubum, fit 8. duc 10 dimidium nu-
meri in se, fit 100, iunge 100 & 8, fit 108, acci-
pe radicem que est 108, & eam gemmina-
bis, alteri addes 10, dimidium numeri, a b-
alio minues tantundem, habebis Bino-
mium 108 p: 10, & Apotomen 108 m:
10, horum accipe 108 cubus & minue illam*

*cubus p: 6 reb' 108 20
2 20
8 10
108
108 p: 10
108 m: 10
108 v: cu. 108 p: 10
m: 108 v: cu. 108 m: 10*

Рис. 1.3с. Из книги Кардано “Ars Magna” 1545, ed. Basilea 1570.³

Теперь мы знаем *сумму* ($= 20$) и *произведение* ($= -8$) двух чисел u^3 и $-v^3$ и можем, следовательно, восстановить эти два числа, как в «загадке» аль-Хорезми (1.3), в виде

$$u^3 = 10 + \sqrt{108}, \quad -v^3 = 10 - \sqrt{108}.$$

³ Публикуется с разрешения Публичной библиотеки Женевского университета.

Извлекая затем кубические корни и используя соотношение $x = u - v$, мы получаем

$$(1.7) \quad x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$$

(см. факсимиле из книги Кардано на рис. 1.3с).

Спустя несколько лет был найден метод решения уравнений четвертой степени (Лодовико Феррари, см. Стройк 1969, р. 69 и далее, а также упражнения 1.1 и 1.2 в конце раздела). Но уравнение пятой степени оставалось непостижимой тайной еще в течение столетий, пока, наконец, в 1826 г. Абель не доказал невозможность его решения в радикалах.

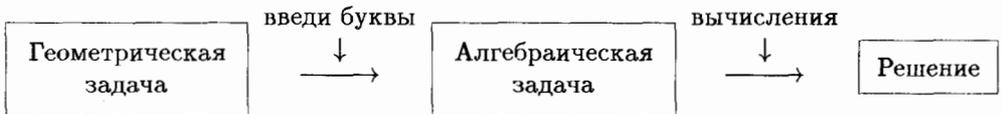
“Algebra Nova”

Численная логистика — то, что раскрывается и исследуется с помощью чисел; специфика раскрывается родом и формой вещей, как буквами алфавита. (Виет 1600, *Algebra nova*, французское издание 1630 г.)

АЛГЕБРА — это общий метод вычислений с помощью определенных знаков и символов, которые были придуманы и найдены удобными.

(Маклорен 1748, *Трактат по алгебре*, с. 1)

В старинных текстах рассматривались только частные примеры, и их авторы выполняли “арифметические” вычисления, используя только числа. Фундаментальная идея Франсуа Виета (François Viète 1540–1603: 1591 *In artem analyticam isagoge*, 1600 *Algebra nova*) состояла в том, чтобы *писать буквы A, B, C, X, ...* вместо неизвестных величин задачи (нередко геометрической) и использовать эти буквы в алгебраических вычислениях (см. факсимиле на рис. 1.4а). Поскольку оказалось, что ни одна задача древнегреческой эры не сопротивляется применению метода



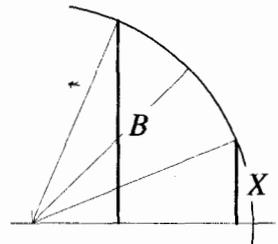
то Виет написал большими буквами: “NVLVM NON PROBLEMA SOLVERE” (т.е. “ДАЮЩИЙ РЕШЕНИЕ ЛЮБОЙ ЗАДАЧИ”). Эта великолепная идея привела к появлению “Геометрии” Декарта.

Пример (трисекция угла). Знаменитая классическая задача “Datum angulum in tres partes æquales secare” (заданный угол раздели на три равные части — лат.) с помощью соотношения

$$(1.8) \quad \sin(3\alpha) = 3 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha$$

(см. ниже формулу (4.14)) и несложных вычислений приводится к алгебраическому уравнению

$$(1.9) \quad -4X^3 + 3X = B$$



(см. Виет 1593, *Opera*, р. 290). Его решение получается по формуле (1.14).

Формула для уравнения второй степени. В обозначениях Виета сложный текст аль-Хорезми (см. с. 4) становится “формулой”:

$$(1.10) \quad x^2 + ax + b = 0 \implies x_1, x_2 = -a/2 \pm \sqrt{a^2/4 - b}.$$

Exemple.

Qu'il faille adjoindre $A + D$, avec $B + 2 D$, la somme sera $A + B + 3 D$, observant ce qui a esté dit.

$$\begin{array}{r} B + 2 D. \\ A + D. \\ \hline A + B + 3 D. \end{array}$$

Рис. 1.4а. Факсимиле из французского издания (1630) книги Виета(1600).⁴

S i A quad. $+ B$ 2 in A , x quetur Z plano. $A + B$ esto E . Igitur E quad., x quabitur Z plano $+ B$ quad.

Confectarium.

Itaque, $\sqrt{2 \text{plani} + B \text{quad.}}$ — B fit A , de qua primum q uzrebatur.

Itaque si A cubus — B plano 3 in A , x quetur Z solido 2.
 $\sqrt{C.Z \text{folidi}} \rightarrow \sqrt{2 \text{folido-folidi}} \rightarrow B \text{plano-plano-plano} + \sqrt{C.Z \text{folidi}} \rightarrow \sqrt{2 \text{folido-folidi}} \rightarrow B \text{plano-plano-plano.}$ Est A de qua q uzritur.

Рис. 1.4б. Из книги Виета (1591а) (*Opera* pp. 129, 150): решение уравнений $A^2 + 2BA = Z$ и $A^3 - 3BA = 2Z$. Здесь неизвестная переменная обозначена A . Только Декарт ввел в употребление выбор x, y, z для обозначения неизвестных.⁵

Формула для уравнения третьей степени

$$(1.11) \quad y^3 + ay^2 + by + c = 0 \quad y + \frac{a}{3} = x \quad x^3 + px + q = 0.$$

Положим $x = u + v$ (что соответствует (1.5), но с заменой “ $-v$ ” на “ v ”), тогда уравнение (1.11) примет вид

$$(1.12) \quad u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0.$$

Полагая $uv = -p/3$ (что соответствует (1.6)), мы получим

$$(1.13) \quad u^3 + v^3 = -q, \quad u^3 v^3 = -p^3/27.$$

⁴ Воспроизводится с разрешения Публичной библиотеки Женевского университета.
⁵ Воспроизводится с разрешения Публичной библиотеки Женевского университета.

С помощью «загадки» аль-Хорезми (1.3) и формул (1.10) мы получаем (см. факсимиле на рис. 1.4b)

$$(1.14) \quad x = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{q^2/4 + p^3/27}} + \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{q^2/4 + p^3/27}}.$$

“Геометрия” Декарта

Здесь я прошу вас обратить внимание, между прочим, на то, что сомнения, мешавшие старинным писателям использовать арифметическую терминологию в геометрии, которые могли быть лишь следствием их неспособности ясно осознать связь между этими двумя дисциплинами, внесли много неясностей и путаницы в их объяснения. (Декарт 1637)

Геометрия, это гигантское наследие Древней Греции, была принесена в Европу благодаря арабским переводам.

Например, *Начала* Эвклида (ок. 300 г. до н.э.) состоят из 13 “Книг”, содержащих “Определения”, “Постулаты” и строго доказанные “Предложения” (всего их 465). Столь же важное значение имеют *Коники* Аполлония (200 г. до н.э.).

Тем не менее, оставался нерешенным ряд задач, не поддававшихся усилиям этих ученых: трисекция угла, квадратура круга, а также задача, упомянутая Паппом в 350 г., которая вдохновила исследования Декарта.

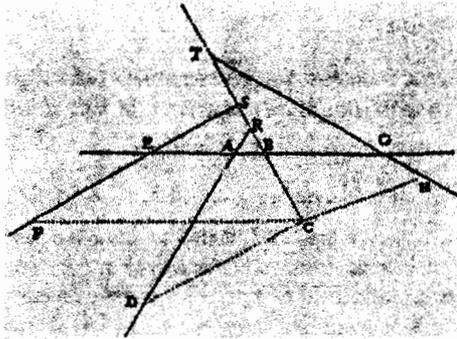


Рис. 1.5а. Задача Паппа, чертеж Декарта.⁶

Задача Паппа. “Вопрос, решение которого было начато Эвклидом и продолжено Аполлонием, но не было ими закончено, таков”: Пусть даны три прямых a, b, c и три угла α, β, γ . Пусть для произвольно выбранной точки C точки B, D, F на прямых a, b, c таковы, что отрезки CB, CD, CF образуют с прямыми a, b, c углы α, β, γ соответственно (см. рисунки 1.5а и 1.5б). Найти геометрическое место точек C , для которых

$$(1.15) \quad CB \cdot CD = (CF)^2.$$

⁶ Воспроизводится с разрешения Публичной библиотеки Женевского университета.

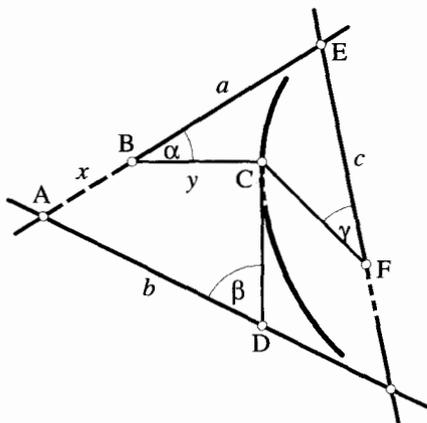


Рис. 1.5b. Задача Паппа.

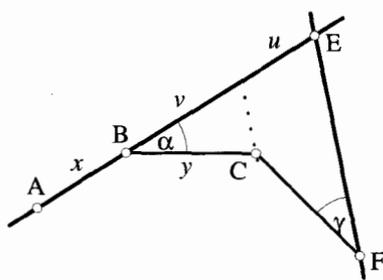


Рис. 1.5c. Уравнение прямой.

Декарт решил эту задачу, пользуясь “новой” и получившей признание алгеброй Виета. Точка C определяется расстояниями AB и BC . Эти две “неизвестные величины” обозначены буквами “ x ” и “ y ” (“Que le segment de la ligne AB , qui est entre les points A & B , soit nommé x . & que BC soit nommé y ” — *фр.*). Рассмотрим сначала только две из этих прямых (рис. 1.5c) (“& pour me demesler de la cōfusion de toutes ces lignes ...” — *фр.*). Проведем параллель к EF , проходящую через C . Если углы заданы, то существуют такие постоянные K_1 и K_2 , что

$$u = K_1 \cdot CF, \quad v = K_2 \cdot y.$$

Так как $AE = x + u + v = K_3$, получаем

$$(1.16) \quad CF = d + lx + ky, \quad d, l, k \text{ постоянные.}$$

Аналогично,

$$(1.17) \quad CD = mx + ny, \quad m, n \text{ постоянные.}$$

“Таким образом, вы видите, что ... длина каждой такой линии ... всегда может быть выражена как сумма трех членов, один из которых есть неизвестная величина y , умноженная или деленная на некоторую известную величину, другой есть неизвестная величина x умноженная или деленная на некоторую другую известную величину, а третий является известной величиной. Исключение должно быть сделано для случая, когда заданные прямые параллельны ...” (Декарт 1637, р. 312, цитируется по английскому переводу: Д.Е.Смит и М.Л.Латам 1925).

Таким образом, условие (1.15) примет вид

$$y \cdot (mx + ny) = (d + lx + ky)^2,$$

что является уравнением вида

$$(1.18) \quad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

При любом фиксированном значении y уравнение (1.18) становится квадратным уравнением, которое решается алгебраически, см. (1.10). Преобразования координат показывают, что (1.18) всегда представляет коническое сечение.

Полиномиальные функции

Не только алгебра помогает геометрии, но и геометрия тоже помогает алгебре, потому что декартовы координаты представляют алгебру в новом свете. Действительно, если вместо (1.1) и (1.4) мы рассмотрим

$$(1.19) \quad y = x^2 + 10x - 39, \quad \text{и} \quad y = x^3 + 6x - 20$$

и придадим произвольные значения x , то для каждого x можно вычислить значения y и изучить полученные таким образом кривые (рис. 1.6). Корни уравнений (1.1) или (1.4) появляются как точки пересечения этих кривых с осью x . Например, мы обнаружим, что решение уравнения (1.4) есть просто $x = 2$ (это выглядит несколько проще, чем формула (1.7), не правда ли?).

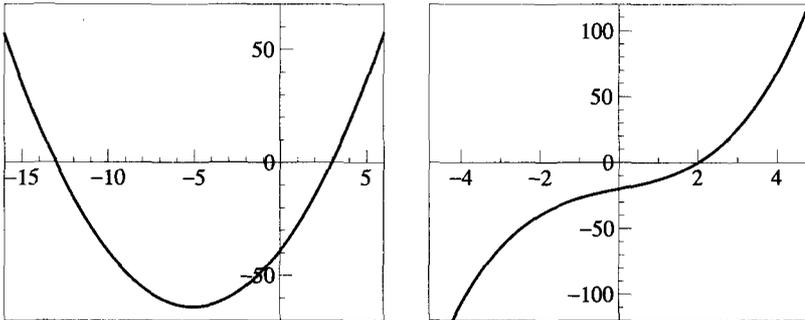


Рис. 1.6. Многочлены $x^2 + 10x - 39$ и $x^3 + 6x - 20$.

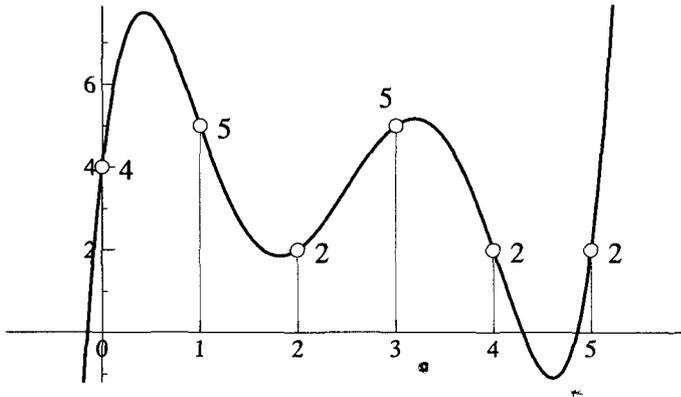


Рис. 1.7. Интерполяционный многочлен.

(1.1) Определение. *Многочлен (полином) есть выражение вида*

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0,$$

где a_0, a_1, \dots, a_n — произвольные постоянные. Если $a_n \neq 0$, многочлен имеет степень n .

Задача интерполяции. Пусть заданы $n + 1$ точек x_i, y_i (рис. 1.7). Требуется найти многочлен степени n , проходящий через все эти точки. Нас интересует главным образом ситуация, когда все x_i расположены на равных расстояниях и, в частности, когда

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3, \quad \dots$$

Решение этой задачи, которое оказалось очень полезным при вычислении логарифмов и в морской навигации, появилось в начале XVII века в работе Бриггса и сэра Томаса Харриота (см. Голдстейн 1977, р. 23f). Ньютон (1676) подошел к этой задаче с позиций “новой алгебры” Виета (см. рис. 1.8): напишем буквы вместо неизвестных коэффициентов нашего многочлена, например,

$$(1.20) \quad y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3.$$

Abcissæ	Ordinatæ
$A + p$	$A + bp + cp^2 + dp^3 + ep^4 = a$
$A + q$	$A + bq + cq^2 + dq^3 + eq^4 = \beta$
$A + r$	$A + br + cr^2 + dr^3 + er^4 = \gamma$
$A + s$	$A + bs + cs^2 + ds^3 + es^4 = \delta$
$A + t$	$A + bt + ct^2 + dt^3 + et^4 = \epsilon$
Divisor. Diff. Ord.	Quoti per divisionem prodeuntes.
$p - q) a - \beta$	$b + cxp + q + d \times pp + pq + qq + exp^2 + p^2q + pq^2 + q^3 = \zeta$
$q - r) \beta - \gamma$	$b + cxq + r + d \times qq + qr + rr + exq^2 + q^2r + qr^2 + r^3 = \eta$
$r - s) \gamma - \delta$	$b + cxr + s + d \times rr + rs + ss + exr^2 + r^2s + rs^2 + s^3 = \theta$
$s - t) \delta - \epsilon$	$b + cxs + t + d \times ss + st + tt + exs^2 + s^2t + st^2 + t^3 = \kappa$
$p - r) \zeta - \eta$	$c + d \times p + q + r + expp + pq + qq + pr + qr + rr = \lambda$
$q - s) \eta - \theta$	$c + d \times q + r + s + exqq + qr + rr + qs + rs + ss = \mu$
$r - t) \theta - \kappa$	$c + d \times r + s + t + exrr + rs + ss + rt + st + tt = \nu$
$p - s) \lambda - \mu$	$d + exp + q + r + s = \xi$
$q - t) \mu - \nu$	$d + exq + r + s + t = \sigma$
$p - t) \xi - \sigma$	$e = \epsilon$

Рис. 1.8. Задача интерполяции у Ньютона (1676, *Methodus Differentialis*).⁷

Если величины y_0, y_1, y_2, y_3 заданы, то “задача” преобразуется в “алгебраические уравнения”:

Абсциссы	Ординаты
$x = 0$	$A = y_0$
$x = 1$	$A + B + C + D = y_1$
$x = 2$	$A + 2B + 4C + 8D = y_2$
$x = 3$	$A + 3B + 9C + 27D = y_3$

⁷ Воспроизведено с разрешения Публичной библиотеки Женевского университета.

Здесь мы заметим, что величина A исчезнет, если вычтем уравнения первое из второго, второе из третьего, третье из четвертого:

$$(1.21) \quad \begin{aligned} B + C + D &= y_1 - y_0 =: \Delta y_0 \\ B + 3C + 7D &= y_2 - y_1 =: \Delta y_1 \\ B + 5C + 19D &= y_3 - y_2 =: \Delta y_2, \end{aligned}$$

B исчезнет, если снова произвести вычитания:

$$(1.22) \quad \begin{aligned} 2C + 6D &= \Delta y_1 - \Delta y_0 =: \Delta^2 y_0 \\ 2C + 12D &= \Delta y_2 - \Delta y_1 =: \Delta^2 y_1, \end{aligned}$$

и таким же способом исключается C :

$$(1.23) \quad 6D = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 =: \Delta^3 y_0.$$

Из этого уравнения находим D . Затем C из первого уравнения (1.22), а первое уравнение (1.21) даст значение B . И мы придем к решению

$$(1.24) \quad y = y_0 + \Delta y_0 \cdot x + \frac{\Delta^2 y_0}{2} \cdot (x^2 - x) + \frac{\Delta^3 y_0}{6} \cdot (x^3 - 3x^2 + 2x),$$

которое можно переписать в таком виде:

$$(1.24') \quad y = y_0 + \frac{x}{1} \Delta y_0 + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 y_0 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^3 y_0.$$

Используя треугольник Паскаля (см. разд. I.2), можно показать, что формула (1.24') — частный случай общей формулы для многочленов любой степени. Справедлива следующая

(1.2) Теорема. *Многочлен степени n , принимающий значения*

$$y_0 \text{ (для } x = 0), \quad y_1 \text{ (для } x = 1), \dots, \quad y_n \text{ (для } x = n)$$

задается формулой

$$y = y_0 + \frac{x}{1} \Delta y_0 + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 y_0 + \dots + \frac{x(x-1) \dots (x-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \Delta^n y_0.$$

(1.3) Замечание. Обычай располагать разности в виде такой схемы:

$$(1.25) \quad \begin{array}{cccccc} y_0 & & & & & \text{где} \\ & \Delta y_0 & & & & \Delta y_i = y_{i+1} - y_i \\ y_1 & \Delta y_1 & \Delta^2 y_0 & & & \Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i \\ & & \Delta^2 y_1 & \Delta^3 y_0 & & \Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i, \\ y_2 & \Delta y_2 & & \Delta^3 y_1 & \Delta^4 y_0 & \\ & & \Delta^2 y_2 & & & \text{и т. д.} \\ y_3 & \Delta y_3 & & & & \\ & & & & & \\ y_4 & & & & & \end{array}$$

пошел от Ньютона (см. рис. 1.9).

Пример. Для значений из нашей задачи (рис. 1.7), мы получаем

$$\begin{array}{cccccc} 4 & & & & & \\ 5 & \frac{1}{1} & & & & \\ & -3 & \frac{-4}{2} & & & \\ 2 & & 6 & \frac{10}{1 \cdot 2} & & \\ & 3 & -6 & \frac{-22}{21} & \underline{43}, & \Rightarrow \\ 5 & -3 & -6 & 9 & & \\ 2 & & 3 & & & \\ & 0 & & & & \\ 2 & & & & & \end{array} \quad \begin{aligned} y &= 4 + \frac{1}{1} \cdot x - \frac{4}{1 \cdot 2} \cdot x(x-1) + \dots \\ &= 4 + \frac{613x}{30} - 35x^2 + \frac{473x^3}{24} \\ &\quad - \frac{9x^4}{2} + \frac{43x^5}{120}. \end{aligned}$$

Et fac $\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2} = b$, $\frac{A_2B_3 - A_3B_2}{A_2A_3} = b_2$,

$\frac{A_3B_4 - A_4B_3}{A_3A_4} = b_3$, $\frac{A_4B_5 - A_5B_4}{A_4A_5} = b_4$,

$\frac{A_5B_6 - A_6B_5}{A_5A_6} = b_5$, $\frac{A_6B_7 - A_7B_6}{A_6A_7} = b_6$,

$\frac{-A_7B_7 - A_8B_8}{A_7A_8} = b_7$.

Deinde $\frac{b-b_2}{AA_3} = c$, $\frac{b_2-b_3}{A_2A_4} = c_2$, $\frac{b_3-b_4}{A_3A_5} = c_3$, &c.

Tunc $\frac{c-c_2}{AA_4} = d$, $\frac{c_2-c_3}{A_2A_5} = d_2$, $\frac{c_3-c_4}{A_3A_6} = d_3$, &c.

Et $\frac{d-d_2}{AA_5} = e$, $\frac{d_2-d_3}{A_2A_6} = e_2$, $\frac{d_3-d_4}{A_3A_7} = e_3$, &c.

Sic pergitur ad ultimam differentiam.

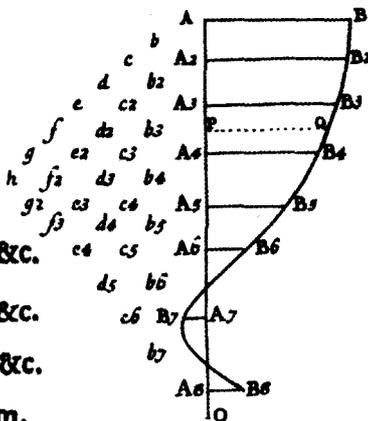


Рис. 1.9. Схема разностей у Ньютона (Ньютон 1676, *Methodus Differentialis*).⁸

Другие примеры. а) Рассмотрим многочлен, для которого решение уже известно, а именно, $y = x^3$. Схема разностей дает:

$x = 0 :$	$\frac{0}{1}$					$y = 0 + 1 \cdot x + 6 \cdot \frac{x(x-1)}{2}$
$x = 1 :$	1	$\frac{1}{7}$				$+ 6 \cdot \frac{x(x-1)(x-2)}{6}$
$x = 2 :$	8	7	$\frac{6}{12}$	\Rightarrow		$= x + 3x^2 - 3x + x^3 - 3x^2 + 2x = x^3.$
$x = 3 :$	27	19				

б) В этом примере значениями многочлена при $x = n$ будут суммы $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$,

$x = 0 :$	$\frac{0}{1}$					
$x = 1 :$	1 ³	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{7}{19}$			
$x = 2 :$	1 ³ + 2 ³	3 ³	18	$\frac{6}{6}$	$\frac{0}{0}$	
$x = 3 :$	1 ³ + 2 ³ + 3 ³	4 ³	37	24	0	$\frac{0}{0}$, ,
$x = 4 :$	1 ³ + 2 ³ + 3 ³ + 4 ³					

и мы получим формулу

$$y = x + 7 \frac{x(x-1)}{2} + 12 \frac{x(x-1)(x-2)}{6} + 6 \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24}$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4}.$$

Аналогично получаются формулы

⁸ Воспроизведено с разрешения Публичной библиотеки Женевского университета.

$$\begin{aligned}
 1 + 2 + \dots + n &= \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \\
 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 &= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \\
 (1.26) \quad 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 &= \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} + 0 \\
 1^4 + 2^4 + \dots + n^4 &= \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} + 0 - \frac{n}{30} \\
 1^5 + 2^5 + \dots + n^5 &= \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} + 0 - \frac{n^2}{12}.
 \end{aligned}$$

Якоб Бернулли (1705) нашел *общую формулу*:

$$\begin{aligned}
 1^q + 2^q + \dots + n^q &= \frac{n^{q+1}}{q+1} + \frac{n^q}{2} + \frac{q}{2}An^{q-1} + \frac{q(q-1)(q-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4}Bn^{q-3} + \\
 &+ \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)(q-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}Cn^{q-5} + \dots,
 \end{aligned}$$

где

$$(1.27) \quad A = \frac{1}{6}, \quad B = -\frac{1}{30}, \quad C = \frac{1}{42}, \quad D = -\frac{1}{30}, \quad E = \frac{5}{66}, \quad F = -\frac{691}{2730}, \dots$$

так называемые *числа Бернулли*. Элегантное объяснение приведено в конце следующей главы, в разд. II.10.

Упражнения

1.1 Следующую задачу (мы запишем ее в обозначениях Виета)

$$x + y + z = 20$$

$$x : y = y : z$$

$$xy = 8$$

Зуан де Тонини да Кои (Zuane de Tonini da Coi (Colla)) предложил 15 декабря 1536 г. Тарталье, который не смог решить ее (см. Нотари 1924). Исключите переменные x и z и сообразите, почему. Кардано позже передал задачу Феррари, который нашел решение (см. следующее упражнение). Не удивительно, что позже Феррари и Тарталья обменялись нелицеприятными письмами с жаркой полемикой по математическим вопросам.

1.2 Восстановите решение Феррари биквадратного уравнения

$$(1.28) \quad x^4 + ax^2 = bx + c.$$

Указание. а) Прибавьте $a^2/4$ к обеим частям уравнения; это дает

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}\right)^2 = bx + c + \frac{a^2}{4}.$$

б) Рассматривая y как параметр, прибавьте $y^2 + ay + 2x^2y$ к обеим частям уравнения; это дает

$$\left(x^2 + \frac{a}{2} + y\right)^2 = 2x^2y + bx + y^2 + ay + c + \frac{a^2}{4}.$$

с) Выражение в правой части, записанное как $Ax^2 + Bx + C$, будет иметь вид $(\alpha x + \beta)^2$, если $B^2 = 4AC$. Это дает кубическое уравнение для y .

д) Найдя y по формуле Кардано (1.14), вы получите два уравнения

$$\left(x^2 + \frac{a}{2} + y\right) = \pm(\alpha x + \beta),$$

каждое из которых имеет два корня.

Замечание. Любое уравнение $z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ можно привести к виду (1.28) преобразованием $x = z + a/4$.

1.3 (Эйлер 1749, *Opera Omnia*, vol. VI, p. 78-147). Решите уравнение 4-й степени

$$x^4 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

для этого сравните коэффициенты в обеих частях равенства

$$x^4 + Bx^2 + Cx + D = (x^2 + ux + \alpha)(x^2 - ux + \beta)$$

и найдите уравнение третьей степени для u^2 . Решите это уравнение и вычислите решения двух квадратных уравнений.

1.4 (Л. Эйлер 1770, *Vollst. Anleitung zur Algebra, Opera Omnia*, St. Petersburg — *Полное руководство по алгебре. Собрание сочинений*, т. I.) Дано уравнение 4-й степени с симметричными коэффициентами, например,

$$(1.29) \quad x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 5x + 1 = 0.$$

Разложите многочлен на множители $(x^2 + rx + 1)(x^2 + sx + 1)$ и найдите четыре решения (1.29).

Замечание. Другая возможность решить (1.29) — разделить уравнение на x^2 и использовать новую переменную $u = x + x^{-1}$.

1.5 (Задача, предложенная Арменией и Австралией для 35-й Международной математической олимпиады, проходившей в Гонконге 12–19 июля 1994 г.) Пусть ABC — равнобедренный треугольник, где $AB = AC$. Предположим, что: (i) точка M — середина отрезка BC , а точка O расположена на прямой AM так, что OB перпендикулярно к AB ; (ii) Q — произвольная точка на отрезке BC , отличная от B и C ; и (iii) точка E лежит на прямой AB , а F — на прямой AC , причем точки E , Q и F различны и лежат на одной прямой. Докажите, используя метод Виета, что OQ перпендикулярно к EF тогда и только тогда, когда $QE = QF$.



Ren. Cartesius
Р. Декарт (1596-1650)⁹

Accessit Commentariolus de VITA AUCTORIS.



И. НЬЮТОН (1642-1727)⁹

Summa Potestatum.

$$\begin{aligned}
 sn &\infty \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n. \\
 sn^2 &\infty \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n. \\
 sn^3 &\infty \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2. \\
 sn^4 &\infty \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 * - \frac{1}{30}n. \\
 sn^5 &\infty \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 * - \frac{1}{12}n^3. \\
 sn^6 &\infty \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 * - \frac{1}{6}n^4 * + \frac{1}{42}n. \\
 sn^7 &\infty \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 * - \frac{7}{24}n^5 * + \frac{1}{12}n^4. \\
 sn^8 &\infty \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 * - \frac{7}{15}n^6 * + \frac{2}{9}n^5 * - \frac{1}{30}n. \\
 sn^9 &\infty \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 * - \frac{7}{10}n^7 * + \frac{1}{2}n^6 * - \frac{1}{12}n^5. \\
 sn^{10} &\infty \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 * - 1n^8 * + 1n^7 * - \frac{1}{2}n^6 * + \frac{5}{66}n.
 \end{aligned}$$

Quin imò qui legem progressionis inibi attentius inspexerit, eundem etiam continuare poterit absq; his ratiociniorum ambagibus: Summa enim c pro potestatis cujuslibet exponente, fit summa omnium n^c seu

$$\begin{aligned}
 sn^c &\infty \frac{1}{c+1}n^{c+1} + \frac{1}{2}n^c + \frac{c}{2}An^{c-1} + \frac{c \cdot c - 1 \cdot c - 3}{2 \cdot 3 \cdot 4}Bn^{c-3} + \\
 &\frac{c \cdot c - 1 \cdot c - 2 \cdot c - 3 \cdot c - 4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}Cn^{c-5} + \frac{c \cdot c - 1 \cdot c - 2 \cdot c - 3 \cdot c - 4 \cdot c - 5 \cdot c - 6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}Dn^{c-7} \dots \&
 \end{aligned}$$

Якоб Бернулли, Ars conj. 1705.⁹

⁹ Воспроизводятся с разрешения Публичной библиотеки Женевского университета.

1.2 Показательные функции и биномиальная теорема

Здесь уместно заметить, что я использую $x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, x^{-4}$ и т. д. вместо $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^4}$ и т. д., $x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{3}{2}}, x^{\frac{5}{2}}, x^{\frac{7}{2}}, x^{\frac{9}{2}}$ и т. д. вместо $\sqrt{x}, \sqrt{x^3}, \sqrt{x^5}, \sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{x^2}$ и т. д., $x^{-\frac{1}{2}}, x^{-\frac{3}{2}}, x^{-\frac{5}{2}}$ и т. д. вместо $\frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{1}{\sqrt{x^3}}, \frac{1}{\sqrt{x^5}}$ и т. д. Здесь правило подсказано аналогией, которую можно усмотреть из таких геометрических прогрессий, как эта: $x^3, x^{\frac{5}{2}}, x^2, x^{\frac{3}{2}}, x, x^{\frac{1}{2}}, x^0$ (или 1), $x^{-\frac{1}{2}}, x^{-1}, x^{-\frac{3}{2}}, x^{-2}$, и т. д. (Ньютон 1671, *Fluxiones*, р. 3 в англ. публ. 1736 г.)

Для заданного числа a мы пишем

$$(2.1) \quad a \cdot a = a^2, \quad a \cdot a \cdot a = a^3, \quad a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4, \quad \dots$$

Эти обозначения входили в употребление медленно, главным образом благодаря работам Бомбелли в 1572, Симона Стевина в 1585, Декарта и Ньютона (см. цитату выше). Умножая, например,

$$a^2 \cdot a^3 = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5,$$

легко заметить правило:

$$(2.2) \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

В геометрической прогрессии (2.1), каждый член равен предыдущему, умноженному на a . Можно продолжить эту последовательность и *влево* путем *деления* ее членов на a . Это дает

$$\dots \quad a^{-2} = \frac{1}{a \cdot a}, \quad a^{-1} = \frac{1}{a}, \quad a^0 = 1, \quad a^1 = a, \quad a^2 = a \cdot a, \quad \dots,$$

где использовано обозначение

$$(2.3) \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

Таким образом, формула (2.2) остается справедливой и для отрицательных показателей степени. Далее, повторно умножая 1 на \sqrt{a} (где a должно быть положительным числом), мы получим геометрическую прогрессию

$$1, \quad \sqrt{a}, \quad \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a, \quad \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a^3}, \quad \sqrt{a^4} = a^2, \quad \dots,$$

которая подсказывает обозначение

$$(2.4) \quad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Теперь формула (2.2) остается справедливой и для рациональных показателей степени. Берутся только *положительные* значения корней, так что $a^{5/2}$ лежит между a^2 и a^3 . Последний шаг, сделанный человечеством — *иррациональные* показатели степеней. По словам Эйлера, они “труднее для понимания”, но “Sic $a^{\sqrt{7}}$ erit valor determinatus intra limites a^2 et a^3 comprehensus” (*лат.*), т. е. “Так, $a^{\sqrt{7}}$ есть величина, заключенная между a^2 и a^3 ”, а также между $a^{26/10}$ и $a^{27/10}$, между $a^{264/100}$ и $a^{265/100}$, между $a^{2645/1000}$ и $a^{2646/1000}$, и так далее.

а это означает, что такая же структура обнаруживается и в следующей строке. Из того, что отношения в n -й строке имеют вид $n/1, (n-1)/2, (n-2)/3, \dots$ следует, что коэффициенты (2.6) являются произведениями таких отношений. Например, "20" в 7-й строке есть произведение

$$20 = \frac{20}{15} \cdot \frac{15}{6} \cdot \frac{6}{1} \stackrel{(2.7)}{=} \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{6}{1} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1}.$$

Мы видим, что теорема 2.1 справедлива в общем случае. □

Эти коэффициенты

$$(2.10) \quad \frac{n(n-1)\dots(n-j+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot j} = \frac{n(n-1)\dots(n-j+1)(n-j)\dots 1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot j \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-j)}$$

$$= \frac{n!}{j!(n-j)!} = \binom{n}{j}$$

называют *биномиальными коэффициентами*, а $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ — *факториалом* числа n .

Приложение к интерполяционному многочлену. Разложим выражения в схеме разностей (1.25):

$$\begin{array}{ccccccc} y_0 & & & & & & \\ & y_1 - y_0 & & & & & \\ y_1 & & y_2 - 2y_1 + y_0 & & & & \\ & y_2 - y_1 & & y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0 & & & \\ y_2 & & y_3 - 2y_2 + y_1 & & & & \\ & y_3 - y_2 & & & & & \\ y_3 & & & & & & \end{array}$$

Появление треугольника Паскаля здесь не случайно, потому что каждый элемент схемы является разностью двух элементов, стоящих слева от него. Далее, каждый элемент схемы (1.25) есть *сумма* элемента, стоящего над ним, и элемента, стоящего справа. Следовательно, схему можно переписать еще так:

$$\begin{array}{ccccccc} y_0 & & & & & & \\ & \Delta y_0 & & & & & \\ y_0 + \Delta y_0 & & \Delta^2 y_0 & & & & \\ & \Delta y_0 + \Delta^2 y_0 & & \Delta^3 y_0 & & & \\ y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0 & & \Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0 & & & & \\ & \Delta y_0 + 2\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0 & & & & & \\ y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0 & & & & & & \end{array}$$

Здесь опять появился треугольник Паскаля. Таким образом, формула (2.10) дает

$$y_n = y_0 + \frac{n}{1} \Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots,$$

что и доказывает теорему 1.2.

Отрицательные степени. Рассмотрим выражение

$$(a+b)^{-1} = \frac{1}{a+b}.$$

Если предположить, что $|b| < |a|$, то первым приближением к этому отношению будет $1/a$. Попробуем улучшить это значение, добавив неизвестную величину δ :

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \delta \quad \Rightarrow \quad 1 = 1 + \frac{b}{a} + a\delta + b\delta.$$

Пренебрежем членом $b\delta$, поскольку $|b| < |a|$. Тогда получим $\delta = -b/a^2$. Повторяя эту процедуру снова и снова (или, точнее, продолжая по индукции), мы получим

$$(2.11) \quad (a+b)^{-1} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \dots,$$

Тот же результат дает и теорема 2.1 при $n = -1$, но на этот раз ряд оказывается *бесконечным*. Если умножить (2.11) на a и положить $x = b/a$, мы получим знаменитый *геометрический ряд* (Виет 1593):

$$(2.12) \quad \boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots,} \quad |x| < 1.$$

Квадратные корни. Рассмотрим теперь $(a+b)^{1/2} = \sqrt{a+b}$. Предположим опять, что b мало, так что $\sqrt{a+b} \approx \sqrt{a}$, и будем искать такое δ в выражении

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \delta,$$

чтобы оно давало лучшее приближение. Тогда

$$a+b = (\sqrt{a} + \delta)^2 = a + 2\sqrt{a}\delta + \delta^2.$$

Так как δ мало, мы пренебрежем членом δ^2 и получим $\delta = b/(2\sqrt{a})$. Следовательно,

$$(2.13) \quad \boxed{\sqrt{a+b} \approx \sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}},} \quad |b| \ll a.$$

Пример: вычисление $\sqrt{2}$. Мы начнем с приближенного значения $v = 1.4$ и положим $a = v^2$, $b = 2 - a = 2 - v^2$. Тогда (2.13) дает новое приближение

$$v + \frac{2 - v^2}{2v} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{v} + v \right).$$

Повторно применяя полученную формулу, находим:

1.4
 1.414285
 1.4142135642
 1.4142135623730950499
 1.4142135623730950488016887242096980790
 1.41421356237309504880168872420969807856967187537694807317667973799 .

Если те же вычисления выполнить в системе счисления с основанием 60, взяв в качестве начального приближения число 1, 25, то получится 1, 24, 51, 10 (здесь запятые отделяют “цифры” шестидесятеричной системы). Это число найдено на табличке из Вавилона, сделанной за 1900 лет до Р.Х. (см. рис. 2.2, а также ван дер Варден 1954, гл. II, табл. 8b). Эта находка указывает, что формула (2.13) использовалась уже во времена Вавилона и Древней Греции.

Следующий шаг сделали Алькаласади (около 1450 г.) и Бриггс (1624). Чтобы улучшить (2.13), положим

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}} + \delta,$$

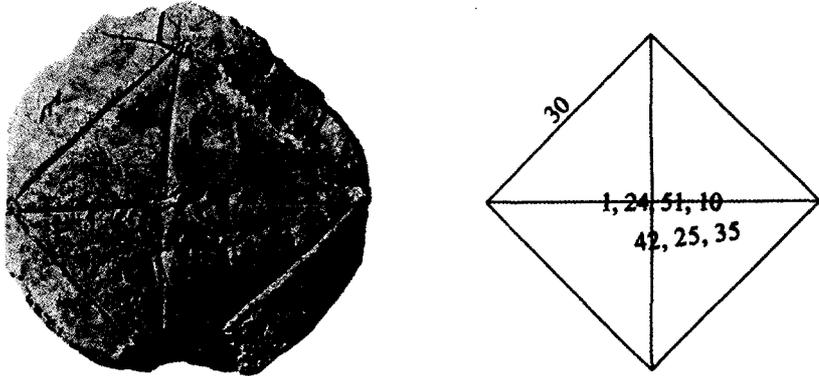


Рис. 2.2. Клинописная табличка из Вавилона YBC 7289 (1900 лет до н.э.). На ней изображен квадрат со стороной 30, указана длина диагонали 42, 25, 35 и отношение ее к длине стороны 1, 24, 51, 10.²

возведем в квадрат обе части этого равенства:

$$a + b = a + b + \frac{b^2}{4a} + 2\sqrt{a}\delta + \frac{b\delta}{\sqrt{a}} + \delta^2,$$

пренебрежем двумя последними членами и получим

$$(2.14) \quad \sqrt{a+b} \approx \sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}} - \frac{b^2}{8\sqrt{a}^3}.$$

Пример. На этот раз для $\sqrt{2}$ мы получим

$$v + \frac{2-v^2}{2v} - \frac{4-4v^2+v^4}{8v^3} = \frac{3v}{8} + \frac{3}{2v} - \frac{1}{2v^3},$$

Повторное применение этой формулы с начальным значением $v = 1.4$ дает быструю сходимость:

1.4
 1.4142128
 1.41421356237309504870
 1.41421356237309504880168872420969807856967187537694807317643 .

Равенства (2.13) и (2.14) примут более изящный вид, если в них разделить обе части на \sqrt{a} и заменить b/a на x :

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{x}{2}, \quad (1+x)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}.$$

Чтобы получить еще более точное приближение, можно продолжать повторение описанных выше вычислений. В результате получится ряд вида

² Воспроизводится с разрешения Йельской Вавилонской коллекции.

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \dots,$$

коэффициенты b, c, d, \dots которого надо определить. Для этого подставим этот ряд в соотношение $(1+x)^{\frac{1}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1+x$. Вычисление членов с одинаковыми степенями x дает $b = -1/8, c = 1/16, d = -5/128, \dots$. Таким образом, мы получаем лучшее приближение (Ньютон 1665)

$$(2.15) \quad (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \dots$$

Заметим, что

$$-\frac{1}{8} = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)}{2}, \quad \frac{1}{16} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)(\frac{1}{2} - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$-\frac{5}{128} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)(\frac{1}{2} - 2)(\frac{1}{2} - 3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Это позволяет предположить, что теорема 2.1 справедлива и при $n = 1/2$. Представленная на рис. 2.3 последовательность $1+x/2, 1+x/2-x^2/8, \dots$ иллюстрирует сходимость (2.15) к $\sqrt{1+x}$ при $-1 < x < 1$.

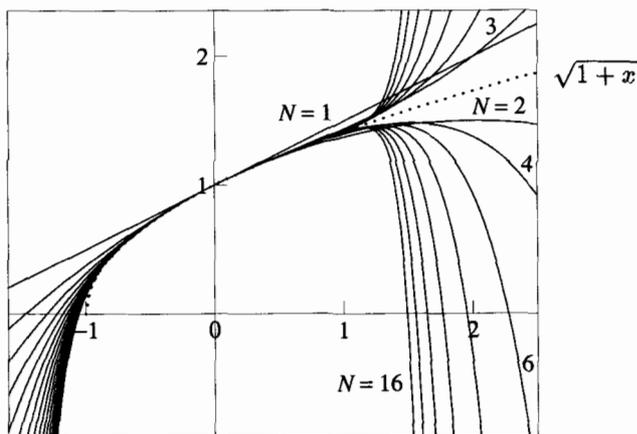


Рис. 2.3. Сходимость ряда $(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \dots$

Произвольные рациональные показатели степени

Все это происходило в те чертовские два года, 1665 и 1666, потому что в те дни я был во цвете лет для изобретений и занимался математикой и философией более, чем когда-либо с тех пор.

(Ньютон, цитируется по книге Клайн 1972, р. 357)

Одна из идей Ньютона из этих “*anni mirabiles*” (чудесных лет, — *лат.*), под- сказанная работой Валлиса (см. *Замечание* после уравнения (5.27)), — попытаться *интерполировать* многочлены $(1+x)^0, (1+x)^1, (1+x)^2, \dots$, чтобы получить ряд для $(1+x)^a$, где a некоторое рациональное число. Это значит, что надо интерполировать коэффициенты в теореме 2.1 (см. рис. 2.4). Так как последние

являются *многочленами* от n , ясно, что в результате получится то же самое выражение, в котором n заменено на a . Таким образом мы приходим к следующей общей теореме.

The image shows a handwritten table of numbers, which is an interpolation of Pascal's triangle. The numbers are arranged in a grid, with some cells containing fractions. The table is written in a cursive script and is titled 'Интерполяция треугольника Паскаля' (Interpolation of Pascal's triangle).

Рис. 2.4. Интерполяция треугольника Паскаля (автограф Ньютона, 1665 г.).³

(2.2) **Теорема** (обобщенная биномиальная теорема Ньютона). Для любого рационального a при $|x| < 1$

$$(1+x)^a = 1 + \frac{a}{1}x + \frac{a(a-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$$

Даже Ньютон находил, что его основанная на интерполяции аргументация была рискованной. Эйлер в своем *Introductio* (1748, §71) дает формулировку общей теоремы (“ex hoc theoremate universali” — “отсюда общая теорема”, лат.) без всякого доказательства или комментария. И только Абель спустя столетие почувствовал необходимость строгого доказательства (см. разд. III.7).

Замечание. Именно эта формула была выгравирована на надгробном памятнике Ньютону в 1727 г. в Вестминстерском аббатстве. Не тратьте бесполезных усилий, — в течение последующих ста лет формула оставалась неясной.

Показательная функция

... ubi e denotat numerum, cuius logarithmus hyperbolicus est 1 (“... пусть e обозначает число, гиперболический логарифм которого есть 1”, лат.).
(Первое определение числа e : Эйлер 1736b, *Mechanica*, p. 60)

Источники происхождения.

1. Ф. Дебон (1601–1652) был первым, кто прочел “Геометрию” Декарта, вышедшую в 1637 г. Годом позже он предложил Декарту следующую геометрическую задачу: найти такую кривую $y(x)$, чтобы для каждой ее точки P расстояние

³ Воспроизводится с разрешения издательства Cambridge University Press.

между V и T (точками пересечения вертикали и касательной с осью x) оставалось равным заданной постоянной a (см. рис. 2.5а). Несмотря на усилия Декарта и Ферма, эта задача оставалась нерешенной почти 50 лет. Тогда Лейбниц (1684, "... tentavit, sed non solvit" — пытался, но не решил) предложил следующее решение (см. рис. 2.5б). Пусть x, y — заданная точка. Увеличим теперь x на малую величину b . Тогда y возрастет (вследствие подобия двух треугольников) на yb/a . Повторяя эту процедуру, получим последовательность значений

$$y, \quad \left(1 + \frac{b}{a}\right)y, \quad \left(1 + \frac{b}{a}\right)^2 y, \quad \left(1 + \frac{b}{a}\right)^3 y, \dots$$

для абсцисс $x, x + b, x + 2b, x + 3b, \dots$

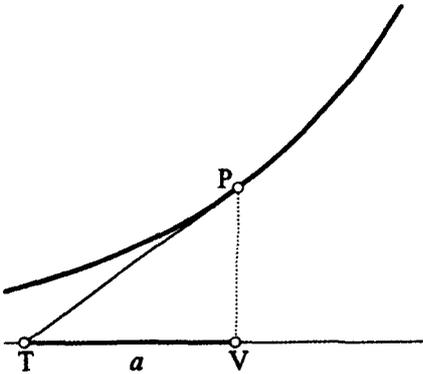


Рис. 2.5а. Задача Дебона.

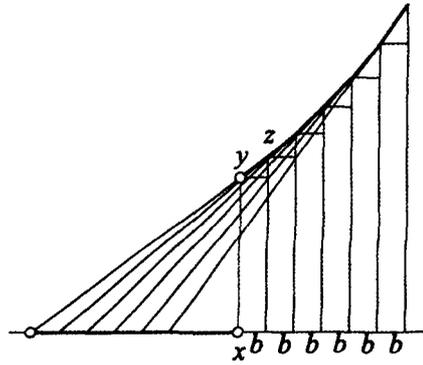


Рис. 2.5б. Решение Лейбница.

2. Вопросы, подобные такому: “Если население некоторой области ежегодно возрастает на одну тридцатую, и когда-то насчитывало 100 000 жителей, каким оно будет через 100 лет?” (Эйлер 1748, *Introductio*, §110), или такому: “Некто занял у ростовщика 400 000 флоринов при годовой ставке пять процентов интереса ...” (*Introductio*, §111), приводили к вычислению выражений типа

$$(2.16) \quad \left(1 + \frac{1}{30}\right)^{100}, \quad (1 + 0.05)^N, \quad \text{или в общем случае } (1 + \omega)^N,$$

где ω мало и N велико.

Число Эйлера. Предположим сначала, что $\omega = \frac{1}{N}$. Вычислим (2.16) с помощью теоремы 2.1:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{N}\right)^N &= 1 + \frac{N}{N} + \frac{N(N-1)}{1 \cdot 2} \frac{1}{N^2} + \frac{N(N-1)(N-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{1}{N^3} + \dots \\ &= 1 + 1 + \frac{1(1 - \frac{1}{N})}{1 \cdot 2} + \frac{1(1 - \frac{1}{N})(1 - \frac{2}{N})}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \end{aligned}$$

Здесь Эйлер без колебаний пишет: “Если число N превосходит любое фиксированное число, то $\frac{N-1}{N}$ равно 1”. Это означает, что когда N стремится к бесконечности, $(1 + \frac{1}{N})^N$ стремится к так называемому числу Эйлера:

$$(2.17) \quad e = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

ТАБЛИЦА 2.1. Вычисление числа e

N	$(1 + \frac{1}{N})^N$	$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{N!}$
1	2.000	2.0
2	2.250	2.5
3	2.370	2.66
4	2.441	2.708
5	2.488	2.7166
6	2.522	2.71805
7	2.546	2.718253
8	2.566	2.7182787
9	2.581	2.71828152
10	2.594	2.718281801
11	2.604	2.7182818261
12	2.613	2.71828182828
13	2.621	2.718281828446
14	2.627	2.7182818284582
15	2.633	2.71828182845899
16	2.638	2.7182818284590422
17	2.642	2.71828182845904507
18	2.646	2.718281828459045226
19	2.650	2.7182818284590452349
20	2.653	2.718281828459045235339
21	2.656	2.7182818284590452353593
22	2.659	2.718281828459045235360247
23	2.661	2.7182818284590452353602857
24	2.664	2.718281828459045235360287404
25	2.666	2.7182818284590452353602874687
26	2.668	2.71828182845904523536028747125
27	2.670	2.718281828459045235360287471349
28	2.671	2.71828182845904523536028747135254

Необходимо отметить, что аргумент Эйлера рискованный, потому что он применяется бесконечное число раз. Применяя аналогичное “доказательство”, можно, например, получить, что

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{N} + \frac{1}{N} + \dots + \frac{1}{N} = 0 + 0 + 0 + \dots = 0.$$

Мы вернемся к этому вопросу в разд. III.2. В табл. 2.1 сравниваются скорости сходимости ряда (2.17) и последовательности $(1 + \frac{1}{N})^N$.

Степени числа e . Положим теперь в (2.16) $\omega = x/N$, где x фиксированное, скажем, рациональное число. Иначе говоря, мы одновременно устремляем N к бесконечности и ω к нулю так, чтобы их произведение оставалось равным постоянной величине x . Та же манипуляция, что и выше, приводит к результату

$$(2.18) \quad \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N \rightarrow 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

С другой стороны, положив $M = N/x$, $N = xM$ для таких значений N , когда M является целым числом, и устремляя N и M к бесконечности, мы получим

$$(2.19) \quad \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N = \left(1 + \frac{1}{M}\right)^{Mx} = \left(\left(1 + \frac{1}{M}\right)^M\right)^x \rightarrow e^x.$$

Сравнивая (2.18) и (2.19), получаем следующую теорему.

(2.3) Теорема (Эйлер 1748, *Introductio* §123, 125). При N , стремящемся к бесконечности,

$$\left(1 + \frac{x}{N}\right)^N \rightarrow e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad \square$$

Сходимость этих выражений для e^x (другое обозначение: $\exp x$) иллюстрируют рисунки 2.6а и 2.6б. Точечная кривая представляет точную функцию e^x .

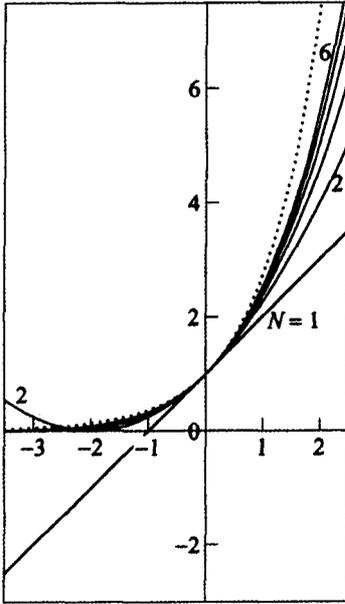


Рис. 2.6а. $\left(1 + \frac{x}{N}\right)^N$

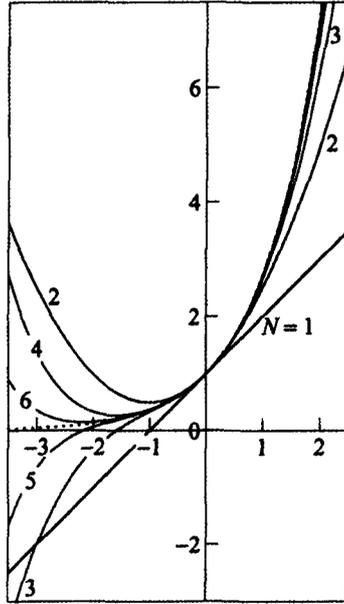


Рис. 2.6б. $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

Упражнения

2.1 Проверьте следующую формулу (Эйлер 1755, *Opera*, vol. X, p. 280), используя равенства $50 = 2 \cdot 5^2 = 7^2 + 1$:

$$\sqrt{2} = \frac{7}{5} \left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1 \cdot 3}{100 \cdot 200} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{100 \cdot 200 \cdot 300} + \dots\right),$$

“quae ad computum in fractionibus decimalibus instituendum est optissima” (которая, как установлено при вычислении в десятичных дробях, является оптимальной, — лат.). Сложите численно первые пять членов этого ряда.
Указание. Воспользуйтесь рядом для $(1-x)^{-1/2}$.

2.2 Покажите, что записанное в шестидесятеричной системе число 1, 25, является хорошим приближением к $\sqrt{2}$. Покажите, что одна итерация “вавилонского алгоритма” для квадратного корня, выведенная из формулы (2.13), дает 1, 24, 51, 10, ..., — значение, приведенное на рис. 2.2.

2.3 Умножая на себя дважды ряд

$$(1+x)^{1/3} = 1 + ax + bx^2 + cx^3 + \dots,$$

определите коэффициенты a, b, c, \dots . Должно получиться

$$(1+x)^{1/3} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{2}{3 \cdot 6} x^2 + \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} x^3 - + \dots$$

Используя равенство $2 \cdot 4^3 - 5^3 = 3$, получите формулу

$$\sqrt[3]{2} = \frac{5}{4} \left(1 + \frac{1}{1 \cdot 125} - \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot (125)^2} + \frac{2 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (125)^3} - \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (125)^4} + \dots \right).$$

Замечание. Определение $\sqrt[3]{2}$ было одной из великих проблем древнегреческой математики (удвоение куба).

2.4 Неравенства Бернулли (Якоб Бернулли 1689, см. 1744, *Opera*, p. 380; Барроу 1670, см. 1860, *Works*, Lectio VII, §XIII, p. 224). Индукцией по n докажите, что

$$(1+a)^n \geq 1+na \quad \text{для } a \geq -1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$1-na < (1-a)^n < \frac{1}{1+na} \quad \text{для } 0 < a < 1, \quad n = 2, 3, \dots$$

2.5 Чтобы исследовать сходимость $(1+\frac{1}{n})^n$ к e , рассмотрите последовательности

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{и} \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Покажите, что

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < e < \dots < b_3 < b_2 < b_1$$

и что $b_n - a_n \leq 4/n$.

Указание. Используйте второе неравенство из упр. 2.4 при $a = 1/n^2$.

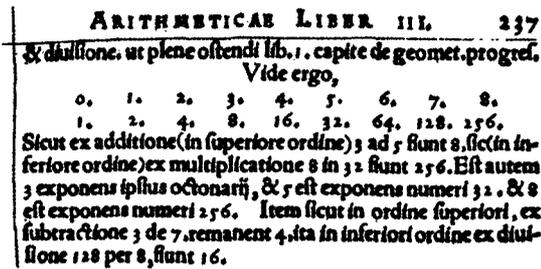
1.3 Логарифмы и площади

Tabularum autem logarithmicarum amplissimus est usus ... (но таблицы логарифмов являются наиболее употребительными, — лат.)
(Эйлер 1748, *Introductio*, §110)

Студенты обычно находят понятие логарифма очень трудным для понимания.
(Б.Л. Ван дер Варден 1957, р. 1)

М. Штифель (1544) выделил два ряда чисел (см. факсимиле на рис. 3.1):

...	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
...	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	...



Sed ostendenda est ista speculatio per exemplum.

-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32	64

Рис. 3.1. Из книги Штифеля (р. 237, р. 250).¹

Мы видим, что переход от нижней строки к верхней преобразует произведения в суммы. Например, вместо умножения 8 на 32 “in inferiore ordine” (в нижнем порядке, — лат.), берем соответствующие “логарифмы” 3 и 5 “in superiore ordine” (в верхнем порядке), вычисляем их сумму, которая равна 8, возвращаемся “in inferiore ordine” и находим произведение $8 \cdot 32 = 256$. Более подробная таблица такого типа была бы очень полезной, потому что складывать легче, чем умножать. Такие “логарифмические” таблицы вычислили впервые Джон Непер (1614, 1619), Генри Бриггс (1624) и Йост Бюрги (1620). (λόγος (логос) по-гречески означает “слово, связь”, αριθμός (арифмос) — “число”, поэтому “логарифмы” — полезные связи между числами.)

(3.1) Определение. Функция $l(x)$, определенная для положительных значений x , называется логарифмической функцией, если для всех $x, y > 0$

(3.1)

$$l(x \cdot y) = l(x) + l(y).$$

¹ Воспроизведено с разрешения Публичной библиотеки Женевского университета.

Если в (3.1) положить $y = z/x$, мы получим

$$(3.2) \quad \ell(z/x) = \ell(z) - \ell(x),$$

а при $x = y = 1$ получим

$$(3.3) \quad \ell(1) = 0.$$

Применяя (3.1) дважды к равенству $x \cdot y \cdot z = (x \cdot y) \cdot z$, найдем, что

$$(3.4) \quad \ell(x \cdot y \cdot z) = \ell(x) + \ell(y) + \ell(z),$$

и аналогично для произведений четырех или более сомножителей. Далее, применяя (3.4) к равенству $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x} = x$, получим, что $\ell(\sqrt[3]{x}) = \frac{1}{3}\ell(x)$, или в общем случае

$$(3.5) \quad \ell(x^{\frac{m}{n}}) = \frac{m}{n}\ell(x), \quad \text{где } x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}.$$

Основания логарифмов. Пусть задана некоторая фиксированная логарифмическая функция $\ell(x)$. Предположим, что существует число a такое, что $\ell(a) = 1$. Тогда (3.5) примет вид

$$(3.6) \quad \ell(a^{\frac{m}{n}}) = \frac{m}{n},$$

т.е. эта логарифмическая функция является *обратной функцией* для показательной функции a^x . Ее называют *логарифмом при основании a* и пишут

$$(3.7) \quad y = \log_a x, \quad \text{если } x = a^y.$$

Логарифмы при основании 10 (*логарифмы Бриггса*) особенно удобны для вычислений, потому что сдвиг десятичной точки в числе приводит просто к прибавлению целого числа к его логарифму. Но для теоретической работы наилучшим основанием, как мы скоро увидим, является число Эйлера e (*натуральные*, или *неперовы*, или *гиперболические* логарифмы). Эти логарифмы обозначают обычно $\ln x$ или $\log x$.

“Золотое правило” Эйлера. Если логарифмы при *одном* основании известны, то логарифмы при всех других основаниях получаются при помощи простого деления. Чтобы в этом убедиться, возьмем логарифм числа $x = a^y$ при основании b и применим формулы (3.7) и (3.5). Это дает

$$(3.8) \quad \log_b x = y \cdot \log_b a \quad \Rightarrow \quad y = \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Вычисление логарифмов

Вычисляя корень квадратный из основания a , затем корень квадратный из этого квадратного корня и т. д. и перемножая все эти величины, мы получим с помощью (3.6) и (3.1) логарифмы многих чисел. Это иллюстрирует рис. 3.2 для $a = 10$.

Числа	Логарифмы
10.0000	1.
7.4989	0.875
5.6234	0.75
4.2170	0.625
3.1623	0.5
2.3714	0.375
1.7783	0.25
1.3335	0.125
1.0000	0.

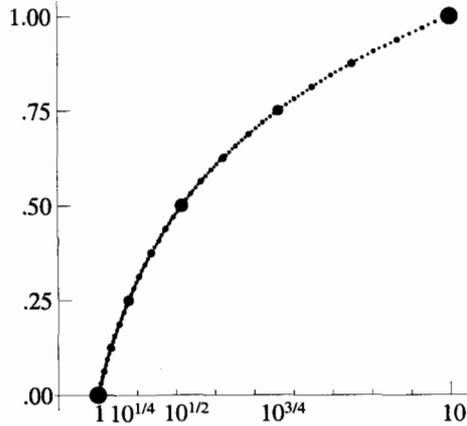


Рис. 3.2. Последовательные корни из 10 и их произведения.

Однако мы предпочли бы знать логарифмы таких чисел, как 2, 3, 4, ... а не 4.2170 или 2.3714.

Метод Бриггса. Вычислим корень из 10, затем корень из этого корня и будем продолжать так 54 раза (см. факсимиле на рис. 3.3). Это дает при $c = 1/2^{54}$

$$(3.9a) \quad 10^c = 1.00000\ 00000\ 00000\ 12781\ 91493\ 20032\ 35 = 1 + a.$$

Затем таким же образом вычислим последовательные корни из 2 и получим

$$(3.9b) \quad 2^c = 1.00000\ 00000\ 00000\ 03847\ 73979\ 65583\ 10 = 1 + b.$$

Значение $x = \log_{10} 2$, которое мы ищем, удовлетворяет равенству $2 = 10^x$. Следовательно,

$$1 + b \stackrel{(3.9b)}{=} 2^c = (10^c)^x \stackrel{(3.9a)}{=} (1 + a)^x \stackrel{\text{(по теореме 2.2)}}{\approx} 1 + ax$$

и мы получаем

$$(3.10) \quad \log_{10}(2) = x \approx \frac{b}{a} = \frac{3847739796558310}{12781914932003235} \approx 0.3010299956638812.$$

Вычислено *одно* число. Объем работы, необходимой для *целой таблицы*, трудно даже представить себе.

Интерполяция. В старые времена интерполяция была важным инструментом для ускорения вычисления логарифмов. Пусть, например, были вычислены четыре значения \log_{10} . Рассчитаем по ним разностную схему

D Numeri continui Medij inter Denarii & Vnitatē.	E Arithmetica Logarithmi rationales.
10	1,000
31622,77660,16837,93319,98893,54	0,50
17782,79+10,03892,28011,97304,13	0,25
13335,21432,16332,40256,65389,308	0,125
11547,81984,68945,81796,61918,213	0,0625
10746,07828,32131,74972,13817,6538	0,03125
10366,32928,43769,79972,90627,3131	0,01562,5
10181,51721,71818,18414,73723,8144	0,00781,25
10090,35044,84144,74377,59005,1391	0,00390,625
10048,97364,25446,25155,64670,6113	0,00195,3125
10022,51148,29291,29154,65611,7367	0,00097,65625
10011,24941,39937,98758,85395,51805	0,00048,82812,5
10005,62312,60220,86366,18495,91839	0,00024,41406,25
10002,81116,78773,01323,99249,64325	0,00012,20703,125
10001,40548,51694,72581,62767,32715	0,00006,10351,5625
10000,70271,78941,14355,38811,70845	0,00003,05175,78125
10000,35135,27746,18566,08581,37077	0,00001,52577,89052,5
10000,17567,48442,26738,33846,78274	0,00000,76293,94531,25
10000,08783,70363,24612,146574,07431	0,00000,38146,97265,625
10000,04391,84217,31672,32621,88083	0,00000,19073,48632,8125
10000,02195,91867,55542,01327,07719	0,00000,09536,74216,40625
10000,01097,95873,50204,09754,72940	0,00000,04768,37158,20312,5
10000,00548,97921,68211,14626,60250,9	0,00000,02384,18579,10156,25
10000,00274,48957,07382,95091,25449,4	0,00000,01192,09289,55078,125
10000,00137,24477,59510,83282,69572,5	0,00000,00596,04644,77539,0625
10000,00068,62238,56210,25737,18748,2	0,00000,00298,02322,38769,53125
10000,00034,31122,22218,83912,75020,8	0,00000,00149,01161,19384,76562,5
10000,00017,15559,59637,84719,93879,1	0,00000,00074,50580,59692,38281,25
10000,00008,57779,79451,03051,17588,8	0,00000,00037,25290,29846,19140,625
10000,00004,28889,89633,54198,42901,3	0,00000,00018,62645,14923,09570,3125
10000,00002,14444,94793,77762,22970,4	0,00000,00009,31322,57461,54782,15625
10000,00001,07222,47391,14050,76926,8	0,00000,00004,65661,28730,77292,57812,5
10000,00000,53611,23694,13317,14831,4	0,00000,00002,22830,64366,28696,28906,25
10000,00000,26805,61846,70731,51508,7	0,00000,00001,16415,32277,00798,14453,125
10000,00000,13402,80923,26383,99277,7	0,00000,00000,58207,66091,34674,07226,5625
10000,00000,6701,40461,60946,55519,6	0,00000,00000,29103,82045,67337,03612,28125
10000,00000,03350,70230,79911,91730,0	0,00000,00000,14551,91522,83668,51806,69062,5
10000,00000,01675,35115,39815,61857,6	0,00000,00000,07275,95761,41834,25903,32031,25
10000,00000,00837,67557,69872,72426,9	0,00000,00000,03637,97880,70917,12951,66015,625
10000,00000,00418,83773,84927,59087,9	0,00000,00000,01818,98940,34585,56475,83007,8125
10000,00000,00209,41889,42461,60262,5	0,00000,00000,00909,49470,17729,28237,91503,90625
10000,00000,00104,70944,71230,25311,0	0,00000,00000,00454,74735,08864,64118,95751,95312
10000,00000,00052,35472,35514,38950,4	0,00000,00000,00227,37167,54432,32059,47875,97656
10000,00000,00026,17736,17807,46048,9	0,00000,00000,00113,68683,77216,16029,73937,98828
10000,00000,00013,08863,08903,72167,3	0,00000,00000,00056,84341,88608,08014,86968,99414
10000,00000,00006,54434,04451,85869,75	0,00000,00000,00028,42170,94304,04007,43434,49707
10000,00000,00003,27217,02225,92881,337	0,00000,00000,00014,21085,47142,02003,71742,24853
10000,00000,00001,63608,51112,96472,283	0,00000,00000,00007,10542,73576,01001,85871,12426
10000,00000,00000,81804,25556,48210,295	0,00000,00000,00003,55271,36788,00500,92935,56213
10000,00000,00000,40902,12778,24104,311	0,00000,00000,00001,27635,68394,00250,46467,78106
10000,00000,00000,20451,06389,12051,946	0,00000,00000,00000,88817,84197,00125,21233,89053
10000,00000,00000,10225,53194,56025,921	0,00000,00000,00000,44408,92088,50062,61616,94526
10000,00000,00000,05112,76597,28012,947M	0,00000,00000,00000,22044,46049,25031,30808,47263
10000,00000,00000,02556,38298,64006,470N	0,00000,00000,00000,11102,23024,62515,65404,23631
10000,00000,00000,01278,19149,32003,235P	0,00000,00000,00000,05551,11512,31257,82702,11815

Рис. 3.3. Вычисления Бриггса последовательных корней из 10 (Бриггс 1624).²

² Воспроизводится с разрешения Публичной библиотеки Женевского университета.

$$\begin{aligned}
 \log(44) &= \underline{1.6434526765} && \underline{0.0097598373} \\
 \log(45) &= 1.6532125138 && \underline{-0.0002145194} \\
 &&& 0.0095453179 && \underline{0.0000092277}. \\
 \log(46) &= 1.6627578317 && -0.0002052917 \\
 &&& 0.0093400262 \\
 \log(47) &= 1.6720978579
 \end{aligned}$$

Она дает интерполяционный многочлен (теорема 1.1, со сдвигом)

$$(3.11) \quad p(x) = 1.6434526765 + (x - 44) \left(0.0097598373 + \frac{x - 45}{2} \left(-0.0002145194 + \frac{x - 46}{3} \cdot 0.0000092277 \right) \right),$$

Полученные с его помощью для нескольких выбранных значений x результаты вместе с величиной ошибки (*err*) приведены в табл. 3.1. Несмотря на легкость их вычисления, результаты оказались вполне хорошими. При желании точность можно увеличить, добавив в разностную схему дополнительные точки.

ТАБЛИЦА 3.1. Ошибки интерполяционного многочлена

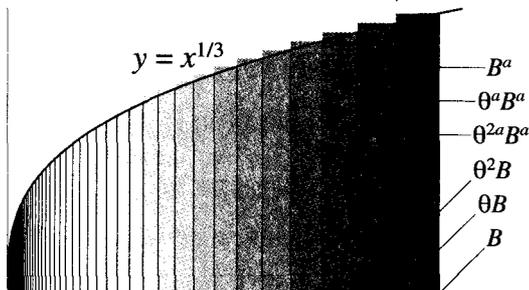
x	$p(x)$	$\log_{10}(x)$	err
44.25	1.645913252	1.645913275	$2.34 \cdot 10^{-8}$
44.50	1.648359987	1.648360011	$2.42 \cdot 10^{-8}$
44.75	1.650793026	1.650793040	$1.35 \cdot 10^{-8}$
45.25	1.655618594	1.655618584	$-1.05 \cdot 10^{-8}$
45.50	1.658011411	1.658011397	$-1.43 \cdot 10^{-8}$
45.75	1.660391109	1.660391098	$-1.04 \cdot 10^{-8}$
46.25	1.665111724	1.665111737	$1.32 \cdot 10^{-8}$
46.50	1.667452930	1.667452953	$2.34 \cdot 10^{-8}$
46.75	1.669781593	1.669781615	$2.24 \cdot 10^{-8}$

Прежде чем вернуться к вычислению логарифмов, совершим небольшой экскурс в геометрию.

Вычисление площадей

Еще со времен Древней Греции задачи о вычислении площадей и объемов возбуждали любознательность математиков. Вычисление площадей параболы и круга были двумя из величайших достижений Архимеда (283–212 гг. до Р.Х.). Начало XVII столетия ознаменовалось вычислением площадей под кривыми $y = x^a$ как при целых, так и при произвольных значениях a (Бонавентура Кавальери, Роберваль, Ферма).

Задача. При заданном a найти площадь под кривой $y = x^a$ между границами $x = 0$ и $x = B$.

Рис. 3.4а. Ферма (1601–1665).³Рис. 3.4б. Как Ферма вычислил площадь под кривой x^a .

Решение (Ферма 1636). Выберем $\theta < 1$, но близкое к 1, и рассмотрим прямоугольники, образуемые геометрической прогрессией $B, \theta B, \theta^2 B, \theta^3 B, \dots$, высоты $B^a, \theta^a B^a, \theta^{2a} B^a, \theta^{3a} B^a, \dots$ (рис. 3.4б). Тогда искомую площадь можно аппроксимировать с помощью геометрического ряда:

$$\begin{aligned}
 & \text{1-й прямоугольник} + \text{2-й прямоугольник} + \text{3-й прямоугольник} + \dots \\
 & = B(1 - \theta)B^a + B(\theta - \theta^2)\theta^a B^a + B(\theta^2 - \theta^3)\theta^{2a} B^a + \dots \\
 (3.12) \quad & = B^{a+1}(1 - \theta) \underbrace{(1 + \theta^{a+1} + \theta^{2a+2} + \dots)}_{\text{геометрический ряд}} = B^{a+1} \frac{1 - \theta}{1 - \theta^{a+1}},
 \end{aligned}$$

при условии, что $a + 1 > 0$, т. е. $a > -1$ (см. уравнение (2.12)). Пусть $\theta = 1 - \varepsilon$, где ε мало. Тогда $1 - \theta = \varepsilon$, $\theta^{a+1} = 1 - (a + 1)\varepsilon + \dots$ по теореме 2.2. Следовательно,

$$\frac{1 - \theta}{1 - \theta^{a+1}} \approx \frac{\varepsilon}{(a + 1)\varepsilon} = \frac{1}{a + 1} \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Сумма площадей прямоугольников (3.12) аппроксимирует (при $a > -1$) площадь S сверху. Если высоты прямоугольников заменить на $\theta^a B^a, \theta^{2a} B^a, \dots$, мы получим приближение к S снизу. В такой ситуации величина (3.12) просто умножается на θ^a , а этот множитель стремится к единице при $\theta \rightarrow 1$. Поэтому оба приближения стремятся к одной и той же величине, и мы приходим к следующему результату:

(3.2) Теорема (Ферма 1636). *Площадь под кривой $y = x^a$ между $x = 0$ и $x = B$ равна*

$$S = \frac{B^{a+1}}{a + 1}, \quad \text{если} \quad a > -1. \quad \square$$

³ Портрет Ферма воспроизводится с разрешения Математической библиотечки Женевского университета.

Площадь под гиперболой и натуральные логарифмы

В сентябре месяце 1668 г. Меркатор опубликовал свою Логарифмотехнию, которая содержит пример применения этого метода (т.е. бесконечных рядов) для одного случая, а именно, для квадратуры гиперболы.
(Письмо Коллинза, 26 июля 1672 года)

Метод Ферма неприменим в случае гиперболы $y = 1/x$. Действительно, геометрическая последовательность абсцисс $B, \theta B, \theta^2 B, \theta^3 B, \dots$ дает для площадей ряд $(1 - \theta)(1 + 1 + 1 + \dots)$, частичные суммы которого образуют арифметическую прогрессию. Это обстоятельство послужило отправной точкой для следующего открытия, которое сделали Грегори из Сент-Винсента в 1647 г. и Альфонс Антон де Сараса в 1649 г. (см. Клайн 1972, р. 354): *площадь под гиперболой $y = 1/x$ является некоторым логарифмом* (см. рис. 3.5).

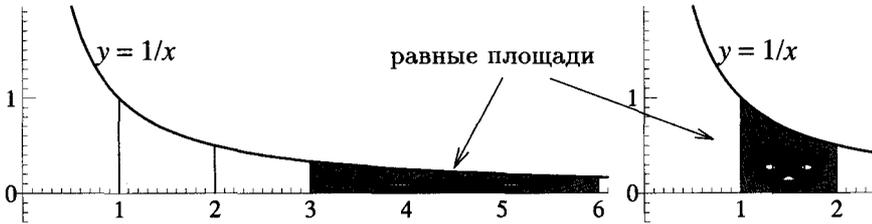


Рис. 3.5. Площадь под гиперболой есть логарифм.

Сжимая координаты x и растягивая координаты y , нетрудно заметить, что, например, Площадь $(3 \rightarrow 6) =$ Площадь $(1 \rightarrow 2)$. Поэтому

$$\text{Площадь } (1 \rightarrow 3) + \text{Площадь } (1 \rightarrow 2) = \text{Площадь } (1 \rightarrow 6).$$

Это означает, что функция $\ln(a) =$ Площадь $(1 \rightarrow a)$ удовлетворяет тождеству

$$\ln(a) + \ln(b) = \ln(a \cdot b)$$

и поэтому является логарифмом (logarithmus naturalis).

Ряд Меркатора. Сдвинув начало координат на 1, мы найдем, что $\ln(1 + a)$ есть площадь, заключенная под кривой $1/(1 + x)$ между 0 и a . Сделаем теперь замену $1/(1 + x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$ по формуле (2.12) и вместо площадей под кривыми $1, x, x^2, \dots$, заключенными между 0 и a , подставим в соответствии с теоремой 3.2 выражения

$$a, \quad \frac{a^2}{2}, \quad \frac{a^3}{3}, \quad \frac{a^4}{4}, \quad \dots$$

(см. рис. 3.6). Заменяв a на x , мы найдем в результате, что

$$(3.13) \quad \ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - + \dots$$

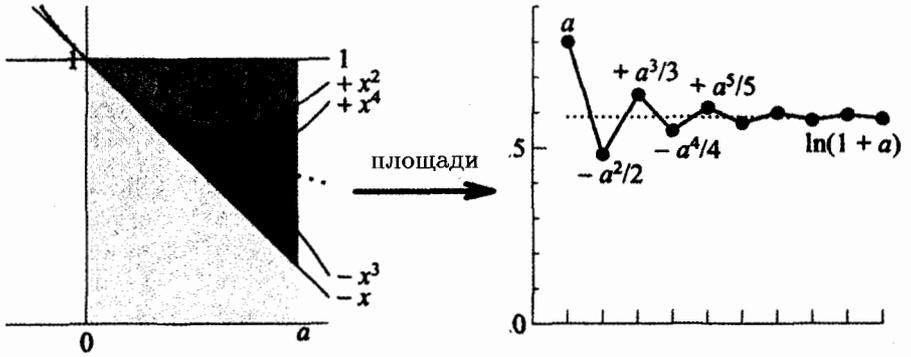


Рис. 3.6. Почленное интегрирование геометрического ряда.

(Н. Меркатор 1668). Сходимость этого ряда при различных значениях x показана на рис. 3.7. При значении $x = 1$ этот ряд принимает вид

$$(3.13a) \quad \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

Эта красивая формула имеет лишь ограниченное практическое применение (см. табл. 3.2). При еще больших значениях x ряд вообще не сходится.

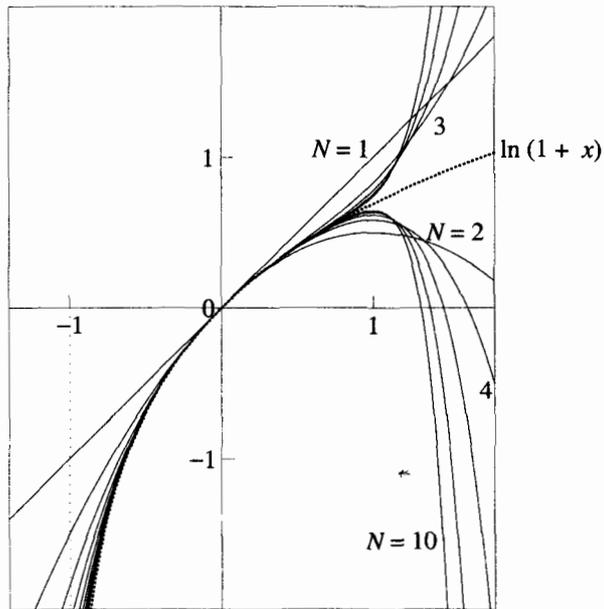


Рис. 3.7. Сходимость ряда $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \pm \frac{x^N}{N}$ к $\ln(1+x)$.

Ряд Грегори. Заменяем в (3.13) x на $-x$:

$$(3.14) \quad \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \dots$$

и затем вычтем это равенство из (3.13). Это дает (Грегори 1668)

$$(3.15) \quad \ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \dots \right).$$

Примеры. Положив $x = 1/2$ в (3.14) и $x = 1/3$ в (3.15), мы получим следующие два ряда для $\ln 2$:

$$(3.14a) \quad \ln 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \dots,$$

$$(3.15a) \quad \ln 2 = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \dots \right).$$

В табл. 3.2 сравнивается поведение трех рядов (3.13а), (3.14а) и (3.15а) для $\ln 2$. Сразу видно, какой из них наилучший.

ТАБЛИЦА 3.2. Сходимость рядов для $\ln 2$

n	(3.13а)	(3.14а)	(3.15а)
1	1.000	0.500	0.667
2	0.500	0.625	0.6914
3	0.833	0.667	0.69300
4	0.583	0.6823	0.693135
5	0.783	0.6885	0.6931460
6	0.617	0.6911	0.69314707
7	0.760	0.69226	0.693147170
8	0.635	0.69275	0.6931471795
9	0.746	0.69297	0.693147180559
10	0.646	0.693065	0.6931471805498
11	0.737	0.693109	0.6931471805589
12	0.653	0.693130	0.69314718055984

Вычисления $\ln p$ для простых чисел ≥ 3 . Благодаря формуле (3.1) достаточно вычислить логарифмы простых чисел. Тогда логарифмы составных целых, а также рациональных чисел могут быть получены с помощью сложения и вычитания. Идея вычисления состоит в том, что надо разделить p на близкое к нему число, логарифм которого уже известен, тогда можно применить ряд (3.15) с малым значением x и получить быструю сходимость. Например, для $p = 3$ запишем

$$3 = \frac{3}{2} \cdot 2, \quad \frac{3}{2} = \frac{1+x}{1-x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{5},$$

так что

$$(3.16) \quad \ln 3 = \ln \frac{3}{2} + \ln 2 = \ln \frac{1 + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}} + \ln 2.$$

Другая возможность: $3 = (3/4) \cdot 4$, что приводит к равенству

$$(3.17) \quad \ln 3 = 2 \ln 2 - \ln \frac{1 + \frac{1}{7}}{1 - \frac{1}{7}}.$$

Но еще лучше использовать *среднее геометрическое* предыдущих выражений

$$(3.18) \quad \begin{aligned} 3 &= \sqrt{\frac{9}{8}} \cdot \sqrt{8} \Rightarrow \ln 3 = \frac{3}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{1}{17}}{1 - \frac{1}{17}} \\ 5 &= \sqrt{\frac{25}{24}} \cdot \sqrt{24} \Rightarrow \ln 5 = \frac{3}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 3 + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{1}{49}}{1 - \frac{1}{49}} \\ 7 &= \sqrt{\frac{49}{48}} \cdot \sqrt{48} \Rightarrow \ln 7 = 2 \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 3 + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{1}{97}}{1 - \frac{1}{97}}, \end{aligned}$$

и так далее. Чем больше p , тем лучше сходится ряд (3.15). Приведем значения логарифмов целых чисел от 1 до 10, полученные таким способом:

$$\begin{aligned} \ln(1) &= 0.00000000000000000000000000000000 \\ \ln(2) &= 0.693147180559945309417232121458 \\ \ln(3) &= 1.098612288668109691395245236923 \\ \ln(4) &= 1.386294361119890618834464242916 \\ \ln(5) &= 1.609437912434100374600759333226 \\ \ln(6) &= 1.791759469228055000812477358381 \\ \ln(7) &= 1.945910149055313305105352743443 \\ \ln(8) &= 2.079441541679835928251696364375 \\ \ln(9) &= 2.197224577336219382790490473845 \\ \ln(10) &= 2.302585092994045684017991454684. \end{aligned}$$

Усовершенствование этих вычислений по сравнению с вычислениями Бриггса, произошедшее за считанные десятилетия (с 1620 до 1670), поистине впечатляющее. Оно лишний раз демонстрирует громадный прогресс в математике, начавшийся после появления “Геометрии” Декарта.

Связь с числом Эйлера. Связь между натуральными логарифмами и числом e устанавливает следующая теорема.

(3.3) Теорема. *Натуральный логарифм $\ln x$ есть логарифм при основании e .*

Доказательство. Применим натуральный логарифм к формуле теоремы 2.3. С использованием (3.5) и (3.13) это дает

$$\ln \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N = N \cdot \ln \left(1 + \frac{x}{N}\right) = N \cdot \left(\frac{x}{N} - \frac{x^2}{2N^2} + \dots\right) \rightarrow x,$$

так что $\ln e^x = x$. □

Итак, получена геометрическая интерпретация числа e : площадь под гиперболой $y = 1/x$ между 1 и e равна единице (см. рис. 3.8).

Произвольные степени. Логарифмы позволяют дать определение произвольной степени любого числа $a > 0$ и вычислить ее (И. Бернулли 1697, *Principia Calculi Exponentialium, Opera*, vol. I, p. 179). С учетом равенства $a = e^{\ln a}$ имеем:

$$(3.19) \quad a^b = (e^{\ln a})^b = e^{b \ln a}.$$

Графики этих функций, рассматриваемых либо как функции a , либо как функции b , приведены на рисунках 3.9а и 3.9б.

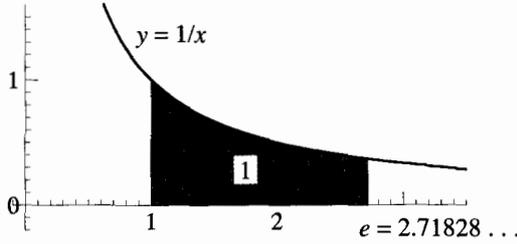


Рис. 3.8. Геометрический смысл e .

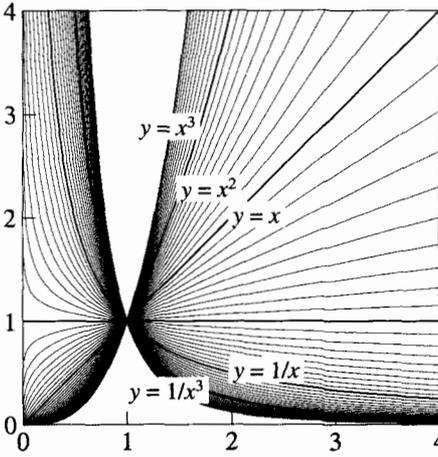


Рис. 3.9а. Функция $y = x^a$.

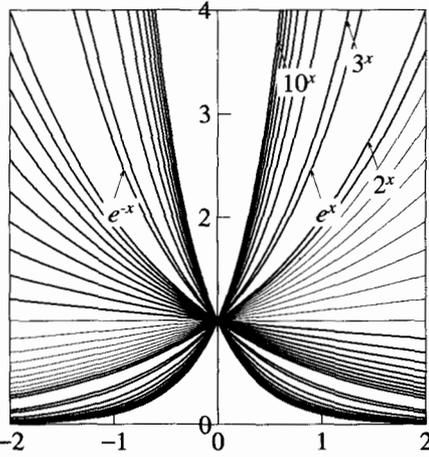


Рис. 3.9б. Функция $y = a^x$.

Упражнения

3.1 (Ньютон 1671, Метод флюксий; Эйлер 1748, *Introductio*, §123). Покажите, что $2 = (4/3) \cdot (3/2)$ приводит к

$$\ln 2 = \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}}\right) + \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{7}}{1 - \frac{1}{7}}\right), \quad \ln 3 = \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}}\right) + \ln 2,$$

что позволяет одновременно вычислить $\ln 2$ и $\ln 3$ с помощью двух быстро сходящихся рядов (3.15).

3.2 (Ньютон 1669, “*Inventio Basis ex Area data*”). Предположим, что площадь z под гиперболой определяется формулой

$$z = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \dots$$

Найдите для $x = e^z - 1$ ряд вида

$$x = z + a_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4 + \dots$$

Вы откроете (заново) ряд для показательной функции.

I.4 Тригонометрические функции

Сивилла: это восходит к заре цивилизации.

(Дж. Клиз & Ч. Бут 1979, *Faulty Towers, The Psychiatrists*)

Измерение углов. Одна из старейших задач в геометрии — измерение углов, главным образом, в целях астрономии. В древнем Вавилоне окружность делили на 360° , вероятно потому, что это число приблизительно равно числу дней в году. Тогда половина окружности составляет 180° , прямой угол 90° , а равно-сторонний треугольник имеет углы по 60° (см. рис. 4.1a). Птолемей¹, в своем *Альмагесте* (150 г. н.э.) добавил еще две “цифры” шестидесятеричной системы, ставшие известными как *partes minutae primae* (первые малые доли, — лат.) и *partes minutae secundae* (вторые малые доли). Они-то и стали нашими “минутами” и “секундами”. Но 360° не единственная возможность. Можно использовать множество других единиц, например, в некоторых технических приложениях используются грады; прямой угол равняется 100 град. Однако, как и для логарифмов, существует *естественная мера*, основанная на длине дуги окружности единичного радиуса, — *радиан* (см. рис. 4.1b). Приведем здесь длину дуги половины окружности с той точностью, с которой ее вычислил Т. Ф. де Ланьи в 1719 году и воспроизвел Эйлер (с ошибкой в 113-м десятичном знаке, который здесь исправлен):

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510
58209749445923078164062862089986280348253421170679
821480865132823066470938446... .

Для этого довольно необозримого выражения У. Джонс (1706, р. 243) ввел сокращенное обозначение π (“periphery” — окружность). Тогда угол в 54° , изображенный на рис. 4.1, составляет $54\pi/180 = 0.9425$ радиан.

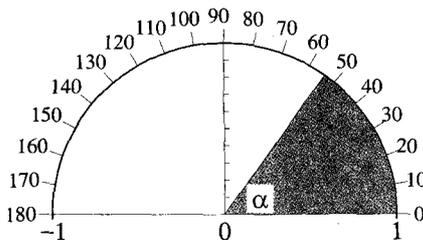


Рис. 4.1a. Вавилонские градусы.

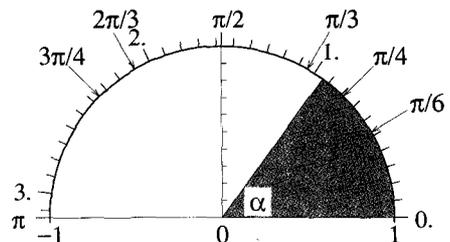


Рис. 4.1b. Измерение угла длиной дуги.

Определение тригонометрических функций. Как можно измерить угол линейкой? Мы можем измерить только *хорду* (см. рис. 4.2), а затем с помощью таблиц попытаться найти угол, или наоборот. Такие таблицы возникли в Древней Греции (Гиппарх, 150 г. до н.э. (утрачены) и Птолемей, 150 г.). Функция “синус”, связанная с функцией “хорда” соотношением $\sin \alpha = (1/2)\text{chord}(2\alpha)$, возникла в индийской (Брахмагупта, около 630 г.) и средневековой европейской

¹ = Ptolemaios, Ptolemeus, Ptolemy, Ptolemäus, Ptolemée, Tolomeo,

науке (Региомонтан, 1464 г.). Эта функция, первоначально называвшаяся *sinus rectus* (т.е. вертикальный синус), гораздо лучше приспособлена к вычислению треугольников, чем функция “хорда”.

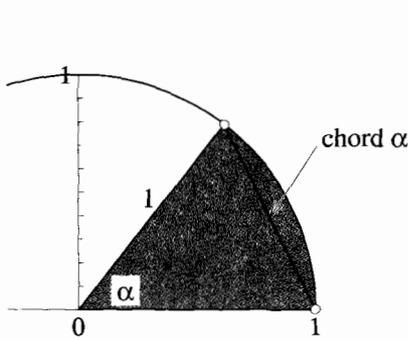


Рис. 4.2. Функция “хорда” Птолемея.

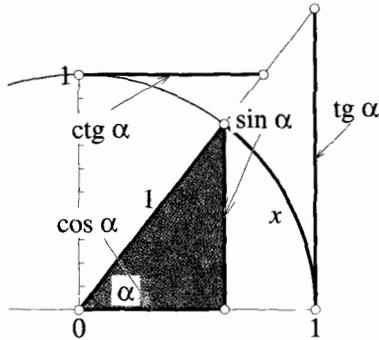


Рис. 4.3. Определения \sin , \cos , tg и ctg .

(4.1) Определение. Рассмотрим прямоугольный треугольник, расположенный в круге радиуса единица, как показано на рис. 4.3. Длину катета, противолежащего углу α , обозначают $\sin \alpha$, длину прилежащего катета — $\cos \alpha$. Их отношения, которые являются длинами вертикальной и горизонтальной касательных к окружности, обозначают

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Эти определения непосредственно приложимы к произвольному прямоугольному треугольнику с гипотенузой c и сторонами a, b (где a — катет, противолежащий углу α):

$$(4.1) \quad a = c \cdot \sin \alpha, \quad b = c \cdot \cos \alpha, \quad a = b \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

По традиции в геометрии углы обозначают малыми греческими буквами, но когда мы переходим к радианам и к рассмотрению функций вещественной переменной (см. графики на рис. 4.4), предпочтительнее малые латинские буквы (например, x) для обозначения аргумента. Из приведенных чертежей могут быть выведены многие формулы, такие как

$$\sin 0 = 0, \quad \cos 0 = 1, \quad \sin \pi/2 = 1, \quad \cos \pi/2 = 0, \quad \sin \pi = 0, \quad \cos \pi = -1,$$

$$(4.2a) \quad \sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x$$

$$(4.2b) \quad \sin(x + \pi) = -\sin x, \quad \cos(x + \pi) = -\cos x$$

$$(4.2c) \quad \sin(x + \pi/2) = \cos x, \quad \cos(x + \pi/2) = -\sin x$$

$$(4.2d) \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Функции $\sin x$ и $\cos x$ являются периодическими с периодом 2π , а $\operatorname{tg} x$ — периодическая функция с периодом π .

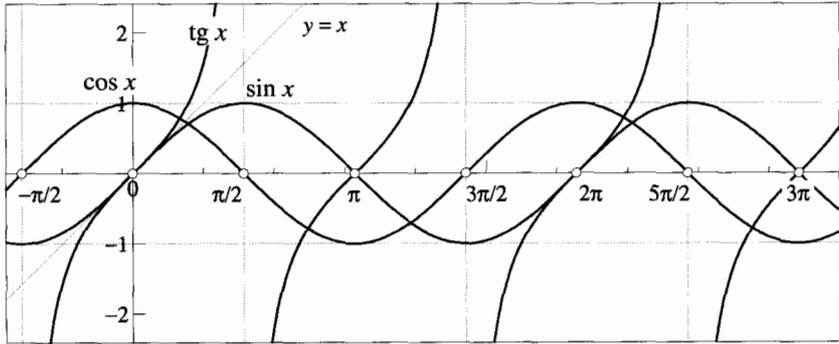


Рис. 4.4. Тригонометрические функции $\sin x$, $\cos x$ и $\operatorname{tg} x$.

На рис. 4.5 воспроизведен чертеж кривой синуса (А.Дюрер 1525, *Underweysung der Messung*, S.17). Дюрер называет эту кривую “eynn schrauben lini” (винтовая линия, — старонем.) и считает, что она может быть полезна каменщикам, строящим винтовые лестницы.

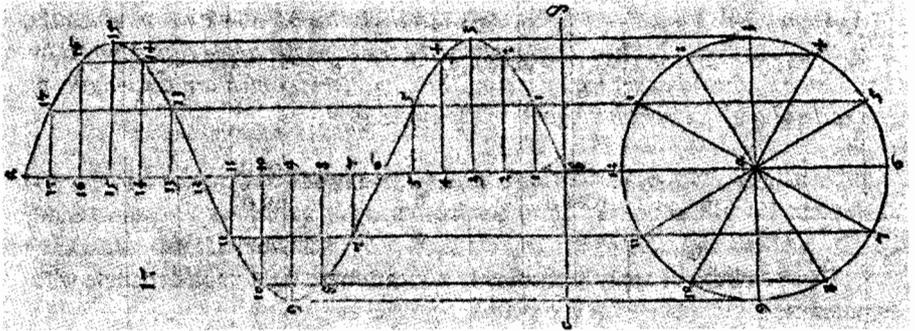


Рис. 4.5. Кривая синуса в книге Дюрера (1525).²

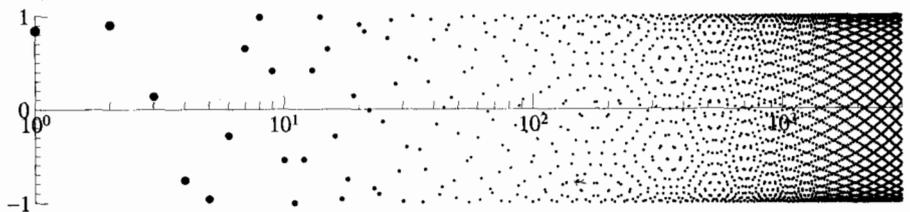


Рис. 4.6. Значения $\sin 1$, $\sin 2$, $\sin 3$, ... (для n использована логарифмическая шкала).

Любопытный геометрический узор возникает, если построить график $\sin n$ только для целых значений n (рис. 4.6, см. Стрэнг 1991, Ричерт 1992).

² Воспроизводится с разрешения издательства Dr. Alfons Uhl Verlag, Nördlingen.

Основные соотношения и их следствия

Эти уравнения имеют почтенный возраст. Уже Птолемей выводит ...
 (Л. Виеторис, J. reine ang. Math., vol. 186 (1949), p. 1)

Пусть α и β — два угла, соответствующие дугам x и y .

(4.2) **Теорема** (Птолемей 150 г. н. э., Региомонтан 1464).

$$(4.3) \quad \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$

$$(4.4) \quad \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

Доказательство. При $0 \leq x, y \leq \pi/2$ эти соотношения получаются непосредственно из рассмотрения трех прямоугольных треугольников на рис. 4.7. Все другие конфигурации x и y можно привести к этому интервалу с помощью формул (4.2b) и (4.2c). □

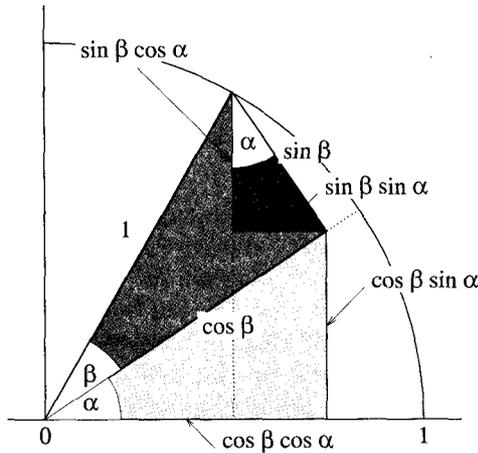


Рис. 4.7. Доказательство формул (4.3) и (4.4).

Разделив уравнение (4.3) на уравнение (4.4), получим

$$(4.5) \quad \operatorname{tg}(x + y) = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

Дальнейшие формулы. Заменяя в (4.3) и (4.4) y на $-y$, получим

$$(4.3') \quad \sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y,$$

$$(4.4') \quad \cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

Если сложить (4.3) и (4.3'), мы получим $\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2 \cdot \sin x \cos y$.
 Введя новые переменные для $x + y$ и $x - y$:

$$\begin{aligned} x + y &= u, \\ x - y &= v, \end{aligned} \quad \text{что равносильно} \quad \begin{aligned} x &= (u + v)/2, \\ y &= (u - v)/2, \end{aligned}$$

мы получим первую из трех следующих формул:

$$(4.6) \quad \sin u + \sin v = 2 \cdot \sin\left(\frac{u + v}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{u - v}{2}\right),$$

$$(4.7) \quad \cos u + \cos v = 2 \cdot \cos\left(\frac{u + v}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{u - v}{2}\right),$$

$$(4.8) \quad \cos v - \cos u = 2 \cdot \sin\left(\frac{u + v}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{u - v}{2}\right),$$

а две другие получаются аналогичным образом.

Положив в (4.3) и (4.4) $x = y$, получаем

$$(4.9) \quad \sin(2x) = 2 \sin x \cos x,$$

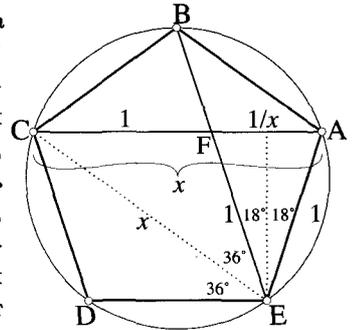
$$(4.10) \quad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1.$$

А заменив в (4.10) x на $x/2$, получим

$$(4.11) \quad \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}, \quad \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}.$$

Некоторые значения синусов и косинусов.

Пропорции равностороннего треугольника и квадрата дают значения синусов и косинусов для углов 30° , 60° и 45° . Случай правильного пятиугольника (см. чертёж) рассмотрел Гиппий (450 г. до н. э.). Из подобия треугольников ACE и AEF следует, что $1 + 1/x = x$, откуда $x = (1 + \sqrt{5})/2$, т.е. точка F делит диагональ CA в золотом сечении (Эвклид, 13-я книга "Начал", §8), поэтому $\sin 18^\circ = 1/(2x)$. Найденные таким образом значения приведены в табл. 4.1. Полный список значений $\sin \alpha$ для $\alpha = 3^\circ, 6^\circ, 9^\circ, 12^\circ \dots$ приводит Ламберт (1770с).



Формулы де Муавра. Путем замены в (4.3) и (4.4) y на nx , получаются рекуррентные соотношения

$$(4.12) \quad \sin(n + 1)x = \sin x \cos nx + \cos x \sin nx,$$

$$(4.13) \quad \cos(n + 1)x = \cos x \cos nx - \sin x \sin nx.$$

Отправляясь от (4.9) и (4.10) и повторно применяя соотношения (4.12) и (4.13), мы найдем, что

ТАБЛИЦА 4.1. Некоторые значения синусов, косинусов и тангенсов

α	радианы	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
0°	0	0	1	0
15°	$\pi/12$	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$	$2-\sqrt{3}$
18°	$\pi/10$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$	$\frac{(3\sqrt{5}-5)\sqrt{5+\sqrt{5}}}{10\sqrt{2}}$
30°	$\pi/6$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
36°	$\pi/5$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}(\sqrt{5}-1)}{2\sqrt{2}}$
45°	$\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\pi/3$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
75°	$5\pi/12$	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$	$\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$	$2+\sqrt{3}$
90°	$\pi/2$	1	0	∞

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x \\ \sin(3x) &= 3 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x \\ \cos(4x) &= \cos^4 x - 6 \sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x \\ \sin(4x) &= 4 \sin x \cos^3 x - 4 \sin^3 x \cos x \\ \cos(5x) &= \cos^5 x - 10 \sin^2 x \cos^3 x + 5 \sin^4 x \cos x \\ \sin(5x) &= 5 \sin x \cos^4 x - 10 \sin^3 x \cos^2 x + \sin^5 x. \end{aligned}$$

Как видим, здесь опять появляется треугольник Паскаля; вычисления в точности такие, как в разд. 1.2 (теорема 2.1). Таким образом, можно записать следующие общие формулы, которые нашел де Муавр (1730) (см. Эйлер 1748, *Introductio* §133):

$$\begin{aligned} \cos nx &= \cos^n x - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \sin^2 x \cos^{n-2} x \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \sin^4 x \cos^{n-4} x - \dots \\ \sin nx &= n \sin x \cos^{n-1} x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sin^3 x \cos^{n-3} x \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \sin^5 x \cos^{n-5} x - \dots \end{aligned} \tag{4.14}$$

Разложения в ряды

Пусть дуга z бесконечно мала; тогда $\sin z = z$ и $\cos z = 1; \dots$
(Эйлер 1748, *Introductio*, §134)

Все предыдущие формулы (4.5)–(4.14) были выведены только с помощью (4.3) и (4.4) с учетом (4.2a). Но теперь надо привлечь новую идею: когда x стремится к нулю, то “синус вертикальный” сливается с дугой. Если угол измеряется в радианах, то чем ближе x к нулю, тем лучшим приближением служит x для $\sin x$. Запишем это так:

$$(4.15) \quad \boxed{\sin x \approx x \quad \text{для } x \rightarrow 0.}$$

А теперь применим идею, использованную при доказательстве равенств (2.14) и (2.15), к формулам де Муавра (4.14). Положим $x = y/N$, $n = N$, где y — фиксированная величина, а N стремится к бесконечности и x к нулю. Заменяем теперь в соответствии с (4.15) $\sin x$ на x и $\cos x$ на 1. Поскольку $N \rightarrow \infty$, все члены $(1 - k/N)$ тоже заменяются единицей. Это приводит к следующим формулам, в которых мы переменную y обозначим снова x (Ньютон 1669, Лейбниц 1691, Якоб Бернулли 1702):

$$(4.16) \quad \boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots,}$$

$$(4.17) \quad \boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots.}$$

Данное Ньютоном доказательство этих рядов указано в упр. 4.1, а приведенное выше принадлежит Якобу Бернулли (см. также Эйлер *Introductio*, §134).

Рис. 4.8 иллюстрирует сходимость рядов (4.16) и (4.17). Очевидно, сходимость имеет место при всех x (см. разд. III.7). Можно заметить, что после $x = 15$ возникают проблемы с точностью вычислений, вызванные ошибками округления (вычисления намеренно производились с одинарной точностью).

Замечание. При замене $\cos(y/N)$ единицей при больших значениях N необходима осторожность, потому что это выражение возводится в N -ю степень. Например, $1 + y/N$ стремится к единице при $N \rightarrow \infty$, но это не так для $(1 + y/N)^N$ (см. теорему 2.3). В нашем случае спасительным является тот факт, что $\cos(y/N)$ стремится к единице быстрее, чем $1 + y/N$. Действительно,

$$\cos^N(y/N) = \left(1 - \sin^2(y/N)\right)^{N/2} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{y^2}{N} \rightarrow 1$$

в силу (4.2d), теоремы 2.2 и (4.15).

Ряд для $\operatorname{tg} x$. Положим

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + a_7 x^7 + \dots$$

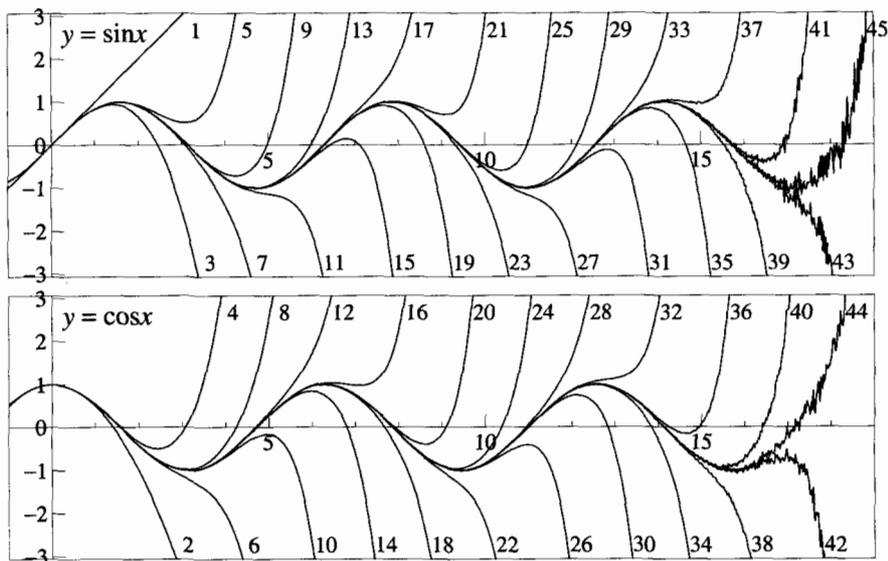


Рис. 4.8. Сходимость рядов $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$ и $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$

Чтобы найти a_1, a_3, a_5, \dots , помножим эту формулу на $\cos x$ и воспользуемся уже известными рядами (4.16) и (4.17):

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots = \left(a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \dots \right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots \right).$$

Сравнивая коэффициенты при x, x^3 и x^5 , получим

$$1 = a_1, \quad -\frac{1}{6} = -\frac{a_1}{2} + a_3, \quad \frac{1}{120} = \frac{a_1}{24} - \frac{a_3}{2} + a_5,$$

откуда

$$a_1 = 1, \quad a_3 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}, \quad a_5 = \frac{1}{120} - \frac{1}{24} + \frac{1}{6} = \frac{2}{15}$$

и, продолжая, получим ряд

$$(4.18) \quad \operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \frac{1382x^{11}}{155925} + \frac{21844x^{13}}{6081075} + \dots$$

Хотя общего правила не видно, оно все же существует, его основу составляют числа Бернулли (1.29) (см. упр. 10.2 в разд. II.10).

Старинные вычисления таблиц. Из значений, приведенных в табл. 4.1, которые были известны уже в древности, с помощью формул (4.3') и (4.4') можно найти значения $\sin 3^\circ, \cos 3^\circ$, или, как было тогда принято, хорду $\operatorname{chord} 6^\circ$. Далее, формулы половинного угла (4.11) позволяют вычислить $\operatorname{chord} 3^\circ, \operatorname{chord} 1\frac{1}{2}^\circ, \operatorname{chord} \frac{3}{4}^\circ$, но не $\operatorname{chord} 1^\circ$. Птолемей заметил, что $\operatorname{chord} \frac{3}{4}^\circ$ приблизительно равна половине $\operatorname{chord} 1\frac{1}{2}^\circ$. Поэтому нетрудно догадаться, что $\operatorname{chord} 1^\circ = \frac{2}{3} \cdot \operatorname{chord} 1\frac{1}{2}^\circ$, что в шестидесятеричной системе счисления дает (см. Або 1964, р. 121)

$$(4.19) \quad \operatorname{chord} 1^\circ = 0; 1, 2, 50 \quad (\text{точное значение } 0; 1, 2, 49, 51, 48, 0, 25, 27, 22, \dots).$$

Тогда значения \sin и \cos всех углов $2^\circ, 3^\circ, 4^\circ$, и т. д. получаются с помощью (4.14). Около 1464 г. Региомонтан вычислил таблицу, в которой синусы всех углов даны с интервалом в угловую минуту с пятью десятичными знаками (“SEQVITVR NVNC EIVSDEM IOANNIS Regiomontani tabula sinuum, per singula minuta extensa ...”). На рис. 4.9 показана написанная его рукой таблица $\operatorname{tg} x$ (как правило, с четырьмя верными десятичными знаками).

Рис. 4.9. Автограф таблицы $\operatorname{tg} \alpha$ Региомонтана (см. Каунцнер 1980).³

Вычисление $\sin 1^\circ$ с очень высокой точностью было сделано Аль-Каши (Самарканд, 1429 г.) посредством численного решения уравнения

$$(4.20) \quad -4x^3 + 3x = \sin 3^\circ$$

(см. уравнение (1.9)) с помощью итерационного метода, и решение дано в шестидесятеричной системе (“Мы извлекли его благодаря вдохновляющей силе от присутствия Всевышнего ...”, см. А. Аабе 1954):

$$\sin 1^\circ = 0; 1, 2, 49, 43, 11, 14, 44, 16, 19, 16 \dots$$

А вот точное решение в шестидесятеричной системе, вычисленное на современном компьютере:

$$\sin 1^\circ = 0; 1, 2, 49, 43, 11, 14, 44, 16, 26, 18, 28, 49, 20, 26, 50, 41, \dots$$

И еще раз отметим, каким громадным прогрессом было появление метода рядов (4.17), который дает для $\sin 1^\circ = \sin(\pi/180) = \sin(0.0174532925 \dots)$ при учете всего лишь трех членов значение

$$\begin{aligned} \sin 1^\circ &\approx 0.0174532925199 - 0.0000008860962 + 0.00000000013496 \\ &\approx 0.0174524064373. \end{aligned}$$

³ Воспроизводится с разрешения Nürnberger Stadtbibliothek, Cent V, 63, f. 30^r.

Обратные тригонометрические функции

Тригонометрические функции определяют $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ для заданной дуги x . Обратные тригонометрические функции определяют дугу x как функцию $\sin x$, $\cos x$ или $\operatorname{tg} x$.

(4.3) Определение. Рассмотрим прямоугольный треугольник с гипотенузой единичной длины. Если x обозначает длину противолежащего углу катета, то $\operatorname{arcsin} x$ есть длина соответствующей этому углу дуги (см. рис. 4.10a). Аналогично определяются величины $\operatorname{arccos} x$ и $\operatorname{arctg} x$ (рис. 4.10b и 4.10c).

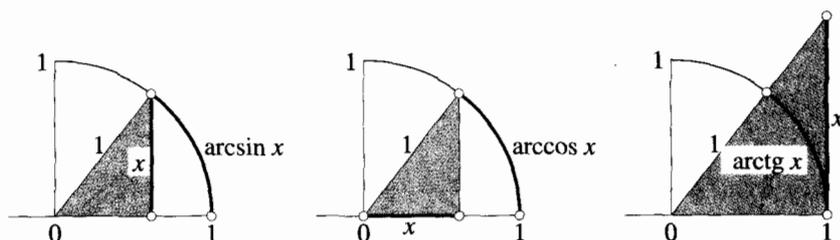


Рис. 4.10. Определение $\operatorname{arcsin} x$, $\operatorname{arccos} x$ и $\operatorname{arctg} x$.

Вследствие периодичности тригонометрических функций обратные тригонометрические функции многозначны. Так называемые *главные ветви* их удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\begin{aligned} y = \operatorname{arcsin} x &\Leftrightarrow x = \sin y && \text{при } -1 \leq x \leq 1, -\pi/2 \leq y \leq \pi/2, \\ y = \operatorname{arccos} x &\Leftrightarrow x = \cos y && \text{при } -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi, \\ y = \operatorname{arctg} x &\Leftrightarrow x = \operatorname{tg} y && \text{при } -\infty < x < \infty, -\pi/2 < y < \pi/2. \end{aligned}$$

Ряд для $\operatorname{arctg} x$. Ряд для $\operatorname{arctg} x$ открыл Грегори в 1671г. В 1674 г. Лейбниц перестроил его, а в 1682 г. опубликовал формулу в “Acta Eruditorum”, выразив восторг по поводу милости Господней, но не раскрыв пути, который привел его к результату. Метод был найден лишь при исследовании его личных бумаг (см. М. Кантор 1880–1908, vol. III, p. 80). Пусть b — заданная величина и $y = \operatorname{arctg} b$ (см. рис. 4.11a, где дуги AD и DC имеют одинаковую длину). Еще Архимеду, а позже Кеплеру (см. рис. 4.12) было известно, что площадь G сектора OADCO равна половине длины дуги:

$$(4.21) \quad G = y.$$

Площадь F четырехугольника OABCO, составленного из двух одинаковых треугольников, равна

$$(4.22) \quad F = b.$$

Задача состоит в вычислении площади L фигуры ABCDA. Лейбниц разбивает ее на малые треугольники (один из которых показан на рис. 4.11b) с площадями

$$(4.23) \quad \frac{\Delta x \cdot h}{2} = \frac{x^2}{1+x^2} \cdot \Delta x,$$

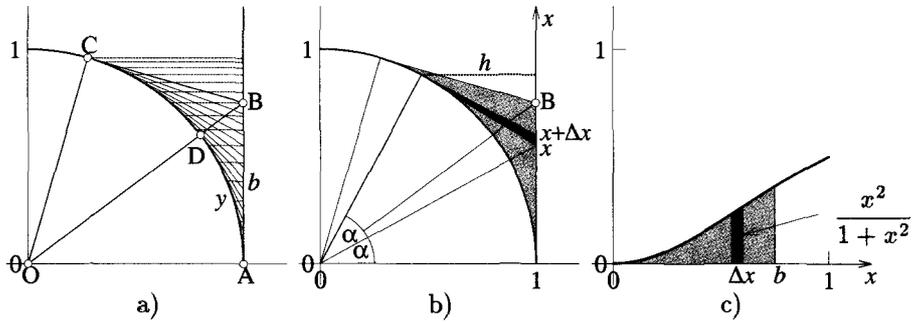


Рис. 4.11. Вывод ряда для $y = \text{arctg } x$.

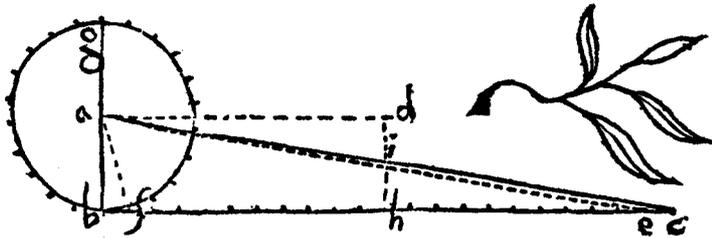


Рис. 4.12. Площадь круга по Кеплеру, 1615 г.⁴

ибо

$$h = 1 - \cos(2\alpha) \stackrel{(4.10)}{=} 2 \sin^2 \alpha = \frac{2 \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{2 \text{tg}^2 \alpha}{\text{tg}^2 \alpha + 1} = \frac{2x^2}{x^2 + 1}.$$

Поэтому искомая площадь L есть площадь под графиком функции

$$\frac{x^2}{x^2 + 1} \stackrel{(2.12)}{=} x^2 - x^4 + x^6 - x^8 + x^{10} - + \dots$$

(см. рис. 4.11с), т. е. по теореме 3.2 (Ферма)

$$L = \frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5} + \frac{b^7}{7} - \frac{b^9}{9} + \frac{b^{11}}{11} - + \dots$$

Наконец, в силу (4.21) и (4.22)

$$y = G = F - L = b - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} - \frac{b^7}{7} + \frac{b^9}{9} - \frac{b^{11}}{11} + \dots$$

В результате получается формула

$$(4.24) \quad \boxed{\text{arctg } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \dots,}$$

справедливая при $|x| \leq 1$.

⁴ Воспроизводится с разрешения Публичной библиотеки Женевского университета.

Ряд для arcsin x

Один мой друг, весьма одаренный в отношении этих вещей, принес мне на другой день кое-какие записки, в которых он описал методы вычисления размеров величин, подобные методу г-на Меркатора, относящемуся к гиперболе, но очень общие ... Его зовут г-н Ньютон; он член нашего Колледжа и очень молод ... но необычайно способен и искусен в этих вещах.

(Письмо Барроу Коллинзу, 1669 г., цит. по Уэстфол 1980, р. 202)

После публикации книги Меркатора в конце 1668 г., в которой был опубликован ряд для $\ln(1+x)$, Ньютон поспешил показать свою рукопись "Об анализе" (Ньютон 1669) некоторым из своих друзей, но не разрешил ее опубликовать. В конце концов она была включена в первую главу "Analysis per quantitatum" (Ньютон 1711), опубликованного У. Джонсом. Ньютон не только нашел ряд Меркатора много раньше, но и первым открыл ряд

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots,$$

а также ряды для $\sin x$ и $\cos x$ (см. упр. 4.1). Ньютон дал следующее доказательство формулы (4.25).

Доказательство. Предположим, что x задано и мы хотим вычислить дугу y , для которой $x = \sin y$ (см. рис. 4.13). Если x увеличивается на Δx , то y возрастает на величину Δy , которая, как легко видеть, равна

$$\Delta y \approx \frac{\Delta x}{\sqrt{1-x^2}},$$

потому что два заштрихованных треугольника на рис. 4.13 подобны. Эта величина является площадью прямоугольника ширины Δx и высоты $1/\sqrt{1-x^2}$. Поэтому, как и на рис. 4.11с, полная длина дуги y равна площади под графиком функции $1/\sqrt{1-x^2}$ между 0 и x . Разлагая эту функцию в ряд по биномиальной теореме 2.2 при $a = -1/2$, получаем

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^6 + \dots$$

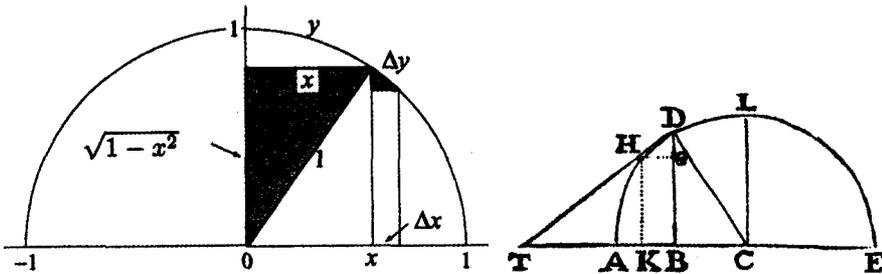


Рис. 4.13. Доказательство формулы (4.25) и иллюстрация из Ньютона (1669).⁵

Формулу (4.25) получим, заменяя функции $1, x^2, x^4, \dots$ соответствующими им площадями (по теореме 3.2) $x, x^3/3, x^5/5, \dots$ □

⁵ Правая часть рис. 4.13 печатается с разрешения Публ. библи. Женевского ун-та.

Вычисление числа Пи

... Вы не будете отрицать, что Вы открыли совершенно замечательное свойство окружности, которое навсегда станет знаменитым среди геометров.
(Письмо Гюйгенса Лейбницу, 7 ноября 1674 г.)

Поэтому отношение диаметра к окружности как 1,000, &c. к 3.141592653 .5897932384.6264338327.9502884197.1693993751.0582097494.4592307816 .4062862089.9862803482.5342117067.9+, верное до более чем ста десятичных знаков, вычисленное тщательным и быстрым пером поистине изобретательного г-на Джона Маккина, всего лишь как пример тех огромных преимуществ, которые арифметические вычисления получают от современного анализа, относится к предмету, который так тесно связан с Природой, что привлекал умы самых замечательных математиков всех времен к его рассмотрению ... Но метод рядов (который усовершенствовали г-н Ньютон и г-н Галлей) выполняет это с большой легкостью в сравнении с запутанными и многословными способами Архимеда, Виета, Ван Койлена, Метьюса, Снеллиуса, Лансбергиуса и др. (У. Джонс, 1706)

Вычисляя периметры правильных многоугольников с $n = 6, 12, 24, 48, 96$ сторонами и повторно применяя формулы (4.11), Архимед (283–212 до н.э.) получил оценку

$$(4.28) \quad 3 \frac{10}{71} < \pi < 3 \frac{1}{7}.$$

Все попытки улучшить эти значения, делавшиеся в средние века, оказались бесплодными. Наконец, Адриен ван Роомен (в 1580 г.), применяя метод Архимеда и потратив годы на вычисления, преуспел в получении 20 десятичных знаков. Лудольф ван Цейлен (van Ceulen = "из Кельна") в 1596–1616 гг. вычислил 35 десятичных знаков, которые в течение долгого времени красовались на надгробном камне Лудольфа в соборе Святого Петра в Лейдене (Голландия). Чтобы достичь этой точности, Лудольфу понадобилось продолжить вычисления до $n = 6 \cdot 2^{60}$.

Ряд Лейбница. Мы знаем, что $\text{tg}(\pi/4) = 1$ (см. табл. 4.1) и, следовательно, $\text{arctg}(1) = \pi/4$. Положив в формуле (4.24) $x = 1$, мы получим знаменитый ряд Лейбница (1682)

$$(4.29) \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - + \dots$$

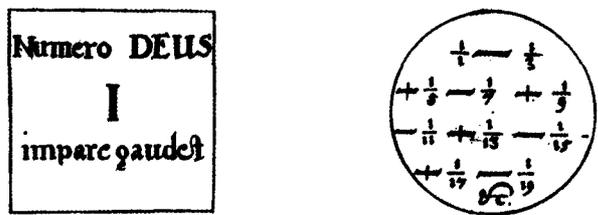


Рис. 4.14. Иллюстрация Лейбница к ряду (4.29).⁶

⁶ Воспроизведено с разрешения Публичной библиотеки Женевского университета.

Хотя мы и согласны с Лейбницем относительно несомненной красоты его формулы (“Господь любит нечетные числа”, см. рис. 4.14), мы видим также, что она совершенно неэффективна для практических вычислений, ибо, чтобы получить 50 десятичных знаков, пришлось бы сложить 10^{50} членов, “labor fere in aeternum” (затратив труд вечности, — *лат.*) (Эйлер 1737). Гораздо более эффективно использование $\operatorname{tg}(\pi/6) = 1/\sqrt{3}$ (см. табл. 4.1), что приводит к формуле

$$(4.30) \quad \pi = 2\sqrt{3} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \frac{1}{9 \cdot 3^4} - \dots \right).$$

С ее помощью Т. Ф. де Ланьи в 1729 г., “exhibitus incredibili labore” (совершив невероятный труд, — *лат.*), просуммировал 210 членов ряда и получил то значение π , которое приведено в начале этого подраздела. Можно использовать также ряд (4.25) для $\arcsin x$. Например, так как $\sin(\pi/6) = 1/2$, мы получим

$$(4.31) \quad \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \dots$$

Составные формулы. Подставив в (4.5) $u = \operatorname{tg} x$ и $v = \operatorname{tg} y$, мы получим (при условии, что $|\arctg u + \arctg v| < \pi/2$) формулу

$$(4.32) \quad \boxed{\arctg u + \arctg v = \arctg \left(\frac{u + v}{1 - uv} \right)}$$

Если положить $u = 1/2$ и $v = 1/3$, то дробь в правой части (4.32) равна единице. Это приводит к формуле Эйлера (1737)

$$(4.33) \quad \frac{\pi}{4} = \arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{3},$$

для которой ряд (4.24) сходится уже много лучше. Особенно привлекателен подход Джона Маккина, опубликованный без подробностей в книге У. Джонса (1706, р. 243). Положив $u = v = 1/5$, получаем

$$2 \cdot \arctg \frac{1}{5} = \arctg \left(\frac{2/5}{1 - 1/25} \right) = \arctg \frac{5}{12}.$$

Положив $u = v = 5/12$, получаем

$$2 \cdot \arctg \frac{5}{12} = \arctg \left(\frac{2 \cdot 5/12}{1 - 25/144} \right) = \arctg \frac{120}{119}.$$

Наконец, положим $u = 120/119$ и подыщем такое v , чтобы

$$\frac{u + v}{1 - uv} = 1, \quad \text{откуда} \quad v = \frac{1 - u}{1 + u} = -\frac{1}{239}.$$

ТАБЛИЦА 4.2. Вычисление π по формуле Маккина

1	0.	20000000000000000000000000000000		
3	-0.	26666666666666666666666666666667		
5	0.	64000000000000000000000000000000		
7	-0.	1828571428571428571428571429		
9	0.	5688888888888888888888889		
11	-0.	1861818181818181818181818		
13	0.	63015384615384615		
15	-0.	21845333333333333333		
17	0.	77101176470588		
19	-0.	2759410526316		
21	0.	99864380952	1	0. 004184100418410041841004184
23	-0.	3647220870	3	-0. 24416591787083803627
25	0.	134217728	5	0. 256472314424647
27	-0.	4971027	7	-0. 3207130658
29	0.	185128	9	0. 43669
31	-0.	6927	11	-0. 1
33	0.	260	=	0. 004184076002074723864538214
35	-0.	10		
=	0.	197395559849880758370049763	$\pi =$	3. 141592653589793238462643352

Все вместе эти формулы дают выражение

$$(4.34) \quad \boxed{\frac{\pi}{4} = 4 \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239}},$$

для которого ряд (4.24) особенно привлекателен при вычислениях в десятичной системе (см. табл. 4.2). “Тщательное и быстрое перо” Маккина нашло таким способом 100 десятичных знаков.

Поиск других формул такого типа становится задачей теории чисел. Гаусс, составив таблицу разложения на множители на 20 страницах, в качестве побочного результата нашел, что

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= 12 \operatorname{arctg} \frac{1}{18} + 8 \operatorname{arctg} \frac{1}{57} - 5 \operatorname{arctg} \frac{1}{239}, \\ \frac{\pi}{4} &= 12 \operatorname{arctg} \frac{1}{38} + 20 \operatorname{arctg} \frac{1}{57} + 7 \operatorname{arctg} \frac{1}{239} + 24 \operatorname{arctg} \frac{1}{268} \end{aligned}$$

(см. Гаусс, *Werke*, vol. 2, p. 477–502). На сегодняшний день рассчитано уже несколько миллионов десятичных знаков числа π . Первые 100 000 цифр (последняя из них 6) опубликовали Шенкс и Ренч мл. (1962). Более подробно старую и современную историю вычисления π описал Миел (1983).

Упражнения

4.1 (Ньютон 1669, “*Inventio Basis ex data Longitudine Curvæ*”). Имея ряд $z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \dots$ для \arcsin (см. (4.25)), выведите ряд для $x = \sin z$ в виде $x = z + a_3z^3 + a_5z^5 + a_7z^7 + \dots$ (по аналогии с упр. 3.2) и ряд для $w = \cos z$, разложив сначала в ряд $w = \sqrt{1 - x^2}$ (см. рис. 4.15).

Si ex dato arcu α D Sinus AB defideratur; α qua-
 tionis $z = x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 + \frac{1}{120}x^7$, &c. supra in-
 ventam, (posito nempe $AB = x$, $\alpha D = z$, & $A\alpha = 1$.)
 radix extracta erit $x = z - \frac{1}{2}z^3 + \frac{1}{24}z^5 - \frac{1}{120}z^7$
 $+ \frac{1}{720}z^9$, &c.
 Et praeterea si Cofinum $A\beta$ ex isto arcu dato cu-
 pis, fac $A\beta (= \sqrt{1-zz}) = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 - \frac{1}{720}z^6$
 $+ \frac{1}{40320}z^8 - \frac{1}{3628800}z^{10}$, &c.

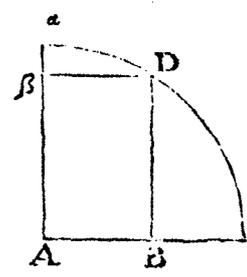
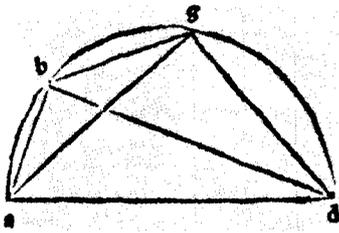


Рис. 4.15. Из Ньютона (1669), p. 17.⁷

4.2 Разберитесь в оригинальном доказательстве Птолемея теорем сложения (4.3) и (4.4) для функции хорды (см. рис. 4.16).



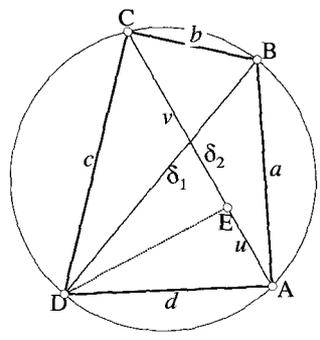
Propositio iiii.
Quoniam chordis inaequalium arcuum in semicirculo:
 arcus quo maior minorq[ue] superat chorda nota fiet.
 ¶ Et in semicirculo. i. b. d. super diametru[m]. i. d. note sunt cho-
 rde. a. b. a. g. dico notam fieri chordam. b. a. nam p[er] corda
 rum p[ar]te[m] huius note etiam sicut chorde. b. d. e. g. d. ¶ Sunt
 in quadrilatero. a. b. g. d. diame[tr]i. a. g. e. b. d. note. sum e[st] late-
 a. a. b. r. g. d. opposit[us] nota. igit[ur] per premisum quod fit ex. a. d. in. b. g. nota
 fit. Sed. a. d. est nota: quia diameter circuli. ideo. b. g. nota fiet: d[icitur] quer[er]e
 baf. Per hac plurimor[um] arcu[m] chordis co[n]no[sc]e. Reperio eni[m] chorda[m] arcus quo
 quita pars circumferentie s[er]tia supat. s. chorda[m] arcus. 12. graduum: sic de alijs.

Рис. 4.16. Доказательство Птолемея для $\text{chord}(\alpha + \beta)$; из *Альмагеста* в переводе Региомонтана, напечатано в 1496 г.⁷

Указание. Используйте (и докажите) “лемму Птолемея”, которая утверждает, что стороны и диагонали вписанного в круг четырехугольника удовлетворяют равенству $ac + bd = \delta_1 \delta_2$. Для доказательства леммы надо провести прямую DE такую, чтобы углы EDA и CDB были равны. Тогда получаются подобные треугольники:

$$\begin{aligned} EDA \cong CDB &\implies b/\delta_1 = u/d, \\ DCE \cong DBA &\implies a/\delta_1 = v/c, \end{aligned}$$

откуда $bd + ac = (u + v)\delta_1 = \delta_1 \delta_2$.



4.3 Гиперболические функции (Фонсене 1759, Ламберт 1770b). При заданном x пусть P — такая точка на гиперболе $u^2 - v^2 = 1$, что заштрихованная площадь на рис. 4.17 (левом) равна $x/2$. Тогда координаты этой точки обозначают $(\text{ch } x, \text{sh } x)$.

⁷ Воспроизводится с разрешения Публичной библиотеки Женевского университета.

а) Докажите, что

$$(4.35) \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Указание. Площади треугольников ACB и PCQ равны. Следовательно, равны и площади фигур $ACPA$ и $AVQA$, причем они равны $(\ln a)/2$, если через $a/\sqrt{2}$ обозначить расстояние от C до Q (рис. 4.17 правый).

б) Проверьте соотношения

$$(4.36) \quad \begin{aligned} \operatorname{sh}(x+y) &= \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \\ \operatorname{ch}(x+y) &= \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y. \end{aligned}$$

с) Функции, обратные к (4.35), т. е. обратные гиперболические функции, или “ареафункции”, определяются так:

$$\begin{aligned} y = \operatorname{arsh} x &\Leftrightarrow x = \operatorname{sh} y && \text{для } -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, \\ y = \operatorname{arch} x &\Leftrightarrow x = \operatorname{ch} y && \text{для } 0 \leq x < \infty, 1 \leq y < \infty. \end{aligned}$$

Докажите, что $\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

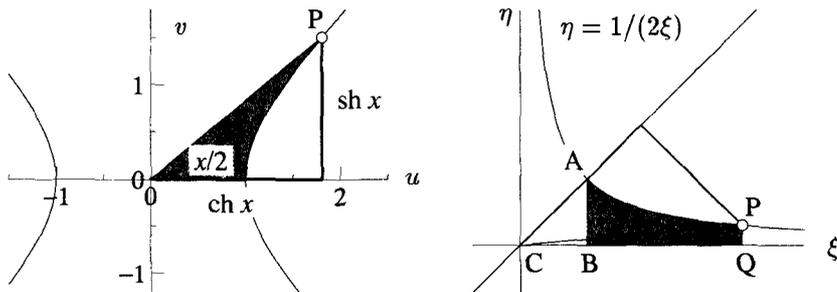


Рис. 4.17. Определение гиперболических функций.

4.4 Проверьте (и используйте) совет Ньютона (Ньютон 1671, Probl. IX, §XLIX) для вычисления π : вычисляя площадь a под дугой окружности $y = x^{1/2}(1-x)^{1/2}$ между $x = 0$ и $x = 1/4$ с помощью разложения в биномиальный ряд, покажите, что

$$\begin{aligned} \pi &= 24a + 3\sqrt{3}/4 \\ &= 24 \left(\frac{2}{3} \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \frac{1}{2^5} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{2}{7} \frac{1}{2^7} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{2^2}{9} \frac{1}{2^9} - \dots \right) + \frac{3\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

1.5 Комплексные числа и функции

Ни истинные, ни ложные корни не являются всегда действительными, иногда они являются мнимыми; иначе говоря, хотя мы всегда можем представлять себе для каждого уравнения столько корней, сколько я назначил, но не всегда каждому воображаемому нами корню соответствует определенная величина. (Декарт 1637)

Первым, кто столкнулся с комплексными числами, был Кардано (1545). В своей книге *Ars Magna* (“Великое искусство” — лат.) он задался таким вопросом: как разделить заданный отрезок ab , имеющий длину, скажем, 10, “in duas partes” (на две части — лат.) так, чтобы прямоугольник со сторонами, равными этим двум частям, имел площадь 40. Каждому ясно (см. рис. 5.1), что площадь такого прямоугольника не может быть больше 25, так что задача не имеет действительного решения. Однако алгебра *дает* нам решение, так как соответствующее уравнение (см. уравнение (1.3)) $x^2 - 10x + 40 = 0$ приводит (“ideo imaginaberis (вообразив себе) $\sqrt{-15}$ ”) к результату

$$5 + \sqrt{-15} \quad \text{и} \quad 5 - \sqrt{-15}.$$

Хотя эти формулы совершенно бесполезны и софистичны (“quæ uere est sophisticæ”), но в них должна содержаться доля истины, потому что произведение

$$(5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = 25 - (-15) = 40$$

дает как раз то, чего мы хотим (см. рис. 5.1).

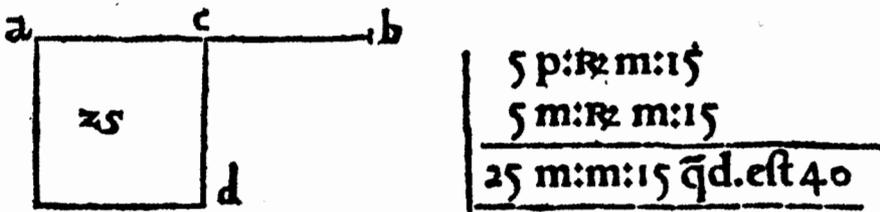


Рис. 5.1. Из книги Кардано *Ars Magna*.¹

В течение следующих столетий такие “невозможные” или “мнимые” (Декарт; см. цитату выше) решения алгебраических уравнений встречались снова и снова, породили множество диспутов, но постепенно все больше выяснялась их полезность. Полной зрелости в обращении с ними достиг в своей работе Эйлер, который позже ввел обозначение i для $\sqrt{-1}$. Приведенные выше решения теперь пишутся так: $5 \pm i\sqrt{15}$, а комплексные числа общего вида

$$c = a + ib,$$

где $a = \text{Re}(c)$ называется *действительной* (или *вещественной*), а $b = \text{Im}(c)$ — *мнимой* частью c . Интерпретацией комплексного числа $a + ib$ как точки (a, b) на

¹ Воспроизведено с разрешения Публичной библиотеки Женевского университета.

двумерной комплексной плоскости мы обязаны диссертации Гаусса (1799) (см. рис. 5.2), а также Аргану (1806, см. Клайн 1972, р. 630).

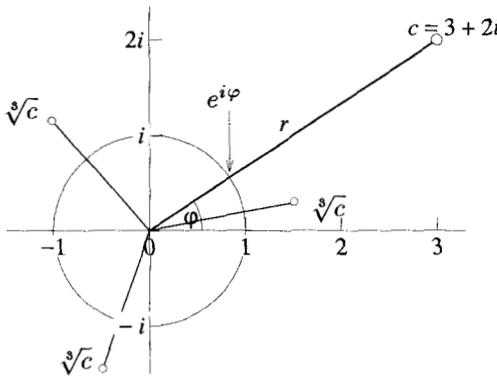


Рис. 5.2а. Комплексная плоскость и кубические корни.

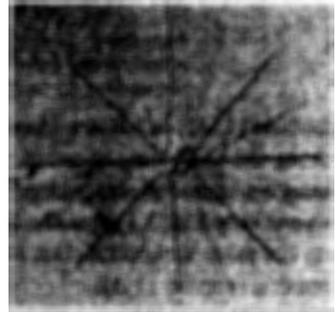


Рис. 5.2б. Комплексная плоскость у Гаусса (1799).²

Действия над комплексными числами. При арифметических действиях с комплексными числами применяются обычные правила арифметики рациональных или действительных чисел с учетом соотношения $i^2 = -1$. Поэтому *сумма* (или *разность*) двух комплексных чисел

$$c = a + ib, \quad w = u + iv$$

есть комплексное число, полученное сложением (или вычитанием) действительных и мнимых частей. *Произведение* их примет вид (ср. с рис. 5.1)

$$(5.1) \quad c \cdot w = au - bv + i(av + bu).$$

Чтобы вычислить частное w/c , заметим, что произведение c на *комплексно сопряженное* с ним число

$$(5.2) \quad \bar{c} = a - ib$$

есть действительное неотрицательное число: $c \cdot \bar{c} = a^2 + b^2$. Умножая числитель и знаменатель в w/c на \bar{c} , видим, что при $c \neq 0$ частное w/c принимает вид

$$(5.3) \quad \frac{w}{c} = \frac{w \cdot \bar{c}}{c \cdot \bar{c}} = \frac{au + bv}{a^2 + b^2} + i \frac{av - bu}{a^2 + b^2}.$$

Формула Эйлера и следствия из нее

... как показательные функции с мнимым показателем степени выражаются через синусы и косинусы действительных дуг.

(Эйлер, 1748, *Introductio*, §138)

Эта формула, открытая Эйлером в 1740 г. при изучении дифференциальных уравнений вида $y'' + y = 0$ (см. разд. II.8), является ключевой для понимания арифметических операций с комплексными числами.

² Воспроизводится с разрешения издательства Georg Olms Verlag.

Определим e^{ix} с помощью ряда из теоремы 2.3 (с заменой x на ix). Используя соотношения $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, ... и отделив действительную часть от мнимой, получим

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots \\ &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \dots \\ &= \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots\right)}_{\cos x} + i \underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots\right)}_{\sin x} = \cos x + i \sin x. \end{aligned}$$

Результатом является знаменитая формула Эйлера (1743, *Opera Omnia*, vol. 14, p. 142)

$$(5.4) \quad \boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x.}$$

В качестве первого ее приложения подставим в нее $x = \pi/2$ и $x = \pi$. Это дает две элементарные формулы

$$e^{i\pi/2} = i \quad \text{и} \quad e^{i\pi} = -1,$$

в которых замечательные математические константы π , e и i связаны в поразительно простых выражениях.

Полярные координаты. Формула (5.4) показывает, что точка $e^{i\varphi}$ имеет действительную часть $\cos \varphi$ и мнимую часть $\sin \varphi$, т.е. это та точка на окружности единичного радиуса, у которой радиус составляет угол φ с действительной осью (см. рисунки 5.2а и 4.3). Следовательно, каждое комплексное число можно записать в виде

$$(5.5) \quad c = a + ib = r \cdot e^{i\varphi},$$

где

$$(5.6) \quad r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{c \cdot \bar{c}} \quad \text{и} \quad \varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \right).$$

Величины $r = |c|$ и $\varphi = \operatorname{arg}(c)$ называют *абсолютной величиной* и *аргументом* числа c . Пусть

$$c = r \cdot e^{i\varphi} \quad \text{и} \quad w = s \cdot e^{i\theta}$$

два комплексных числа, представленные в полярных координатах. Из (4.2а) следует, что $\bar{c} = r \cdot e^{-i\varphi}$, а из теоремы 4.2 вытекает, что

$$(5.7) \quad \begin{aligned} e^{i\varphi} \cdot e^{i\theta} &= (\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot (\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= (\cos \varphi \cos \theta - \sin \varphi \sin \theta) + i(\cos \varphi \sin \theta + \sin \varphi \cos \theta) = e^{i(\varphi+\theta)}. \end{aligned}$$

Поэтому для произведения и частного мы получаем формулы

$$(5.8) \quad c \cdot w = rs \cdot e^{i(\varphi+\theta)}, \quad \frac{w}{c} = \frac{s}{r} \cdot e^{i(\varphi-\theta)}.$$

Для этих действий представление комплексных чисел в полярных координатах особенно удобно; *при умножении радиусы перемножаем, а углы складываем, при делении радиусы делим, а углы вычитаем.*

Корни. Допустим, что мы хотим найти $\sqrt[3]{c}$. И в этом случае полярные координаты оказываются чудесным средством, потому что корни из произведений равны произведениям корней. Однако здесь нужна внимательность, потому что $e^{2i\pi} = 1$ и $e^{4i\pi} = 1$ имеют кубические корни $e^{2i\pi/3}$ и $e^{4i\pi/3}$, отличные от 1. Таким образом, имеются три кубических корня из c :

$$(5.9) \quad \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{r} \cdot e^{i\varphi/3}, \quad \sqrt[3]{r} \cdot e^{i(\varphi/3+2\pi/3)}, \quad \sqrt[3]{r} \cdot e^{i(\varphi/3+4\pi/3)}.$$

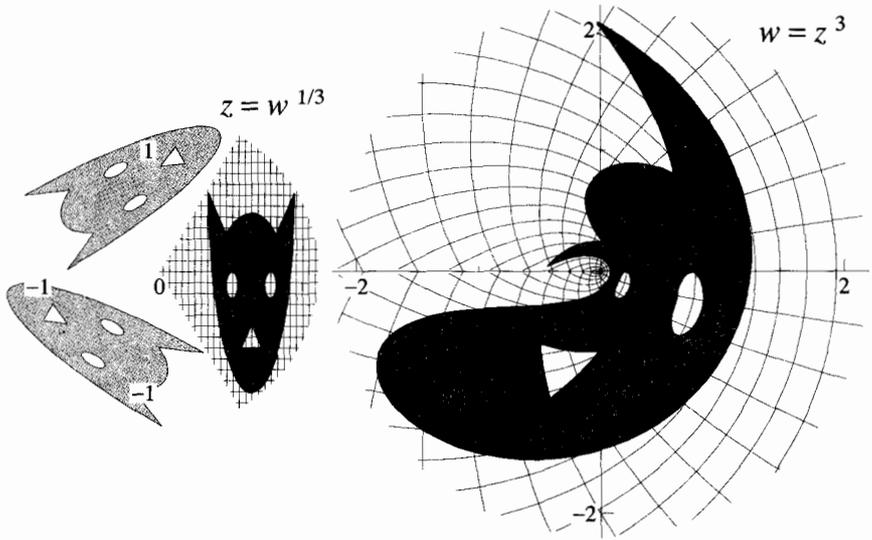


Рис. 5.3. Функция $w = z^3$ и обратная к ней $z = w^{1/3}$.

Для $c = 3 + 2i$ эти корни показаны на рис. 5.2а. Следующий кандидат, $e^{6i\pi} = 1$, просто воспроизводит первый корень и не дает ничего нового. Полученные таким образом корни образуют при $n = 3$ правильную звезду типа той, что украшает автомобили марки “Мерседес”, а при $n > 3$ — многоручевые звезды, напоминающие “музыку огня”. На рис. 5.3 представлено отображение $z \mapsto w = z^3$ для меняющихся значений z и обратная к нему функция $w \mapsto z = w^{1/3} = \sqrt[3]{w}$. Животное, морда которого при этом подвергается ужасным деформациям, известно под именем “кот Арнольда”. Обратное отображение производит трех “котов” из одного.

Показательная функция и логарифм. Показательную функцию можно распространить на комплексные аргументы следующим образом:

$$(5.10) \quad e^c = e^a \cdot e^{ib} = e^a (\cos b + i \sin b) \quad \text{при} \quad c = a + ib.$$

Это определение сохраняет основное свойство показательной функции: $e^{c+w} = e^c \cdot e^w$, которое следует из равенства (5.7). Природа логарифмов отрицательных чисел дала повод к длительным и жарким диспутам между Лейбницем и Иоганном Бернулли. Эйлер (1751) дал изумительный обзор этих дискуссий, которые по возможности сохранялись в секрете, ибо подобные диспуты могли повредить престижу чистой математики как точной и строгой науки. Истинная

природа логарифмов отрицательных и комплексных чисел была тогда раскрыта Эйлером (“*Dénoüement des difficultés precedentes*” — Развязка прежних затруднений, — *фр.*) опять-таки с помощью формулы (5.4). Многие из противоречий прежних диспутов снимались тем обстоятельством, что логарифм комплексного числа представляет не *одно* число, а *бесконечное* число значений. Запишем c в полярных координатах, т. е. в виде произведения

$$c = r \cdot e^{i(\varphi + 2k\pi)}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Чтобы сохранить свойства (3.1) и (3.7) у логарифмов с комплексными аргументами, определим их так:

$$(5.11) \quad \ln(c) = \ln(r) + i(\varphi + 2k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

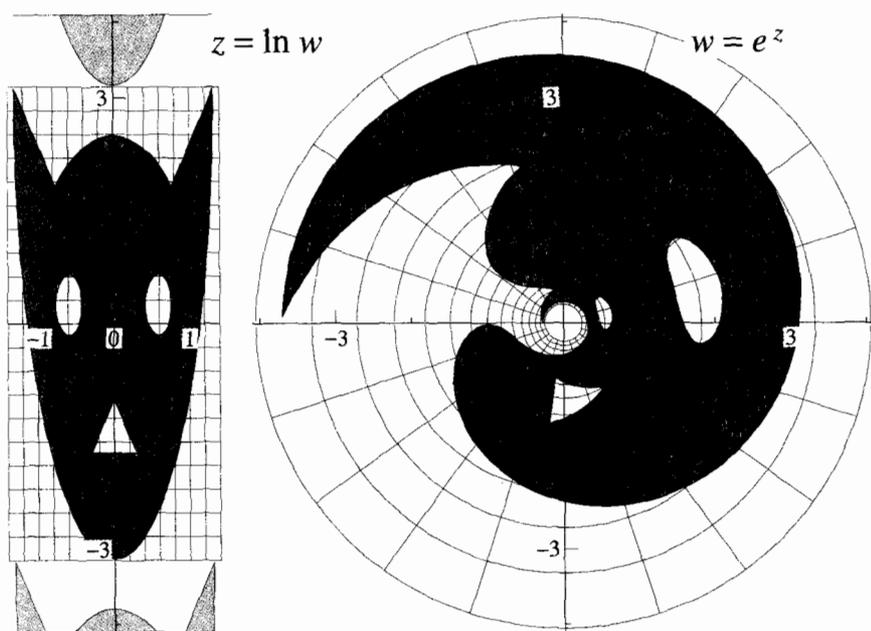


Рис. 5.4. Функция $w = e^z$ и обратная к ней $z = \ln w$.

На рис. 5.4 представлено отображение $w = e^z$ и обратное к нему. Поскольку мнимая часть логарифма — просто $\varphi = \arg(c)$, ясно, что после каждого оборота $\varphi \mapsto \varphi + 2\pi$ значения логарифмов повторяются снова и снова.

Новый взгляд на тригонометрические функции

Кратчайший путь между двумя истинами в действительной области проходит через комплексную область.

(Жак Адамар, цит. по Клайн 1972, р. 626)

Заменяя x в (5.4) на $-x$, мы получим $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$; складывая и вычитая эти формулы, получим

$$(5.12) \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$(5.13) \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$(5.14) \quad \operatorname{tg} x = \frac{1}{i} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}}.$$

Таким образом, в комплексной области тригонометрические функции тесно связаны с показательной функцией. Многие формулы из разд. I.4 оказываются связанными с формулами для e^x . Например, формулы де Муавра (4.14) просто констатируют, что $e^{inx} = (e^{ix})^n$. Однако это не является *новым доказательством*, поскольку этот вывод основан на равенстве (5.4), выведенном из формул (4.16) и (4.17) для рядов, которые, в свою очередь, были доказаны с помощью формул де Муавра.

Обратные тригонометрические функции. Если в формулы (5.12), (5.13) или (5.14) подставить переменные u вместо e^{ix} и v вместо $\sin x$, $\cos x$ или $\operatorname{tg} x$, получатся алгебраические соотношения, которые можно разрешить относительно u . В результате обратные тригонометрические функции выразятся через комплексные логарифмы следующим образом:

$$(5.15) \quad \arcsin x = -i \ln(ix + \sqrt{1-x^2}),$$

$$(5.16) \quad \arccos x = -i \ln(x + i\sqrt{1-x^2}),$$

$$(5.17) \quad \operatorname{arctg} x = \frac{i}{2} \ln\left(\frac{i+x}{i-x}\right).$$

Так как логарифмическая функция — функция многозначная, необходимо обратить внимание на выбор правильной ветви этой функции, которую надо использовать, т. е. на выбор значения k в формуле (5.11). Формула (5.17) объясняет поразительное сходство между рядом (4.24) для $y = \operatorname{arctg} x$ и рядом Грегори (3.15) для $\ln((1+x)/(1-x))$. Кроме того, формула Маккина (4.34) становится эквивалентной следующей факторизации комплексного числа i^{-1} :

$$(5.18) \quad \frac{1}{i} = \frac{i+1}{i-1} = \left(\frac{5i+1}{5i-1}\right)^4 \cdot \left(\frac{239i+1}{239i-1}\right)^{-1}.$$

Эйлера произведение для синуса

... и я уже вижу способ найти сумму ряда $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$

(И. Бернулли, из письма к его брату 22 мая 1691 г.)

Одной из великих задач, бросавших вызов математикам начала XVIII столетия, было найти выражение для суммы обратных квадратов

$$(5.19) \quad 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = ?$$

Иоганн Бернулли в течение многих десятилетий усердно искал это выражение. Позже Эйлер (1740) нашел следующее элегантное решение. Из алгебры известно, что, например,

$$(5.20) \quad 1 - Ax + Bx^2 - Cx^3 = (1 - \alpha x)(1 - \beta x)(1 - \gamma x),$$

где $1/\alpha, 1/\beta, 1/\gamma$ — корни многочлена $1 - Ax + Bx^2 - Cx^3$. Далее, первое из так называемых “тождеств Виета” имеет вид:

$$(5.21) \quad A = \alpha + \beta + \gamma.$$

Бесстрашно применив теперь тот же принцип к бесконечному ряду

$$(5.22) \quad \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \dots$$

с его бесконечным числом корней $\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$, в качестве аналога равенства (5.20) Эйлер взял

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{x} &= \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{3\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{3\pi}\right) \dots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \dots \end{aligned}$$

Сравнивая это соотношение с (5.22), в качестве аналога тождества (5.21) получим (заменив x на x^2)

$$(5.23) \quad \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \frac{1}{16\pi^2} + \frac{1}{25\pi^2} + \dots = \frac{1}{6},$$

и сумма (5.19) оказывается равной $\pi^2/6$. Нельзя не признать смелость этого рассуждения, давшего такой красивый результат, но математическая строгость его была недостаточной даже по меркам восемнадцатого столетия. Поэтому позже Эйлер нашел лучшее доказательство (1748, *Introductio*, §156). Начнем с разложения на множители многочлена $z^n - 1$.

Корни из единицы. Многочлен $z^n - 1$ имеет корни $z = \sqrt[n]{1} = e^{2ik\pi/n}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Так как $e^{2i\pi} = 1$, то только первые n последовательных значений k порождают различные корни. Например, для $n = 7$ эти значения таковы:

$$\begin{aligned} &1, e^{2i\pi/7}, e^{-2i\pi/7}, \\ &e^{4i\pi/7}, e^{-4i\pi/7}, e^{6i\pi/7}, e^{-6i\pi/7}. \end{aligned}$$

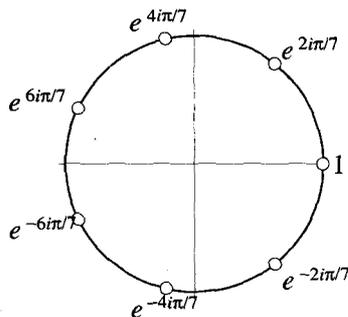
Факторизация, аналогичная (5.20), имеет место и для многочленов с комплексными корнями. Действительно, разделив многочлен $p(z)$ на $(z - c)$, мы получим

$$p(z) = (z - c)q(z) + d,$$

где $d = p(c)$. Если c является корнем $p(z)$, то мы получим факторизацию $p(z) = (z - c)q(z)$. Применяя ту же процедуру к $q(z)$ и повторно к получающимся многочленам, мы получим разложение $p(z)$ на линейные множители $(z - c)$. Таким образом, для нашего полинома $z^7 - 1$ мы получим

$$\begin{aligned} z^7 - 1 &= (z - 1) \cdot (z - e^{2i\pi/7}) \cdot (z - e^{-2i\pi/7}) \\ &\cdot (z - e^{4i\pi/7}) \cdot (z - e^{-4i\pi/7}) \cdot (z - e^{6i\pi/7}) \cdot (z - e^{-6i\pi/7}). \end{aligned}$$

Для общего случая справедлива



(5.1) **Теорема** (Эйлер 1748, *Introductio*, Чаp. IX). Для нечетных n имеет место разложение

$$(5.24) \quad \begin{aligned} z^n - 1 &= (z - 1) \prod_{k=1}^{(n-1)/2} (z - e^{2ik\pi/n})(z - e^{-2ik\pi/n}) \\ &= (z - 1) \prod_{k=1}^{(n-1)/2} (z^2 - 2z \cos \frac{2k\pi}{n} + 1). \end{aligned}$$

Доказательство. Первое равенство есть разложение на множители, о котором шла речь. Второе равенство получается с помощью (5.13). \square

Посредством замены $z \rightarrow z/a$ в (5.24) и умножения на a^n можно получить несколько более общий результат:

$$(5.25) \quad z^n - a^n = (z - a) \prod_{k=1}^{(n-1)/2} (z^2 - 2az \cos \frac{2k\pi}{n} + a^2).$$

Подставим теперь в (5.25) $z = (1 + x/N)$, $a = (1 - x/N)$ и положим $n = N$. Это дает

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N - \left(1 - \frac{x}{N}\right)^N &= \frac{2x}{N} \cdot \prod_{k=1}^{(N-1)/2} \left(2 + \frac{2x^2}{N^2} - 2\left(1 - \frac{x^2}{N^2}\right) \cos \frac{2k\pi}{N}\right) \\ &= \frac{2x}{N} \cdot \prod_{k=1}^{(N-1)/2} 2 \left(\left(1 - \cos \frac{2k\pi}{N}\right) + \frac{x^2}{N^2} \left(1 + \cos \frac{2k\pi}{N}\right) \right) \\ &= C_N \cdot x \cdot \prod_{k=1}^{(N-1)/2} \left(1 + \frac{x^2}{N^2} \cdot \frac{1 + \cos(2k\pi/N)}{1 - \cos(2k\pi/N)}\right). \end{aligned}$$

Так как коэффициент при x в многочлене $(1 + x/N)^N - (1 - x/N)^N$ равен 2 (см. теорему 2.1), то $C_N = 2$ для всех N . При больших N левая часть нашего равенства приближается к $e^x - e^{-x}$ (теорема 2.3), а в правой части k -й множитель стремится к

$$\left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right),$$

потому что $\cos y \approx 1 - y^2/2$ при малых y . В результате получается

$$(5.26) \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x \left(1 + \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 + \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 + \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \dots$$

Поскольку множителей бесконечно много, при предельном переходе здесь требуется осторожность (обоснование см. в упр. III.2.5). Мы получим в левой части $\sin x$, заменив x на ix . Итак, знаменитая формула выведена теперь способом, который заслуживает больше доверия.

(5.2) Теорема (Эйлер 1748, §158). *Функция $\sin x$ может быть разложена в бесконечное произведение*

$$\sin x = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right) = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \cdot \dots \quad \square$$

Сходимость этого произведения иллюстрирует рис. 5.5. Видно, что сходимость лучше при меньших значениях $|x|$.

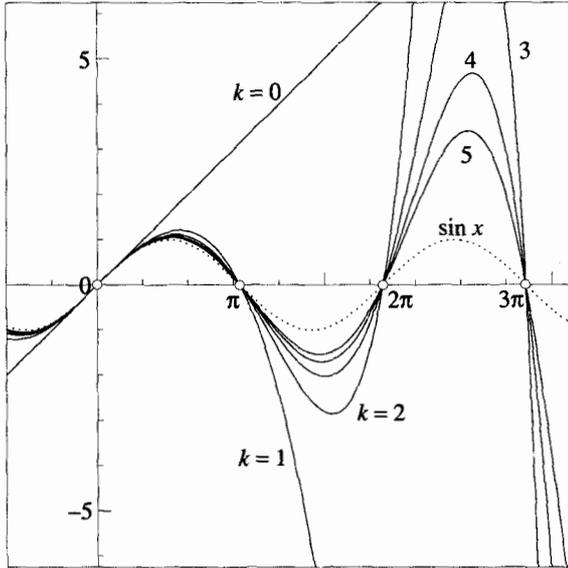


Рис. 5.5. Сходимость произведения в теореме 5.2.

Произведение Валлиса. Положим $x = \pi/2$ в формуле теоремы 5.2. Это даст

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{2} = 1 &= \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \left(1 - \frac{1}{36}\right) \dots \\ &= \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \left(1 + \frac{1}{6}\right) \dots \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{4} \frac{5}{6} \frac{7}{6} \dots \end{aligned}$$

и мы получаем знаменитое произведение Валлиса (1655):

$$(5.27) \quad \frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \frac{8 \cdot 8}{7 \cdot 9} \cdot \frac{10 \cdot 10}{9 \cdot 11} \cdot \dots$$

Замечание. Оригинальное доказательство Валлиса исходило из того факта, что $\pi/2$ равно площади под кривой $(1 - x^2)^{1/2}$ (между -1 и $+1$). Затем следовала сложная процедура интерполяции, основанная на известных площадях под

кривыми $(1 - x^2)^0, (1 - x^2)^1, (1 - x^2)^2, \dots$. Как раз этой идеей руководствовался Ньютон, когда он открыл общую биномиальную теорему, обсуждавшуюся в разд. I.2.

Упражнения

5.1 (Эйлер 1748, §185.) Положите $x = \pi/6$ в формуле теоремы 5.2 и получите с помощью равенства $\sin(\pi/6) = 1/2$ другое произведение для $\pi/2$:

$$(5.28) \quad \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \frac{12 \cdot 12}{11 \cdot 13} \cdot \frac{18 \cdot 18}{17 \cdot 19} \cdot \frac{24 \cdot 24}{23 \cdot 25} \cdot \dots$$

А теперь положите $x = \pi/4$, умножьте полученное произведение на произведение Валлиса, и получится следующая интересная формула:

$$(5.29) \quad \sqrt{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \frac{10 \cdot 10}{9 \cdot 11} \cdot \frac{14 \cdot 14}{13 \cdot 15} \cdot \frac{18 \cdot 18}{17 \cdot 19} \cdot \dots$$

5.2 (Эйлер, *Introductio* §166, 168.) Обобщите формулы (5.19) и (5.21) следующим образом. Пусть

$$1 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \dots = (1 + \alpha_1 z)(1 + \alpha_2 z)(1 + \alpha_3 z) \dots$$

(здесь z стоит вместо x^2 в теореме 5.2). Суммы степеней коэффициентов обозначим так:

$$\begin{aligned} S_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots \\ S_2 &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \dots \\ S_3 &= \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 + \dots, \end{aligned}$$

и так далее. А теперь постройте “*demonstratio gemina theorematis Neutoniani*” — конструктивное доказательство ньютоновских теорем (*лат.*)

$$(5.30) \quad \begin{aligned} S_1 &= A_1 \\ S_2 &= A_1 S_1 - 2A_2 \\ S_3 &= A_1 S_2 - A_2 S_1 + 3A_3 \\ S_4 &= A_1 S_3 - A_2 S_2 + A_3 S_1 - 4A_4 \end{aligned}$$

и выведите из этих формул и теоремы 5.2 следующие суммы:

$$(5.31) \quad \begin{aligned} 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots &= \frac{\pi^2}{6} = \frac{2^2 \pi^2}{2 \cdot 2!} \cdot \frac{1}{6} \\ 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots &= \frac{\pi^4}{90} = \frac{2^4 \pi^4}{2 \cdot 4!} \cdot \frac{1}{30} \\ 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \dots &= \frac{\pi^6}{945} = \frac{2^6 \pi^6}{2 \cdot 6!} \cdot \frac{1}{42} \\ 1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \dots &= \frac{\pi^8}{9450} = \frac{2^8 \pi^8}{2 \cdot 8!} \cdot \frac{1}{30} \end{aligned}$$

Замечание. На самом деле Эйлер написал эти выражения немного иначе, и связь с “числами Бернулли” (см. разд. II.10) стала ему ясна только через несколько лет (1755, *Institutiones Calculi Differentialis*, Caput V, §§124, 125, 151, “ingrediuntur in expressiones summarum...” — входят в выражения для сумм, лат.).

- 5.3 (Эйлер 1748, §169.) Покажите по аналогии с предыдущим доказательством, отправляясь от корней уравнения $z^n + 1 = 0$, что

$$\cos x = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4x^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right) = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right) \left(1 - \frac{4x^2}{25\pi^2}\right) \dots$$

С помощью этого произведения получите такие выражения, как

$$(5.32) \quad \begin{aligned} 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots &= \frac{\pi^2}{8} \\ 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \dots &= \frac{\pi^4}{96}. \end{aligned}$$

Покажите, что (5.32) можно получить также непосредственно из (5.31).

- 5.4 (Эйлер 1748, §§189–198.) Прологарифмируйте формулу из теоремы 5.2. При этом произведение преобразуется в сумму. Найдите остроумные способы вычисления

$$\ln(\sin(x))$$

с использованием выражений (5.31).

- 5.5 С помощью формулы Кардано (1.14) вычислите все корни уравнения

$$(5.33) \quad x^3 - 5x + 2 = 0.$$

Несмотря на то, что все эти корни действительные, приходится вычислять кубические корни из комплексного числа.

- 5.6 Упростите вычисления корней уравнения (5.33), используя следующую идею (Виет 1591а). Положите $x = \mu \cos \alpha$ и замените $\cos \alpha$ на x/μ в тождестве $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$, чтобы получить

$$x^3 - \frac{3\mu^2}{4}x - \frac{\mu^3}{4} \cos 3\alpha = 0.$$

Сравнивая это уравнение с (5.33), найдите μ , α и x .

1.6 Непрерывные дроби

Теория непрерывных дробей — одна из наиболее полезных теорий в арифметике ... Поскольку она отсутствует в большинстве работ по арифметике и алгебре, она не может быть широко известной среди геометров. Я буду удовлетворен, если смогу способствовать тому, чтобы сделать ее чуть более привычной. (Лагранж 1793, *Oeuvres*, vol. 7, p. 6–7)

Мы скажем поэтому, что площадь круга относится к квадрату диаметра как 1 к $1 \times \frac{9}{8} \times \frac{25}{24} \times \frac{49}{48} \times \frac{81}{80} \times u$ т. д. до бесконечности, или как 1 к

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{9}{2 + \frac{25}{2 + \frac{49}{2 + \frac{81}{2 + u \text{ т. д. до бесконечности}}}}}}$$

Как эти приближения были получены ... объяснять здесь было бы слишком долго, но это смогут узнать те, кому будет угодно заглянуть в этот трактат. (Дж. Валлис 1685, *A Treatise of Algebra*, p. 318)

Мы уже видели, сколь полезны в анализе бесконечные суммы и бесконечные произведения. Обсудим теперь третью возможность “infinitorum” (бесконечных, — *лат.*) процессов — бесконечное деление, т. е. непрерывные (или цепные) дроби.

Источники

Алгоритм Евклида. Этот алгоритм для вычисления общего наибольшего делителя двух целых чисел известен уже более 2000 лет (Евклид, пригл. 300 г. до н. э., *Начала*, книга VII, предложения 1 и 2). Пусть заданы два положительных целых числа, например, 105 и 24. Разделив большее число на меньшее, получим частное 4 и 9 в остатке, т. е.

$$105/24 = 4 + 9/24.$$

Продолжим теперь этот процесс с делителем и остатком:

$$24/9 = 2 + 6/9, \quad 9/6 = 1 + 3/6, \quad 6/3 = 2.$$

Алгоритм должен закончиться, потому что делители образуют строго убывающую последовательность положительных целых чисел. Последний ненулевой остаток (здесь 3) и есть наибольший общий делитель, а скомбинировав последовательные шаги, мы получим

$$(6.1) \quad \frac{105}{24} = 4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$$

Иррациональные числа. Если эту форму алгоритма Евклида (последовательное вычитание целой части и обращение остатка) применить к иррациональному числу, то алгоритм не может закончиться, потому что конечное выражение, как в (6.1), должно быть рациональным. Например, для $\alpha = \sqrt{2}$ мы получим

$$1.4142\dots = 1 + 0.4142 = 1 + \frac{1}{2.4142\dots} = 1 + \frac{1}{2 + 0.4142\dots}.$$

Появление в последнем знаменателе вновь десятичных знаков $\sqrt{2}$ неудивительно, потому что $\sqrt{2}$ удовлетворяет как раз уравнению $\alpha = 1 + 1/(1 + \alpha)$ (чтобы убедиться в этом, умножьте обе части уравнения на $1 + \alpha$). Продолжая, мы получим следующую формулу Бомбелли (1572):

$$(6.2) \quad \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}.$$

Простейшая из всех подобных последовательностей получается для “золотого сечения”:

$$(6.3) \quad \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.61803 = 1 + \frac{1}{1.61803} = \dots = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}.$$

Приведем еще несколько примеров:

$$(6.4) \quad \sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \dots}}} \quad e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \dots}}}}}}.$$

$$(6.5) \quad \frac{e-1}{e+1} = \frac{1}{2 + \frac{1}{6 + \frac{1}{10 + \frac{1}{14 + \dots}}}} \quad \pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}$$

Частные 1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, ..., которые появляются для $\sqrt{3}$, повторяются периодически. Частные для e и $(e-1)/(e+1)$ тоже проявляют регулярное поведение. Ниже мы объясним это для $(e-1)/(e+1)$, т.е. для $\text{th}(1/2)$ (см. равенство (6.31) ниже). Однако в случае e регулярность сложнее (см. Гурвиц, *Werke* vol. 2, p. 130), а в случае π она отсутствует вовсе, даже если сравнивать тысячи частных: Ламберт (1770а) сравнил 27 частных, Лохс (1963) сравнил 968 частных.

Дробь лорда Броункера для $\pi/4$. Через год после открытия Валлисом бесконечного произведения для π лорду Броункеру удалось преобразовать его в интересную цепную дробь (см. цитату в начале раздела и уравнение (6.23) ниже). Этот результат побудил Валлиса включить теорию непрерывных дробей на последних двух страницах его “*Арифметики бесконечностей*” (1655, см. *Opera*, vol. I, p. 474–475).

Непрерывная дробь Ламберта для $\operatorname{tg} x$

Но побудительный мотив к отысканию этих формул пришел из Анализа бесконечных Эйлера, где выражение ... появляется в форме примера.
(Ламберт 1770а)

Как мы видели в разд. I.4, функция $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$ имеет не очень простое разложение в бесконечный ряд. Мы будем отправляться от формулы

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - x^3/6 + x^5/120 - \dots}{1 - x^2/2 + x^4/24 - \dots} = \frac{x}{\frac{1 - x^2/2 + x^4/24 - \dots}{1 - x^2/6 + x^4/120 - \dots}}.$$

При $x \rightarrow 0$ знаменатель стремится к единице. Поэтому вычтем 1 и получим

$$\operatorname{tg} x = \frac{x}{1 - \frac{x^2/3 - x^4/30 + \dots}{1 - x^2/6 + x^4/120 - \dots}} = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{\frac{1 - x^2/6 + \dots}{1/3 - x^2/30 + \dots}}}.$$

Здесь при $x \rightarrow 0$ последний знаменатель стремится к 3. Вычтя 3, получим

$$\operatorname{tg} x = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{\dots}}}.$$

Продолжая в том же духе, мы найдем, что следующий знаменатель равен 5, затем 7, и т. д. Для человека восемнадцатого века (Ламберт 1768) далее не оставалось сомнений, что следующая формула верна вообще:

$$(6.6) \quad \operatorname{tg} x = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{3 - \frac{x^2}{5 - \frac{x^2}{7 - \frac{x^2}{9 - \dots}}}}} = \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{3 - \frac{1}{\frac{5}{x} - \frac{1}{7 - \frac{1}{x} - \dots}}}}}.$$

Через пару десятилетий Лежандр (1794) дал полное доказательство этой формулы (см. упр. 6.6).

Выражение типа

$$(6.7) \quad q_0 + \frac{p_1}{q_1 + \frac{p_2}{q_2 + \frac{p_3}{q_3 + \dots}}}$$

называется *непрерывной (или цепной) дробью*. Дробь $p_1/q_1, p_2/q_2, p_3/q_3, \dots$ называют *звеньями* цепной дроби. Если $p_k = 1$, непрерывная дробь называется *регулярной (или обыкновенной)*.

Подходящие дроби

Если непрерывную дробь (6.7) оборвать на k -м звене, получается рациональное число (когда все p_k и q_k — целые числа)

$$(6.8) \quad q_0 + \frac{p_1}{q_1 + \frac{p_2}{q_2 + \dots + \frac{p_k}{q_k}}},$$

которое называют k -й *подходящей дробью* непрерывной дроби. Мы хотим записать эти рациональные числа в виде отношений двух целых чисел. Первые шаги сделать легко:

$$(6.9a) \quad q_0 + \frac{p_1}{q_1} = \frac{q_0 q_1 + p_1}{q_1},$$

$$(6.9b) \quad q_0 + \frac{p_1}{q_1 + \frac{p_2}{q_2}} = \frac{q_0 q_1 q_2 + q_0 p_2 + p_1 q_2}{q_1 q_2 + p_2}.$$

Обозначим A_k числители и B_k знаменатели при вычислении выражения (6.8) таким способом. Из (6.9) мы получаем

$$\begin{aligned} A_0 &= q_0, & B_0 &= 1, \\ A_1 &= q_0 q_1 + p_1, & B_1 &= q_1, \\ A_2 &= q_0 q_1 q_2 + q_0 p_2 + p_1 q_2, & B_2 &= q_1 q_2 + p_2. \end{aligned}$$

Посмотрим теперь на эти формулы, как сказал Эйлер, “tamen attendenti statim patebit” (чуть повнимательнее — *лат.*), и мы обнаружим следующую красивую структуру:

$$(6.10) \quad A_2 = q_2 A_1 + p_2 A_0, \quad B_2 = q_2 B_1 + p_2 B_0.$$

Для вычисления A_3 и B_3 , отношение которых должно быть равно

$$q_0 + \frac{p_1}{q_1 + \frac{p_2}{q_2 + \frac{p_3}{q_3}}},$$

мы могли бы по образцу (6.9b) взять формулы для A_2 и B_2 и заменить всюду q_2 на величину $q_2 + p_3/q_3$. Но получаемые таким образом выражения в общем случае не будут целыми числами. Поэтому умножим оба числа на q_3 , что не изменит их отношения, и из (6.10) получим

$$A_3 = \left((q_2 + p_3/q_3) A_1 + p_2 A_0 \right) \cdot q_3, \quad B_3 = \left((q_2 + p_3/q_3) B_1 + p_2 B_0 \right) \cdot q_3.$$

После упрощения эти два выражения примут вид

$$A_3 = q_3 A_2 + p_3 A_1, \quad B_3 = q_3 B_2 + p_3 B_1.$$

Эта структура будет теперь повторяться снова и снова, и мы приходим к следующей теореме.

(6.1) **Теорема** (Валлис 1655, Эйлер 1737b). Числители и знаменатели подходящих дробей (6.8) определяются рекурсивно формулами

$$(6.11) \quad \begin{cases} A_k = q_k A_{k-1} + p_k A_{k-2}, \\ B_k = q_k B_{k-1} + p_k B_{k-2}, \end{cases}$$

причем

$$(6.12) \quad \begin{array}{lll} A_{-1} = 1 & A_0 = q_0 & A_1 = q_1 q_0 + p_1 \\ B_{-1} = 0 & B_0 = 1 & B_1 = q_1. \end{array}$$

(6.2) **Примеры.** Уравнения (6.11) и (6.12), будучи применены к рассмотренным выше примерам, порождают последовательности рациональных чисел:

$$\begin{aligned} \frac{1 + \sqrt{5}}{2} &\approx \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \frac{89}{55}, \frac{144}{89}, \dots \\ \sqrt{2} &\approx \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \frac{577}{408}, \frac{1393}{985}, \frac{3363}{2378}, \dots \\ \sqrt{3} &\approx \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{19}{11}, \frac{26}{15}, \frac{71}{41}, \frac{97}{56}, \frac{265}{153}, \frac{362}{209}, \frac{989}{571}, \frac{1351}{780}, \dots \\ e &\approx \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \frac{19}{7}, \frac{87}{32}, \frac{106}{39}, \frac{193}{71}, \frac{1264}{465}, \frac{1457}{536}, \frac{2721}{1001}, \dots \\ \pi &\approx \frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \frac{104348}{33215}, \dots \end{aligned}$$

которые быстро приближаются к исходным иррациональным числам (см. рис. 6.1).

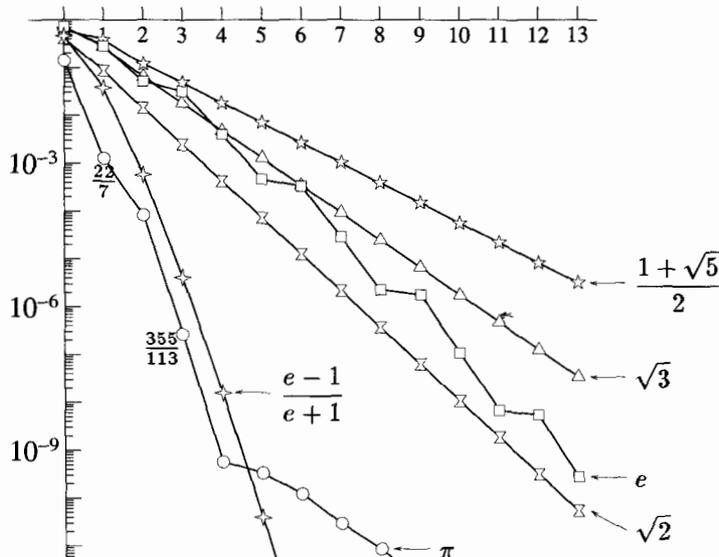


Рис. 6.1. Поведение ошибок подходящих дробей A_k/B_k (в логарифмической шкале).

Приближения для $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ были известны уже в древности. Архимед использовал неравенства $265/153 < \sqrt{3} < 1351/780$ без объяснений. Две подходящие дроби $22/7$ (Архимед) и $355/113$ (Цу Чан-ши около 480 г. в Китае, Адриан Метиус (1571–1635) в Европе) для числа π имеют качество выше среднего. Объясняется это тем, что первый отбрасываемый знаменатель q_{k+1} велик (15 и 292 соответственно). Два другие очень точные приближения для π , которые являются 11-й и 26-й подходящими дробями соответственно, вычислил И. Арима в 1766 г. в Японии: $5419351/1725033$ и $428224593349304/136308121570117$ (см. Хаяси 1902). С другой стороны, для золотого сечения все $q_k = 1$ и сходимость получается медленной. В этом случае (6.11) становится рекуррентной формулой для чисел Фибоначчи (Леонардо из Пизы, 1170–1250 гг., называемый также Фибоначчи). Некоторые подходящие дроби непрерывной дроби (6.6) для $\operatorname{tg} x$

$$(6.13) \quad \frac{x}{1}, \quad \frac{3x}{3-x^2}, \quad \frac{15x-x^3}{15-6x^2}, \quad \frac{105x-10x^3}{105-45x^2+x^4}, \quad \frac{945x-105x^3+x^5}{945-420x^2+15x^4}, \dots$$

показаны на рис. 6.2, они хорошо приближают функцию $\operatorname{tg} x$ даже при переходе через точки разрыва $x = \pi/2, 3\pi/2, \dots$

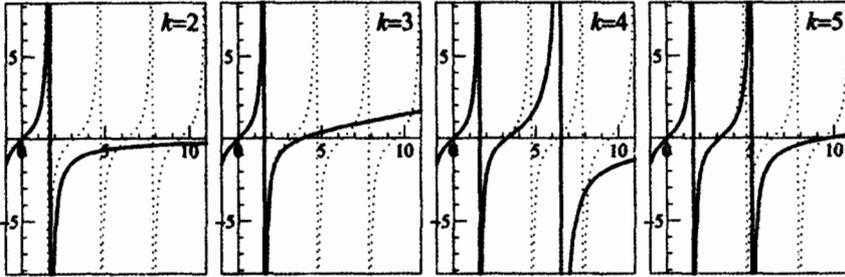


Рис. 6.2. Подходящие дроби непрерывной дроби для $\operatorname{tg} x$.

Бесконечные ряды из непрерывных дробей. Для разности двух последовательных подходящих дробей справедливы тождества

$$(6.14) \quad \frac{A_{k+1}}{B_{k+1}} - \frac{A_k}{B_k} = \frac{A_{k+1}B_k - A_kB_{k+1}}{B_kB_{k+1}} = (-1)^k \cdot \frac{p_1p_2 \dots p_{k+1}}{B_kB_{k+1}}.$$

В справедливости последнего равенства можно убедиться так: из (6.11) следует, что

$$\begin{aligned} A_{k+1}B_k - A_kB_{k+1} &= (q_{k+1}A_k + p_{k+1}A_{k-1})B_k - A_k(q_{k+1}B_k + p_{k+1}B_{k-1}) \\ &= -p_{k+1}(A_kB_{k-1} - A_{k-1}B_k) = \dots \\ &= p_2 \dots p_{k+1}(-1)^k (A_1B_0 - A_0B_1), \end{aligned}$$

а из (6.12) вытекает равенство $(A_1B_0 - A_0B_1) = p_1$. Запишем подходящую дробь A_k/B_k в таком виде:

$$\frac{A_k}{B_k} = \left(\frac{A_k}{B_k} - \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} \right) + \left(\frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} - \frac{A_{k-2}}{B_{k-2}} \right) + \dots + \left(\frac{A_1}{B_1} - \frac{A_0}{B_0} \right) + \frac{A_0}{B_0}.$$

Тогда из (6.14) видно, что

$$(6.15) \quad \frac{A_k}{B_k} = q_0 + \frac{p_1}{B_1} - \frac{p_1 p_2}{B_1 B_2} + \frac{p_1 p_2 p_3}{B_2 B_3} - \dots + (-1)^{k-1} \cdot \frac{p_1 p_2 \dots p_k}{B_{k-1} B_k}$$

и, таким образом, справедлива

(6.3) Теорема. *Подходящие дроби (6.7) являются частичными суммами ряда*

$$(6.16) \quad \boxed{q_0 + \frac{p_1}{B_1} - \frac{p_1 p_2}{B_1 B_2} + \frac{p_1 p_2 p_3}{B_2 B_3} - \frac{p_1 p_2 p_3 p_4}{B_3 B_4} + \dots}$$

□

Для *регулярных* цепных дробей, у которых все $p_k = 1$, этот ряд имеет вид

$$(6.16') \quad q_0 + \frac{1}{B_1} - \frac{1}{B_1 B_2} + \frac{1}{B_2 B_3} - \frac{1}{B_3 B_4} + \dots$$

Так как $1/(B_{k-1} B_k)$ есть наименьшее возможное расстояние между двумя рациональными числами, имеющими знаменатели B_{k-1} и B_k , то интервал между A_{k-1}/B_{k-1} и A_k/B_k не может содержать рационального числа со знаменателем, не превышающим B_k .

Непрерывные дроби из бесконечных рядов. Пусть дан ряд

$$(6.17) \quad \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} - \frac{1}{c_4} + \frac{1}{c_5} - + \dots,$$

где c_i целые числа. Решим такую задачу: найти такие целые числа p_i, q_i , чтобы ряд (6.17) почленно совпадал с рядом (6.16) (при $q_0 = 0$).

Решение. Положим $p_1 = 1$ и $q_1 = B_1 = c_1$. Далее, разделим друг на друга два последовательных члена ряда (6.16), чтобы упростить произведения p_i , что даст

$$(6.18) \quad c_{k-1} B_k = c_k p_k B_{k-2}.$$

Это напоминает уравнение (6.11), если отвлечься от множителей c_{k-1} и c_k . Поэтому вычтем из (6.18) уравнение (6.11), сначала умноженное на c_{k-1} , а затем на c_k , и получим

$$\begin{aligned} c_{k-1} q_k B_{k-1} &= (c_k - c_{k-1}) p_k B_{k-2}, \\ (c_{k-1} - c_k) B_k &= -c_k q_k B_{k-1}. \end{aligned}$$

В первой формуле мы заменим k на $k+1$ и затем разделим два этих выражения. Это исключает B_k и дает

$$(6.19) \quad \frac{c_k q_{k+1}}{c_k - c_{k-1}} = \frac{(c_{k+1} - c_k) p_{k+1}}{c_k q_k}.$$

Разумеется, p_i, q_i определяются неоднозначно. Поскольку мы хотим, чтобы это были целые числа, то естественным выбором, который удовлетворяет равенству (6.19), будет

(6.20)

$$p_{k+1} = c_k^2, \quad q_{k+1} = c_{k+1} - c_k$$

при $k \geq 1$. Итак, мы получили следующую формулу Эйлера (1748, §369):

(6.21)

$$\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} - \frac{1}{c_4} + \dots = \frac{1}{c_1 + \frac{c_1^2}{c_2 - c_1 + \frac{c_2^2}{c_3 - c_2 + \frac{c_3^2}{c_4 - c_3 + \dots}}}}$$

Применение этой формулы к двум известным рядам (см. разделы I.3 и I.4) дает

(6.22)

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{4}{1 + \frac{9}{1 + \frac{16}{1 + \dots}}}}}}$$

(6.23)

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{9}{2 + \frac{25}{2 + \frac{49}{2 + \dots}}}}}}$$

Вторая непрерывная дробь была найдена лордом Броункером, а здесь мы ее получили из ряда Лейбница. Аналогично доказывается формула (Эйлер 1748, §370)

(6.24)

$$\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_1 c_2} + \frac{1}{c_1 c_2 c_3} - \dots = \frac{1}{c_1 + \frac{c_1}{c_2 - 1 + \frac{c_2}{c_3 - 1 + \frac{c_3}{c_4 - 1 + \dots}}}}$$

из которой следует, например, что

(6.25)

$$1 - \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \dots = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{2 + \frac{3}{3 + \frac{4}{4 + \dots}}}}}}$$

Иррациональность

У меня есть серьезные основания сомневаться, что настоящая статья будет прочитана или даже понята теми, кто мог бы извлечь из нее наибольшую пользу, а именно, теми, кто тратит много времени и усилий на попытки решить задачу квадратуры круга. Всегда будет достаточно таких лиц ..., которые очень мало понимают в геометрии ... (Ламберт 1770а)

Одной из нерешенных великих задач классического анализа была квадратура круга (т. е. построение числа π) с помощью линейки и циркуля. Ламберт был одним из первых, кто стал думать, что эта задача, бросавшая вызов математикам на протяжении двух тысячелетий, неразрешима. Первым указанием на такой результат могло бы быть то обстоятельство, что π — иррациональное число. Поэтому была бы интересна теорема, утверждающая, что бесконечная непрерывная дробь представляет иррациональное число.

Первая трудность. Может случиться, что непрерывная дробь не представляет вообще никакого числа. Чтобы в этом убедиться, возьмем ряд

$$(6.26) \quad \frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \frac{6}{5} - \frac{7}{6} + \dots$$

Понятно, что он не сходится, потому что его члены стремятся к ± 1 . Чтобы получить соответствующую непрерывную дробь, положим в (6.17) $c_k = k/(k+1)$ и из (6.19) после упрощения получим

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1} \cdot q_k} = k^3(k+2).$$

Возьмем целые $p_{k+1} = k^3(k+2)$ и $q_k = 1$. Легко убедиться, что у непрерывной дроби

$$(6.27) \quad \frac{2}{1 + \frac{3}{1 + \frac{32}{1 + \frac{135}{1 + \dots}}}}$$

ее подходящие дроби не стремятся ни к какому действительному числу.

Вторая трудность. Существуют бесконечные непрерывные дроби, представляющие рациональные числа. Например, для рационального числа $2 = 1 + 2/2$, подставляя повторно это представление 2 в знаменатели, мы получим

$$(6.28) \quad 2 = 1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{1 + \dots}}}$$

(6.4) Теорема. Если p_j и q_j — целые числа, и существует такой индекс j_0 , что для всех $j \geq j_0$

$$(6.29) \quad 0 < p_j \leq q_j,$$

то непрерывная дробь (6.7) сходится к некоторому числу α , которое является иррациональным.

Доказательство. Без потери общности можно принять, что условия $0 < p_j \leq q_j$ выполняются для всех j . В противном случае рассмотрим непрерывную дробь, начинающуюся с p_{j_0}/q_{j_0} . Сходимость этой непрерывной дроби и ее иррациональность равносильны сходимости и иррациональности исходной непрерывной дроби. Предположение $0 < p_j \leq q_j$ гарантирует, что подходящие дроби нашей непрерывной дроби стремятся к некоторому действительному числу. Это следует из “критерия Лейбница”, который обсуждается в разд. III.2. Следуя идее Лежандра (1794, *Eléments de Géométrie*, Note IV), запишем непрерывную дробь (6.7) без q_0 в таком виде:

$$(6.30) \quad \alpha = \frac{p_1}{q_1 + \beta}, \quad \text{где} \quad \beta = \frac{p_2}{q_2 + \frac{p_3}{q_3 + \dots}}$$

Так как $q_1 \geq p_1$ и $\beta > 0$, то $\alpha < 1$. Предположим теперь, что $\alpha = B/A$, где $0 < B < A$, является рациональным числом. Тогда из (6.30) мы получим

$$\beta = \frac{p_1 - q_1\alpha}{\alpha} = \frac{Ap_1 - Bq_1}{B},$$

так что β выражается как рациональное число, у которого знаменатель *меньше*, чем у α . Повторяя то же рассуждение для $\beta = p_2/(q_2 + \gamma)$ и продолжая в том же духе, мы будем получать все меньшие и меньшие знаменатели, которые все являются целыми числами. Но это не может повторяться бесконечное число раз. \square

Отрицательные p_j . Заключение теоремы 6.4 также верно, если (6.29) заменить на

$$(6.29') \quad 2|p_j| \leq q_j - 1.$$

В этом можно убедиться, повторно применяя тождество (верное при $p_j < 0$)

$$q_{j-1} + \frac{p_j}{q_j + \beta} = (q_{j-1} - 1) + \frac{1}{1 + \frac{|p_j|}{q_j - |p_j| + \beta}},$$

что при выполнении условия (6.29') преобразует непрерывную дробь в другую, удовлетворяющую условию (6.29).

(6.5) Теорема (Ламберт 1768, 1770а; Лежандр 1794). *Для любого рационального x ($x \neq 0$) значение $\text{tg } x$ иррационально.*

Доказательство. Предположим, что $x = m/n$ — рациональное число, и подставим его в формулу (6.6):

$$(6.31) \quad \text{tg } \frac{m}{n} = \frac{m/n}{1 - \frac{m^2/n^2}{3 - \frac{m^2/n^2}{5 - \frac{m^2/n^2}{7 - \dots}}}} = \frac{m}{n - \frac{m^2}{3n - \frac{m^2}{5n - \frac{m^2}{7n - \dots}}}}.$$

Справа мы получили непрерывную дробь, в которой все члены — целые числа. Поскольку множители $1, 3, 5, 7, 9, \dots$ растут неограниченно, условие (6.29') выполняется для любых m и n , начиная с некоторого индекса i_0 . \square

Такой же результат справедлив и для функции arctg . Действительно, если y рационально, то $x = \operatorname{arctg} y$ должно быть иррациональным числом, ибо в противном случае $y = \operatorname{tg} x$ было бы иррациональным числом в силу теоремы 6.5. В частности, $\pi = 4 \operatorname{arctg} 1$ должно быть иррациональным числом. Доказать аналогичный результат для гиперболического тангенса $\operatorname{th} x = (e^x - e^{-x}) / (e^x + e^{-x}) = (e^{2x} - 1) / (e^{2x} + 1)$ даже легче, поскольку все знаки “минус” в (6.31) перейдут в знаки “плюс”. Обращая последнюю формулу, мы имеем $e^x = (\operatorname{th}(x/2) - 1) / (\operatorname{th}(x/2) + 1)$, и еще получаем иррациональность значений e^x и $\ln x$ при рациональных $x \neq 0$ и $x \neq 1$ соответственно.

Упражнения

- 6.1 Покажите, что при использовании матричных обозначений числители A_k и знаменатели B_k подходящих дробей (6.8) можно выразить в следующей форме:

$$\begin{pmatrix} A_k & A_{k-1} \\ B_k & B_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 & 1 \\ p_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 & 1 \\ p_2 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} q_{k-1} & 1 \\ p_{k-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_k & 1 \\ p_k & 0 \end{pmatrix}.$$

- 6.2 Рассчитайте численно регулярные непрерывные дроби для следующих чисел:

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{7}$$

и найдите существенное различие между квадратными и кубическими корнями.

- 6.3 Покажите, что

$$\frac{1}{a + \frac{1}{a + \frac{1}{a + \frac{1}{a + \dots}}}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{a + \dots}}}}}$$

являются решениями уравнения второй степени. Вычислите их значения.

- 6.4 Длительность астрономического года равна (Эйлер 1748, §382)

$$365 \text{ суток } 5 \text{ часов } 48'55''.$$

Вычислите разложение 5 часов 48'55'' (выраженных в сутках) в регулярную непрерывную дробь, а также соответствующие подходящие дроби. Не забудьте дать ваш ценный совет папе Григорию XIII относительно его реформы календаря.

- 6.5 Дайте подробное доказательство формулы (6.24).

6.6 Докажите формулу (6.6).

Указание (Лежандр 1794). Определите функцию

$$\varphi(z) = 1 + \frac{a}{1 \cdot z} + \frac{a^2}{1 \cdot 2 \cdot z(z+1)} + \frac{a^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot z(z+1)(z+2)} + \dots$$

и покажите, что $\varphi(z) - \varphi(z+1) = \frac{a}{z(z+1)} \varphi(z+2)$. Затем определите функцию

$$(6.33) \quad \psi(z) = \frac{a \cdot \varphi(z+1)}{z \cdot \varphi(z)}, \quad \text{так что} \quad \psi(z) = \frac{a}{z + \psi(z+1)}.$$

Итерации (6.33) приводят к непрерывной дроби. Наконец, положите $a = x^2/4$, так что $\varphi(1/2) = \operatorname{ch} x$ и $x\varphi(3/2) = \operatorname{sh} x$, и замените x на ix . Заметим, что эти формулы связаны с непрерывными дробями для гипергеометрических функций (Гаусс, Гейне; см. Перрен 1913, р. 313, 353).



Л. Эйлер 1707–1783



К.Ф. Гаусс 1777–1855

С любезного разрешения Национального банка Швейцарии
и Федерального банка Германии.



Дж. Валлис 1616–1703

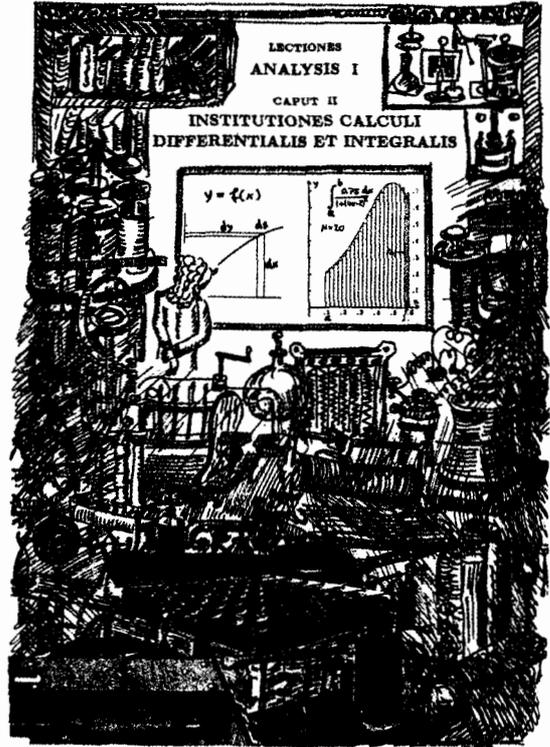


И.Г. Ламберт 1728–1777

С разрешения издательства Georg Olms Verlag Hildesheim
и университетской библиотеки в Базеле.

II

Дифференциальное и интегральное исчисление



Область применимости этого исчисления громадна: оно приложимо как к механическим, так и к геометрическим кривым; знаки радикалов не представляют для него никаких трудностей, а часто даже удобны; оно легко распространяется на любое желаемое число переменных, и сравнение бесконечно малых любых видов становится простым. Кроме того, как мы увидим в этой работе, оно приводит к бесчисленному количеству открытий удивительных свойств кривых или прямых касательных, максимумов и минимумов, точек перегиба и возврата, огибающих, каустик отраженных или преломленных лучей и т. д.

(Маркиз де Лопиталь 1696, введение к "Анализу бесконечно малых")

Эта глава посвящена знакомству с дифференциальным и интегральным исчислением — величайшим математическим открытием всех времен. Мы объясняем идеи Лейбница, Бернулли и Эйлера. Строгая их трактовка в духе XIX столетия будет содержанием разделов III.5 и III.6.

Приведенный выше рисунок иллюстрирует тот факт, что это исчисление высветило ярким светом темные, скрытые механизмы научных поисков.

II.1 Производная

Смею сказать, что это не только наиболее полезная и наиболее общая известная мне геометрическая задача, но даже такая, о которой я мечтал узнать.
(Декарт 1637, р. 342, в англ. переводе р. 95)

Исаак Ньютон не был приятным человеком. Известно, что его отношения с другими учеными были плохими, и в течение большей части своей дальнейшей жизни он с ними ссорился и горячо спорил... Серьезный спор возник у него с немецким философом Готтфридом Лейбницем. Лейбниц и Ньютон независимо разработали раздел математики, называющийся анализом, на котором основана большая часть современной физики ... Говорят, что после смерти Лейбница Ньютон заявил, что он глубоко удовлетворен тем, что он "разбил сердце Лейбница".

(Hawking 1988, *A brief history of time*, Bantam Editors, New York)

Какое презрение к не англичанам! Мы открыли эти методы безо всякой помощи от англичан.
(И. Бернулли 1735, *Opera*, vol. IV, р. 170)

То, что Вы сообщаете о Бернардe Нивентейте — просто пустяки. Кто удержится от смеха по поводу его смехотворной ерунды, сказанной о нашем исчислении, как будто он слеп к его преимуществам.

(Письмо И. Бернулли, цитируется по Пармантье 1989, р. 316).

Мы будем называть функцию $f(x)$ *первообразной функцией* для функций $f'(x)$, $f''(x)$, и т. д., которые производятся из нее, а эти последние мы будем называть *производными функциями* от первообразной.

(Лагранж 1797)

Задача. Пусть задана кривая $y = f(x)$. Требуется в каждой точке x найти наклон этой кривой и *касательную* или *нормаль* к ней.

Откуда возникла эта задача

- вычисление углов, под которыми пересекаются две кривые (Декарт);
- конструирование телескопов (Галилей) и часов (Гюйгенс 1673);
- нахождение максимума и минимума функции (Ферма 1638);
- скорость и ускорение движения (Галилей 1638, Ньютон 1686);
- астрономия, проверка Закона Всемирного Тяготения (Кеплер, Ньютон).

Производная

Линейная функция $y = ax + b$. Кроме фиксированного значения x , рассмотрим возмущенное значение $x + \Delta x$. Соответствующие значения y суть $y = ax + b$ и $y + \Delta y = a(x + \Delta x) + b$, следовательно, $\Delta y = a \Delta x$. Наклон прямой, который определяется как $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, равен a . На рис. 1.1 представлены функции $y = ax + 1$ при различных значениях a .

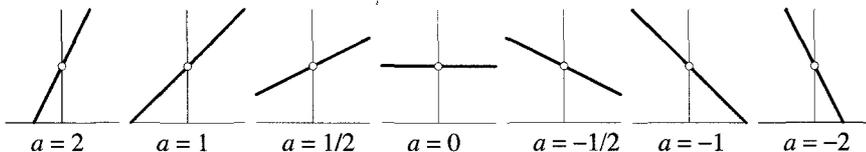
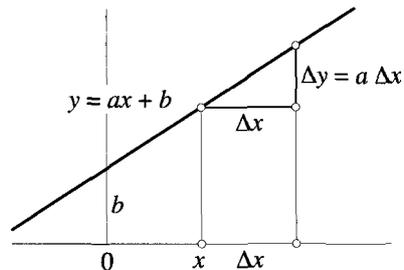


Рис. 1.1. Наклон в зависимости от a .

Парабола $y = x^2$. Если x увеличить на Δx , то y увеличится на $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$, так что (см. рис. 1.2a)

$$(1.1) \quad \Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Таким образом, наклон линии, соединяющей точку (x, y) с точкой $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ равен $2x + \Delta x$. Если Δx стремится к нулю, этот наклон будет стремиться к наклону касательной к параболе.

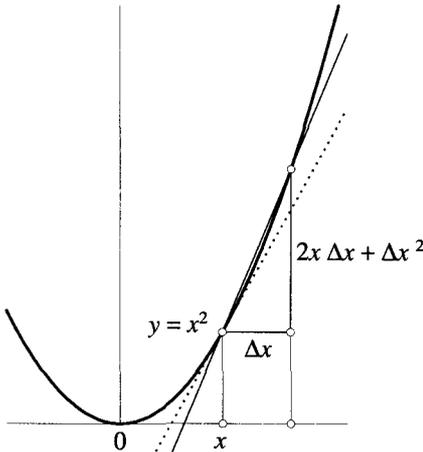


Рис. 1.2a. Касательная к параболе.

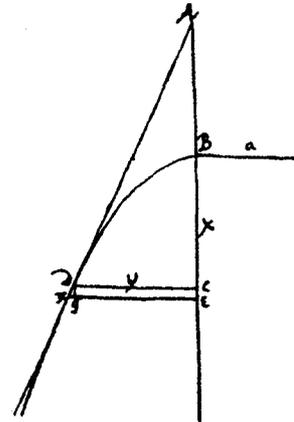


Рис. 1.2b. Касательная к параболе (чертеж И. Бернулли 1691/92).¹

Лейбниц (1684) представлял себе, что Δx и Δy становятся “бесконечно малыми” (“*tangentem invenire, esse rectam ducere, quæ duo curvæ puncta distantiam infinite parvam habentia, jungat, ...*” — “построить касательную означает провести прямую, соединяющую две точки кривой, расстояние между которыми бесконечно мало ...” — *лат.*) и обозначал их dx и dy . Далее, пренебрежем членом $(dx)^2$, который “бесконечно меньше” чем $2x dx$, и вместо (1.1) получим

$$(1.1') \quad dy = 2x dx \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = 2x.$$

Ньютон (1671, опубли. в 1736 г., р. 20) рассматривает свои переменные v , x , y , z “как постепенно и неограниченно возрастающие ... А скорости, с которыми каждая *флюента* возрастает при своем общем движении (которые я могу назвать *флюксиями*, ...), я буду обозначать теми же буквами с точками: \dot{v} , \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} ”. Их значения получаются путем “отбрасывания членов ... не равных ничему”. Ньютон категорически отказывался от публикации (“Прошу не публиковать ни одну из моих математических статей без моего специального разрешения”).

Якоб и Иоганн Бернулли переоткрыли дифференциальное исчисление в третий раз, основываясь на невразумительной публикации Лейбница 1684 г (“*une énigme plutôt qu’une explication*” — скорее загадка, чем объяснение, *фр.*)

¹ Воспроизводится с разрешения библиотеки Базельского университета.

И. Бернулли в то время (1691/92) давал частные уроки по новому исчислению самому маркизу де Лопиталю. С его точки зрения бесконечно малые величины — это величины, которые можно прибавлять к конечным величинам, не изменяя значений последних, а кривые — это многоугольники с бесконечно короткими сторонами. Этот величайший из учителей (кроме своих многочисленных сыновей и племянников, а также де Лопиталья он познакомил с математикой Эйлера) придерживался того мнения, что слишком много разъяснений о бесконечно малых скорее затруднит понимание для тех, кто не привык к длинным объяснениям.

В 1694 г. *Б. Нивентгейт* впервые опубликовал критику бесконечно малых (см. письмо И. Бернулли, процитированное выше), а в 1695 году появился “*Responsio*” (“Ответ”) Лейбница в июльском номере журнала *Acta Eruditorum*.

Маркиз де Лопиталь (1696) написал знаменитую книгу *Analyse des infiniment petits* (Анализ бесконечно малых, — фр.) (см. рис. 1.3), которая привела к явному прорыву в новом исчислении даже во Франции, где на протяжении многих десятилетий наукой правили “картезианцы” (аббат Кателан, Папен, Ролль, и др.).

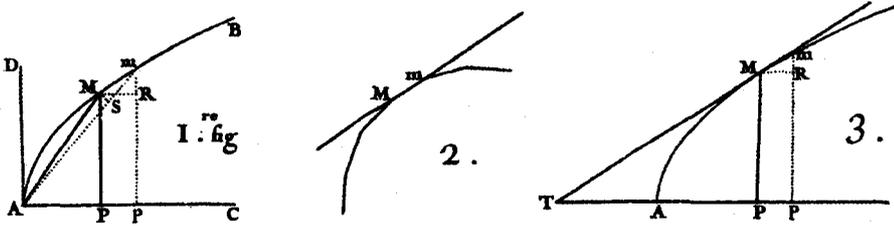


Рис. 1.3. Чертеж из книги Лопиталья *Analyse des infiniment petits* (1696).²

Епископ Беркли в 1734 г. опубликовал полемическую статью *The Analyst* против бесконечно малых (см. цитату в разделе II.2, а также Стройк 1969, р. 333).

Маклорен (1742, *Treatise of Fluxions*, vol. II, р. 420): “... исследуйте отношение, которое есть предел...”

Эйлер в начале труда (1755, *Institutiones Calculi Differentialis*) поместил две длинные главы *De differentiis finitis* (О конечных разностях, — лат.) и *De usu differentiarum in doctrina serierum* (О применении дифференцирования в учении о рядах), за которыми следуют шесть страниц на латыни о бесконечно малых, прежде чем он рискнул написать “denotet dx quantitatem infinite parvam” (обозначим через dx бесконечно малую величину), $dx = 0$ и $a dx = 0$), но он требует, чтобы “ratio geometrica $\frac{a dx}{dx} = \frac{a}{1}$ erit finita” (геометрическое отношение $\frac{a dx}{dx} = \frac{a}{1}$ было конечным). Он предпочитает обозначения Лейбница, а не Ньютона, и пи-

шет, что “... incommode hoc modo y repraesantur, cum nostro signandi modo $d^{10}y$ facillime comprehendatur” (... такой способ представления неудобен, наш способ $d^{10}y$ легче для восприятия).

Даламбер (1754, *Encyclopédie*) вводит четкое понятие предела (“Этот предел

² Воспроизводится с разрешения Публичной библиотеки Женевского университета.

есть та величина, к которой отношение z/n приближается все ближе и ближе ... Ничто не может быть яснее этого соображения; ...”).

Лагранж (1797) сразу отвергает понятие бесконечно малых и пытается основать анализ на степенных рядах (“Известны трудности, к которым приводит предположение о существовании бесконечно малых, на которых Лейбниц основывает свое Исчисление”). Он ввел термин *производная* и использовал для нее вместо dy/dx обозначение (см. цитату)

$$(1.2) \quad y' \quad \text{или} \quad f'(x).$$

Коши (1823) отвергает ряд Тейлора (контрпример: $y = e^{-1/x^2}$, см. разд. III.7) и снова вводит бесконечно малые как предел.

Больцано (1817) и *Вейерштрасс* (1861) доводят понятие предела до совершенства с помощью ϵ и δ (см. главу III).

Ф. Клейн (1908) защищает ценность бесконечно малых для преподавания (“Разумеется, ценность употребления столь наивного понятия различна для разных людей. Многие, и я принадлежу к ним, находят их весьма удовлетворительными. Однако другие, которые одарены лишь чисто логическими способностями, находят их совершенно бессмысленными ... В связи с этим я хочу рекомендовать обозначения Лейбница ...”)

Правила дифференцирования

His positis calculi regulae erunt tales (изложим здесь правила вычисления следующим образом, — *лат.*):

(Лейбниц 1684)

Суммы и постоянные множители. Пусть $y(x) = a \cdot u(x) + b \cdot v(x)$, где a и b постоянные множители. Полагая $y + \Delta y = y(x + \Delta x)$, $u + \Delta u = u(x + \Delta x)$, $v + \Delta v = v(x + \Delta x)$, мы получаем

$$\Delta y = a \cdot \Delta u + b \cdot \Delta v$$

откуда следует правило дифференцирования

$$(1.3) \quad \boxed{y = au + bv \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = a \cdot \frac{du}{dx} + b \cdot \frac{dv}{dx} \quad \text{или} \quad y' = au' + bv'}$$

Произведения. Для произведения двух функций $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ мы имеем

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) \\ &= (u + \Delta u) \cdot (v + \Delta v) = uv + u \Delta v + v \Delta u + \Delta u \Delta v, \end{aligned}$$

что приводит к $dy = u dv + v du$, “потому что $du dv$ является бесконечно малой величиной по сравнению с членами $u dv$ & $v du$ ” (Де Лопиталь 1696, р. 4), или

$$(1.4) \quad \boxed{y = u \cdot v \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} \quad \text{или} \quad y' = u'v + uv'}$$

Примеры. x^3 можно записать как произведение $y = x^3 = x^2 \cdot x$, и из вышеприведенной формулы следует, что $y' = x^2 \cdot 1 + x \cdot 2x = 3x^2$. Аналогичным образом

для произведения $y = x^4 = x^3 \cdot x$ имеем $y' = x^3 \cdot 1 + x \cdot 3x^2 = 4x^3$. По индукции получаем, что для любого положительного целого n

$$(1.5) \quad y = x^n \quad \Rightarrow \quad y' = n \cdot x^{n-1}.$$

Частное. Для отношения $y(x) = u(x)/v(x)$ двух функций имеем

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}.$$

Вычитая y из левой и правой части этого равенства и используя геометрическую прогрессию для выражения $(1 + \Delta v/v)^{-1}$ при $v \neq 0$, получаем

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v^2 + v\Delta v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v^2} \cdot \left(1 - \frac{\Delta v}{v} + \frac{(\Delta v)^2}{v^2} \pm \dots\right).$$

Таким образом, при условии, что $v \neq 0$, мы имеем

$$(1.6) \quad y = \frac{u}{v} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2} \quad \text{или} \quad y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Пример. Функция $y = x^{-n} = 1/x^n$ есть частное от деления $u = 1$ на $v = x^n$. Используя (1.6), мы получаем

$$y = \frac{1}{x^n} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -n \frac{1}{x^{n+1}} = -n \cdot x^{-n-1}.$$

В сущности, это есть уравнение (1.5) для отрицательных n .

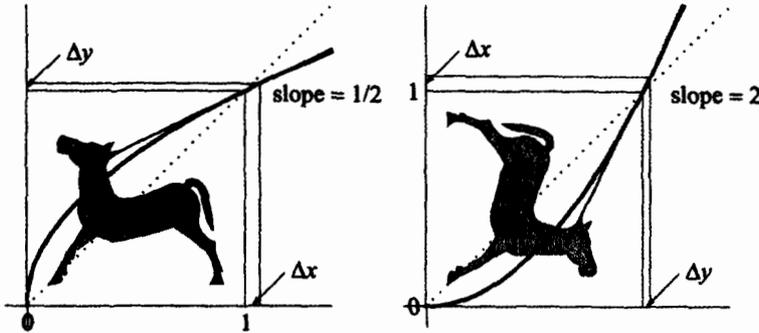


Рис. 1.4. Обратная функция.

Обратные функции. Пусть $y = f(x)$ — некоторая функция, а $x = g(y)$ — обратная к ней функция. Поскольку их графики являются отражениями друг друга относительно прямой, проведенной под углом 45° (рис. 1.4), мы имеем

$$(1.7) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} \quad \text{и} \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}} \quad \text{при} \quad \frac{dx}{dy} \neq 0.$$

Пример: $y = x^{1/2}$ является функцией, обратной к функции $x = y^2$. Поэтому

$$y = x^{1/2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} x^{-1/2}$$

и уравнение (1.5) оказывается справедливым для рациональных n .

Экспоненциальная функция. Для экспоненциальной функции $y = e^x$ (см. разд. I.2) мы имеем

$$y + \Delta y = e^{x+\Delta x} = e^x \cdot e^{\Delta x} \quad \text{и} \quad \Delta y = e^x (e^{\Delta x} - 1).$$

Используя разложение в ряд $e^{\Delta x} = 1 + \Delta x + (\Delta x)^2/2! + \dots$ (теорема I.2.3), мы получаем

$$(1.8) \quad y = e^x \quad \Rightarrow \quad y' = e^x.$$

Производной экспоненциальной функции является она сама.

Логарифмы. Есть несколько способов вычисления производной функции для $y = \ln x$.

а) Логарифмическая функция является обратной к $x = e^y$. Согласно формуле (1.7),

$$(1.9) \quad y = \ln x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

б) Можно вычислить Δy из соотношения $y + \Delta y = \ln(x + \Delta x)$ и получить

$$\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln(x) = \ln \frac{x + \Delta x}{x} = \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right).$$

С помощью ряда $\ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{\Delta x}{x} - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta x}{x} \right)^2 + \dots$ (см. (I.3.13)) мы опять получаем формулу (1.9).

Тригонометрические функции. Сначала рассмотрим функцию $y = \sin x$. Используя уравнение (I.4.3), получаем

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x) = \sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x.$$

Используя разложение в ряд функций $\sin \Delta x$ и $\cos \Delta x$ (см. (I.4.16) и (I.4.17)), мы получаем

$$\Delta y = \sin x \left(-\frac{(\Delta x)^2}{2!} + \dots \right) + \cos x \left(\Delta x - \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots \right)$$

и, следовательно,

$$(1.10) \quad y = \sin x \quad \Rightarrow \quad y' = \cos x.$$

Аналогично получаем

$$(1.11) \quad y = \cos x \quad \Rightarrow \quad y' = -\sin x.$$

Для функции $y = \operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$ мы используем формулу (1.6) и получаем

$$(1.12) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Обратные тригонометрические функции. Из формулы (1.7) и вышеприведенных формул для производных тригонометрических функций мы получаем

$$(1.13) \quad y = \operatorname{arctg} x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2},$$

$$(1.14) \quad y = \operatorname{arcsin} x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$(1.15) \quad y = \operatorname{arccos} x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Сложные функции. Рассмотрим функцию $y = h(x) = f(g(x))$ и пусть $z = g(x)$. Придавая аргументам функций приращения, получаем $z + \Delta z = g(x + \Delta x)$ и $y + \Delta y = h(x + \Delta x) = f(z + \Delta z)$. Из тривиального тождества

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x}$$

следует, что

$$(1.16) \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \quad \text{или} \quad h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).}$$

Для того, чтобы продифференцировать сложную функцию, следует перемножить производные функций f и g .

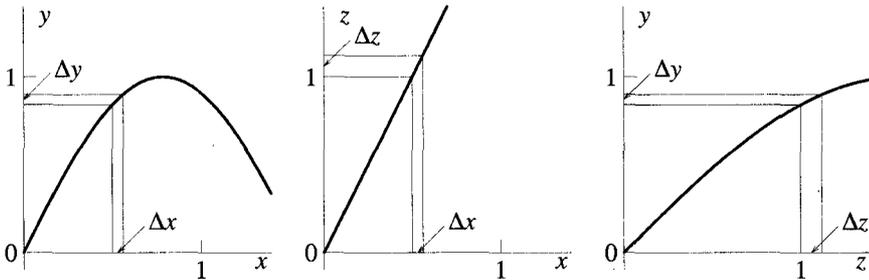


Рис. 1.5. Сложная функция

Пример. Функция $y = \sin(2x)$ составлена из функций $y = \sin z$ и $z = 2x$ (см. рис. 1.5). Если мы используем формулу (1.16), то получим, что ее производная равна $y' = \cos z \cdot 2 = 2 \cos(2x)$.

Согласно этим правилам вычисление производной любой функции, составленной из элементарных функций (великая мечта Декарта, см. цитату в начале этого раздела) становится банальностью. Например,

$$y = a^x = e^{x \cdot \ln a} \quad (z = x \cdot \ln a) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = e^{x \cdot \ln a} \cdot \ln a = \ln a \cdot a^x,$$

$$y = x^a = e^{a \cdot \ln x} \quad (z = a \cdot \ln x) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = x^a \cdot \frac{a}{x} = a \cdot x^{a-1}.$$

Итак, уравнение (1.5) справедливо для любого вещественного числа n .

Параметрическое представление и неявные уравнения

В качестве примера возьмем кривую почтенного возраста: конхоиду Никомеда (200 лет до Р.Х.). Если заданы два числа a и b , конхоида определяется следующим образом: на каждом луче, исходящем из начала координат G , расстояние между точкой A на конхоиде и точкой F на горизонтальной прямой, проведенной на высоте a , равно постоянной величине b (см. рис. 1.6).

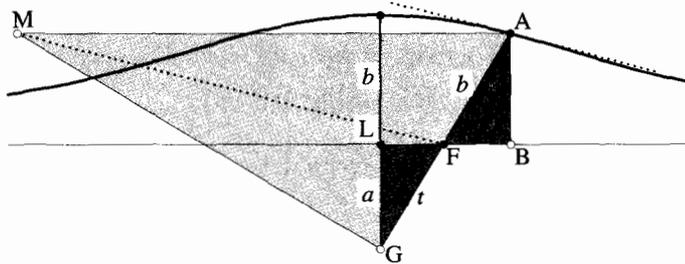


Рис. 1.6. Конхоида Никомеда.

Из подобия треугольников FAB и FGL следует, что

$$\frac{y - a}{a} = \frac{b}{\sqrt{x^2 + y^2} - b},$$

или

$$(1.17) \quad (y - a)^2(x^2 + y^2) = b^2y^2.$$

Если бы мы захотели выразить из этого уравнения y как функцию x , нам пришлось бы решать уравнение четвертого порядка для каждого значения x . Вместо этого можно попытаться рассматривать само *неявное уравнение* (1.17) как определяющее неявную функцию y от x .

Возможен и другой подход. Обозначив угол LGF как φ , мы получим

$$(1.18) \quad \begin{aligned} x &= a \operatorname{tg} \varphi + b \sin \varphi \\ y &= a + b \cos \varphi. \end{aligned}$$

Когда φ изменяется от $-\pi/2$ до $\pi/2$, выражения (1.18) образуют *параметрическое представление* нашей кривой. Такие параметрические представления не являются единственными. Например, мы можем в качестве параметра t взять расстояние GF (см. рис. 1.6). В этом случае мы получаем

$$(1.19) \quad \begin{aligned} x &= (b/t + 1)\sqrt{t^2 - a^2} \\ y &= (b/t + 1)a. \end{aligned}$$

Эти выражения представляют правую часть кривой, когда t меняется от a до ∞ .

Теперь рассмотрим задачу вычисления касательной к конхоиде в данной точке A (это задача И. Бернулли 1691/92).

Дифференцирование параметрического уравнения. Рассмотрим y во втором уравнении (1.18) или (1.19) как функцию параметра, а параметр будем интерпретировать как функцию, обратную к x из первого уравнения. Тогда, используя (1.16) и (1.7), получаем

$$(1.20) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx} = \frac{dy}{d\varphi} / \frac{dx}{d\varphi} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt}.$$

Еще раз поблагодарим Лейбница за его обозначения. Дифференцируя уравнения (1.19) и взяв отношения производных, для конхойды мы получаем

$$(1.21) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-ab\sqrt{t^2 - a^2}}{t^3 + a^2b}.$$

У этой формулы существует красивая интерпретация (И. Бернулли 1691/92): обозначим через M такую точку, для которой треугольники LGF и GMA подобны. Тогда касательная в точке A параллельна прямой, соединяющей M и F (см. рис. 1.6).

Дифференцирование неявной функции. Этот метод, который использовал еще Лейбниц (1684), состоит в том, что вышеприведенные правила используются для того, чтобы дифференцировать неявное уравнение, определяющее функцию $y(x)$ (в нашем примере уравнение (1.17)). Это приводит к формуле

$$2(y - a) dy(x^2 + y^2) + (y - a)^2(2x dx + 2y dy) = 2b^2 y dy$$

и после деления на $2dx$, мы получаем

$$(1.22) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-x(y - a)^2}{(y - a)(x^2 + y^2) + (y - a)^2 y - b^2 y}.$$

Более строго это неявное дифференцирование будет рассмотрено в разд. IV.3.

Упражнения

1.1 Обобщите правило дифференцирования (1.4) на три сомножителя:

$$y = u \cdot v \cdot w \quad \Rightarrow \quad y' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'.$$

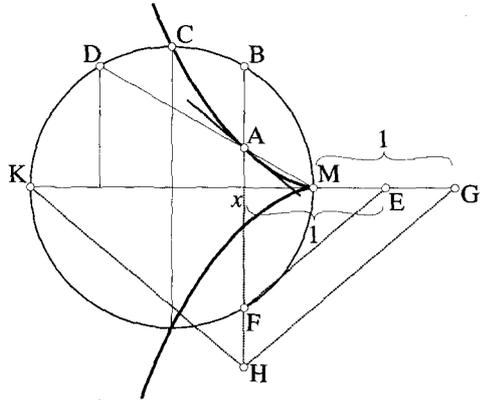
1.2 Вычислите производную dy/dx функции

$$y = \frac{5 \sin(3x + b\sqrt{x^2 + e^{2x}}) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{k^2 x^2}{1 + u^2 x^2}\right) + \sqrt[3]{\frac{ax - \ln x}{a^2 + x^2}}}{\arccos \frac{x}{\sqrt{3+x}} + \frac{3a^2 x^3}{\operatorname{arctg}(1/x)} + e^{-\frac{x^2 - b^2}{2}} \cdot \arcsin \sqrt{\frac{3x}{1-x^2}}}.$$

1.3 (Пример Эйлера 1755, §192.) Покажите, что если

$$y = e^{e^{e^x}} \quad \text{то} \quad y' = e^{e^{e^x}} \cdot e^{e^x} \cdot e^x.$$

1.4 Вычислите производную *циссоиды Диоклеса* (около 180 г. до Р.Х.). Эта кривая, которую Диоклес использовал для решения трудной задачи удвоения куба, получается с помощью круга $МК$ как множество точек пересечения прямых DM и BF , где дуги BC и CD равны. Покажите, что касательная в точке A параллельна прямой $КН$, где $Н$ такова, что EF и $ГН$ параллельны.



1.5 Вычислите производную окружности, определенной уравнением $x^2 + y^2 = r^2$, с помощью дифференцирования неявной функции, а также посредством разрешения уравнения относительно y и последующего явного дифференцирования.

1.6 (Лейбниц 1684.) Вычислите производную неявной функции $y(x)$, определяемой уравнением

$$\frac{x}{y} + \frac{(a + bx) \cdot (c - xx)}{(ex + fxx)^2} + ax\sqrt{gg + yy} + \frac{yy}{\sqrt{hh + \ell x + mxx}} = 0,$$

где $a, b, c, e, f, g, h, \ell$ и m — постоянные. Это уравнение не представляет какую-либо знаменитую древнюю вавилонскую или египетскую кривую и вообще не представляет какого-либо особого интереса. Лейбниц выбрал его в качестве ужасно сложного выражения, чтобы продемонстрировать мощь своего исчисления.

II.2 Высшие производные и ряд Тейлора

Но понятия скорости скоростей, вторая, третья, четвертая и пятая скорости и т. д., если я не ошибаюсь, превосходят все возможности человеческого понимания. Чем дальше рассудок пытается следовать этим ускользающим идеям и анализировать их, тем больше он теряется и смущается; ...

(Епископ Беркли 1734, *The Analyst*, см. Стройк 1969, *Source Book*, p. 335)

... нашим современным специалистам по анализу недостаточно рассматривать только разности конечных величин: они также рассматривают разности этих разностей и разности разностей первых разностей. И так далее до бесконечности. Таким образом они рассматривают величины, которые бесконечно меньше, чем наименьшая различимая величина; и другие, которые бесконечно меньше, чем те бесконечно малые; и даже другие, которые бесконечно меньше, чем предшествующие бесконечно малые, и так далее без конца и предела ... Я признаю, что понимание того, что такое бесконечно малая величина ... превосходит мои возможности. И я подозреваю, что понимание того, что часть такой бесконечно малой величины, которая бесконечно меньше ее, и, следовательно, будучи умножена в бесконечное число раз, никогда не сравняется с малейшей конечной величиной, представляет собой бесконечную трудность для любого человека; ...

(Епископ Беркли 1734, *The Analyst*)

Вторая производная

В разд. II.1 мы видели, что для данной функции $y = f(x)$ ее производная $f'(x)$ является наклоном касательной к кривой $y = f(x)$. Следовательно, если $f'(x) > 0$ на интервале $a < x < b$, то функция *возрастает* на этом интервале, а если $f'(x) < 0$ на интервале $a < x < b$, то она *убывает* на нем. Точки, в которых $f'(x) = 0$, называются *стационарными точками*.

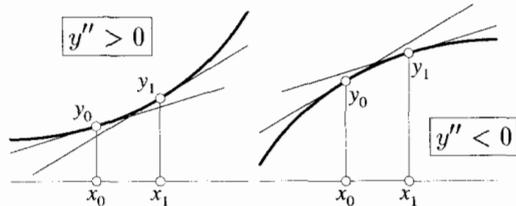


Рис. 2.1а. Геометрический смысл второй производной.



Рис. 2.1b. Рис. И. Бернулли (1691/92).¹

Ньютон (1665) и И. Бернулли (1691/92) были первыми, кто исследовал геометрический смысл *второй производной* f . Чтобы получить $y'' = f''(x)$, нужно продифференцировать $y' = f'(x)$. Если $f''(x) > 0$ на интервале $a < x < b$, то $f'(x)$ возрастает, т. е. для двух точек $x_0 < x_1$ справедливо $f'(x_0) < f'(x_1)$. Это значит, что величина наклона кривой в точке x_1 больше, чем в точке x_0 и, следовательно, кривая более *изогнута кверху* (см. рис. 2.1а, левый). В этом случае мы говорим, что функция $f(x)$ *выпукла книзу*.

Аналогично, если $f''(x) < 0$ на интервале $a < x < b$, то функция $f(x)$ называется *выпуклой кверху* (см. рис. 2.1а, справа). Точки, где $f''(x_0) = 0$ и в которых

¹ Воспроизведено с разрешения университетской библиотеки Базеля.

вторая производная меняет знак, называются *точками перегиба*. На рис. 2.1b представлен рисунок И. Бернулли, объясняющий это.

Задачи “de maximis & minimis”.

Я хочу только, чтобы он знал, что наши вопросы о *de maximis et minimis* и *de tangentibus linearum curvarum* (о максимумах и минимумах и о касательных к кривым линиям) были решены восемь или десять лет тому назад и несколько человек, которые знали про это в последние пять или шесть лет, могут это засвидетельствовать.

(Письмо Ферма Декарту, июнь 1638; *Oeuvres*, tome 2, p. 154-162)

Когда Величина является самой большой или самой маленькой, какой она может быть, в этот момент она не уменьшается и не увеличивается. Потому что если она увеличивается, то это значит, что ранее она была меньше, и сейчас начинает увеличиваться... С помощью Задачи 1 следует искать Флюксию и предположить, что она равна нулю.

(Ньютон 1671, публикация на английском 1736, p. 44)

Задача нахождения максимальных и минимальных значений была одним из самых первых побудительных мотивов к созданию дифференциального исчисления (Ферма 1638), ее разрабатывал Лагранж на протяжении всей своей жизни (см. Лагранж 1759).

В точке x_0 , где функция $f(x)$ достигает своего максимального или минимального значения, она не возрастает и не убывает. Поэтому мы получаем $f'(x_0) = 0$ (стационарную точку). Это будет (локальный) максимум, если знак $f'(x)$ меняется от $+$ к $-$ (это тот случай, когда $f''(x_0) < 0$), и (локальный) минимум, если знак $f'(x)$ меняется от $-$ к $+$ (так бывает когда $f''(x_0) > 0$). Итак,

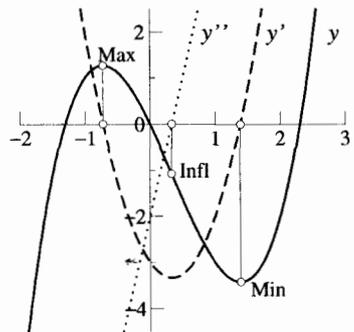
$$(2.1) \quad \begin{aligned} f'(x_0) = 0 \text{ и } f''(x_0) > 0 &\Rightarrow x_0 \text{ — это локальный минимум,} \\ f'(x_0) = 0 \text{ и } f''(x_0) < 0 &\Rightarrow x_0 \text{ — это локальный максимум.} \end{aligned}$$

Эти факты “sequentibus exemplis illustrabimus” — иллюстрируются следующими примерами (*лат.*):

Пример 1. Рассмотрим функцию

$$(2.2) \quad \begin{aligned} y &= x^3 - x^2 - 3x, \\ y' &= 3x^2 - 2x - 3, \\ y'' &= 6x - 2. \end{aligned}$$

Функция возрастает там, где $y' > 0$, т.е. при $x < (1 - \sqrt{10})/3$ и при $x > (1 + \sqrt{10})/3$. Она выпукла книзу при $x > 1/3$ и выпукла кверху при $x < 1/3$. Точка $x = 1/3$ является точкой перегиба. Точка $x = (1 - \sqrt{10})/3$ является точкой локального (но не глобального) максимума, а точка $x = (1 + \sqrt{10})/3$ есть точка локального минимума.



Пример 2. Рассмотрим функцию (см. Эйлер 1755, *Part Posterior*, §265)

$$(2.3) \quad y = \frac{x}{1+x^2}, \quad y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}, \quad y'' = \frac{-6x+2x^3}{(1+x^2)^3},$$

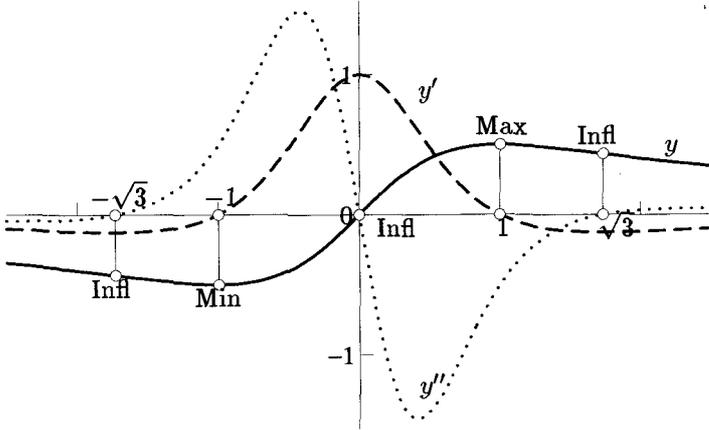


Рис. 2.2. Максимумы, минимумы и точки перегиба примера Эйлера.

которая изображена на рис. 2.2 вместе со своими первой и второй производными. Функция $y(x)$ имеет (глобальный) минимум при $x = -1$, (глобальный) максимум при $x = 1$, и точки перегиба при $x = 0$ и $x = \pm\sqrt{3}$. Она выпукла книзу на интервалах $-\sqrt{3} < x < 0$ и $\sqrt{3} < x < \infty$ и выпукла кверху везде, кроме этих интервалов.

Принцип Ферма.



Рис. 2.3. Рисунок И. Бернулли 1691/92.²

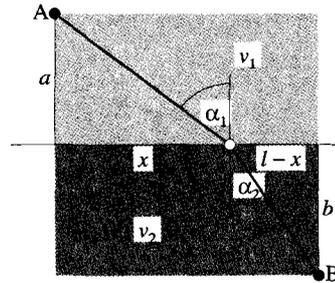


Рис. 2.4. Принцип Ферма.

Ферма хотел объяснить закон Снеллиуса преломления света на границе двух сред, скорость распространения света в которых равны v_1 и v_2 соответственно. Пусть заданы точки A и B (рис. 2.4). Требуется найти углы α_1 и α_2 такие, что свет распространяется из A в B за минимальное время или с минимальным сопротивлением. Это значит, что нужно найти такое значение x , что

$$(2.4) \quad T = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (l-x)^2}}{v_2} = \min!$$

² Воспроизводится с разрешения библиотеки Базельского университета.

Сам Ферма считал, что аналитическое решение этой задачи слишком трудно (“я полагаю, что эта задача не из самых легких”). Соответствующие вычисления с гордостью представил Лейбниц (1684) “in tribus lineis” (в семействе линий, — лат.). Производная T как функции от x равна

$$T' = \frac{1}{v_1} \frac{2x}{2\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{-2(\ell - x)}{2\sqrt{b^2 + (\ell - x)^2}} \frac{1}{v_2}.$$

Замечая, что $\sin \alpha_1 = x/\sqrt{a^2 + x^2}$ и $\sin \alpha_2 = (\ell - x)/\sqrt{a^2 + (\ell - x)^2}$, мы получаем, что производная обращается в нуль при условии

$$(2.5) \quad \frac{\sin \alpha_1}{v_1} = \frac{\sin \alpha_2}{v_2}$$

(закон Снеллиуса). Если вычислить T'' :

$$T'' = \frac{1}{v_1} \frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{1}{v_2} \frac{b^2}{(a^2 + (\ell - x)^2)^{3/2}} > 0,$$

то отсюда следует, что это действительно минимум.

De Conversione Functionum in Series

(О превращении функции в ряд, — лат.)

Подход Тейлора.

Здесь мы фактически имеем *беспримерно смелый переход к пределу.*

(Ф. Клейн 1908, англ. изд., р. 233)

Рассмотрим (Тейлор 1715) точки $x_0, x_1 = x_0 + \Delta x, x_2 = x_0 + 2\Delta x, \dots$ и функцию $f(x)$, которая имеет значения $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots$ в этих точках.

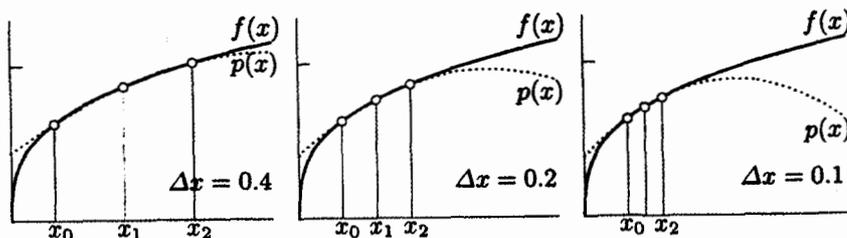


Рис. 2.5. Построение многочлена Тейлора.

Теперь вычислим *интерполяционный многочлен*, проходящий через эти точки (см. рис. 2.5 и теорему I.1.2, в которой положим $x = x_0 + t\Delta x, t = \frac{x-x_0}{\Delta x}$)

$$(2.6) \quad p(x) = y_0 + \frac{x - x_0}{1} \frac{\Delta y_0}{\Delta x} + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{1 \cdot 2} \frac{\Delta^2 y_0}{\Delta x^2},$$

или многочлен более высокого порядка с большим числом членов. Если положить $\Delta x \rightarrow 0, x_1 \rightarrow x_0, x_2 \rightarrow x_0$ (или, как мы говорили, если взять бесконечно малое Δx), то частное $\Delta y_0/\Delta x$ во втором члене стремится к $f'(x_0)$. Далее, произведение $(x - x_0)(x - x_1)$, стоящее в третьем члене, будет стремиться к $(x - x_0)^2$.

Тейлор постулировал, что *вторая разность* (деленная на Δx^2) стремится к *второй производной* (см. упр. 2.5 и упр. III.6.4), а в общем случае

$$(2.7) \quad \frac{\Delta^k y_0}{\Delta x^k} \rightarrow \frac{d^k y}{dx^k} \Big|_0 = f^{(k)}(x_0).$$

Если мы будем брать все большее и большее число членов в интерполяционном многочлене (2.6) и в то же самое время перейдем к пределу $\Delta x \rightarrow 0$, мы получим знаменитую формулу

$$(2.8) \quad f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!}f'''(x_0) + \dots$$

Все ряды, приведенные в первой главе, являются частными случаями этого "series universalissima" (самого универсального ряда, — *лат.*). Например, функция $f(x) = \ln(1 + x)$ имеет производные

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$$

и мы получаем

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \dots$$

Замечания. Более столетия формула (2.8) считалась справедливой в общем случае. Потом Коши нашел пример функции, для которой ряд (2.8) сходится, однако не к функции $f(x)$ (см. разд. III.7). Кроме того, существуют примеры функций, для которых ряд (2.8) не сходится, если $x \neq x_0$ (см. упр. III.7.6). Более удовлетворительное доказательство (2.8) (принадлежащее И. Бернулли), которое использует интегральное исчисление, будет приведено в разд. II.4.

Подход Маклорена (Маклорен 1742, р. 223–224, art. 255). Для функции $y = f(x)$ и заданной точки x_0 мы ищем ряд (или многочлен)

$$(2.9) \quad p(x) = p_0 + (x - x_0)q_0 + (x - x_0)^2 r_0 + (x - x_0)^3 s_0 + \dots,$$

для которого

$$(2.10) \quad p^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0) \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

т.е. обе функции в точке $x = x_0$ имеют одинаковые производные вплоть до некоторого порядка. Если в формуле (2.9) положить $x = x_0$, то в силу (2.10) мы получаем $p_0 = p(x_0) = f(x_0)$. Теперь мы дифференцируем (2.9), снова полагаем $x = x_0$ и получаем $q_0 = p'(x_0) = f'(x_0)$. Последовательные дифференцирования приводят к $2!r_0 = f''(x_0)$, $3!s_0 = f'''(x_0)$, и т.д. Итак, ряд (2.9) совпадает с (2.8).

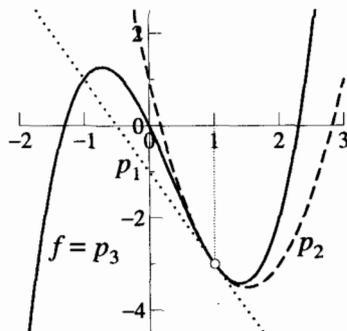
Частичные суммы ряда (2.8) называются *многочленами Тейлора*.

Пример. Выберем точку $x_0 = 1$ и рассмотрим функцию, заданную с помощью (2.2). Имеем $f(x_0) = -3$, $f'(x_0) = -2$, $f''(x_0) = 4$ и $f'''(x_0) = 6$. Таким образом, многочлены Тейлора первой, второй и третьей степени равны

$$p_1(x) = -3 - 2(x - 1) = -2x - 1,$$

$$p_2(x) = p_1(x) + \frac{1}{2}(x - 1)^2 = 2x^2 - 6x + 1,$$

$$p_3(x) = p_2(x) + \frac{1}{6}(x - 1)^3 = x^3 - x^2 - 3x.$$



Метод Ньютона нахождения корней уравнений.

$y^3 - 2y - 5 = 0$	$+ 2,1000000$ $- 0,00544853$ $+ 2,09455147 = y$
$z + p = y$	$+ y^3 + 8 + 12p + 6p^2 + p^3$ $- 2y - 4 - 2p$ $- 5 - 5$ Summa $- 1 + 10p + 6p^2 + p^3$
$0,1 + q = p$	$+ p^3 + 0,001 + 0,03q + 0,3q^2 + q^3$ $+ 6p^2 + 0,06 + 1,2 + 6,0$ $+ 10p + 1 + 10,$ $- 1 - 1,$ Summa $+ 0,061 + 11,23q + 6,3q^2 + q^3$
$-0,0054 + r = q$	$+ 6,3q^2 + 0,000183708 - 0,06804r + 6,3r^2$ $+ 11,23q - 0,060642 + 11,23$ $+ 0,061 + 0,061$ Summa $+ 0,000541708 + 11,16196r + 6,3r^2$
$-0,00004854 + s = r$	

neglecto, & prodit $6,3r^2 + 11,16196r + 0,000541708 = 0$ fere, five (rejectione $6,3r^2$) $r = \frac{-0,000541708}{11,16196} = -0,00004853$ fere, quam scribo in negativa parte Quotientis. Denique negativam partem Quotientis ab Affirmativa subducens habeo $2,09455147$ Quotientem quaesitam.

Рис. 2.6. Вычисления Ньютона корня уравнения $x^3 - 2x - 5 = 0$.³

Многочлены Тейлора оказываются чрезвычайно полезным средством для приближенного вычисления корней уравнений. Рассмотрим пример, приведенный Ньютоном (1671):

$$(2.11) \quad x^3 - 2x - 5 = 0.$$

Вычислим несколько значений функции $f(x) = x^3 - 2x - 5$: $f(0) = -5$, $f(1) = -6$, $f(2) = -1$, $f(3) = 16$. Отсюда следует, что существует корень, близкий к $x_0 = 2$. Идея метода состоит в том, чтобы заменить кривую $f(x)$ ее касательной в точке x_0 : $p_1(x) = -1 + 10(x - 2)$. Корень $p_1(x) = 0$, который равен $x = 2.1$, является улучшенным приближением к корню уравнения (2.11). Далее возьмем $x_0 = 2.1$ и повторим вычисление. Получаем $p_1(x) = 0.061 + 11.23(x - 2.1)$ и новое приближение для корня уравнения (2.11): $x = 2.0945681$. Следующий шаг дает $x = 2.0945515$, где все приведенные цифры правильны (рис. 2.6 представляет факсимиле вычислений, проведенных Ньютоном).

Использование многочлена второй степени (Э. Галлей 1694). В примере, приведенном выше, выберем точку $x_0 = 2.1$ и используем два члена многочлена Тейлора. Получаем

$$0.061 + 11.23(x - 2.1) + 6.3(x - 2.1)^2 = 0,$$

квадратное уравнение относительно $z = x - 2.1$, которое имеет два корня. Возьмем корень меньший по абсолютной величине (т. е. тот, для которого x более близко к 2.1) и получим

³ Воспроизводится с разрешения библиотеки Женевского университета.

$$z = x - 2.1 = \frac{-11.23 + \sqrt{11.23^2 - 4 \cdot 0.061 \cdot 6.3}}{12.6}$$

и, следовательно, $x = 2.0945515$. Опять-таки все приведенные цифры правильны, причем получены за одну итерацию.

Упражнения

2.1 (Эйлер 1755, §261). Исследуйте функции

$$y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12, \quad y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1.$$

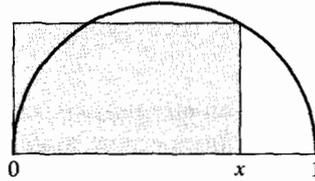
Найдите максимумы, минимумы, области выпуклости книзу, точки перегиба.

2.2 (Эйлер 1755, §272). Последовательность чисел

$$\sqrt[1]{1} = 1, \quad \sqrt[2]{2} = 1.4142, \quad \sqrt[3]{3} = 1.4422, \quad \sqrt[4]{4} = 1.4142, \quad \sqrt[5]{5} = 1.3797, \dots$$

наводит на мысль, что функция $y = \sqrt[x]{x} = x^{1/x}$ имеет максимум, близкий к $x = 3$. Где точно он находится? В каком отношении находится величина этого максимума к минимуму функции $y = x^x$?

2.3 (И. Бернулли 1691/92). Найдите x такое, что прямоугольник, образованный абсциссой и ординатой точки, находящейся на окружности $y = \sqrt{x - x^2}$, имеет максимальную площадь. Проверьте максимальность путем вычисления второй производной.



2.4 (Эйлер 1755, §272). Найдите такое x , при котором $x \sin x$ имеет (локальный) максимум (вы получите уравнение, которое лучше всего решать методом Ньютона или Галлея; Эйлер приводит ответ ($x = 116^\circ 14' 21'' 20''' 35'''' 47'''''$); правильные значения последних цифр суть $32''' 38''''$).

2.5 Для функции $y = x^3$ вычислите вторую разность

$$\Delta^2 y = (x + 2\Delta x)^3 - 2(x + \Delta x)^3 - x^3.$$

Покажите, что эта разность, деленная на Δx^2 , при $\Delta x \rightarrow 0$ стремится к $6x$, т. е. ко второй производной.

2.6 Пусть $f(x) = \sin(x^2)$. Вычислите $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f''''(x)$, ... и получите ряд Тейлора

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + f''''(0)\frac{x^4}{4!} + \dots$$

Существует ли гораздо лучший способ получения этого результата?

2.7 Покажите, что метод Ньютона в приложении к уравнению $x^2 - 2 = 0$ тождественен (I.2.13), т. е. вавилонскому способу вычисления $\sqrt{2}$. Однако формула (I.2.13) отлична от метода Галлея. Почему?

2.8 (Лейбниц 1710). Обобщая (1.4), покажите, что для функции $y(x) = u(x) \cdot v(x)$

$$y'' = u''v + 2u'v' + uv'', \quad y''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''''.$$

Найдите общую формулу для $y^{(n)}$.

II.3 Огибающие и кривизна

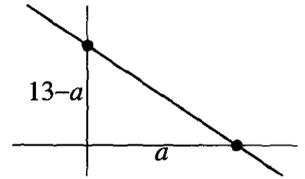
Мой брат, профессор в Базеле, воспользовался этим, чтобы исследовать несколько кривых, которые Природа каждый день нам демонстрирует ...
(И. Бернулли 1692)

Я совершенно уверен в том, что вряд ли во всем мире существует геометр, которого можно было бы сравнить с Вами.
(Де Лопиталь 1695, письмо к И. Бернулли)

Огибающая семейства прямых линий

Рассмотренный ниже пример подсказан одним рисунком в книге А. Дюрера (1525, S. 38; см. рис. 3.1 справа). Пусть точка $(a, 0)$ перемещается по оси x , а точка $(0, 13 - a)$ перемещается по оси y в противоположном направлении. Если соединить эти точки прямой линией

$$(3.1) \quad y = \frac{a - 13}{a} (x - a) = 13 + x - a - \frac{13x}{a},$$



мы получим бесконечное множество прямых, показанных на рис. 3.1, которое порождает интересную кривую, называемую *огибающей* и касающейся каждой из этих прямых. Задача состоит в том, чтобы вычислить эту кривую. Задачи такого рода дали повод к обширной дискуссии между Лейбницем (см. Лейбниц 1694a), И. Бернулли и де Лопиталем.

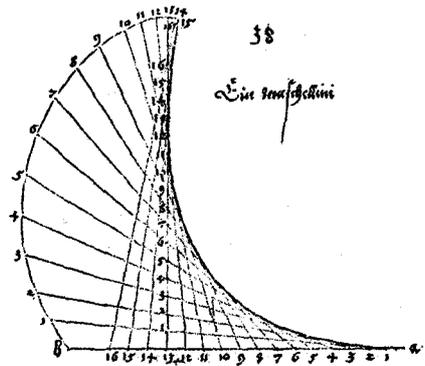
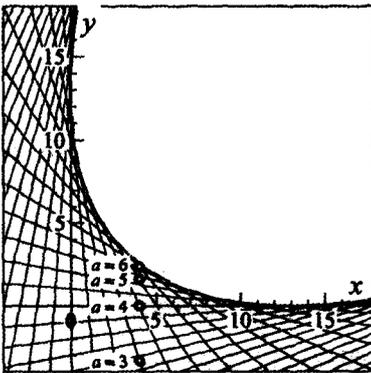


Рис. 3.1. Семейство прямых, образующее параболу, и рисунок Дюрера (1525).¹

Идея решения. Фиксируем переменную x при некотором произвольном значении. Например, положим $x = 4$. Тогда семейство уравнений (3.1) примет вид $y = 17 - a - 52/a$. Заметим, что эта величина сначала возрастает при увеличении a

¹ Воспроизведено с разрешения издательства Dr. Alfons Uhl, Nördlingen.

(см. рис. 3.1: при $a = 3, 4, 5, 6$ мы имеем $y = -3.33, 0, 1.6, 2.33$ соответственно), и при этом точка $(4, y)$ приближается к огибающей. Эта точка достигает, наконец, огибающей как раз тогда, когда функция $y(a)$ принимает свое максимальное значение и следовательно производная $y' = -1 + 52/a^2$ становится равной нулю. При этом $a = \sqrt{52}$ и $y = 17 - 2\sqrt{52} = 2.58$.

Эта же идея работает и при *любом* значении x : надо вычислить производную функции (3.1) по a , считая x константой (“differentiate secundum a ” — “дифференцируй затем по a ”, лат.); она называется *частной производной по a* . В точках огибающей эта производная должна обращаться в нуль. Теперь это записывается так:

$$(3.2) \quad \frac{\partial y}{\partial a} = 0,$$

(см. разд. IV.3, а также Якоби 1827, *Oeuvres*, vol. 3, p. 65).

Для функции (3.1) получаем $\partial y / \partial a = -1 + 13x/a^2$, и условие (3.2) дает $a = \sqrt{13x}$. Подставляя это в (3.1), получаем уравнение огибающей:

$$(3.3) \quad y = x - 2\sqrt{13x} + 13$$

или

$$(3.4) \quad (y - x - 13)^2 = 52x.$$

Это — уравнение конического сечения, которое в нашем случае оказывается *параболой*.

Каустика окружности

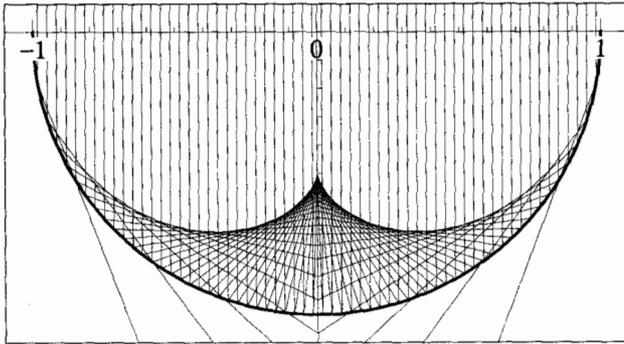


Рис. 3.2. Каустика окружности (И. Бернулли 1692).

Задача. Дана окружность $x^2 + y^2 = 1$ (рис. 3.2); предположим, что параллельный пучок вертикальных лучей отражается от этой окружности. Это порождает новое семейство прямых линий, которое, как видно, имеет интересную огибающую. Требуется найти уравнение этой огибающей.

И. Бернулли (1692) дал решение этой задачи “per vulgarem Geometriam Cartesianam” (с помощью общеизвестной декартовой геометрии, лат.); с другой стороны, в своих “Lectiones” (И. Бернулли 1691/92b, Lectio XXVII, “Caustica

Огибающая баллистических кривых

Задача. Пушка стреляет ядрами с начальной скоростью $v_0 = 1$ под всевозможными углами возвышения. Найти огибающую всех баллистических парабол (рис. 3.4). Этот вопрос, занимавший уже Торричелли (см. *De motu projectorum* 1644), был одной из первых задач, пленивших молодого Иоганна Бернулли (см. *Briefwechsel*, p. 111).

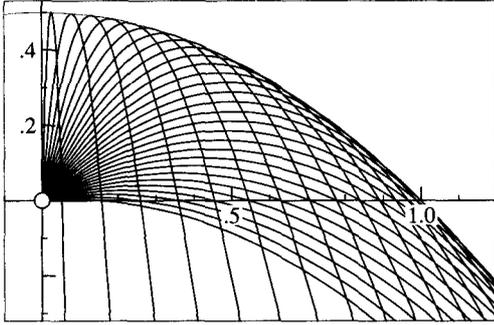


Рис. 3.4а. Огибающая парабол стрельбы.



Рис. 3.4б. “Солнечный фонтан” (1721 г.) в Петергофе под Санкт-Петербургом.

Решение. Пусть величина наклона ствола пушки равна a . Тогда движение ядра под действием гравитационного ускорения $g = 1$ определяется уравнениями

$$x(t) = \frac{t}{\sqrt{1+a^2}}, \quad y(t) = \frac{at}{\sqrt{1+a^2}} - \frac{t^2}{2}.$$

Исключая параметр $t = x\sqrt{1+a^2}$, получаем

$$(3.9) \quad y = ax - \frac{x^2(1+a^2)}{2}.$$

Дифференцируя (3.9) по a , получаем $\partial y / \partial a = x - ax^2$, и условие (3.2) приводит к равенству $a = 1/x$. Подставляя эту величину в (3.9), получаем

$$y = (1 - x^2)/2,$$

так что огибающая есть парабола, в фокусе которой находится пушка.

Кривизна

Мало существует более изящных задач о кривых, чем эта, или которые давали бы большее понимание их природы.

(Ньютон 1671, Англ. публикация 1736, p. 59)

Задача. Для заданной кривой $y = f(x)$ и заданной точки $(a, f(a))$ на этой кривой требуется найти уравнение окружности, которое как можно лучше

аппроксимирует функцию $f(x)$ в окрестности точки a . Эта окружность называется *окружностью кривизны*, а ее центр — *центром кривизны*. Обратная величина ее радиуса называется *кривизной* кривой в точке $(a, f(a))$.

Идея решения (Ньютон 1671). Уравнение

$$(3.10) \quad y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

задает нормаль к кривой $y = f(x)$ в точке $x = a$. Если увеличить a (“представьте, что точка D сдвинулась по кривой на бесконечно малое расстояние”), получим вторую нормаль, которая пересекает первую в центре кривизны (рис. 3.5).

Ситуация здесь та же, что и с огибающими (см. рис.3.1b). Поэтому вычислим

$$(3.11) \quad \frac{\partial y}{\partial a} = f'(a) + \frac{f''(a)}{(f'(a))^2}(x - a) + \frac{1}{f'(a)},$$

и из условия (3.2) найдем центр кривизны:

$$(3.12) \quad x_0 - a = -\frac{(1 + (f'(a))^2)f'(a)}{f''(a)}, \quad y_0 - f(a) = -\frac{x_0 - a}{f'(a)} = \frac{(1 + (f'(a))^2)}{f''(a)}.$$

Для радиуса кривизны $r = \sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - f(a))^2}$ и для кривизны κ получаем

$$(3.13) \quad r = \frac{(1 + (f'(a))^2)^{3/2}}{|f''(a)|} \quad \text{and} \quad \kappa = \frac{|f''(a)|}{(1 + (f'(a))^2)^{3/2}}.$$

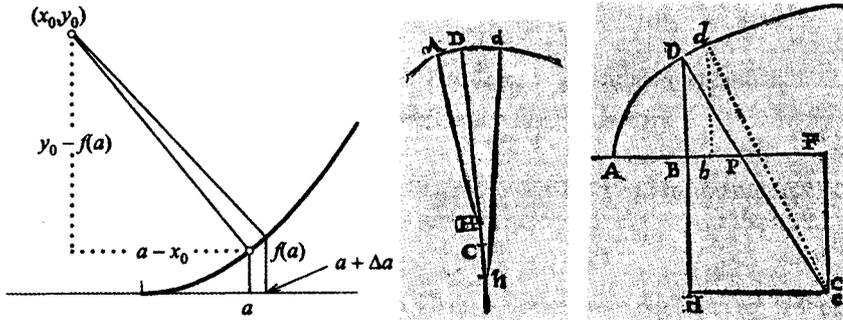


Рис. 3.5. Кривизна; рисунки Ньютона 1671, (*Meth. Fluxionum*; французский перевод 1740).²

Пример. Для параболы $y = x^2$ мы имеем $r = (1 + 4a^2)^{3/2}/2$, и центр кривизны задается формулами

$$(3.14) \quad x_0 = a - \frac{(1 + 4a^2)2a}{2} = -4a^3, \quad y_0 = a^2 + \frac{(1 + 4a^2)}{2} = \frac{1}{2} + 3a^2.$$

² Воспроизведено с разрешения издательства Albert Blanchard, Париж.

Эти формулы образуют параметрическое представление геометрического места точек (x_0, y_0) центров кривизны. Оно называется *эволютой*. Из уравнений (3.14) можно исключить параметр (здесь это a), и мы получаем (см. рис. 3.6б)

$$y_0 = \frac{1}{2} + 3 \left(\frac{x_0}{4} \right)^{2/3}.$$

Рис. 3.6а иллюстрирует тот факт, что эволюта является огибающей семейства нормалей к данной кривой.

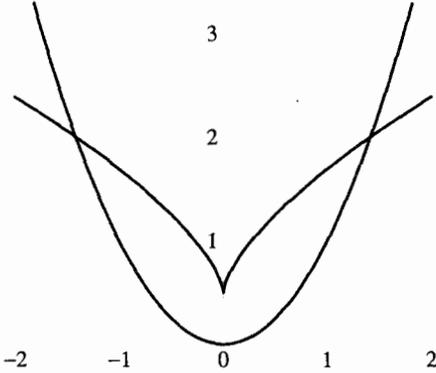


Рис. 3.6а. Эволюта = огибающей нормалей.

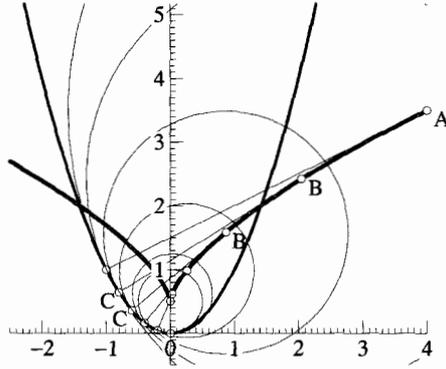


Рис. 3.6б. Парабола $y = x^2$ и ее эволюта.

Кривизна кривой в параметрическом представлении. Рассмотрим кривую $(x(t), y(t))$ и предположим, что вблизи точки $(x(a), y(a))$ она может быть представлена как $y = f(x)$. Тогда согласно (1.20) мы имеем

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)},$$

и вторая производная равна

$$f''(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{y'(t)}{x'(t)} \right) / \frac{dx}{dt} = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^3}.$$

Подставляя эти выражения в уравнения (3.12) и (3.13), получаем

$$(3.15) \quad x_0 - x(a) = - \frac{y'(a)(x'(a)^2 + y'(a)^2)}{x'(a)y''(a) - x''(a)y'(a)},$$

$$(3.16) \quad y_0 - y(a) = \frac{x'(a)(x'(a)^2 + y'(a)^2)}{x'(a)y''(a) - x''(a)y'(a)},$$

$$(3.17) \quad r = \frac{(x'(a)^2 + y'(a)^2)^{3/2}}{|x'(a)y''(a) - x''(a)y'(a)|}.$$

Пример. Циклоида (траектория вентиля на колесе велосипеда) в параметрическом виде может быть представлена так:

$$(3.18) \quad x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t.$$

Вычисляя производные и используя уравнения (3.15)–(3.17), получаем, что эволюта циклоиды задается выражениями

$$(3.19) \quad x_0 = a + \sin a, \quad y_0 = -1 + \cos a.$$

Это *опять циклоида*, но в другом положении.

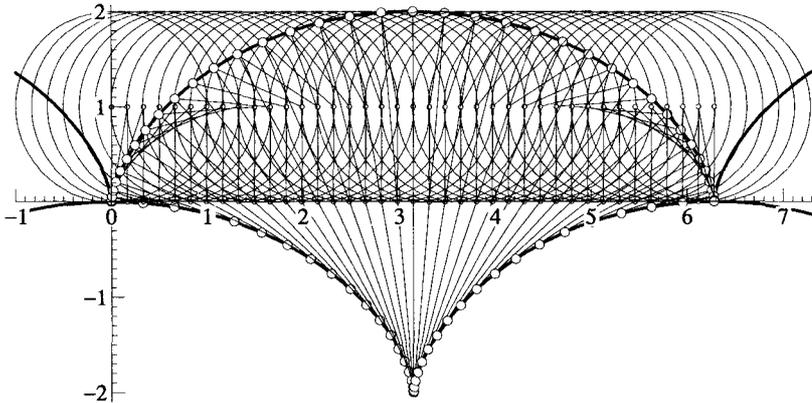
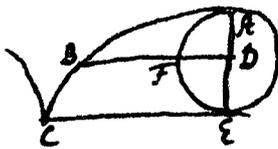


Рис. 3.7. Циклоида и ее эволюта.



mais aussy dans les
la roulette premiere
donc la roulette A
le diametre $AE = \epsilon$
grandeur de AD , ϵ

Рис. 3.8. Циклоида, рисунок И. Бернулли (1955, р. 254, письмо от 12 января 1695 г. Лопиталю).³

Эвольвенты. Возьмем заданную эволюту ABB (см. рис. 3.6b) и построим новую кривую CC , определенную тем свойством, что длина дуги ABC постоянна (вообразите себе нить, разматывающуюся с эволюты). Эти новые кривые называются *эвольвентами*. Если одна точка эвольвенты совпадает с первоначальной функцией $f(x)$, обе кривые будут иметь одинаковую кривизну. Отсюда следует (что будет строго доказано с помощью идей, развитых в разд. III.6), что обе кривые идентичны. Следовательно, не только эволюта, но также и эвольвента циклоиды (при правильном выборе длины дуги) будет опять циклоидой (Ньютон 1671, Prob. V, Nr. 34). Гюйгенс (1673) использовал это свойство для конструирования лучших в его время маятниковых часов, основанных на том, что движущийся по циклоиде маятник, является изохронным (см. рис. 7.8 в разд. II.7).

³ Воспроизведено с разрешения издательства Birkhauser, Basel.

Упражнения

- 3.1 Брусок единичной длины скользит по вертикальной стене (рис. 3.9а). Найдите формулу образующейся огибающей.
 3.2 Найдите формулу для огибающей (рис. 3.9b), семейства прямых

$$y = \alpha x - \frac{5}{2}(\alpha^3 - \alpha).$$

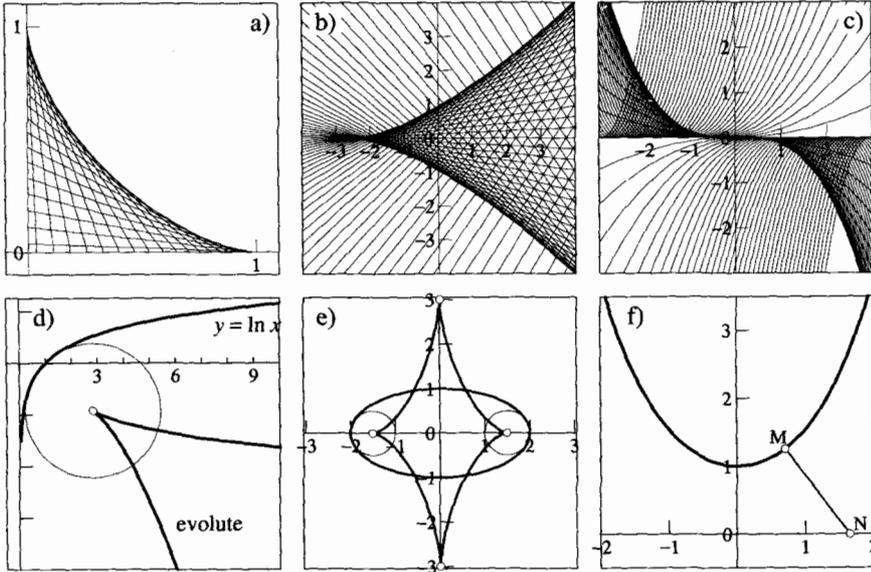


Рис. 3.9. Эволюты и огибающие.

- 3.3 (Коши 1824) Найдите огибающую семейства парабол

$$y = b(x + b)^2$$

с параметром b (рис. 3.9с).

- 3.4 Для функции $y = \ln x$ найдите радиус кривизны в точке a и определите точку a , в которой этот радиус минимален (рис. 3.9d). Видно, что у эволюты эта точка является стационарной (точкой возврата).

- 3.5 Вычислите эволюту эллипса (рис. 3.9e)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Определите максимальную и минимальную кривизну.

Ответ. $x = \left(a - \frac{b^2}{a}\right) \cos^3 t, \quad y = \left(b - \frac{a^2}{b}\right) \sin^3 t.$

- 3.6 Вычислите радиус кривизны цепной линии $y = (e^x + e^{-x})/2$. Покажите, что в заданной точке M этой кривой радиус равен длине нормали MN (рис. 3.9f).

3.7 Из рис. 3.7 видно, что спица катящегося колеса порождает огибающую, которая похожа на половинку малой циклоиды. Это становится более очевидным, если нарисовать полные диаметры (рис. 3.10). Вычислите огибающую этого семейства прямых линий

$$y = 1 + (x - t) \cdot \frac{\cos t}{\sin t}.$$

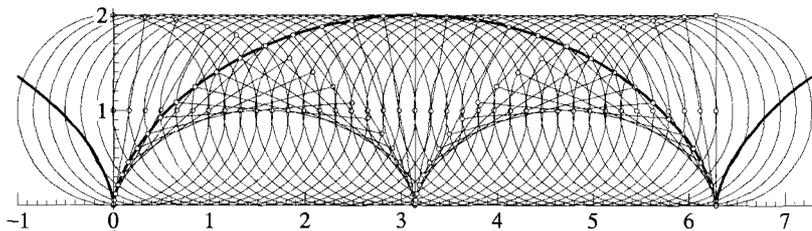


Рис. 3.10. Малая циклоида как огибающая.



Иоганн Бернулли (1667–1748)⁴



Гийом Франсуа Антуан де Лопиталь (1661–1704)⁵
 Маркиз Сент-Месма и Монпелье,
 граф Антремонтский, сеньор Дукский и прочих мест

⁴ Воспроизведено с разрешения издательства Georg Olms, Hildesheim.

⁵ Воспроизведено с разрешения издательства Birkhaeuser, Basel.

II.4 Интегральное исчисление

... notam \int pro summis, ut adhibetur nota d pro differentiis ... (... обозначим \int суммирование, и пусть d употребляется для обозначения разностей ..., лат.) (Письмо Лейбница к И. Бернулли, 8/18 марта 1696 г.)

... quod autem ... vocabulum integralis etiamnum usuraverim ... (... кстати ... слово "интеграл" до сих пор употребляется ..., лат.) (Письмо И. Бернулли к Лейбницу, 7 апреля 1696 г.)

И в то время как г-н Лейбниц пишет символ \int перед ординатой кривой для того, чтобы обозначить сумму ординат или площадь [под] кривой, я несколькими годами ранее обозначил ту же величину, написав ординату в квадратике ... Таким образом, мои символы ... были самыми первыми в своем роде. (Ньютон, письмо к Кейллу, 20 апреля 1714 г.)

Интегральное исчисление фактически гораздо старше дифференциального, поскольку вычисление площадей, поверхностей и объемов занимало величайших математиков, начиная с античных времен. Среди них были Архимед, Кеплер, Кавальери, Вивиани, Ферма (см. теорему I.3.2), Грегори Сент Винсент, Гулдин, Грегори, Барроу. Решающий прорыв наступил, когда Ньютон, Лейбниц и И. Бернулли независимо открыли, что интегрирование является операцией, обратной дифференцированию, и, следовательно, все достижения вышеупомянутых исследователей можно свести к нескольким правилам дифференцирования. Знак интеграла ввел Лейбниц (1686), а термин "интеграл" ввел И. Бернулли и опубликовал его брат Я. Бернулли (1690).

Первообразные

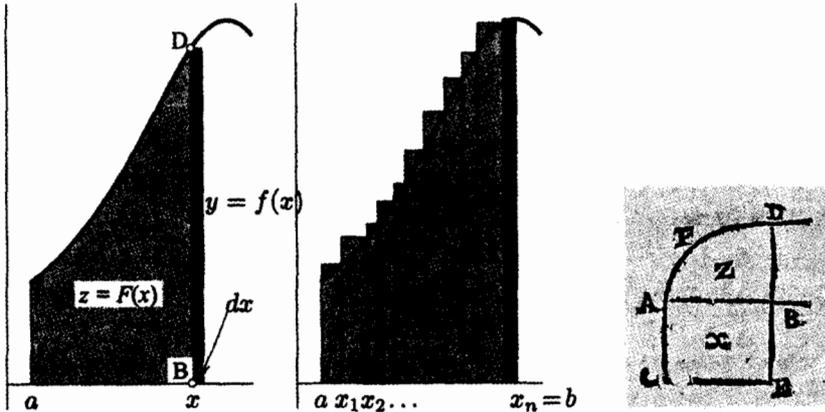


Рис. 4.1а. Идея Ньютона. Рис. 4.1б. Идея Лейбница. Рис. 4.1с. Рисунок Ньютона.¹

Пусть нужно вычислить площадь между осью x и графиком заданной функции $y = f(x)$. Выберем на оси x точку a и обозначим $z = F(x)$ площадь под кривой $f(x)$, заключенную между a и x (рис. 4.1а). Тот факт, что

¹ Воспроизведено с разрешения издательства Albert Blanchard, Париж.

(4.1) *функция $f(x)$ является производной от $F(x)$, является при этом решающим. Функцию $F(x)$ называют первообразной для $f(x)$.*

Обоснование. В рассуждениях Ньютона отрезок BD движется по рассматриваемой области (“И представим себе, что эти Площади ... порождаются прямыми BE и BD , при их движении вдоль ...”, рис. 4.1а, 4.1с); следовательно, если x возрастает на Δx , то площадь возрастает на величину $\Delta z = F(x + \Delta x) - F(x)$, которая, если пренебречь членами высшего порядка по Δx , равна $f(x)\Delta x$ (темный прямоугольник на рис. 4.1а). В пределе $\Delta x \rightarrow 0$ мы получаем

$$(4.2) \quad dz = f(x) \cdot dx \quad \text{и} \quad \frac{dz}{dx} = f(x).$$

Лейбниц рассматривает площадь как сумму (позднее как “интеграл”) маленьких прямоугольников (рис. 4.1b):

$$(4.3) \quad z_n = f(x_1) \Delta x_1 + f(x_2) \Delta x_2 + \dots + f(x_n) \Delta x_n.$$

Отсюда следует, что $z_n - z_{n-1} = f(x_n) \Delta x_n$, и мы опять получаем (4.2), когда $\Delta x_i \rightarrow 0$. Следовательно, вычисление производной есть операция, обратная по отношению к вычислению интеграла, подобно тому как вычисление разности есть операция, обратная к вычислению суммы.

Перебрав много вариантов, Лейбниц остановился на таком обозначении суммы (4.3) (в пределе $\Delta x_i \rightarrow 0$):

$$(4.4) \quad \int f(x) dx$$

(см. рис. 4.2). Теперь эта площадь в границах от a до b обозначается так:

$$(4.5) \quad \int_a^b f(x) dx$$

(Фурье 1822), а “неопределенный интеграл” (4.4) обозначает любую первообразную $F(x)$ функции $f(x)$.

**Sed exiis quæ in
methodo tangentium exposui, patet esse $d, \frac{1}{2}xx = xdx$; ergo contra $\frac{1}{2}xx = xdx$ (ut enim potestates & radices in vulgaribus calculis, sic nobis summæ & differentiz seu \int & d , reciprocz sunt.)**

Рис. 4.2. Первая публикация знака интеграла, старомодное “s” (Лейбниц 1686).²

Первообразные не единственны: к каждой первообразной $F(x)$ можно прибавить произвольную постоянную C и $F(x) + C$ также будет первообразной той же самой функции. Если положить $C = -F(a)$, то мы получим такую первообразную $F(x) - F(a)$, которая обращается в нуль при $x = a$ (вместе с площадью z). Таким образом, площадь между a и b равна

$$(4.6) \quad \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

² Воспроизведено с разрешения Публичной библиотеки Женевского университета.

(см. “Основную теорему дифференциального исчисления” в разд. III.6).

Обращая формулы дифференцирования, мы получаем формулы для первообразных. Например, производной функции $f(x) = x^{n+1}$ является функция $f'(x) = (n + 1)x^n$. Поэтому первообразной функции x^n является функция $x^{n+1}/(n + 1)$. Эта и другие формулы, являющиеся обращениями формул раздела II.1, собраны в табл. 4.1.

ТАБЛИЦА 4.1. Краткая таблица первообразных

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsin} x + C$

Большие таблицы первообразных могут занимать несколько сотен страниц. Упомянем таблицы Грёбнера и Хофрейтера (1949), а также Градштейна и Рыжика (1980). За последние годы эти сведения были введены во многие компьютерные символьные системы.

Приложения

Площадь парабол. Согласно (4.6) и табл. 4.1, площадь под параболой n -го порядка $y = x^n$ между $x = a$ и $x = b$ равна

$$(4.7) \quad \int_a^b x^n dx = \left. \frac{x^{n+1}}{n+1} \right|_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1},$$

где мы использовали обозначение $F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$. При $a = 0$ эта формула представляет собой теорему Ферма I.3.2.

Площадь круга. Для того, чтобы вычислить площадь одной четвертой части круга, рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ при $0 \leq x \leq 1$. Первообразной этой функции является

$$(4.8) \quad F(x) = \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arcsin} x.$$

Это можно проверить путем дифференцирования (4.8). В дальнейшем мы увидим, как такие формулы получаются в действительности. Таким образом, используя (4.6), мы приходим к соотношению

$$\text{Площадь единичного круга} = 4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = 4(F(1) - F(0)) = \pi,$$

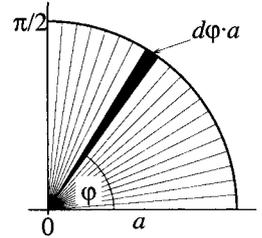
поскольку $\sin(\pi/2) = 1$.

Существует и другой изящный способ вычисления площади круга. Совсем не обязательно предполагать, что $f(x) dx$ являются маленькими вертикальными прямоугольниками. Давайте разрежем круг (радиуса a) на бесконечно тонкие треугольники (Кеплер 1615, см. также идею Лейбница, рис. I.4.11). Площадь такого треугольника равна

$$dS = \frac{a^2 \cdot d\varphi}{2},$$

где $d\varphi$ есть бесконечно малое приращение угла. Полная площадь (сумма всех этих треугольников) равна

$$S = \int_0^{2\pi} \frac{a^2 d\varphi}{2} = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{a^2}{2} \varphi \Big|_0^{2\pi} = a^2 \pi.$$



Объем шара. Рассмотрим шар радиуса a (рис. 4.3) и разрежем его на тонкие ломтики (диски толщиной dx и радиуса $r = \sqrt{a^2 - x^2}$). Объем такого ломтика равен $dV = r^2 \pi dx = (a^2 - x^2) \pi dx$, а для полного объема шара мы получаем

$$V = \int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2) \pi dx = \pi \left(xa^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-a}^{+a} = \frac{4a^3 \pi}{3}.$$

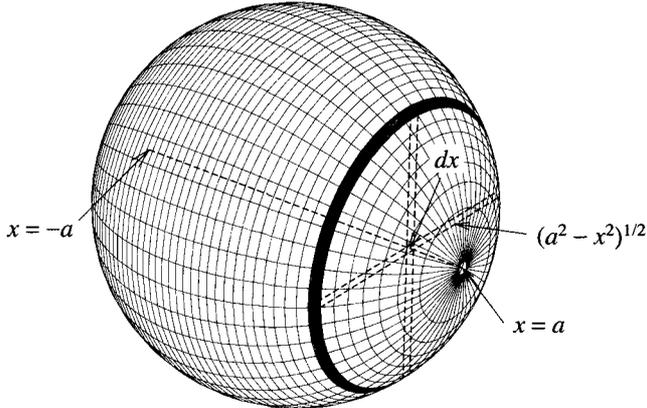


Рис. 4.3. Объем шара.

Работа в силовом поле. Пусть сила $f(s)$ действует вдоль прямой линии, параметризованной величиной s . Работа, производимая при перемещении тела из s в $s + \Delta s$, равна $f(s) \Delta s$ (сила \times путь). Таким образом, полная работа равна $\int_a^b f(s) ds$.

Пример. На тело с массой 1 кг действует сила земного тяготения $f(s) = 9.81 \cdot R^2/s^2$ [Н], где R — радиус Земли и s — расстояние от тела до центра Земли. Следовательно, для перемещения 1 кг с поверхности Земли в бесконечность требуется энергия, равная

$$E = \int_R^\infty 9.81 \frac{R^2}{s^2} ds = -9.81 \frac{R^2}{s} \Big|_R^\infty = 9.81 R = 62.10^6 \text{ [Дж]}.$$

Длина дуги.

Флюксия Длины определяется как величина, равная квадратному корню из суммы квадратов флюксий Абсциссы и Ординаты.
(Ньютон 1736, *Fluxions*, p. 130)

Вычислим длину L заданной кривой $y(x)$ при $a \leq x \leq b$. Если x получает приращение Δx (см. рис. 4.4), ордината увеличивается на $\Delta y = y'(x)\Delta x$ (мы пренебрегаем членами более высокого порядка). Поэтому длина малой части кривой равна Δs , где

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 = (1 + y'(x)^2) \Delta x^2$$

(теорема Пифагора). В пределе $\Delta x \rightarrow 0$ получаем

$$(4.9) \quad ds = \sqrt{1 + y'(x)^2} \cdot dx \quad \text{и} \quad L = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx.$$

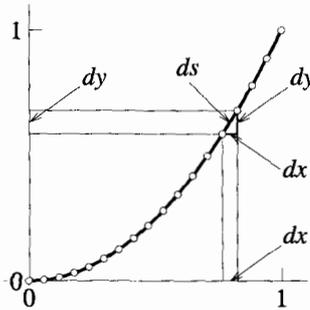


Рис. 4.4. Длина дуги кривой $y = x^2$.

Пример. Для параболы $y = x^2$ имеем $y' = 2x$, и длина дуги между $x = 0$ и $x = 1$ равна (см. формулу (4.27) ниже)

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{1 + 4x^2} + \frac{1}{4} \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1}) \Big|_0^1 \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \ln(2 + \sqrt{5}). \end{aligned}$$

Центр масс. Для примера рассмотрим две массы m_1 и m_2 , расположенные в точках с абсциссами x_1, x_2 . Их момент относительно начала координат равен $m_1 x_1 + m_2 x_2$. Центром масс называют точку \bar{x} такую, что если поместить в нее обе массы, их момент останется тем же самым, т. е.

$$(4.10) \quad (m_1 + m_2) \cdot \bar{x} = m_1 x_1 + m_2 x_2.$$

Если плотность тела меняется непрерывно так, что масса ломтика толщины dx равна $m(x) dx$, то по аналогии с (4.10) мы получаем

$$(4.11) \quad \int_a^b m(x) dx \cdot \bar{x} = \int_a^b x m(x) dx \quad \text{и} \quad \bar{x} = \frac{\int_a^b x m(x) dx}{\int_a^b m(x) dx}.$$

Пример. Для треугольника между прямой $y = cx$ и осью x ($0 \leq x \leq a$) имеем

$$(4.12) \quad m(x) = cx, \quad \bar{x} = \frac{\int_0^a cx^2 dx}{\int_0^a cx dx} = \frac{a^3/3}{a^2/2} = \frac{2a}{3}.$$

Замечание. Для случайной переменной X с «функцией плотности» $f(x)$ (удовлетворяющей условию $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$) величина $\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ называется *средним значением* или *математическим ожиданием* переменной X .

Техника интегрирования

Рассмотрим теперь некоторые общие способы нахождения первообразной. Систематический подход для некоторых важных классов функций будет изложен в разд. II.5.

Прежде всего, заметим, что интегрирование является линейной операцией, т. е.

$$(4.13) \quad \int (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)) dx = c_1 \int f_1(x) dx + c_2 \int f_2(x) dx.$$

Это сразу следует из того, что дифференцирование является линейной операцией (см. формулу (1.3)).

Замена переменной (подстановка). Предположим, что

$F(z)$ является первообразной функции $f(z)$,

т. е. $F'(z) = f(z)$, и рассмотрим подстановку $z = g(x)$, которая преобразует переменную z в x . Из формулы (1.16) следует, что

$F(g(x))$ является первообразной функции $f(g(x))g'(x)$.

Следовательно,

$$(4.14) \quad \boxed{\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z) dz,}$$

потому что вследствие (4.6) обе части равны $F(g(b)) - F(g(a))$. Выражение в левой части получается подстановкой $z = g(x)$ в функции $f(z)$ и $dz = g'(x)dx$.

Геометрическая интерпретация. Вычислим интеграл

$$\int_0^{1.5} \frac{4x}{1+x^2} dx,$$

используя подстановку $z = x^2$. Поскольку $dz = 2x dx$, из формулы (4.14) получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{1.5} \frac{2}{1+x^2} \cdot 2x dx &= \int_0^{2.25} \frac{2}{1+z} dz = 2 \cdot \ln(1+z) \Big|_0^{2.25} \\ &= 2 \cdot \ln(1+x^2) \Big|_0^{1.5} = 2 \ln(3.25). \end{aligned}$$

Рис. 4.5 иллюстрирует замену переменных $z = x^2$ и функции $4x/(1+x^2)$ на $2/(1+z)$. Точки x и $x + \Delta x$ преобразуются в $z = x^2$ и $z + \Delta z = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2$.

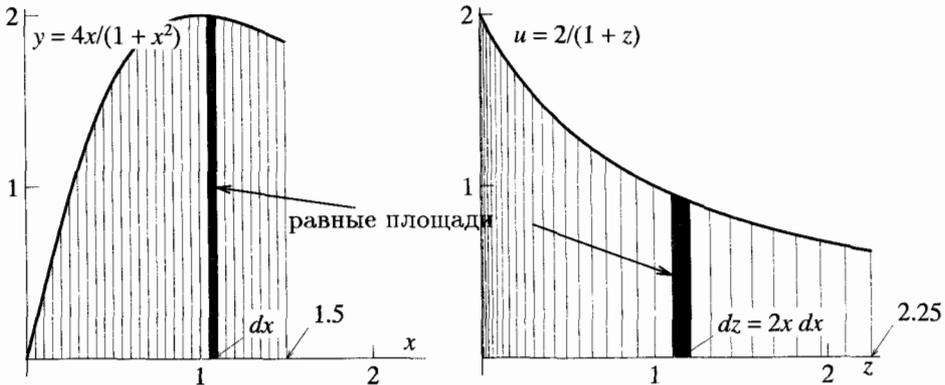


Рис. 4.5. Замена переменной в интеграле.

Следовательно, при $\Delta x \rightarrow 0$ площади заштрихованных прямоугольников равны, и интегралы в (4.14) имеют одинаковые значения.

Примеры. Все дело в том, чтобы найти “хорошую” подстановку. Продемонстрируем это на ряде примеров.

Для функций вида $f(ax + b)$ часто бывает полезной подстановка $z = ax + b$. Например, полагая $z = 5x + 2$, $dz = 5dx$, получаем

$$(4.15) \quad \int e^{5x+2} dx = \int e^z \frac{dz}{5} = \frac{1}{5} e^z = \frac{1}{5} e^{5x+2}.$$

Иногда наличие множителя $g'(x)$, нужного для подстановки $z = g(x)$, можно сразу заметить. Например, в приведенном ниже интеграле присутствие множителя x наводит на мысль о подстановке $z = -x^2$, $dz = -2x dx$, что дает

$$(4.16) \quad \int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int e^z dz = -\frac{1}{2} e^z = -\frac{1}{2} e^{-x^2}.$$

Таблица 4.1 содержит интегралы от функций $1/(1+x^2)$ и $1/\sqrt{1-x^2}$. Если же мы хотим найти, например, первообразную функции $1/(7+x^2)$, можно использовать подстановку $x^2 = 7z^2$ или $x = \sqrt{7}z$, $dx = \sqrt{7} dz$. Это дает

$$(4.17) \quad \int \frac{dx}{7+x^2} = \int \frac{\sqrt{7} dz}{7(1+z^2)} = \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} z = \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{7}}.$$

Интеграл с квадратичным выражением $x^2 + 2bx + c$ упрощается, если в этом выражении при $c > b^2$ выделить полный квадрат: $(x+b)^2 + (c-b^2)$, а затем сделать подстановку $z = (x+b)/\sqrt{c-b^2}$. Так, с помощью подстановки $z = (x+1/2)/\sqrt{3/4}$, следующий интеграл приводится к интегралу типа (4.17):

$$(4.18) \quad \int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dz}{\sqrt{3/4}(z^2+1)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2z}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right).$$

В качестве последнего примера рассмотрим функцию $(x+2)/(x^2+x+1)$. Преобразуем (Эйлер 1768 § 62) числитель к виду $x+2 = (x+1/2) + 3/2$ так, чтобы первая часть $x+1/2$ являлась производной знаменателя, умноженной на

постоянную. Теперь эту часть интеграла можно вычислить с помощью подстановки $z = x^2 + x + 1$. Вторая часть интеграла равна умноженному на постоянную выражению (4.18), и мы получаем

$$(4.19) \quad \int \frac{x+2}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right).$$

Интегрирование по частям. Второй способ интегрирования основан на правиле дифференцирования произведения (1.4). Если проинтегрировать формулу $(uv)' = u'v + uv'$, мы получим $u(x)v(x) = \int (u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) dx$, или

$$(4.20) \quad \boxed{\int u'(x)v(x) dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x) dx.}$$

В этой формуле один интеграл заменяется другим. Если при этом множители u' и v выбрать должным образом, вычисление второго интеграла может оказаться более простым, чем первого.

Примеры. Вычислим интеграл $\int x \sin x dx$. Нет смысла в выборе $u'(x) = x$ ($u(x) = x^2/2$) и $v(x) = \sin x$, потому что в этом случае вычислить второй интеграл будет еще труднее, чем первый. Поэтому пусть $u'(x) = \sin x$ ($u(x) = -\cos x$) и $v(x) = x$. Теперь по формуле (4.20) получаем

$$(4.21) \quad \int x \sin x dx = -x \cos x + \int 1 \cdot \cos x dx = -x \cos x + \sin x.$$

Иногда интегрирование по частям приходится повторять. В следующем примере мы сначала полагаем $v(x) = x^2$, $u'(x) = e^x$, а при втором интегрировании по частям берем $v(x) = x$, $u'(x) = e^x$:

$$(4.22) \quad \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = e^x (x^2 - 2x + 2).$$

Функции $\ln x$ или $\operatorname{arctg} x$ имеют простые производные. Они часто используются в качестве $v(x)$:

$$(4.23) \quad \int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx = x \ln x - \int \frac{x}{x} dx = x(\ln x - 1),$$

$$(4.24) \quad \begin{aligned} \int \operatorname{arctg} x dx &= x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2). \end{aligned}$$

Последний интеграл в (4.24) вычисляется с помощью подстановки $z = 1 + x^2$, $dz = 2x dx$.

Теперь вычислим интеграл $\int \sqrt{1+4x^2} dx$, который мы использовали при вычислении длины дуги параболы. Полагая $u'(x) = 1$, $v(x) = \sqrt{1+4x^2}$ и интегрируя по частям, получаем

$$(4.25) \quad \int \sqrt{1+4x^2} dx = x \sqrt{1+4x^2} - \int \frac{4x^2}{\sqrt{1+4x^2}} dx.$$

Второй интеграл выглядит не лучше, чем первый. Однако числитель можно представить в виде $4x^2 = (1+4x^2) - 1$. Теперь интеграл можно разделить на две части,

одну из которых, $-\int \sqrt{1+4x^2} dx$ (т.е. интеграл, который мы хотим вычислить) можно перенести в левую часть. Вторая же напоминает последний интеграл таблицы 4.1: производная функции $\operatorname{arsh} z$ есть $1/\sqrt{1+z^2}$ и, делая подстановку $z = 2x$ (см. упр. I.4.3), мы получаем

$$(4.26) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}} = \frac{1}{2} \operatorname{arsh}(2x) = \frac{1}{2} \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1}).$$

Таким образом, интеграл (4.25) вычислен:

$$(4.27) \quad \int \sqrt{1+4x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{4} \ln(2x + \sqrt{4x^2 + 1}).$$

Рекуррентные соотношения. Предположим, что нам нужно вычислить интеграл

$$(4.28) \quad I_n = \int \sin^n x dx.$$

Положим $u'(x) = \sin x$, $v(x) = \sin^{n-1} x$ и произведем интегрирование по частям. При этом получаем

$$\int \sin^n x dx = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \cos^2 x \sin^{n-2} x dx.$$

С учетом того, что $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, правый интеграл можно представить в виде двух интегралов, I_{n-2} и I_n . Переносим I_n в левую часть, мы получаем $(1+n-1)I_n = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)I_{n-2}$, или

$$(4.29) \quad I_n = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Это рекуррентное соотношение позволяет свести вычисление I_n к вычислению интеграла $I_1 = \int \sin x dx = -\cos x$ (если n нечетно), или $I_0 = \int dx = x$ (если n четно).

В качестве следующего примера рассмотрим интеграл

$$(4.30) \quad J_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

За неимением лучшей идеи воспользуемся интегрированием по частям, полагая $u'(x) = 1$ и $v(x) = 1/(1+x^2)^n$:

$$J_n = \int 1 \cdot \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = \frac{x}{(1+x^2)^n} + n \int \frac{2x^2}{(1+x^2)^{n+1}} dx.$$

Используя такой же прием, как при вычислении (4.25), напомним в последнем интеграле $2x^2 = 2(1+x^2) - 2$ и получим

$$J_n = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2nJ_n - 2nJ_{n+1}.$$

Нам не повезло, поскольку индекс n стал больше, а не меньше. Но это не важно, из этого соотношения мы можем найти интеграл с большим индексом:

$$(4.31) \quad J_{n+1} = \frac{1}{2n} \frac{x}{(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} J_n.$$

Это соотношение сводит вычисление (4.30) к вычислению $J_1 = \operatorname{arctg} x$.

Формула Тейлора с остаточным членом

И. Бернулли (1694b, “Effectiones omnium quadraturam . . .”), вычисляя интегралы с помощью повторного интегрирования по частям, получил “generalissimam” (самые общие, — *лат.*) ряды, подобные тем, которые позже получил Тейлор. Впоследствии Коши (1821) нашел, что при разумной модификации этот метод приводит в точности к ряду Тейлора для функции f с остаточным членом, выраженным в виде интеграла.

Идея состоит в том, чтобы в соответствии с (4.6) написать

$$f(x) = f(a) + \int_a^x 1 \cdot f'(t) dt$$

и использовать интегрирование по частям, положив $u'(t) = 1$ и $v(t) = f'(t)$. Далее, положим $u(t) = -(x-t)$ (где x — постоянная) вместо $u(t) = t$ (это ключевой момент), и тогда мы получаем

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) - (x-t)f'(t) \Big|_a^x + \int_a^x (x-t)f''(t) dt \\ &= f(a) + (x-a)f'(a) + \int_a^x (x-t)f''(t) dt. \end{aligned}$$

На следующем шаге мы полагаем $u(t) = -(x-t)^2/2!$ и $v(t) = f''(t)$ и получаем

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2!} f'''(t) dt.$$

Действуя дальше аналогичным образом, приходим к следующему результату:

$$(4.32) \quad f(x) = \sum_{i=0}^k \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) dt.$$

Пример. Если $f(x) = e^x$, $f^{(i)}(x) = e^x$ и $a = 0$, то формула (4.32) примет такой вид:

$$(4.33) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^k}{k!} e^t dt.$$

Вас может удивить, что остаточный член (величина ошибки от отбывания ряда) представлен в виде интеграла, хотя при вычислении подобного рода интегралов могут возникнуть, как мы видели, немалые трудности. Конечно, если вычислить интеграл в (4.33) с помощью рассмотренных выше искусных приемов, получится просто $e^x - \sum_{i=0}^k x^i/i!$, т.е. совершенно бесполезный результат. Основная идея состоит в том, что можно *оценить* остаточный член, заменив подынтегральное выражение в (4.33) какое-либо более простым. Например, для $0 \leq x \leq 1$ будет и $0 \leq t \leq 1$, тогда значение e^t лежит между числами 1 и 3. Поэтому представляется очевидным (и в дальнейшем будет обосновано теоремой III.5.14), что величина соответствующей площади *также* заключена между величинами

$$\int_0^x \frac{(x-t)^k}{k!} \cdot 1 dt = \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \quad \text{и} \quad \int_0^x \frac{(x-t)^k}{k!} \cdot 3 dt = \frac{3x^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Отсюда следует, например, что при $k = 10$ остаточный член меньше, чем 10^{-7} .

Упражнения

4.1 Пусть задана кривая с параметрическим представлением $x(t), y(t)$. Покажите, что длина ее дуги при $a \leq t \leq b$ равна

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Вычислите длину дуги циклоиды (3.18) при $0 \leq t \leq 2\pi$.

4.2 Вычислите интегралы

а) $\int \frac{x dx}{\sqrt{9-x^2}}$, б) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$, в) $\int x^2 \sin x dx$,

г) $I_{-n} = \int \frac{dx}{\sin^n x}$, д) $\int x^3 e^{-x^2} dx$, е) $\int \arccos x dx$,

ж) $\int e^{\alpha x} \cos \beta x dx$, з) $\int e^{\alpha x} \sin \beta x dx$, и) $\int \frac{x dx}{x^2 - 6x + 13}$.

Указания. В случае г) обратите уравнение (4.29), в случае д) напишите $x^3 = x \cdot x^2$, в случаях ж) и з) примените интегрирование по частям или разложите $\int e^{(\alpha+i\beta)x} dx$ на вещественную и мнимую части.

4.3 С помощью повторного интегрирования по частям покажите, что для целых значений m и n справедливо соотношение

$$(4.34) \quad \int_a^b \frac{(b-x)^m (x-a)^n}{m! n!} dx = \frac{(b-a)^{m+n+1}}{(m+n+1)!}$$

и, в частности,

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}.$$

II.5 Функции, имеющие элементарные интегралы

Приведенная выше величина

$$\frac{ppads}{qqss - ppa a}$$

немедленно приводится безо всяких изменений к двум логарифмическим дробям, если разбить ее на две части вот так:

$$\frac{ppads}{qqss - ppa a} = \frac{\frac{1}{2}pds}{qs - pa} - \frac{\frac{1}{2}pds}{qs + pa} \dots$$

(Приложение к письму И. Бернулли 1699, см. *Briefwechsel*, vol. 1, p. 212)

Задача 3: Пусть X обозначает произвольную рациональную функцию от x . Опишите способ, с помощью которого можно проинтегрировать выражение Xdx .
(Эйлер 1768, *Opera Omnia*, vol. XI, p. 28)

В предыдущем разделе мы изучили некоторые способы интегрирования. В этом разделе мы будем систематически использовать эти способы для того, чтобы показать, что интегралы от функций некоторых классов являются элементарными. *Элементарными* называются функции, составленные из полиномов, рациональных, показательных, логарифмических, тригонометрических и обратных тригонометрических функций.

Интегрирование рациональных функций

Пусть $R(x) = P(x)/Q(x)$ есть рациональная функция ($P(x)$ и $Q(x)$ — полиномы). Приведем конструктивное доказательство того, что функция $\int R(x) dx$ является элементарной. Построение первообразной мы проведем в три этапа:

- приведение к случаю $\deg P < \deg Q$ ($\deg P$ означает степень $P(x)$);
- факторизация $Q(x)$ и разложение $R(x)$ на дроби;
- интегрирование дробей.

Сведение к случаю $\deg P < \deg Q$. Первое упрощение функции $R(x)$ возможно в случае $\deg P \geq \deg Q$. В этом случае следует разделить P на Q с тем, чтобы получить

$$(5.1) \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{\hat{P}(x)}{Q(x)},$$

где $S(x)$ и $\hat{P}(x)$ являются полиномами (частное и остаток), причем $\deg \hat{P} < \deg Q$. В качестве примера рассмотрим

$$(5.2) \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x^6 - 3x^5 - 9x^4 + 23x^3 + x^2 - 44x + 39}{x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x - 4}.$$

Сначала избавимся от члена $2x^6$, вычитая $2xQ(x)$ из $P(x)$, потом прибавим $5Q(x)$ к $P(x)$, после чего получим

$$(5.3) \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = 2x - 5 + \frac{6x^4 - 20x^2 + 4x + 19}{x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x - 4}.$$

Многочлен $S(x)$ сразу интегрируется, так что только второй член выражения (5.1) требует дополнительного исследования.

Разложение на элементарные дроби. Предположим, что известно разложение $Q(x)$ на линейные множители:

$$(5.4) \quad Q(x) = (x - \alpha_1)^{m_1} (x - \alpha_2)^{m_2} \dots (x - \alpha_k)^{m_k} = \prod_{i=1}^k (x - \alpha_i)^{m_i}.$$

Здесь $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ являются различными (возможно комплексными) корнями $Q(x)$, а m_i — их кратности. Следующая лемма показывает, как наша рациональная функция может быть представлена в виде линейной комбинации простых дробей, так называемых *элементарных дробей*. Этот способ был описан еще в переписке между И. Бернулли и Лейбницем (около 1700 г.) и систематически использовался И. Бернулли (1702), Лейбницем (1702), Эйлером (1768, Caput I, Problema 3) и Эрмитом (1873).

(5.1) Лемма. Пусть $Q(x)$ задается выражением (5.4) и пусть $P(x)$ является многочленом, удовлетворяющим условию $\deg P < \deg Q$. Тогда существуют постоянные C_{ij} такие, что

$$(5.5) \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} \frac{C_{ij}}{(x - \alpha_i)^j}.$$

Доказательство. Будем последовательно исключать из $Q(x)$ множители следующим образом: запишем $Q(x) = (x - \alpha)^m q(x)$, где α является корнем $Q(x)$ и $q(\alpha) \neq 0$. Покажем, что существуют постоянная C и многочлен $p(x)$ степени $\leq \deg Q - 1$ такие, что

$$(5.6) \quad \frac{P(x)}{(x - \alpha)^m q(x)} = \frac{C}{(x - \alpha)^m} + \frac{p(x)}{(x - \alpha)^{m-1} q(x)}$$

или, (после умножения на общий знаменатель)

$$(5.7) \quad P(x) = C \cdot q(x) + p(x) \cdot (x - \alpha).$$

Положив здесь $x = \alpha$, получим

$$(5.8) \quad C = P(\alpha)/q(\alpha).$$

Многочлен $p(x)$ получается делением $P(x) - C \cdot q(x)$ на $(x - \alpha)$. Применяя рекурсивно эту процедуру к правой части соотношения (5.6), получим разложение (5.5). \square

Пример. Многочлен $Q(x)$ из примера (5.2) имеет разложение

$$(5.9) \quad Q(x) = x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x - 4 = (x - 1)^3(x + 2)^2.$$

Применяя (5.7) и (5.8) при $\alpha = -2$ и $m = 2$, в качестве выражения (5.6) получим:

$$\frac{6x^4 - 20x^2 + 4x + 19}{(x - 1)^3(x + 2)^2} = \frac{-1}{(x + 2)^2} + \frac{6x^3 - 11x^2 - x + 9}{(x - 1)^3(x + 2)}.$$

Положив теперь $\alpha = -2$ и $m = 1$, получаем

$$(5.10) \quad \frac{6x^4 - 20x^2 + 4x + 19}{(x-1)^3(x+2)^2} = \frac{-1}{(x+2)^2} + \frac{3}{x+2} + \frac{3x^2 - 8x + 6}{(x-1)^3}.$$

Заменим в последнем члене x на $(x-1) + 1$, так что $3x^2 - 8x + 6 = 3(x-1)^2 - 2(x-1) + 1$, и вместо (5.10) получим окончательно

$$(5.11) \quad \frac{6x^4 - 20x^2 + 4x + 19}{(x-1)^3(x+2)^2} = \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{-2}{(x-1)^2} + \frac{3}{x-1} + \frac{-1}{(x+2)^2} + \frac{3}{x+2}.$$

Вторая возможность. Из леммы 5.1 известно, что

$$(5.12) \quad \frac{6x^4 - 20x^2 + 4x + 19}{(x-1)^3(x+2)^2} = \frac{A_0}{(x-1)^3} + \frac{A_1}{(x-1)^2} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{B_0}{(x+2)^2} + \frac{B_1}{x+2}.$$

Коэффициенты A_i и B_i можно вычислить следующим образом. Умножим уравнение (5.12) на $(x-1)^3$, так что

$$\frac{6x^4 - 20x^2 + 4x + 19}{(x+2)^2} = A_0 + A_1(x-1) + A_2(x-1)^2 + (x-1)^3 g(x),$$

где функция $g(x)$ определена в окрестности точки $x = 1$. Следовательно A_i являются первыми коэффициентами ряда Тейлора функции $P(x)/(x+2)^2$ (см. разд. II.2) и удовлетворяют соотношениям

$$A_i = \frac{1}{i!} \frac{d^i}{dx^i} \left(\frac{6x^4 - 20x^2 + 4x + 19}{(x+2)^2} \right) \Big|_{x=1},$$

откуда $A_0 = 1$, $A_1 = -2$, $A_2 = 3$. Аналогично получаем

$$B_i = \frac{1}{i!} \frac{d^i}{dx^i} \left(\frac{6x^4 - 20x^2 + 4x + 19}{(x-1)^3} \right) \Big|_{x=-2},$$

откуда $B_0 = -1$, $B_1 = 3$.

Интегрирование элементарных дробей. Отдельные члены в разложении (5.5) легко проинтегрировать, используя формулы разд. II.4 (см. табл. 4.1):

$$(5.13) \quad \int \frac{dx}{(x-\alpha)^j} = \begin{cases} \frac{-1}{(j-1)(x-\alpha)^{j-1}}, & \text{если } j > 1 \\ \ln|x-\alpha|, & \text{если } j = 1. \end{cases}$$

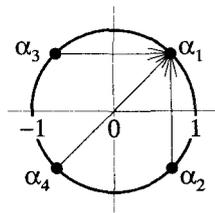
Используя уравнения (5.3), (5.9) и (5.11), получаем для нашего примера

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = x^2 - 5x - \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} + 3 \ln|x-1| + \frac{1}{x+2} + 3 \ln|x+2| + C.$$

Если все корни $Q(x)$ действительны (т.е. α_i из (5.4) действительны), то C_{ij} в (5.5) также действительны, и мы выразили интеграл в виде линейной комбинации действительных функций. Такой же процесс преобразования может быть применен и в случае, когда $Q(x)$ имеет комплексные корни.

Пример с комплексными корнями. Предположим, что нам нужно вычислить $\int (1+x^4)^{-1} dx$. Поскольку корнями уравнения $x^4 + 1 = 0$ являются $\alpha_1 = (1+i)/\sqrt{2}$, $\alpha_2 = (1-i)/\sqrt{2}$, $\alpha_3 = (-1+i)/\sqrt{2}$, $\alpha_4 = (-1-i)/\sqrt{2}$, разложение леммы 5.1 дает

$$(5.14) \quad \frac{1}{1+x^4} = \frac{A}{x - (1+i)/\sqrt{2}} + \frac{B}{x - (1-i)/\sqrt{2}} + \frac{C}{x + (1-i)/\sqrt{2}} + \frac{D}{x + (1+i)/\sqrt{2}}.$$



Согласно (5.8) мы получаем

$$A = \frac{1}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_4)} = \frac{1}{i\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} + i\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}}{8}(-1 - i),$$

и аналогично $B = (-1+i)\sqrt{2}/8$, $C = (1-i)\sqrt{2}/8$, $D = (1+i)\sqrt{2}/8$. Следовательно,

$$(5.15) \quad \int \frac{dx}{1+x^4} = A \ln(x - (1+i)/\sqrt{2}) + B \ln(x - (1-i)/\sqrt{2}) + C \ln(x + (1-i)/\sqrt{2}) + D \ln(x + (1+i)/\sqrt{2}).$$

Используя (I.5.11) и соотношение

$$\operatorname{arctg} u + \operatorname{arctg} (1/u) = \begin{cases} \pi/2 & \text{для } u > 0 \\ -\pi/2 & \text{для } u < 0, \end{cases}$$

которое следует из (I.4.5) или из (I.4.32), мы получаем

$$\int \frac{dx}{x - (\alpha + i\beta)} = \ln(x - \alpha - i\beta) = \frac{1}{2} \ln((x - \alpha)^2 + \beta^2) + i \operatorname{arctg} \frac{x - \alpha}{\beta},$$

и правая часть выражения (5.15) может быть представлена в виде

$$(5.16) \quad \int \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{\sqrt{2}}{8} \ln \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\operatorname{arctg} (x\sqrt{2} + 1) + \operatorname{arctg} (x\sqrt{2} - 1) \right).$$

Как избежать комплексной арифметики. Если мы не хотим использовать комплексную арифметику, то можно поступить следующим образом. Предположим, что многочлен $Q(x)$ имеет l различных комплексно-сопряженных пар корней $\alpha_1 \pm i\beta_1, \dots, \alpha_l \pm i\beta_l$ и k различных действительных корней $\gamma_1, \dots, \gamma_k$. Тогда мы получаем действительное разложение

$$(5.17) \quad Q(x) = \prod_{i=1}^l ((x - \alpha_i)^2 + \beta_i^2)^{m_i} \prod_{i=1}^k (x - \gamma_i)^{n_i},$$

где m_i и n_i означают кратности корней. Теперь действительный вариант леммы 5.1 выглядит следующим образом:

(5.2) **Лемма.** Пусть $Q(x)$ задан выражением (5.17), а $P(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами, удовлетворяющий условию $\deg P < \deg Q$. Тогда существуют действительные постоянные A_{ij}, B_{ij} и C_{ij} такие, что

$$(5.18) \quad \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{m_i} \frac{A_{ij} + B_{ij}x}{((x - \alpha_i)^2 + \beta_i^2)^j} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \frac{C_{ij}}{(x - \gamma_i)^j}.$$

Доказательство. Действительные корни можно рассмотреть так же, как в доказательстве леммы 5.1. Далее, напомним $Q(x) = ((x - \alpha)^2 + \beta^2)^m q(x)$, где $\alpha + i\beta$ — корень $Q(x)$ и $q(\alpha \pm i\beta) \neq 0$. Тогда существуют действительные постоянные A, B и многочлен $p(x)$ степени $\leq \deg Q - 1$ такие, что

$$\frac{P(x)}{((x - \alpha)^2 + \beta^2)^m q(x)} = \frac{A + Bx}{((x - \alpha)^2 + \beta^2)^m} + \frac{p(x)}{((x - \alpha)^2 + \beta^2)^{m-1} q(x)}.$$

Чтобы доказать это, рассмотрим эквивалентное равенство

$$P(x) = (A + Bx) \cdot q(x) + p(x) \cdot ((x - \alpha)^2 + \beta^2).$$

Полагая $x = \alpha \pm i\beta$, из этой формулы можно найти A и B , а многочлен $p(x)$ можно получить делением $P(x) - (A + Bx) \cdot q(x)$ на множитель $((x - \alpha)^2 + \beta^2)$. Формула (5.18) теперь получается как при доказательстве леммы 5.1 индукцией по степени $Q(x)$. \square

Для интегрирования общего члена выражения (5.18) преобразуем его следующим образом:

$$\frac{A + Bx}{((x - \alpha)^2 + \beta^2)^j} = \frac{B(x - \alpha)}{((x - \alpha)^2 + \beta^2)^j} + \frac{A + B\alpha}{((x - \alpha)^2 + \beta^2)^j}.$$

Первый член этой суммы можно сразу проинтегрировать с помощью подстановки $z = (x - \alpha)^2 + \beta^2$, $dz = 2(x - \alpha)dx$. Во втором члене нужно сделать подстановку $z = (x - \alpha)/\beta$, после чего получим интеграл, рассмотренный в последнем примере разд. II.4. Следовательно, для $j = 1$ мы получаем

$$\int \frac{A + Bx}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} dx = \frac{B}{2} \ln((x - \alpha)^2 + \beta^2) + \frac{A + B\alpha}{\beta} \operatorname{arctg} \left(\frac{x - \alpha}{\beta} \right)$$

и для $j > 1$

$$\int \frac{A + Bx}{((x - \alpha)^2 + \beta^2)^j} dx = \frac{-B}{2(j-1)((x - \alpha)^2 + \beta^2)^{j-1}} + \frac{A + B\alpha}{\beta^{2j-1}} J_j \left(\frac{x - \alpha}{\beta} \right),$$

где $J_1(z) = \operatorname{arctg} z$ и

$$(5.19) \quad J_{j+1}(z) = \frac{z}{2^j(z^2 + 1)^j} + \frac{2j-1}{2^j} J_j(z).$$

Пример. С помощью леммы 5.2 для функции (5.14) получаем разложение

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{1}{(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)} = \frac{A+Bx}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{C+Dx}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}.$$

Если умножить это равенство на $(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$ и положить $x = (-1 \pm i)/\sqrt{2}$, мы найдем, что

$$\frac{1}{2 \mp 2i} = \frac{1 \pm i}{4} = A + B \frac{(-1 \pm i)}{\sqrt{2}},$$

а сравнивая действительные и мнимые части, получаем, что $A = 1/2$, $B = \sqrt{2}/4$. Постоянные $C = 1/2$ и $D = -\sqrt{2}/4$ получаются аналогичным образом. Используя приведенные выше формулы, мы опять получаем результат (5.16).

Замечание. Разложение на элементарные дроби вновь пробудило интерес математиков XVIII столетия к корням многочленов и к алгебре.

Полезные подстановки

Теперь мы хотим использовать полученный выше результат и привести несколько подстановок, расширяющих класс функций, неопределенные интегралы от которых являются элементарными функциями. Далее в этом разделе R обозначает рациональную функцию одного, двух или трех аргументов.

Интегралы вида $\int R(\sqrt[n]{ax+b}, x) dx$. Очевидной подстановкой является

$$(5.20) \quad \sqrt[n]{ax+b} = u, \quad x = \frac{u^n - b}{a}, \quad dx = \frac{n}{a} \cdot u^{n-1} \cdot du,$$

с помощью которой мы получаем

$$\int R(\sqrt[n]{ax+b}, x) dx = \frac{n}{a} \int R\left(u, \frac{u^n - b}{a}\right) u^{n-1} du = \int \tilde{R}(u) du,$$

где $\tilde{R}(u)$ есть рациональная функция. Последний интеграл можно вычислить с помощью приемов, описанных выше.

Интегралы вида $\int R(e^{\lambda x}) dx$. Очевидной подстановкой является $u = e^{\lambda x}$, что дает $du = \lambda e^{\lambda x} dx$ и $dx = du/(\lambda u)$. В результате получается интеграл от рациональной функции.

Пример.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2 + \operatorname{sh} x} &= \int \frac{dx}{2 + (e^x - e^{-x})/2} = 2 \int \frac{du}{u^2 + 4u - 1} = \\ &= 2 \int \frac{du}{(u+2)^2 - 5} = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \frac{u+2-\sqrt{5}}{u+2+\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \frac{e^x + 2 - \sqrt{5}}{e^x + 2 + \sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали формулу из упр. 5.1, приведенного ниже.

Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x) dx$. Со времен античности (Пифагор 570–501 до Р.Х.; см. также Р.К. Бук 1980, *Sherlock Holmes in Babylon*, Am. Math. Monthly vol. 87, Nr. 5, p. 335–345) мы знаем, что тройки чисел $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$, $(7, 24, 25)$, ... удовлетворяют соотношению $a^2 + b^2 = c^2$ и имеют общий вид $(u, (u^2 - 1)/2, (u^2 + 1)/2)$. Этот факт подсказал идею подстановки (Эйлер 1768, Caput V, §261)

$$(5.21) \quad \sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2u}{1-u^2}$$

(Эйлер 1768, Сарту V, §261). Легко проверить, что $\sin x = u(1 + \cos x)$, так что точка $(\cos x, \sin x)$ является точкой пересечения прямой $\eta = u(1 + \xi)$ с единичной окружностью (см. рисунок). Следовательно, мы получаем $u = \operatorname{tg}(x/2)$, $x = 2 \operatorname{arctg} u$ и

$$dx = \frac{2}{1+u^2} du.$$

Если все эти подстановки произвести в интеграле $\int R(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x) dx$, мы придем к интегралу от рациональной функции.

Пример.

$$\int \frac{dx}{2 + \sin x} = \int \frac{2du}{(1+u^2)(2 + \frac{2u}{1+u^2})} = \int \frac{du}{u^2 + u + 1}.$$

Последний интеграл мы знаем из формулы (4.18). Таким образом,

$$\int \frac{dx}{2 + \sin x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(u + \frac{1}{2} \right) \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) \right).$$

Интегралы вида $\int R(\sqrt{ax^2 + 2bx + c}, x) dx$. Идея (Эйлер 1768, § 88) состоит в том, чтобы с помощью соотношения $ax^2 + 2bx + c = a(x - z)^2$ определить новую переменную z . Это приводит к подстановке

$$(5.22) \quad \begin{aligned} x &= \frac{az^2 - c}{2(b + az)}, & dx &= \frac{a(az^2 + 2bz + c)}{2(b + az)^2} dz, \\ \sqrt{ax^2 + 2bx + c} &= \pm \sqrt{a}(z - x) = \pm \sqrt{a} \cdot \frac{az^2 + 2bz + c}{2(b + az)}, \\ z &= x \pm \sqrt{ax^2 + 2bx + c} / \sqrt{a}, \end{aligned}$$

и мы опять получаем интеграл от рациональной функции. При $a < 0$ мы приходим к комплексной арифметике, чего можно избежать, если использовать преобразование из упр. 5.3.

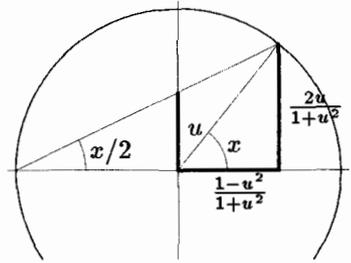
Иногда бывает более удобно преобразовать выражение $\sqrt{ax^2 + 2bx + c}$ с помощью подходящей линейной подстановки $z = \alpha x + \beta$ к одному из следующих видов:

$$\sqrt{z^2 + 1}, \quad \sqrt{z^2 - 1}, \quad \sqrt{1 - z^2}.$$

После этого можно применить подстановки

$$(5.23) \quad z = \operatorname{sh} u, \quad z = \operatorname{ch} u, \quad z = \sin u$$

соответственно, чтобы избавиться от квадратного корня под знаком интеграла.



Пример. Рассмотрим опять интеграл (4.27). Полагая $x = \operatorname{sh} u$, получаем

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + 1} dx &= \int \operatorname{ch}^2 u du = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{\operatorname{ch} 2u}{2} \right) du = \frac{u}{2} + \frac{\operatorname{sh} 2u}{4} \\ &= \frac{u}{2} + \frac{\operatorname{sh} u \operatorname{ch} u}{2} = \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \frac{x\sqrt{x^2 + 1}}{2}. \end{aligned}$$

Что касается функции, обратной к $x = \operatorname{sh} u$, см. упр. I.4.3.

Упражнения

5.1 (И. Бернулли, см. цитату в начале этого раздела). Докажите, что

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x - a}{x + a} + C.$$

5.2 Покажите, что $\int R\left(\sqrt[n]{\frac{ax + b}{ex + f}}, x\right) dx$ является элементарной функцией.

5.3 (Эйлер 1768, Сарту II, §88). Пусть многочлен $ax^2 + 2bx + c$ имеет различные действительные корни α, β . Покажите, что подстановка $z^2 = (x - \beta)/(x - \alpha)$ преобразует интеграл

$$\int R(\sqrt{ax^2 + 2bx + c}, x) dx$$

(где R есть рациональная функция двух аргументов) в интеграл $\int \tilde{R}(z) dz$, где \tilde{R} — рациональная функция.

5.4 Некто С.Л. Евер упростил соотношение (5.16) с помощью формулы (I.4.32), сведя его к виду

$$\int \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{\sqrt{2}}{8} \ln \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{1 - x^2}.$$

В результате получаем, например,

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{\sqrt{2}}{8} \ln 5 + \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg}(-2) = -0.1069250677,$$

т. е. отрицательную величину для интеграла от положительной функции. Где он ошибся и чему равно правильное значение?

5.5 Вычислите

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

дважды, один раз с помощью подстановки (5.22), а второй — с помощью подстановки (5.23). Это приведет к формуле $\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ (см. упр. I.4.3).

5.6 Докажите, что $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \operatorname{tg} x) dx$ можно проинтегрировать с помощью подстановки

$$\sin^2 x = \frac{u^2}{1 + u^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + u^2}, \quad \operatorname{tg} x = u.$$

II.6 Приближенное вычисление интегралов

... потому что после всех этих попыток аналитики в конце концов пришли к выводу, что следует оставить всякую надежду выразить эллиптические дуги, используя алгебраические формулы, логарифмы и дуги окружности. (Ламбер 1772, *Rectification elliptischer Bögen ...*, Opera vol. I, p. 312)

Хотя задаче численной квадратуры уже около двух столетий и она изучалась многими геометрами: Ньютоном, Котесом, Гауссом, Якоби, Эрмитом, Чебышевым, Кристоффелем, Гейне, Радо [sic], А. Марковым, Т. Стильесом [sic], К. Поссе, К. Андреевым, Н. Соиным и другими, тем не менее ее нельзя считать в достаточной степени исчерпанной. (Стеклов 1918)

С помощью нашего метода легко убедиться в том, что интеграл $\int \frac{e^x dx}{x}$, которым очень интересовались геометры, невозможно вычислить в конечной форме ... (Ливуилль 1835, p. 113)

Несмотря на чрезвычайно интересные результаты предыдущих разделов и на изобретательность Бернулли, Эйлера, Лагранжа и многих других, многие интегралы не поддавались вычислению. Укажем несколько таких интегралов:

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{e^x dx}{x}, \quad \int \frac{dx}{\ln x},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}, \quad \int \sqrt{1 - k^2 \cos^2 x} dx, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Последние три называются “эллиптическими интегралами”. Изучению этих интегралов отдали много времени и труда Лежандр, Абель, Якоби и Вейерштрасс. Интегралы, приведенные выше, не могут быть выражены через конечное число элементарных функций (Ливуилль 1835, см. цитату). Здесь мы встречаемся с новыми функциями, которые нужно вычислять новыми методами.

Мы рассмотрим три подхода: (1) разложение в ряд, (2) аппроксимация многочленами (численное интегрирование) и (3) асимптотическое разложение.

Разложения в ряды

Идея этого метода состоит в том, чтобы разложить подинтегральную функцию в ряд (либо по степеням x , либо в терминах других выражений), после чего провести почленное интегрирование. Обоснование этого метода будет дано в разд. III.5.

Исторические примеры. Самым старым примером является вычисление Меркатора (см. формулу (I.3.13))

$$\ln(1+x) = \int \frac{1}{1+x} dx = \int (1 - x + x^2 - \dots) dx = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

Далее, вычисление длины дуги окружности $y = \sqrt{1-x^2}$ (см. формулу (4.9) и теорему I.2.2) — это ньютоновский подход к формуле (I.4.25):

$$\begin{aligned} \arcsin x &= \int_0^x \sqrt{1+y'(t)^2} dt = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{t^2}{1-t^2}} dt = \int_0^x (1-t^2)^{-1/2} dt \\ &= \int_0^x \left(1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}t^4 + \dots\right) dt = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \dots \end{aligned}$$

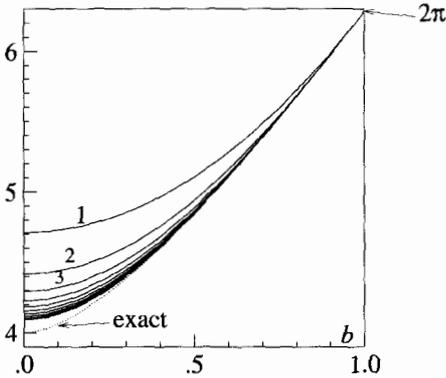


Рис. 6.1. Сходимость ряда (6.4) (периметр эллипса).

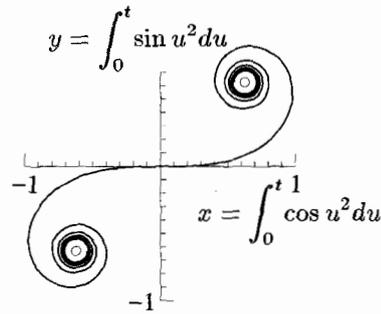


Рис. 6.2. Интегралы Френеля.

Периметр эллипса. Вычислим периметр эллипса с полуосями 1 и b :

$$x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{или} \quad x = \cos t, \quad y = b \sin t.$$

Поскольку $dx = -\sin t dt$ и $dy = b \cos t dt$, периметр равен

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{2\pi} \sqrt{dx^2 + dy^2} = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \\ (6.1) \quad &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \underbrace{(1-b^2)}_{\alpha} \cos^2 t} dt. \end{aligned}$$

Это “эллиптический интеграл” (отсюда и название), который не является элементарным. Вычислим его следующим образом: предположим, что $1 > b > 0$, и, следовательно, $0 < \alpha < 1$. Идея вычисления состоит в том, чтобы использовать ряд Ньютона для $\sqrt{1-x}$ (теорема I.2.2):

$$(6.2) \quad \sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} x^2 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 - \dots,$$

что приводит к

$$(6.3) \quad P = 4 \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \cos^2 t - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \alpha^2 \cos^4 t - \dots \right) dt.$$

Используя приемы из разд. II.4 (см. формулу (4.28) и далее), получаем

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t dt = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)},$$

и (6.3) приводится к виду (см. Эйлер 1750, *Opera*, vol. XX, p. 49)

$$(6.4) \quad P = 2\pi \left(1 - \alpha \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \alpha^2 \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \alpha^3 \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} - \dots \right).$$

Сходимость этой формулы иллюстрирует рис. 6.1. При $\alpha = 0$ (т.е. при $b = 1$) мы имеем окружность, и $P = 2\pi$. При $\alpha = 1$ (т.е. $b = 0$) ряд очень медленно сходится к точному значению 4.

Интегралы Френеля. Интегралы Френеля (Френель 1818)

$$(6.5) \quad x(t) = \int_0^t \cos(u^2) du, \quad y(t) = \int_0^t \sin(u^2) du$$

обладают интересными свойствами (упр. 6.4) и в плоскости (x, y) образуют красивую спираль (рис. 6.2). Они не являются элементарными. Однако функции $\sin(u^2)$ и $\cos(u^2)$ допускают разложение в простые бесконечные ряды (ряды для $\sin z$ и $\cos z$, где $z = u^2$; см. (I.4.16) и (I.4.17)), с помощью которых можно почленно вычислить интегралы следующим образом:

$$\int_0^t \sin(u^2) du = \int_0^t \left(u^2 - \frac{u^6}{3!} + \frac{u^{10}}{5!} - \dots \right) du = \frac{t^3}{3} - \frac{t^7}{7 \cdot 3!} + \frac{t^{11}}{11 \cdot 5!} - \dots$$

$$\int_0^t \cos(u^2) du = \int_0^t \left(1 - \frac{u^4}{2!} + \dots \right) du = t - \frac{t^5}{5 \cdot 2!} + \frac{t^9}{9 \cdot 4!} - \frac{t^{13}}{13 \cdot 6!} + \dots$$

Сходимость этих рядов иллюстрирует рис. 6.3. Результаты превосходны для малых значений t . Когда значение $|t|$ увеличивается, следует учитывать все большее число членов.

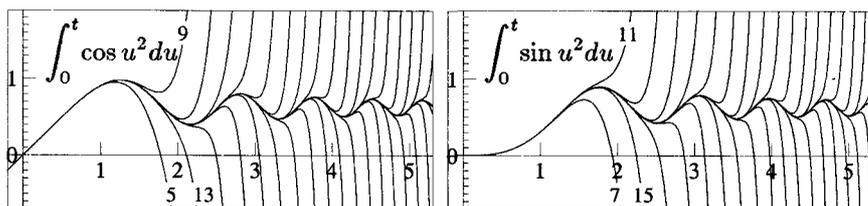


Рис. 6.3. Вычисление интегралов Френеля с помощью степенных рядов; числа 5, 9, 13 и 7, 11, 15 означают наивысшую учитываемую степень t .

Численные методы

Предположим, что нам нужно вычислить интеграл $\int_a^b f(x) dx$, где интервал интегрирования задан. Идея состоит в следующем: зафиксируем N , разобьем интервал $[a, b]$ на N подинтервалов длины $h = (b - a)/N$,

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + h, \quad \dots \quad x_i = a + ih, \quad \dots \quad x_N = b,$$

и локально заменим функцию $f(x)$ на многочлены, которые можно легко проинтегрировать.

Правило трапеций. Функция $f(x)$ на интервале $[x_i, x_{i+1}]$ заменяется прямой линией, проходящей через точки $(x_i, f(x_i))$ и $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. Интеграл на интервале между x_i и x_{i+1} аппроксимируется площадью трапеции $h \cdot (f(x_i) + f(x_{i+1}))/2$, и мы получаем

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x) dx &\approx \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h}{2} (f(x_i) + f(x_{i+1})) \\
 (6.6) \quad &= h \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{N-1}) + \frac{f(x_N)}{2} \right).
 \end{aligned}$$

Пример. На верхних рисунках 6.4 представлены функции $\cos x^2$ и $\sin x^2$ и их приближения, полученные с помощью метода трапеций (величина шага $h = 0.5$, $N = 10$). Точки на нижних рисунках представляют собой приближения интегралов Френеля для $h = 1/2$ и $h = 1/8$, причем соответствующие значения соединены прямыми линиями.

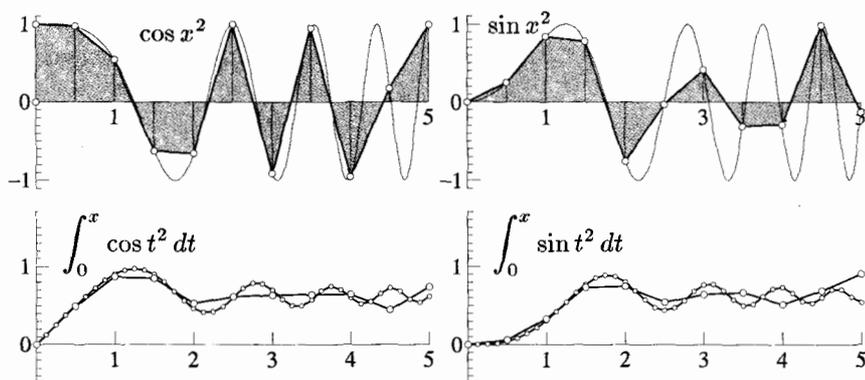


Рис. 6.4. Вычисление интегралов Френеля с помощью правила трапеций.

Метод Симпсона (названный так в честь Симпсона 1743). Идея метода состоит в том, что выбираются три последовательных значения $f(x_i)$ ($y_i = f(x_i)$) и вычисляется интерполяционная парабола, проходящая через эти точки (см. теорему I.1.2 и уравнение (2.6)):

$$p(x) = y_0 + (x - x_0) \frac{\Delta y_0}{h} + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2} \frac{\Delta^2 y_0}{h^2}.$$

Делая подстановку $x = x_0 + th$, получаем, что площадь, заключенная между осью x и этой параболой, равна

$$\begin{aligned}
 (6.7) \quad \int_{x_0}^{x_2} p(x) dx &= 2h \cdot y_0 + h \int_0^2 t dt \cdot \Delta y_0 + h \int_0^2 \frac{t(t-1)}{2} dt \cdot \Delta^2 y_0 \\
 &= \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2).
 \end{aligned}$$

Таким образом мы приходим к правилу Симпсона (N четно)

$$(6.8) \quad \int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + f(x_N)).$$

Методы Ньютона-Котеса. Если взять интерполяционные многочлены высших порядков, аналогичным способом можно получить следующие соотношения:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx \approx \frac{3h}{8} (f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)),$$

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x) dx \approx \frac{2h}{45} (7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)),$$

и так далее. Первый метод, предложенный Ньютоном (1671), носит название “правило 3/8”. В 1711 г. Котес получил эти формулы для всех степеней до 10 (см. Голдстейн 1977, р. 77).

Численные примеры. Вычислим приближения к $\int_1^{10} \frac{dx}{x} = \ln(10)$ по разным квадратурным формулам при $N = 12, 24, 48, \dots$. Результаты приведены в табл. 6.1. Видно, что при каждом N результат существенно улучшается только начиная со второго столбца (чтобы понять это см. упр. 6.5).

ТАБЛИЦА 6.1. Вычисление $\int_1^{10} \frac{dx}{x}$ по разным квадратурным формулам

N	правило трапеций	метод Симпсона	метод Ньютона	метод Котеса
12	2.34	2.307	2.31	2.305
24	2.31	2.303	2.303	2.3027
48	2.305	2.3026	2.3026	2.30259
96	2.303	2.302587	2.30259	2.3025852
192	2.3027	2.3025852	2.3025854	2.302585095
384	2.3026	2.3025851	2.3025851	2.3025850930
768	2.3025	2.302585093	2.302585094	2.3025850929947
1536	2.302587	2.3025850930	2.3025850930	2.30258509299405
3072	2.3025858	2.302585092996	2.302585092999	2.3025850929940458
6144	2.3025852	2.3025850929941	2.3025850929943	2.302585092994045686

Интересное явление наблюдается, если использовать правило трапеций для вычисления эллиптического интеграла $P = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \alpha \cos^2 t} dt$ (при $b = 0.2$, $\alpha = 0.96$, см. табл. 6.2). Сходимость здесь гораздо лучше, чем можно было бы ожидать. Дело в том, что функция $f(t)$ является *периодической*, “сверхсходимость” объясняется формулой Эйлера-Маклорена разд. II.10.

ТАБЛИЦА 6.2. Вычисление эллиптического интеграла по правилу трапеций

N	правило трапеций
12	4.1
24	4.201
48	4.2020080
96	4.20200890792
192	4.20200890793780018891
384	4.2020089079378001889398329176947477824

Асимптотические разложения

Этот метод применил Лаплас (1812) для вычисления интеграла $\int_0^x e^{-t^2} dt$ (см. *Oeuvres*, tome VII, p.104 и упр. 6.7) и Коши в 1842 г. для вычисления интегралов Френеля (см. Клайн 1972, p.1100). В то время как разложение в ряд и численные методы полезны при малых и умеренных значениях x , метод асимптотических разложений особенно подходит для больших x .

Рассмотрим этот метод на примере интегралов Френеля. В предельном случае $x \rightarrow \infty$ точное значение интеграла известно (упр. IV.5.14):

$$(6.9) \quad \int_0^\infty \cos t^2 dt = \int_0^\infty \sin t^2 dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Основная идея: надо представить интеграл в виде $\int_0^x = \int_0^\infty - \int_x^\infty$, т. е.

$$(6.10) \quad \int_0^x \cos t^2 dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int_x^\infty \cos t^2 dt.$$

Добавим под интегралом в правой части множители $2t$ и $1/(2t)$ и применим интегрирование по частям, полагая $u(t) = 1/t$, $v(t) = \sin t^2$, что дает

$$-\int_x^\infty \cos t^2 dt = -\frac{1}{2} \int_x^\infty \frac{1}{t} \cdot 2t \cos t^2 dt = \frac{1}{2} \frac{1}{x} \sin x^2 - \frac{1}{2} \int_x^\infty \frac{1}{t^2} \sin t^2 dt.$$

Мы получили интеграл, вычислить который на первый взгляд ничуть не проще, чем первый. Однако если x велико, то интеграл в правой части, который содержит дополнительный множитель $1/t^2$, по величине гораздо меньше, чем первоначальный. Следовательно, для интеграла $-\int_x^\infty \cos t^2 dt$ хорошим приближением будет $(2x)^{-1} \sin x^2$. Если точность недостаточна, мы повторяем ту же самую процедуру (теперь полагая $u(t) = 1/t^3$ и $v(t) = -\cos t^2$):

$$(6.11) \quad -\frac{1}{2} \int_x^\infty \frac{1}{t^2} \sin t^2 dt = -\frac{1}{2 \cdot 2} \frac{1}{x^3} \cos x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \int_x^\infty \frac{1}{t^4} \cos t^2 dt.$$

Продолжая далее, из (6.10) мы получаем

$$(6.12) \quad \int_0^x \cos t^2 dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \frac{1}{x} \sin x^2 - \frac{1}{2 \cdot 2} \frac{1}{x^3} \cos x^2 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2} \frac{1}{x^5} \sin x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} \frac{1}{x^7} \cos x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} \frac{1}{x^9} \sin x^2 - \dots$$

Аналогичная формула справедлива для второго интеграла Френеля:

$$(6.13) \quad \int_0^x \sin t^2 dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \frac{1}{x} \cos x^2 - \frac{1}{2 \cdot 2} \frac{1}{x^3} \sin x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2} \frac{1}{x^5} \cos x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} \frac{1}{x^7} \sin x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} \frac{1}{x^9} \cos x^2 - \dots$$

Необычайная точность этих приближений при больших x проиллюстрирована на рис. 6.5. Числа 1, 2, 3, ... указывают число членов, учитываемых в разложениях (6.12) и (6.13).

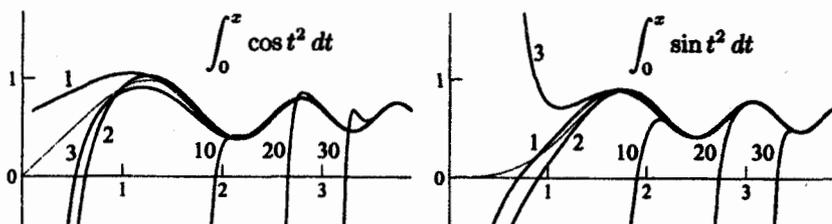


Рис. 6.5. Асимптотические разложения (6.12) и (6.13) с 1, 2, 3, 10, 20 и 30 членами.

(6.1) *Замечание.* Ошибка, вносимая обрыванием ряда (6.12), может быть легко оценена. Например, если мы обрываем ряд после члена $(2x)^{-1} \sin x^2$, приведенный выше вывод показывает, что ошибка определяется величиной интеграла в (6.11), взятого по промежутку $x \leq t < \infty$. С учетом того, что $|\cos t^2| \leq 1$, отсюда получаем оценку $(2x^3)^{-1}$, что при $x > 2$ будет меньше чем 0.0625.

(6.2) *Замечание.* Бесконечные ряды (6.12) и (6.13) не сходятся при фиксированном x . Дело в том, что общий член содержит множитель $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \dots$ в числителе, который превосходит все другие множители. Пуанкаре называл такие ряды *асимптотическими разложениями*.

Упражнения

6.1 (И. Бернулли 1697). Выведите “series mirabili” (удивительный ряд, — лат.)

$$\int_0^1 x^x dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} \&c.$$

Указание. В представлении $x^x = e^{x \ln x}$ используйте ряд для показательной функции и вычислите $\int x^n (\ln x)^n dx$ с помощью интегрирования по частям.

6.2 Интеграл $\int x^2 dx / \sqrt{1-x^4}$ встретился Я. Бернулли в его вычислениях, связанных с упругой нитью, Лейбницу при изучении *Isochrone Paracentrica* (парацентрической изохроны). Проверьте справедливость формулы (Лейбниц 1694b)

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{7 \cdot 2 \cdot 1}x^7 + \frac{1 \cdot 3}{11 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2}x^{11} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{15 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}x^{15} \&c.$$

6.3 Так же, как в (6.7), выведите формулы Ньютона и Котеса с помощью интегрирования интерполяционных многочленов степеней 3 и 4 на интервалах $[x_0, x_3]$ и $[x_0, x_4]$ соответственно.

6.4 Для кривой, определенной соотношениями (6.5) (см. рис. 6.2), докажите, что
а) длина дуги между началом координат и точкой $(x(t), y(t))$ равна t ,
б) радиус кривизны в точке $(x(t), y(t))$ равен $1/(2t)$.

6.5 Докажите, что метод Симпсона является точным для всех многочленов степени 3.

6.6 Вычислите

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$$

методом Симпсона. Изучите уменьшение ошибки при увеличении N .

Ответ. Правильное значение интеграла равно $(\pi/8) \ln 2 = 0.2721982613$.

6.7 Используя равенство $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}/2$ (см. формулу (IV.5.41)), получите асимптотическое разложение для функции ошибок $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$, которое справедливо при больших значениях x (Лаплас 1812, *Livre premier*, No. 44).

Ответ.
$$\Phi(x) = 1 - \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2 \cdot x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot x^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot x^7} + \dots \right).$$

6.8 Получите численное значение интеграла

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} \cos x^2 dx = \frac{\pi\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4 \cdot \Gamma(3/4)} \approx 1.674813394.$$

Возьмите два числа $A \approx 1/10$ и $B \approx 10$ и вычислите этот интеграл

а) на интервале $(0, A]$ с помощью разложения в ряд;

б) на интервале $[A, B]$ методом Симпсона;

в) на интервале $[B, \infty)$ с помощью асимптотического разложения.

II.7 Обыкновенные дифференциальные уравнения

Ergo & horum integralia aequantur (Следовательно, и интегралы всегда равны, — лат.).
(Я. Бернулли 1690)

В разделах II.4 и II.5 мы рассматривали задачу об отыскании первообразной от заданной функции $f(x)$, т. е. мы искали функцию $y(x)$, удовлетворяющую условию $y'(x) = f(x)$. Теперь мы рассмотрим более трудную задачу, где функция f может зависеть также от неизвестной функции $y(x)$. *Обыкновенное дифференциальное уравнение* есть соотношение вида

$$(7.1) \quad y' = f(x, y).$$

Мы хотим найти функцию $y(x)$ такую, что $y'(x) = f(x, y(x))$ при всех x , принадлежащих определенному интервалу. Рассмотрим сначала несколько исторических примеров (более детальное изложение см. Ваннер 1988).

Изохрона Лейбница. Галилей открыл, что скорость тела, падающего из начала координат вдоль оси y , увеличивается по закону $v = \sqrt{-2gy}$, где g — ускорение силы тяжести. Лейбниц в дискуссии с картезианцами о механике (в сентябрьском выпуске журнала *Nouvelles de la République des lettres* от 1687 г.) поставил следующую задачу: *найти кривую $y(x)$ (см. рис. 7.1) такую, что, если тело скользит вдоль этой кривой, его вертикальная скорость dy/dt везде равна заданной постоянной $-b$.*

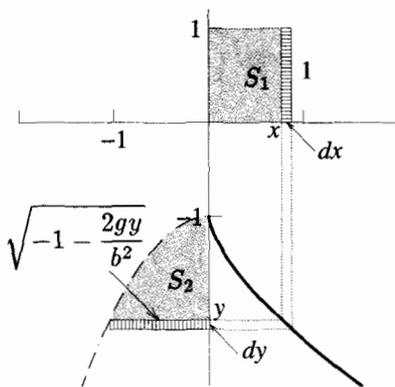


Рис. 7.1. Изохрона Лейбница.

Через месяц “*Vir Celeberrimus Christianus Hugenius*” (знаменитейший муж Христиан Гюйгенс) дал решение этой задачи, “*sed suppressa demonstratione & explicatione*” (однако опустив доказательство и объяснение, — лат.). Опубликованное Лейбницем (1689) “*demonstratio*” было неудовлетворительным, поскольку решение было им сначала угадано, а затем доказано, что оно обладает желаемым свойством. Вскоре *общий метод* нахождения решения с помощью “современного” дифференциального исчисления был опубликован Я. Бернулли (1690). С этой работы начался период замечательных открытий, сделанных Якобом и Иоганном Бернулли, а впоследствии Эйлером и Даниилом Бернулли, что на несколько десятилетий превратило Базель в мировой центр математических исследований.

Запишем формулу Галилея в виде

$$(7.2) \quad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = -2gy \quad (s = \text{длине дуги}),$$

разделим ее на $(dy/dt)^2 = +b^2$ (что является требуемым условием) и получим

$$(7.3) \quad \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1 = \frac{-2gy}{b^2} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{-1 - 2gy/b^2}},$$

т.е. дифференциальное уравнение вида (7.1). Для того чтобы понять идею Бернулли, перепишем (7.3) в виде

$$(7.4) \quad dx = -\sqrt{-1 - \frac{2gy}{b^2}} dy,$$

что выражает тот факт, что два узких полосатых прямоугольника *всегда имеют равные площади* (см. рис. 7.1). И Якоб Бернулли пишет “Ergo & horum Integralia aequantur” (следовательно, и интегралы всегда равны, — см. цитату), имея в виду, что *площади S_1 и S_2 также должны быть равны*. Здесь впервые в математике появилось слово “интеграл”. Вычислив интеграл, мы находим решение:

$$x = \frac{b^2}{3g} \left(-1 - \frac{2gy}{b^2}\right)^{3/2},$$

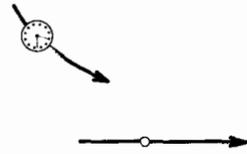
и “Solutio sit linea paraboloides quadrato cubica ...” (Лейбниц: “решение — полукубическая парабола”).

Трактриса.

Выдающийся парижский медик Клод Перро, столь же знаменитый своими работами по механике и архитектуре, хорошо известный своим изданием Витрувия, бывший при жизни важным членом Королевской Французской Академии Наук, предложил мне эту задачу, а до меня он предлагал ее многим другим, не скрывая, что он не смог ее решить ...

(Лейбниц 1693)

Когда Лейбниц был в Париже (1672–1676), где брал у Гюйгенса уроки математики, знаменитый анатом и архитектор Клод Перро сформулировал следующую задачу: для какой кривой касательная в каждой точке P имеет постоянную длину a между P и осью x (рис. 7.2)? Для иллюстрации этого вопроса он вынул “horologio portabili suae thesae argenteae” (свои карманные часы в серебряном футляре, — *лат.*) и потянул их по столу вдоль края. Он сказал, что ни один математик из Парижа или Тулузы (Ферма) не смог найти для нее формулу.



Лейбниц опубликовал свое решение (см. Лейбниц 1693) в виде

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}, \quad \text{т.е.} \quad -\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy = dx,$$

утверждая, что он знал его довольно давно. Отсюда решение получается с помощью квадратуры (“ergo & horum ...” — следовательно, и всегда ..., см. рис. 7.2 или 7.3). По утверждению Лейбница, было “хорошо известно”, что эта площадь может быть выражена через логарифм. Действительно, выполнив подстановки $\sqrt{a^2 - y^2} = v$, $a^2 - y^2 = v^2$, $-y dy = v dv$, мы получаем

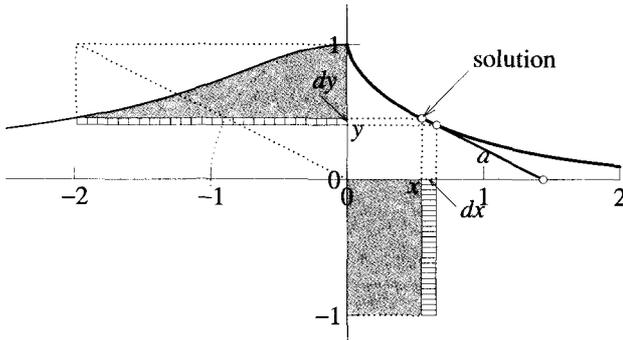


Рис. 7.2. Трактриса.

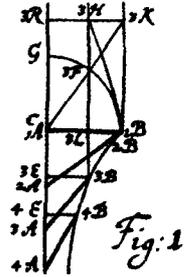


Рис. 7.3. Рисунок Лейбница (1693).¹

$$(7.5) \quad x = \int_y^a \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy = -\sqrt{a^2 - y^2} - a \log \frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y}$$

(см. также упр. 7.1). Заметим, что интерес Лейбница к этой теории был связан также с идеей использовать часы Перро в качестве *механической машины интегрирования* для вычисления интеграла (7.5) (и, таким образом, логарифмов), а также сконструировать другие механические устройства для вычисления аналогичных интегралов.

Цепная линия (катеноида).

Однако, чтобы лучше судить о качестве Вашего алгоритма, я с нетерпением жду Ваших результатов о форме провисающего каната или цепи, которую предложил Вам исследовать г-н Бернулли, за что я ему очень благодарен, потому что эта кривая обладает замечательными свойствами. Давно, во времена моей молодости, когда мне было только 15 лет, я рассматривал эту задачу, и доказал отцу Мерсенну, что это не парабола ...
(Письмо Гюйгенса Лейбницу от 9 октября 1690 г.)

Усилия моего брата не привели к успеху, мне повезло больше, поскольку мне удалось найти способ ... Правда, это потребовало размышлений, которые лишили меня сна на целую ночь ...
(И. Бернулли, см. *Briefwechsel*, vol. 1, p. 98)

Галилей (1638) утверждал, что цепь, висящая на двух гвоздях, образует “ad unguem” (в совершенстве) параболу. Приблизительно через 20 лет шестнадцатилетний голландский мальчик (Христиан Гюйгенс) открыл, что это не так. В конце концов задача о форме висящей гибкой нити (“Linea Catenaria vel Funicularis” — линии цепи или каната) была решена Лейбницем (1691b) и И. Бернулли (1691). Это было громадным успехом “нового” исчисления. Приведем здесь ход рассуждений Иоганна Бернулли (*Opera* vol. III, p. 384, 426).

Пусть В — низшая точка и А — произвольная точка на кривой (рис. 7.4). Проведем теперь касательные АЕ и ВЕ и предположим себе, что масса участка цепи длиной *s* между точками А и В сосредоточена в точке Е, подвешенной на “duorum filiorum nullius gravitatis” (двух невесомых нитях). Так как масса в точке Е пропорциональна *s*, то параллелограмм сил в точке Е показывает, что *наклон касательной в точке А пропорционален длине дуги s*, т. е.

¹ Воспроизводится с разрешения Публичной библиотеки Женевского университета.

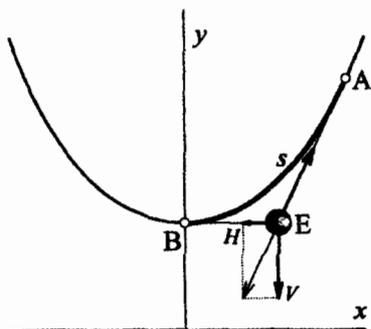


Рис. 7.4. Цепная линия.

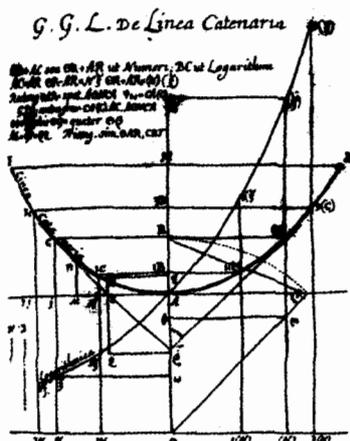


Рис. 7.5. Цепная линия (Лейбниц 1691).²

$$(7.6) \quad c \cdot y' = s.$$

С этого места вычисления Иоганна Бернулли становятся очень сложными: он использует вторые дифференциалы (см. *Opera* vol. III, p. 426). Однако вычисления становятся простыми, если заменить в духе Риккати производную y' новой переменной p (см. ниже уравнение (7.21)). Тогда после дифференцирования получим:

$$(7.7) \quad c \cdot dp = ds = \sqrt{1 + p^2} dx,$$

т. е. дифференциальное уравнение, связывающее переменные p и x . Его интегрирование дает

$$c \int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \int dx, \quad \text{т. е.} \quad \operatorname{arsh}(p) = \frac{x - x_0}{c},$$

следовательно,

$$(7.8) \quad p = \operatorname{sh} \left(\frac{x - x_0}{c} \right) \quad \text{и} \quad y = K + c \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{x - x_0}{c} \right).$$

Брахистохрона.

Пусть заданы две точки A и B в вертикальной плоскости. Требуется определить кривую AMB , двигаясь вдоль которой, частица M , выходящая из точки A и двигающаяся под действием силы тяжести, достигнет точки B за кратчайшее время. (И. Бернулли 1696)

Эта задача представляется одной из самых любопытных и красивых среди всех, которые были когда-либо предложены ранее, и я очень хотел бы попробовать ее решить, однако для этого нужно, чтобы Вы свели ее к чистой математике, поскольку физика доставляет мне хлопоты ...

(Де Лопиталь, письмо к И. Бернулли, 15 июня 1696 г.)

² Воспроизведено с разрешения Публичной библиотеки Женевского университета.

В 1638 г. Галилей доказал, что тело, скользящее из точки А в точку С (рис. 7.7), двигаясь вдоль кривой ADC, быстрее достигает конечной точки, чем двигаясь по кратчайшему пути (за счет большей начальной скорости). После этого он доказал, что движение вдоль ADEC, ADEFC и ADEFGC совершается быстрее, и пришел к выводу, что *быстрее всего* движение происходит по *окружности*. Иогани Бернулли (1696), услышав, что его брат Якоб сделал ту же ошибку, воспользовался этим поводом, чтобы устроить публичный конкурс, для того чтобы найти брахистохрону (*βραχύς* = короткий, *χρόνος* = время). К его сожалению, все представленные решения, включая решение Якоба, оказались правильными; тем не менее решение Иоганна было наиболее элегантным: он исходил из аналогии с “принципом Ферма” (см. уравнение (2.5)).

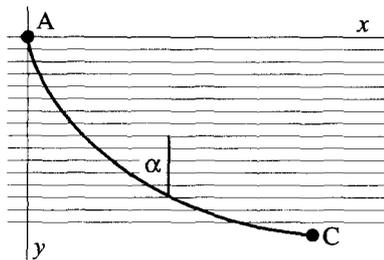


Рис. 7.6. Брахистохрона.

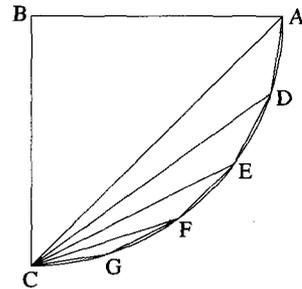


Рис. 7.7. Неправильная брахистохрона, предложенная Галилеем.

Он рассматривает много слоев, где “скорость света” равна $v = \sqrt{2gy}$ (см. уравнение (7.2) и рис. 7.6). Наиболее быстрый путь — это тот, который везде удовлетворяет закону преломления (принцип Ферма)

$$\frac{v}{\sin \alpha} = K.$$

Следовательно, в силу соотношения $\sin \alpha = dx/ds$, мы получаем

$$(7.9) \quad \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} \cdot \sqrt{2gy} = K \quad \text{или} \quad dx = \sqrt{\frac{y}{c-y}} \cdot dy.$$

Опять-таки в соответствии с “*ergo & horum integralia æquantur*” (следовательно, и интегралы всегда равны) подстановка

$$(7.10) \quad y = c \cdot \sin^2 u = \frac{c}{2} - \frac{c}{2} \cos 2u$$

приводит к формуле

$$(7.11) \quad x - x_0 = cu - \frac{c}{2} \sin 2u$$

“*ex qua concludo Curvam Brachystochronam esse Cycloidem vulgarem*” (из чего заключаем, что кривая наискорейшего спуска — обыкновенная циклоида, — *лат.*).

Некоторые типы интегрируемых уравнений

Теперь мы обсудим некоторые простейшие типы дифференциальных уравнений, которые можно решить с помощью вычисления интегралов.

Уравнение с разделяющимися переменными.

$$(7.12) \quad y' = f(x)g(y).$$

Все предыдущие примеры, а именно, (7.3), (7.5), (7.7) и (7.9), принадлежат к этому типу. Их можно решить, если написать $y' = dy/dx$, затем “разделить переменные” и интегрировать (“ergo & ...”), т. е.

$$(7.13) \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x) dx \quad \text{и} \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + C.$$

Если $G(y)$ и $F(x)$ являются первообразными функций $1/g(y)$ и $f(x)$ соответственно, решение получается как $G(y) = F(x) + C$.

Однородное линейное уравнение.

$$(7.14) \quad y' = f(x)y.$$

Это уравнение является частным случаем уравнения (7.12). Его решение имеет вид

$$(7.15) \quad \ln y = \int f(x) dx + \bar{C}, \quad \text{или} \quad y = C \cdot \exp\left(\int f(x) dx\right).$$

Неоднородное линейное уравнение.

$$(7.16) \quad y' = f(x)y + g(x).$$

И. Вернулли предложил записать его решение в виде произведения двух функций: $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ (подобно идее Тарталья, см. уравнение (I.1.5)). Тогда мы получим

$$\frac{du}{dx} \cdot v + \frac{dv}{dx} \cdot u = f(x) \cdot u \cdot v + g(x).$$

Если приравнять оба члена отдельно, получим

$$(7.17a) \quad \frac{du}{dx} = f(x) \cdot u \quad \text{для нахождения } u,$$

$$(7.17b) \quad \frac{dv}{dx} = \frac{g(x)}{u(x)} \quad \text{для нахождения } v.$$

Уравнение (7.17a) является однородным линейным уравнением относительно u и его решение дается выражением (7.15). После этого функция $v(x)$ получается с помощью интегрирования уравнения (7.17b). Следовательно, решением уравнения (7.16) является

$$(7.18) \quad y(x) = C \cdot u(x) + u(x) \int_0^x \frac{g(t)}{u(t)} dt, \quad u(x) = \exp\left(\int_0^x f(t) dt\right).$$

Это соотношение выражает тот факт, что решение (7.16) есть сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

Дифференциальное уравнение Бернулли.

Правду говоря, нет ничего более остроумного, чем предложенное Вами решение уравнения, написанного Вашим братом; и это решение столь просто, что просто удивительно, насколько трудной казалась задача. Это безусловно можно назвать элегантным решением.

(П. Вариньон, письмо к И. Бернулли от 6 августа 1697г.)

В 1695 г. Якоб Бернулли несколько месяцев бился над решением уравнения

$$(7.19) \quad y' = f(x) \cdot y + g(x) \cdot y^n.$$

Для Якоба это был хороший повод устроить официальный конкурс. Но у его брата Иоганна возникли сразу две элегантных идеи (см. И. Бернулли 16796). Первая из них рассмотрена в упр. 7.2, а вторая — изложенная выше: представить решение в виде $y(x) = u(x) \cdot v(x)$. Для дифференциального уравнения (7.19) это опять приводит к уравнению (7.17а) для u и к дифференциальному уравнению

$$(7.20) \quad \frac{dv}{dx} = g(x)u^{n-1}(x)v^n,$$

которое можно решить разделением переменных. Это приводит к решению

$$y(x) = u(x) \left(C + (1-n) \int_0^x g(t)u^{n-1}(t) dt \right)^{1/(1-n)},$$

где $u(x)$ — такое же, как в (7.18).

Дифференциальные уравнения второго порядка

Для того, чтобы убрать из вышеприведенной формулы вторые разности, ..., мы обозначим поднормаль BF как p . (Риккати 1712)

Дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид

$$y'' = f(x, y, y').$$

Аналитическое решение такого уравнения можно получить очень редко. Однако существует несколько исключений.

Уравнения, не зависящие от y . Естественно, что следует сделать подстановку $p = y'$, после чего дифференциальное уравнение $y'' = f(x, y')$ становится уравнением первого порядка $p' = f(x, p)$. Заметим, что дифференциальное уравнение (7.7) цепной линии является уравнением этого типа.

Уравнения, не зависящие от x .

$$(7.21) \quad y'' = f(y, y').$$

Идея (Риккати 1712) состоит в том, чтобы рассматривать y как независимую переменную и искать функцию $p(y)$ такую, что $y' = p(y)$. Цепное правило приводит к

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p' \cdot p,$$

и уравнение (7.21) становится уравнением первого порядка

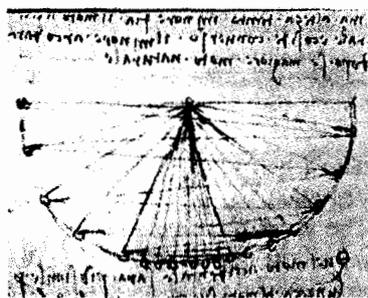
$$(7.22) \quad p' \cdot p = f(y, p).$$

Если функцию $p(y)$ найти из (7.22), остается только проинтегрировать уравнение $y' = p(y)$, которое является уравнением типа (7.12).

Пример. Движение маятника (см. рисунок Леонардо да Винчи) описывается уравнением

$$(7.23) \quad y'' + \sin y = 0$$

(y описывает отклонение от положения равновесия). Поскольку уравнение (7.23) не зависит от t (мы пишем t вместо x , потому что эта переменная в данном примере означает время), мы можем использовать приведенное выше преобразование и получить



©Bibl. Nacional, Codex Madrid I 147r

$$p \cdot dp = -\sin y \cdot dy \quad \text{и} \quad \frac{p^2}{2} = \cos y + C.$$

Если обозначить амплитуду колебаний как A (для этой величины $p = y' = 0$) мы получаем $C = -\cos A$ и

$$(7.24) \quad p = \frac{dy}{dt} = \sqrt{2 \cos y - 2 \cos A},$$

что является дифференциальным уравнением для y . После разделения переменных мы получаем решение, выраженное в неявной форме через эллиптический интеграл

$$(7.25) \quad \int_0^y \frac{d\eta}{\sqrt{2 \cos \eta - 2 \cos A}} = t$$

(постоянная интегрирования получена в предположении, что $y = 0$ при $t = 0$).

Если T — это период колебаний, то максимальное отклонение A достигается при $t = T/4$. Поэтому для периода мы получаем

$$(7.26) \quad T = 4 \int_0^A \frac{dy}{\sqrt{2 \cos y - 2 \cos A}} = 2 \int_0^A \frac{dy}{\sqrt{\sin^2(A/2) - \sin^2(y/2)}}.$$

Мы видим, что он зависит от амплитуды A и близок к 2π в том случае, когда A мало (упр. 7.5).

Изохронный маятник. Задача состоит в том, чтобы изменить обычный маятник таким образом, чтобы его период перестал зависеть от амплитуды. Идея Гюйгенса (1673, *Horologium Oscillatorium*) состояла в следующем: надо изменить круговую траекторию обыкновенного маятника так, чтобы ускоряющая сила стала пропорциональной длине дуги s . В этом случае движение маятника будет описываться уравнением

$$(7.27) \quad s'' + Ks = 0,$$

у которого колебания не зависят от амплитуды.

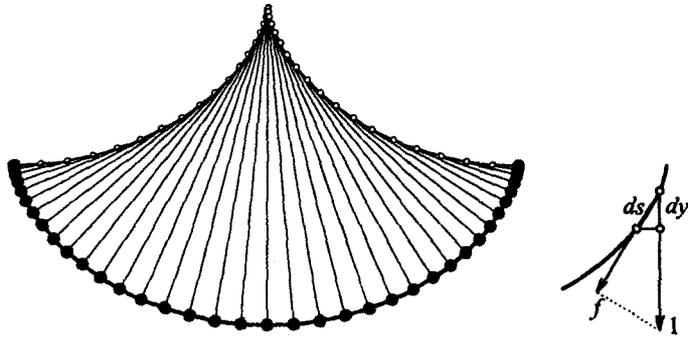


Рис. 7.8. Изохронный маятник Гюйгенса.

Решение. Из подобия двух треугольников на рис. 7.8 (справа) мы видим, что ускоряющая сила $f = -dy/ds$, так что наше требование, чтобы $f = -Ks$ принимает вид

$$(7.28) \quad dy = K \cdot s \, ds.$$

Если $s = 0$ при $y = 0$ (т.е. начало координат помещено в самую нижнюю точку), то интегрирование дает

$$(7.29) \quad y = \frac{K}{2} \cdot s^2, \quad \text{т.е.} \quad s = \sqrt{\frac{2y}{K}}.$$

Таким образом, у нашей кривой высота пропорциональна квадрату длины дуги (И. Бернулли 1691/92b, р. 489-490). Подстановка s из (7.29) в (7.28) дает

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \sqrt{2K} \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

или, после возведения в квадрат,

$$(7.30) \quad \left(\frac{c}{y} - 1\right) dy^2 = dx^2 \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{c-y}{y}} dy = dx,$$

где $c = 1/(2K)$. С точностью до сдвига по оси y это уравнение совпадает с уравнением брахистохроны (7.9), и мы видим, что траектория изохронного маятника — *циклоида*. Как сказал И. Бернулли (1697с): “*animo revolvens inexpectatam illam identitatem Tautochronae Hugeniae nostrae que Brachystochronae*” (неожиданное совпадение этой *тавтохроны* Гюйгенса и нашей *брахистохроны* знаменательно, — лат.) (см. рис. 7.8).

Упражнения

- 7.1 Вычислите интеграл (7.5) для трактрисы с помощью подстановки $y = a \cos t$, подставьте $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$ и выполните замену (5.21).
- 7.2 (И. Бернулли 1697б). Решите дифференциальное уравнение “*de mon Frère*” (моего брата, — франц.)

$$(7.31) \quad y' = g(x) \cdot y + f(x) \cdot y^n,$$

используя подстановку $y = v^\beta$. Определите постоянную β так, чтобы уравнение (7.31) стало линейным дифференциальным уравнением относительно v .

- 7.3 Логистический закон роста народонаселения описывается дифференциальным уравнением (Ферхюльст 1845)

$$y' = by(a - y),$$

где a и b — постоянные. Выберите $a = 5$ и $b = 2$ и найдите решение, удовлетворяющее условию $y(0) = 0.1$.

- 7.4 Покажите, что дифференциальное уравнение вида

$$y' = G\left(\frac{y}{x}\right)$$

можно решить подстановкой $v(x) = y(x)/x$. Примените этот метод для решения уравнения

$$y' = \frac{9x + 2y}{2x + y}.$$

- 7.5 Решение уравнения маятника

$$y'' + \omega^2 \sin y = 0,$$

соответствующее начальным значениям $y(0) = A$, $y'(0) = 0$, имеет период

$$T = \frac{2}{\omega} \int_0^A \left(\sin^2(A/2) - \sin^2(y/2) \right)^{-1/2} dy$$

(см. уравнение (7.26)). Положите $k = \sin(A/2)$, используйте подстановку $\sin(y/2) = k \cdot \sin \alpha$, найдите первые члены разложения T по степеням k .

Ответ: $\frac{2\pi}{\omega} \left(1 + k^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + k^4 \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 + \dots \right) = \frac{2\pi}{\omega} \left(1 + \frac{A^2}{16} + \frac{11A^4}{3072} + \frac{173A^6}{737280} + \dots \right)$.

- 7.6 Решите дифференциальное уравнение

$$y' = \frac{4 + y^2}{4 + x^2}.$$

- 7.7 Движение тела в поле тяготения Земли описывается дифференциальным уравнением

$$y'' = -\frac{gR^2}{y^2},$$

где $g = 9.81 \text{ м/с}^2$, $R = 6.36 \cdot 10^6 \text{ м}$ и y есть расстояние от тела до центра Земли. Определите постоянные в решении так, чтобы $y(0) = R$ и $y'(0) = v$. Теперь найдите наименьшую скорость v такую, чтобы тело не возвратилось на Землю (вторая космическая скорость).

II.8 Линейные дифференциальные уравнения

... сегодня совершенно невозможно прочесть хотя бы одну строчку Даламбера, в то время как большинство работ Эйлера можно читать с восхищением. (Якоби, см. Шписс 1929, p. 139)

Пусть $a_0(x), a_1(x), \dots, a_{n-1}(x)$ — заданные функции. Мы называем уравнение

$$(8.1) \quad y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

линейным однородным дифференциальным уравнением порядка n и

$$(8.2) \quad y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

линейным неоднородным дифференциальным уравнением. Введем следующее обозначение для левых частей этих уравнений:

$$(8.3) \quad \mathcal{L}(y) := y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y,$$

так что (8.1) и (8.2) можно переписать в виде

$$(8.4) \quad \mathcal{L}(y) = 0 \quad \text{и} \quad \mathcal{L}(y) = f$$

соответственно. Назовем \mathcal{L} дифференциальным оператором. Он действует на функции $y(x)$, и результатом $\mathcal{L}(y)$ является также функция, заданная формулой (8.3). Основное свойство этого оператора состоит в том, что он *линеен*, т. е.

$$(8.5) \quad \mathcal{L}(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1\mathcal{L}(y_1) + c_2\mathcal{L}(y_2).$$

Очевидным следствием этой линейности является следующий результат.

(8.1) Лемма. Если заданы n решений $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ однородного уравнения (8.1), то функция

$$(8.6) \quad c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x),$$

где c_1, \dots, c_n — произвольные постоянные, также является решением того же уравнения. \square

Замечание. В решения уравнений первого порядка входит одна постоянная (см. разд. II.7), а уравнения второго порядка содержат две произвольных постоянных (см., например, уравнение (7.23)). Рассуждая по аналогии, можно предположить (Эйлер), что решение уравнения порядка n содержит n постоянных, и что (8.6) является *общим решением* уравнения (8.1), если $y_1(x), \dots, y_n(x)$ — линейно независимые функции. Функции $y_1(x), \dots, y_n(x)$ называются *линейно независимыми* функциями, если линейная комбинация (8.6) тождественно равна нулю только в том случае, когда все c_i равны нулю. Например, $1, x, x^2, x^3$ являются линейно независимыми функциями.

(8.2) Лемма.

$$\begin{aligned} & \text{Общее решение однородного уравнения (8.1)} \\ & + \\ & \text{одно одно частное решение неоднородного уравнения (8.2)} \\ & = \\ & \text{общему решению неоднородного уравнения (8.2)}. \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть \tilde{y} есть частное решение уравнения (8.2), т.е. $\mathcal{L}(\tilde{y}) = f$. Тогда для произвольного решения y уравнения (8.1) (т.е. $\mathcal{L}(y) = 0$) согласно (8.5) мы имеем $\mathcal{L}(y + \tilde{y}) = f$, поэтому $y + \tilde{y}$ есть решение уравнения (8.2).

С другой стороны, если \hat{y} есть другое решение уравнения (8.2) (т.е. $\mathcal{L}(\hat{y}) = f$), тогда вследствие (8.5) мы опять имеем $\mathcal{L}(\hat{y} - \tilde{y}) = 0$, и $\hat{y} = \tilde{y} + (\hat{y} - \tilde{y})$ есть сумма \tilde{y} и решения однородного уравнения (8.1). \square

Вывод. Для того, чтобы решить дифференциальные уравнения (8.1) и (8.2), надо – найти n различных (линейно независимых) решений уравнения (8.1), и найти *одно* решение уравнения (8.2).

Однородное уравнение с постоянными коэффициентами

Очень редко можно получить полное решение уравнения (8.1). Однако существует несколько исключений. Наиболее важное из них – то, когда коэффициенты $a_i(x)$ не зависят от x , т.е. когда

$$(8.7) \quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0.$$

Другое исключение – когда $a_i(x) = a_i x^{i-n}$ (это “уравнение Коши”). Этот случай будет рассмотрен в конце настоящего раздела.

Основной идеей решения уравнения (8.7) является поиск решения в виде

$$(8.8) \quad y(x) = e^{\lambda x},$$

где λ – постоянная, которую нужно определить (Эйлер написал об этом 15 сентября 1739 г. в письме к И. Бернулли и опубликовал в 1743 г.). Вычисляя производные

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}, \quad y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}, \quad \dots, \quad y^{(n)}(x) = \lambda^n e^{\lambda x}$$

и подставляя их в уравнение (8.7), мы получим

$$(8.9) \quad (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0)e^{\lambda x} = 0.$$

Следовательно, функция (8.8) является решением уравнения (8.7) тогда и только тогда, когда λ является корнем так называемого *характеристического уравнения*

$$(8.10) \quad \chi(\lambda) = 0, \quad \chi(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0.$$

Случай простых корней. Если уравнение (8.10) имеет n различных корней $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, то $e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$ являются n линейно независимыми решениями уравнения (8.7) (см. упр. 8.1). Таким образом, общее решение есть

$$(8.11) \quad y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}.$$

Случай кратных корней. Рассмотрим простое дифференциальное уравнение

$$(8.12) \quad y^{(n)} = 0,$$

где характеристическое уравнение $\lambda^n = 0$ имеет нулевой корень кратности n . Очевидно, что общим решением уравнения (8.12) является функция $c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \dots + c_n x^{n-1}$, т.е. многочлен степени $n - 1$.

Далее, рассмотрим уравнение

$$(8.13) \quad y''' - 3ay'' + 3a^2 y' - a^3 y = 0,$$

у которого характеристическое уравнение $(\lambda - a)^3 = 0$ имеет корень a кратности 3. Введем новую неизвестную функцию $u(x)$ с помощью соотношения (Эйлер 17436)

$$(8.14) \quad y(x) = e^{ax} \cdot u(x).$$

Теперь, трижды дифференцируя это соотношение и подставляя результаты в (8.13), мы получаем для u уравнение (8.12), где $n = 3$. Таким образом, общее решение уравнения (8.13) равно

$$(8.15) \quad y(x) = e^{ax} \cdot (c_1 + c_2 x + c_3 x^2).$$

Дифференциальные операторы. Приведенные выше вычисления становятся особенно элегантными, если при заданной постоянной a мы введем дифференциальный оператор D_a с помощью соотношения

$$(8.16) \quad D_a y = y' - a \cdot y.$$

Композиция двух таких операторов D_a и D_b дает

$$(8.17) \quad D_b D_a y = (y' - ay)' - b(y' - ay) = y'' - (a + b)y' + aby = D_a D_b y.$$

Мы видим, что D_a и D_b коммутируют, и что $D_a D_b D_c \dots y = 0$ есть дифференциальное уравнение (8.7), коэффициентами которого являются коэффициенты характеристического многочлена $(\lambda - a)(\lambda - b)(\lambda - c) \dots$. Таким образом, уравнение (8.13) может быть записано в виде

$$(8.13') \quad D_a^3 y = 0.$$

Действуя оператором D_a на (8.14), мы получаем

$$D_a y = a e^{ax} \cdot u + e^{ax} \cdot u' - a e^{ax} \cdot u = e^{ax} \cdot u',$$

$D_a^2 y = e^{ax} \cdot u''$ и, наконец, $D_a^3 y = e^{ax} \cdot u^{(3)}$. Это доказывает тот факт, что (8.15) есть общее решение уравнения (8.13).

(8.3) Теорема (Эйлер 1743b). *Предположим, что характеристическое уравнение (8.10) представлено в виде*

$$\chi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$$

(с различными λ_i), Тогда общее решение уравнения (8.7) дается формулой

$$(8.18) \quad y(x) = p_1(x)e^{\lambda_1 x} + p_2(x)e^{\lambda_2 x} + \dots + p_k(x)e^{\lambda_k x},$$

где $p_i(x)$ являются произвольными многочленами степени $m_i - 1$ (это решение включает в себя ровно $\sum_{i=1}^k m_i = n$ постоянных).

Доказательство. Проиллюстрируем доказательство на примере двух кратных корней: $\chi(\lambda) = (\lambda - a)^3(\lambda - b)^4$. В силу перестановочности D_a и D_b мы можем записать дифференциальное уравнение в одном из двух видов:

$$(8.19) \quad D_b^4 D_a^3 y = 0, \quad \text{либо} \quad D_a^3 D_b^4 y = 0.$$

Решение $y = e^{ax} \cdot (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)$ уравнения $D_a^3 y = 0$ обращает в нуль левую часть первого уравнения (8.19), а решение $y = e^{bx} \cdot (c_4 + c_5 x + c_6 x^2 + c_7 x^3)$ уравнения $D_b^4 y = 0$ обращает в нуль левую часть второго уравнения (8.19). Таким образом, обе эти функции являются решениями и имеют в совокупности семь свободных постоянных. Идея доказательства линейной независимости этих функций содержится в упр. 8.2. \square

Как избежать комплексной арифметики. Результат теоремы 8.3 справедлив также и для комплексных λ_i . Однако, если коэффициенты a_i уравнения (8.7) действительны, мы главным образом заинтересованы в функциях с действительными значениями. Тот факт, что комплексные корни действительных многочленов всегда появляются в виде сопряженных пар, позволяет нам упростить (8.18). Пусть $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ и $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ есть пара таких корней. Соответствующая часть решения (8.18) является многочленом, умноженным на

$$(8.20) \quad e^{\alpha x} (c_1 e^{i\beta x} + c_2 e^{-i\beta x}).$$

Используя формулу Эйлера (I.5.4), можно преобразовать это выражение к виду

$$(8.21) \quad e^{\alpha x} (d_1 \cos \beta x + d_2 \sin \beta x),$$

где $d_1 = c_1 + c_2$ и $d_2 = i(c_1 - c_2)$ являются новыми постоянными. Это выражение может быть упрощено, если написать $d_2 + id_1 = Ce^{i\varphi} = C \cos \varphi + iC \sin \varphi$. Используя уравнение (I.4.3), мы получаем (см. рис. 8.1)

$$Ce^{\alpha x} (\sin \varphi \cos \beta x + \cos \varphi \sin \beta x) = Ce^{\alpha x} \sin(\beta x + \varphi).$$

Пример. Уравнение маятника (7.23) для случая малых колебаний может быть упрощено заменой $\sin y$ на y , так что оно примет вид

$$(8.22) \quad y'' + \omega^2 y = 0, \quad \omega^2 = g/\ell,$$

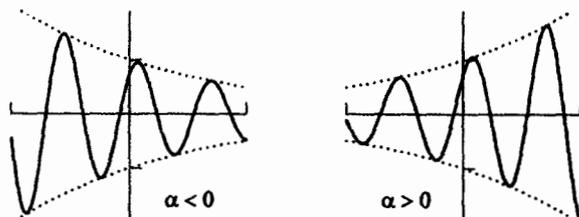


Рис. 8.1. Устойчивые и неустойчивые колебания.

где $g = 9.81 \text{ м/с}^2$ и ℓ — длина подвеса. Корнями характеристического уравнения $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ являются $\pm i\omega$. Следовательно, общее решение уравнения (8.22) есть

$$y(t) = C \sin(\omega t + \varphi),$$

а период малых колебаний равен

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{\ell/g}.$$

Неоднородные линейные уравнения

Задача состоит в нахождении *одного* частного решения уравнения $\mathcal{L}(y) = f$, т. е.

$$(8.23) \quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x).$$

Вследствие линейности уравнения (8.5) мы получаем следующий результат.

(8.4) Лемма (Принцип суперпозиции). Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — решения уравнений $\mathcal{L}(y_1) = f_1$ и $\mathcal{L}(y_2) = f_2$. Тогда $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ есть решение уравнения $\mathcal{L}(y) = c_1f_1 + c_2f_2$. \square

В тех случаях, когда неоднородность $f(x)$ в уравнении (8.23) может быть представлена в виде суммы простых членов, эти члены можно рассматривать по отдельности.

Быстрый метод (Эйлер 1750b). Этот подход можно использовать, если $f(x)$ есть линейная комбинация функций x^j , $e^{\alpha x}$, $e^{\alpha x} \sin(\omega x)$, ..., точнее, если функция $f(x)$ сама является решением некоторого линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами. Идея состоит в том, чтобы искать решение с аналогичной структурой.

Пример. Рассмотрим случай, когда f есть многочлен степени 2, например,

$$(8.24) \quad y''' + 5y'' + 2y' + y = 2x^2 + x.$$

Будем искать решение в виде

$$(8.25) \quad y(x) = a + bx + cx^2.$$

Если вычислить производные (8.25) и подставить их в (8.24), мы получим

$$cx^2 + (b + 4c)x + (a + 2b + 10c) = 2x^2 + x.$$

Сравнивая коэффициенты, получаем $c = 2$, $b = -7$ и $a = -6$, так что частное решение уравнения (8.24) равно

$$y(x) = 2x^2 - 7x - 6.$$

Пример. Предположим, что функция $f(x)$ есть синус

$$(8.26) \quad y'' - y' + y = \sin 2x.$$

Недостаточно выбрать $y(x) = a \cdot \sin 2x$, потому что y' дает $\cos 2x$. Поэтому напишем

$$(8.27) \quad y(x) = a \cdot \sin 2x + b \cdot \cos 2x,$$

вычислим производные и подставим их в (8.26). Это приводит к условию

$$(a + 2b - 4a) \sin 2x + (b - 2a - 4b) \cos 2x = \sin 2x.$$

Мы получаем линейную систему $-3a + 2b = 1$, $-2a - 3b = 0$ с решением $a = -3/13$, $b = 2/13$. Следовательно, частное решение есть

$$(8.28) \quad y(x) = -\frac{3}{13} \sin 2x + \frac{2}{13} \cos 2x.$$

По-другому решить уравнение (8.26) можно следующим образом. Рассмотрим уравнение

$$(8.29) \quad y'' - y' + y = e^{2ix}$$

и будем искать его решение в виде $y(x) = Ae^{2ix}$. Вычисляя производные, получаем $-4A - 2iA + A = 1$ и $A = (-3 + 2i)/13$. Поэтому решением уравнения (8.29) будет

$$(8.30) \quad y(x) = \frac{-3 + 2i}{13} e^{2ix}.$$

Поскольку (8.26) является просто мнимой частью (8.29), мы получаем решение (8.26) в виде мнимой части (8.30).

Обоснование этого подхода. По определению, $f(x)$ удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}_1(f) = 0$, где $\mathcal{L}_1 = D_a^m D_b^p \dots$ есть некоторый дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. Действуя этим оператором на уравнение (8.23), т.е. на уравнение вида $\mathcal{L}(y) = f$, мы получаем $(\mathcal{L}_1 \mathcal{L})(y) = 0$ и видим, что решение уравнения (8.23) удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению $(\mathcal{L}_1 \mathcal{L})(y) = 0$. Общее решение этого уравнения известно из теоремы 8.3.

Случай резонанса. Рассмотрим, например, уравнение

$$(8.31) \quad y'' + y = \sin x.$$

В этом случае мы не можем положить, $y(x) = a \sin x + b \cos x$, потому что эта функция сама является *решением однородного уравнения*. По аналогии с обсуждавшимся выше случаем двойных корней (см. также рис. 8.2) попробуем положить

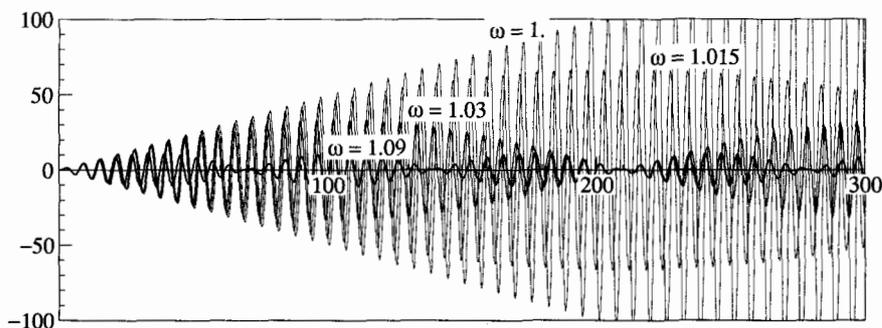


Рис. 8.2. Решение уравнения $y'' + y = \sin \omega x$ при $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $\omega = 1.09, 1.03, 1.015, 1.0$.

$$(8.32) \quad y(x) = ax \sin x + bx \cos x.$$

Обычная процедура (подстановка производных (8.32) в (8.31)) приводит к равенству

$$2a \cos x - 2b \sin x = \sin x,$$

так что $a = 0$ и $b = -1/2$. Таким образом, частное решение уравнения (8.31) есть

$$(8.33) \quad y(x) = -\frac{1}{2}x \cos x.$$

При $x \rightarrow \infty$ оно неограниченно возрастает. (см. рис. 8.2).

Метод вариации постоянных (Лагранж 1775, 1788). Это общий метод, который позволяет найти частное решение уравнения (8.2) в случае, когда общее решение однородного уравнения (8.1) известно. Чтобы упростить обозначения, рассмотрим этот метод для случая $n = 2$.

Рассмотрим уравнение

$$(8.34) \quad y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$$

и предположим, что $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — два известных независимых решения однородного уравнения $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$. Идея метода состоит в том, чтобы искать решение в виде

$$(8.35) \quad y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

(отсюда и название “вариация постоянных”). Производная (8.35) равна

$$(8.36) \quad y' = c_1'y_1 + c_2'y_2 + c_1y_1' + c_2y_2'.$$

Для того чтобы избежать осложнений с производными высших порядков, потребуем, чтобы

$$(8.37) \quad c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0,$$

так что производная (8.35) становится равной $y' = c_1y_1' + c_2y_2'$. Тогда вторая производная будет

$$(8.38) \quad y'' = c_1' y_1' + c_2' y_2' + c_1 y_1'' + c_2 y_2''.$$

Если все эти формулы подставить в (8.34), то члены, содержащие c_1 и c_2 , исчезают, потому что мы предположили, что $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями однородного уравнения. Остается только

$$(8.39) \quad c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x).$$

Если к этому присовокупить (8.37), мы получим линейную систему

$$(8.40) \quad \underbrace{\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}}_{W(x)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix}}_{c'(x)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}}_{F(x)}.$$

Матрица $W(x)$ называется *матрицей Вронского*. Вычисляя $c'(x)$ из (8.40) и интегрируя, мы получаем

$$c(x) = \int_0^x W^{-1}(t) F(t) dt,$$

и решение уравнения (8.34) дается выражением

$$(8.41) \quad y(x) = (y_1(x), y_2(x)) \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \end{pmatrix} = \int_0^x (y_1(x), y_2(x)) W^{-1}(t) F(t) dt.$$

Пример. Рассмотрим уравнение с постоянными коэффициентами

$$(8.42) \quad y'' + 2ay' + by = f(x),$$

где $a^2 < b$. Однородное уравнение имеет решения $y_1(x) = e^{(\alpha+i\beta)x}$, $y_2(x) = e^{(\alpha-i\beta)x}$, где $\alpha = -a$ и $\beta = \sqrt{b-a^2}$. Матрица Вронского и обратная к ней матрица имеют вид:

$$W(x) = e^{\alpha x} \begin{pmatrix} e^{i\beta x} & e^{-i\beta x} \\ (\alpha + i\beta)e^{i\beta x} & (\alpha - i\beta)e^{-i\beta x} \end{pmatrix},$$

$$W^{-1}(x) = \frac{e^{-\alpha x}}{2i\beta} \begin{pmatrix} (-\alpha + i\beta)e^{-i\beta x} & e^{-i\beta x} \\ (\alpha + i\beta)e^{i\beta x} & -e^{i\beta x} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, из (8.41) мы получаем

$$(8.43) \quad y(x) = \frac{1}{\beta} \int_0^x \left(e^{\alpha(x-t)} \frac{e^{i\beta(x-t)} - e^{-i\beta(x-t)}}{2i} \right) f(t) dt$$

$$= \frac{1}{\beta} \int_0^x \left(e^{\alpha(x-t)} \sin \beta(x-t) \right) f(t) dt.$$

Эта формула справедлива для любой функции $f(t)$.

Уравнение Коши

Уравнение вида

$$(8.44) \quad y^{(n)} + \frac{a_{n-1}}{x} y^{(n-1)} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} y' + \frac{a_0}{x^n} y = 0$$

обычно называется “уравнением Коши”. Его аналитическое решение в деталях было обсуждено Эйлером (1769, “Sectio Secunda, Caput V”). В этом случае вместо решения вида $e^{\lambda x}$ следует искать решения в виде

$$(8.45) \quad y(x) = x^r.$$

Пример. Рассмотрим задачу

$$(8.46) \quad y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0.$$

Подстановка (8.45) приводит к

$$(r(r-1) + r - 1)x^{r-2} = 0.$$

Корнями этого уравнения являются числа $r = 1$ и $r = -1$. Следовательно, общее решение уравнения (8.46) есть

$$(8.47) \quad y(x) = c_1x + \frac{c_2}{x}.$$

По-другому решить уравнение (8.44) можно с помощью подстановки

$$(8.48) \quad x = e^t, \quad y(x) = z(t).$$

Поскольку

$$(8.49) \quad z' = \frac{dz}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = xy', \quad z'' = \dots = xy' + x^2y'',$$

уравнение (8.46) переходит в уравнение с постоянными коэффициентами $z'' - z = 0$, к которому мы можем применить вышеизложенную теорию (теорема 8.3). Это приводит к $z(t) = c_1e^t + c_2e^{-t}$, что после обратной подстановки опять дает (8.47).

Упражнения

8.1 Если $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ являются различными комплексными числами, то

$$(8.50) \quad c_1e^{\lambda_1x} + c_2e^{\lambda_2x} + \dots + c_n e^{\lambda_nx} = 0$$

для всех x тогда и только тогда, когда $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.

Указание. Из дифференцирования уравнения (8.50) в точке $x = 0$ следует, что $\sum_{i=1}^n c_i \lambda_i^k = 0$ для $k = 0, 1, \dots$. Рассмотрите выражение $\sum_{i=1}^n c_i p(\lambda_i)$, где $p(x)$ есть многочлен, обращающийся в нуль в точках $\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_n$, но не в λ_j .

8.2 Если значения величин $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ различны, то

$$\sum_{i=1}^n (c_i + d_i x + e_i x^2) e^{\lambda_i x} = 0$$

для всех x тогда и только тогда, когда все коэффициенты c_i, d_i, e_i равны нулю.

Указание. Докажите, что для произвольного многочлена справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^n (c_i p(\lambda_i) + d_i p'(\lambda_i) + e_i p''(\lambda_i)) = 0.$$

- 8.3 Другой подход к случаю кратных характеристических значений (Даламбер 1748). Предположим, что λ есть двойной корень уравнения (8.10). Расщепим этот корень на два близких корня λ и $\lambda + \varepsilon$ (где ε бесконечно мало). В этом случае $e^{\lambda x}$, $e^{(\lambda+\varepsilon)x}$, а также их линейная комбинация

$$y(x) = \frac{e^{(\lambda+\varepsilon)x} - e^{\lambda x}}{\varepsilon}$$

являются решениями задачи. Покажите, что в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ последнее выражение переходит в решение $x e^{\lambda x}$.

- 8.4 Найдите частное решение уравнения $y'' + 0.2y' + y = \sin(\omega x)$ и изучите его *амплитуду* как функцию ω . Какое явление вы заметили?
- 8.5 Вычислите частное решение уравнения $y'' - 2y' + y = e^x \cos x$
- путем подстановки $y = A e^x \sin x + B e^x \cos x$;
 - методом вариации постоянных;
 - с помощью решения уравнения $y'' - 2y' + y = e^{(1+i)x}$.
- 8.6 Решите следующие однородные и неоднородные уравнения Коши:

$$\begin{aligned} x^2 y'' - x y' - 3y &= 0, \\ x^2 y'' - x y' - 3y &= x^4, \\ x^2 y'' - 3x y' + 4y &= 0. \end{aligned}$$

Последнее уравнение приведет к задаче о двойных корнях. Исследуйте проблему их определения (Лорел и Харди 1933, *Дети пустыни*).

- 8.7 Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — два решения уравнения $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$. Покажите, что вронскиан (определитель матрицы Вронского (8.40)) удовлетворяет соотношению

$$\det(W(x)) = \det(W(x_0)) \cdot \exp\left(-\int_{x_0}^x a(t) dt\right).$$

Указание. Найдите дифференциальное уравнение для $z(x) = \det(W(x))$.

II.9 Численное решение дифференциальных уравнений

Я всегда замечал, что математики и физики с высшим образованием очень хорошо знакомы с теоретическими результатами, но совершенно не знают простейших приближенных методов. (Л. Коллатц, *Численное решение дифференциальных уравнений*, Springer 1951, русский перевод 1960)

Часто бывает невозможно решить дифференциальное уравнение

$$(9.1) \quad y' = f(x, y)$$

аналитически (например, $y' = x^2 + y^2$). Если же это возможно, может оказаться, что получающиеся интегралы не элементарны (например, $y'' + \sin y = 0$, см. (7.23)). Даже в том случае, когда все интегралы элементарны, полученные формулы могут быть бесполезны. Например, решение уравнения $y' = y^4 + 1$ определяется следующим равенством (см. формулу (5.16))

$$\frac{\sqrt{2}}{8} \ln \frac{y^2 + \sqrt{2}y + 1}{y^2 - \sqrt{2}y + 1} + \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\operatorname{arctg}(y\sqrt{2} + 1) + \operatorname{arctg}(y\sqrt{2} - 1) \right) = x + C,$$

которое трудно использовать, особенно если нам нужна y как функция x . Поэтому представляют интерес численные методы, с помощью которых можно было бы прямо решать уравнение (9.1).

Метод Эйлера

Задача 85: Получить хорошее приближение для интеграла произвольного дифференциального уравнения. (Эйлер 1768, §650)

В каждой точке (x, y) уравнение (9.1) определяет величину $f(x, y)$, т.е. *наклон* кривой решения. Следовательно, можно представить себе *поле направлений* (И. Бернулли 1694). Кривые, которые в каждой точке следуют этим направлениям, являются решениями уравнения (9.1). На рис. 9.1 в качестве “Exemplo res patebit” (широко известного примера, — *лат.*) показано поле направлений для уравнения Риккати

$$(9.2) \quad y' = x^2 + y^2,$$

которое не имеет элементарного решения (Лиувилль 1841, “J’ai donc pensé qu’il pouvait être bon de soumettre la question à une analyse exacte ...” — Поэтому я подумал, что возможно стоит более тщательно проанализировать этот вопрос, — *франц.*). Очевидно, что решение не является единственным. Поэтому зададим *начальное значение*

$$(9.3) \quad y(x_0) = y_0.$$

Идея Эйлера (Эйлер 1768, Sectio Secunda, Caput VII). Выберем $h > 0$ и заменим решение при $x_0 \leq x \leq x_0 + h$ его касательной:

$$\ell(x) = y_0 + (x - x_0) \cdot f(x_0, y_0).$$

В точке $x_1 = x_0 + h$ получаем $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$. В этой точке мы опять вычисляем новое направление и повторяем процесс для того, чтобы получить “valores successivi” (последовательные значения, — *лат.*):

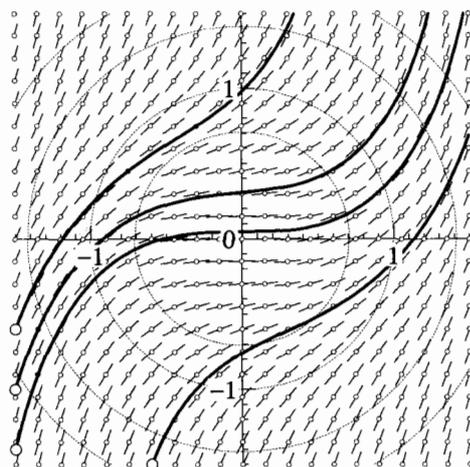


Рис. 9.1. Поле направлений для уравнения $y' = x^2 + y^2$ и четыре решения.

(9.4)

$$x_{n+1} = x_n + h, \quad y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n).$$

Это и есть *метод Эйлера*. Кривая, образованная соединением всех касательных, называется *ломаной Эйлера*. В пределе $h \rightarrow 0$ эти ломаные все более точно приближаются к решению (см. рис. 9.2).

Численный эксперимент. Рассмотрим дифференциальное уравнение (9.2), выберем начальные значения $x_0 = -1.5$, $y_0 = -1.4$ и возьмем размер шага h равным $1/4$, $1/8$, $1/16$, $1/32$. Получающиеся ломаные Эйлера приведены на рис. 9.2. Численное приближение и ошибки при $x = 0$ приведены в табл. 9.1. Видно, что ошибка убывает вдвое, когда шаг уменьшается вдвое (“quot” означает отношение ошибок при двух последовательных значениях длины шага). Объяснение этого факта можно найти в любом учебнике по численному анализу (например, в книге Хайрер, Нёрсетт, Ваннер 1990, разд. П.3, стр. 166).

Таблица 9.1. Метод Эйлера

$1/h$	$y(0)$	ошибка	quot
4	0.7246051	-0.6762019	
8	0.2968225	-0.2484192	2.722
16	0.1577289	-0.1093256	2.272
32	0.0999576	-0.0515543	2.121
64	0.0734660	-0.0250628	2.057
128	0.0607632	-0.0123599	2.028
256	0.0545412	-0.0061380	2.014
512	0.0514618	-0.0030586	2.007

Таблица 9.2. Метод (9.5)

$1/h$	$y(0)$	ошибка	quot
2	-0.7330279	0.7814312	
4	-0.1063739	0.1547771	5.049
8	0.0153874	0.0330159	4.688
16	0.0409854	0.0074179	4.451
32	0.0466509	0.0017523	4.233
64	0.0479776	0.0004257	4.116
128	0.0482984	0.0001049	4.058
256	0.0483772	0.0000260	4.029

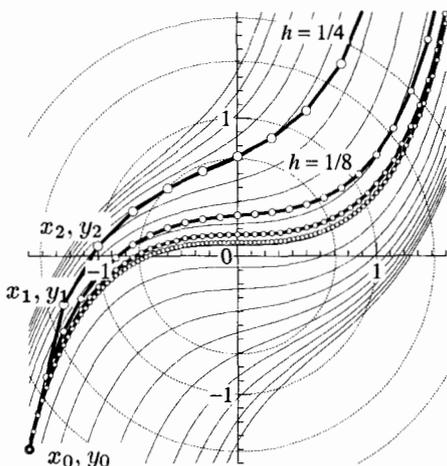


Рис. 9.2. Ломанные Эйлера для уравнения $y' = x^2 + y^2$.

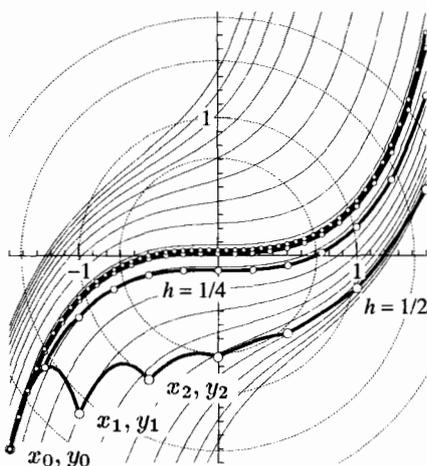


Рис. 9.3. Параболы второго порядка.

Метод рядов Тейлора

Задача 86: Значительно улучшить предыдущий метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, чтобы результат был ближе к истине. (Эйлер 1768, §656)

Заметим, что (9.4) представляет собой два первых члена разложения в ряд Тейлора. Чтобы улучшить точность, давайте введем третий член, так что

$$(9.5) \quad y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2} y''_n.$$

Поскольку $y'_n = f(x_n, y_n)$, для вычисления y''_n следует просто продифференцировать дифференциальное уравнение по x . Для уравнения $y' = x^2 + y^2$ это дает

$$(9.6) \quad y'' = 2x + 2yy' = 2x + 2x^2y + 2y^3.$$

Численные результаты, полученные с помощью (9.5) при $h = 1/2, 1/4, 1/8$ и $1/16$, приведены на рис. 9.3. Здесь ломанные метода Эйлера заменены “полипараболами”, составленными из отрезков парабол усеченного ряда Тейлора. Ошибки в точке $x = 0$ приведены в табл. 9.2. При малых h результаты значительно лучше, чем при применении метода Эйлера: при уменьшении длины шага вдвое ошибка уменьшается в четыре раза.

Замечание. Разумеется, можно принять во внимание дальнейшие члены ряда Тейлора, например,

$$(9.7) \quad y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2!} y''_n + \frac{h^3}{3!} y'''_n.$$

Высшие производные получаются повторным дифференцированием дифференциального уравнения. Для нашего уравнения Риккати мы получаем из (9.6)

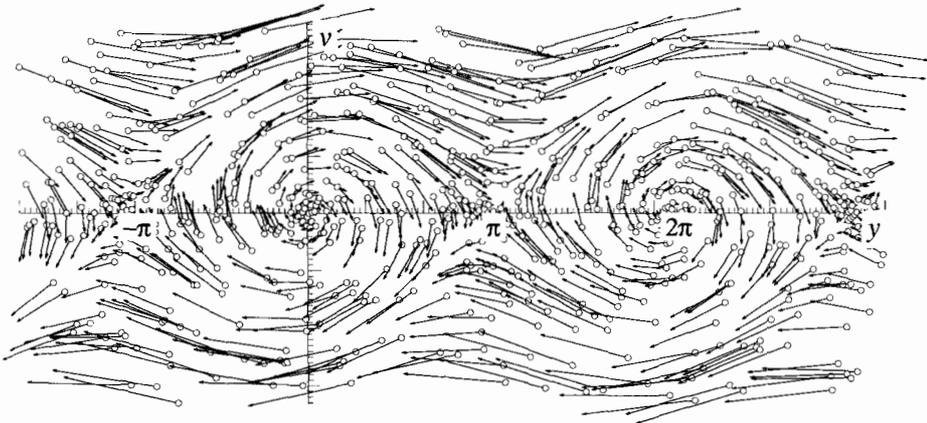


Рис. 9.4. Векторное поле уравнения маятника (9.8').

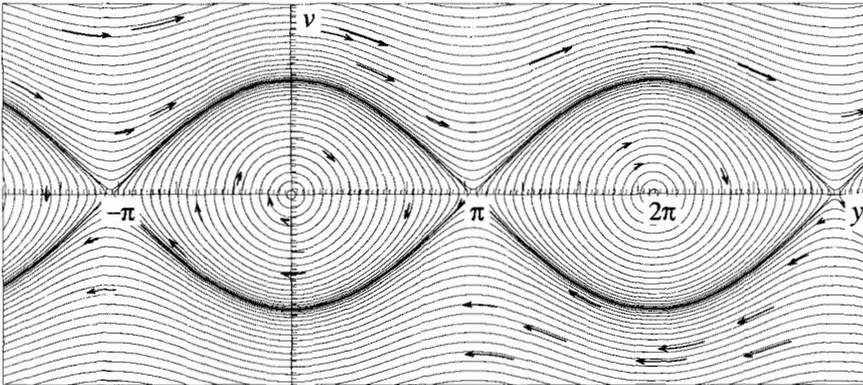


Рис. 9.5. Решения уравнения маятника (9.8').

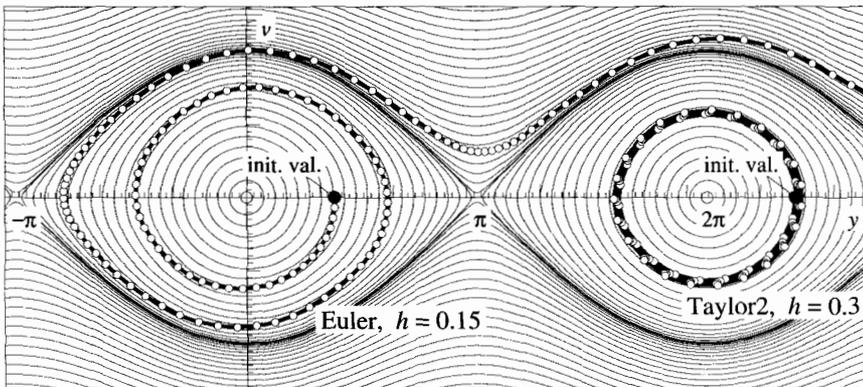


Рис. 9.6. Численные решения уравнения маятника (9.8').

$$y''' = 2 + 2y'y' + 2yy'' = 2 + 4xy + 2x^4 + 8x^2y^2 + 6y^4,$$

$$y'''' = 4y + 12x^3 + 20xy^2 + 16x^4y + 40x^2y^3 + 24y^5, \quad \text{и т. д.}$$

Уравнения второго порядка

В качестве примера рассмотрим уравнение маятника (7.23)

$$(9.8) \quad y'' = -\sin y.$$

Введем новую переменную для производной y' . Теперь (9.8) выглядит так:

$$(9.8') \quad \begin{aligned} y' &= v \\ v' &= -\sin y. \end{aligned}$$

Эту систему можно интерпретировать как *векторное поле*, которое в каждой точке (y, v) задает *скорость* точки $(y(x), v(x))$, движущейся вместе с изменением параметра x (рис. 9.4). Точки решений $(y(x), v(x))$ везде движутся с предписанной скоростью. Они представлены на рис. 9.5. Овалы соответствуют колебаниям, а синусоиды соответствуют вращениям маятника с переворотами.

Метод Эйлера. Идея Коши (1824) состоит в том, чтобы приложить метод Эйлера (9.4) к *обеим* функциям $y(x)$ и $v(x)$. Если заданы начальные значения $y(x_0) = y_0$, $v(x_0) = v_0$ и длина шага $h > 0$, то аналог метода (9.4) в применении к системе (9.8') выглядит так

$$(9.9) \quad x_{n+1} = x_n + h, \quad y_{n+1} = y_n + h \cdot v_n, \quad v_{n+1} = v_n - h \cdot \sin(y_n).$$

На рис. 9.6 представлена ломаная Эйлера для начальных значений $y(0) = 1.2$, $v(0) = 0$ при $h = 0.15$. Мы с ужасом видим, что вопреки физической реальности наш метод предсказывает нарастание амплитуды колебаний, оканчивающееся опрокидыванием маятника.

Метод рядов Тейлора. Дифференцируя (9.8') по x , получаем

$$(9.10) \quad y'' = v' = -\sin y, \quad v'' = -\cos y \cdot y' = -\cos y \cdot v,$$

что позволяет нам использовать дополнительный член ряда Тейлора. Аналогом уравнения (9.5) является

$$(9.11) \quad \begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2} y''_n = y_n + hv_n - \frac{h^2}{2} \sin y_n, \\ v_{n+1} &= v_n + hv'_n + \frac{h^2}{2} v''_n = v_n - h \sin(y_n) - \frac{h^2}{2} \cos y_n \cdot v_n. \end{aligned}$$

Результаты гораздо лучше (см. рис. 9.6 справа), даже если h в два раза больше.

Упражнения

9.1 Примените метод Эйлера при $h = 1/N$ к уравнению

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = 1$$

с тем, чтобы получить приближение величины $y(1) = e^\lambda$. Результатом будет хорошо известная формула из главы I.

9.2 (Функция, обратная к функции ошибок). Определим функцию $y(x)$ с помощью соотношения

$$x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-t^2} dt.$$

Продифференцируйте эту формулу и покажите, что $y(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

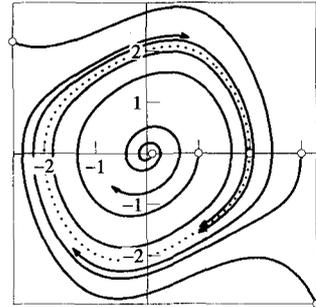
$$y' = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{y^2}, \quad y(0) = 0.$$

Вычислите первые четыре члена ряда Тейлора для $y(x)$ (записанного в точке $x = 0$).

9.3 (Уравнение Ван-дер-Поля). Вычислите $y^{(i)}$ и $v^{(i)}$ для $i = 1, 2, 3$ для решений дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} y' &= v, \\ v' &= \varepsilon(1 - y^2)v - y, \end{aligned}$$

и найдите численно решение, используя метод рядов Тейлора третьего порядка при $\varepsilon = 0.3$, начальных значениях $y(0) = 2.00092238555422$, $v(0) = 0$, и при $0 \leq x \leq 6.31844320345412$. Правильное решение на этом интервале при этих начальных условиях периодически.



П.10 Формула суммирования Эйлера—Маклорена

Король называет меня “мой профессор”, и я — счастливейший в мире человек! (Эйлер гордится своей службой у Фридриха II в Берлине)

У меня здесь есть один геометр, он — большой циклоп ... у него остался только один глаз, а новая кривая, которую он сейчас вычисляет, может сделать его совсем слепым. (Фридрих II; см. Шписс 1929, р. 165-166.)

Эта формула была получена независимо Эйлером (1736) и Маклореном (1742). Она является мощным средством для вычисления с помощью дифференциального исчисления таких сумм, как гармоническая сумма $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$, сумма логарифмов $\ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \dots + \ln n = \ln n!$, сумма степеней $1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$, или сумма обратных степеней $1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \dots + \frac{1}{n^k}$.

Задача. При заданной функции $f(x)$, найти формулу для суммы

$$(10.1) \quad S = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) = \sum_{i=1}^n f(i)$$

(“investigatio summae serierum ex termino generali” — отыскание сумм рядов из конечных общих границ, *лат.*).

Вывод формулы по Эйлеру

Первая идея (см. Эйлер 1755, pars posterior, § 105, Маклорен 1742, Book II, Chap. IV, р. 663f) состоит в том, чтобы рассмотреть еще сумму со сдвинутыми аргументами:

$$(10.2) \quad s = f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(n-1).$$

Вычислим разность $S - s$. Воспользуемся формулой Тейлора (2.8), положив в ней $x - x_0 = -1$, так что

$$f(i-1) - f(i) = -\frac{f'(i)}{1!} + \frac{f''(i)}{2!} - \frac{f'''(i)}{3!} + \dots$$

В результате получится

$$f(n) - f(0) = \sum_{i=1}^n f'(i) - \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n f''(i) + \frac{1}{3!} \sum_{i=1}^n f'''(i) - \frac{1}{4!} \sum_{i=1}^n f^{(4)}(i) + \dots$$

Эта формула содержит $\sum f'(i)$, но если записать ее для первообразной от f и затем выразить эту первообразную через f , мы получим формулу для $\sum f(i)$:

$$(10.3) \quad \sum_{i=1}^n f(i) = \int_0^n f(x) dx + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n f'(i) - \frac{1}{3!} \sum_{i=1}^n f''(i) + \frac{1}{4!} \sum_{i=1}^n f'''(i) - \dots$$

Вторая идея состоит в том, чтобы исключить суммы $\sum f'$, $\sum f''$, $\sum f'''$, ... в правой части (10.3) с помощью этой же формулы, в которой f последовательно заменяется на f' , f'' , f''' и т. д. Это приведет нас к формуле вида

$$(10.4) \quad \sum_{i=1}^n f(i) = \int_0^n f(x) dx - \alpha(f(n) - f(0)) + \beta(f'(n) - f'(0)) - \gamma(f''(n) - f''(0)) + \delta(f'''(n) - f'''(0)) - \dots$$

Для того чтобы вычислить коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, последовательно заменим f в (10.4) на f', f'', \dots и получим

$$\begin{aligned} \sum f(i) &= \int_0^n f(x) dx - \alpha(f(n) - f(0)) + \beta(f'(n) - f'(0)) - \dots, \\ -\frac{1}{2!} \sum f'(i) &= -\frac{1}{2!}(f(n) - f(0)) + \frac{\alpha}{2!}(f'(n) - f'(0)) - \dots, \\ \frac{1}{3!} \sum f''(i) &= +\frac{1}{3!}(f'(n) - f'(0)) - \dots, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Согласно (10.3) сумма всех этих выражений должна быть равна $\int_0^n f(x) dx$. Следовательно, мы получаем

$$(10.5) \quad \alpha + \frac{1}{2!} = 0, \quad \beta + \frac{\alpha}{2!} + \frac{1}{3!} = 0, \quad \gamma + \frac{\beta}{2!} + \frac{\alpha}{3!} + \frac{1}{4!} = 0, \dots,$$

откуда следует, что $\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{12}, \gamma = 0, \delta = -\frac{1}{720}, \dots$ и

$$(10.6) \quad \sum_{i=1}^n f(i) = \int_0^n f(x) dx + \frac{1}{2}(f(n) - f(0)) + \frac{1}{12}(f'(n) - f'(0)) - \frac{1}{720}(f'''(n) - f'''(0)) + \frac{1}{30240}(f^{(5)}(n) - f^{(5)}(0)) + \dots$$

(10.1) Пример. Если применить эту формулу для вычисления суммы почти миллиона членов

$$\begin{aligned} \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{1000000} &= \ln(10^6) - \ln(10) + \frac{1}{2} 10^{-6} - \frac{1}{20} \\ &+ \frac{1}{1200} - \frac{1}{120} 10^{-4} + \frac{1}{252} 10^{-6} + \dots \approx 11.463758469, \end{aligned}$$

то она дает прекрасное приближение точного значения с помощью всего лишь нескольких членов. Однако эта формула бесполезна для вычисления суммы первых членов $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{10}$.

Числа Бернулли. Обычно заменяют коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ на $B_i/i!$ ($B_0 = 1, \alpha = B_1/1!, \beta = B_2/2!, \dots$), так что формула (10.5) запишется в виде

$$(10.5') \quad 2B_1 + B_0 = 0, \quad 3B_2 + 3B_1 + B_0 = 0, \quad \dots, \quad \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} B_i = 0.$$

Вот числа Бенулли, вычисленные Эйлером:

$$\begin{aligned}
 B_0 &= 1, & B_1 &= -\frac{1}{2}, & B_2 &= \frac{1}{6}, & B_4 &= -\frac{1}{30}, & B_6 &= \frac{1}{42}, & B_8 &= -\frac{1}{30}, \\
 B_{10} &= \frac{5}{66}, & B_{12} &= -\frac{691}{2730}, & B_{14} &= \frac{7}{6}, & B_{16} &= -\frac{3617}{510}, & B_{18} &= \frac{43867}{798}, \\
 B_{20} &= -\frac{174611}{330}, & B_{22} &= \frac{854513}{138}, & B_{24} &= -\frac{236364091}{2730}, \\
 B_{26} &= \frac{8553103}{6}, & B_{28} &= -\frac{23749461029}{870}, & B_{30} &= \frac{8615841276005}{14322},
 \end{aligned}$$

и $B_3 = B_5 = \dots = 0$. В этих обозначениях формула (10.6) принимает вид

$$(10.6') \quad \sum_{i=1}^n f(i) = \int_0^n f(x) dx + \frac{1}{2}(f(n) - f(0)) + \sum_{k \geq 1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} (f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(0)).$$

Пример. Если $f(x) = x^q$, то ряд (10.6') конечен и представляет собой хорошо известные формулы Я. Бернулли (I.1.26), (I.1.27).

Производящая функция. Для того чтобы лучше понять, что такое числа Бернулли, рассмотрим одну из великих идей Эйлера: возьмем функцию $V(u)$, коэффициентами ряда Тейлора которой являются рассматриваемые числа, т. е. определим ее как

$$(10.7) \quad \begin{aligned}
 V(u) &= 1 + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \dots \\
 &= 1 + \frac{B_1}{1!} u + \frac{B_2}{2!} u^2 + \frac{B_3}{3!} u^3 + \frac{B_4}{4!} u^4 + \dots
 \end{aligned}$$

Теперь формулы (10.5) или (10.5') просто означают, что

$$V(u) \cdot \left(1 + \frac{u}{2!} + \frac{u^2}{3!} + \frac{u^3}{4!} + \dots \right) = 1,$$

т. е.

$$(10.8) \quad V(u) = \frac{u}{e^u - 1}.$$

Таким образом, бесконечное число алгебраических уравнений выражается одной аналитической формулой. Из того факта, что функция

$$(10.9) \quad V(u) + \frac{u}{2} = \frac{u}{e^u - 1} + \frac{u}{2} = \frac{u}{2} \cdot \frac{e^{u/2} + e^{-u/2}}{e^{u/2} - e^{-u/2}}$$

является четной функцией, следует, что $B_3 = B_5 = B_7 = \dots = 0$.

De Usu Legitimo Formulae Summatoriae Maclaurinianaе
(О правильном использовании формулы Маклорена)

Подставим теперь функцию $f(x) = \cos(2\pi x)$, для которой $f(i) = 1$ при всех i , в формулу (10.6'). В левой части мы получим $1 + 1 + \dots + 1$, а в правой $0 + 0 + 0 + \dots$, потому что функция $\cos(2\pi x)$ вместе со всеми своими производными периодична с периодом 1. Мы видим, что написанная формула *неверна!* Другая неприятность состоит в том, что для большинства функций f бесконечный ряд в (10.6') расходится.

Поэтому необходимо оборвать ряд после конечного числа членов и получить выражение для остатка. Это сделал и изложил на прекрасном латинском языке (см. заголовок выше) Якоби (1834), Он переделал доказательство Эйлера, везде используя остаточный член Бернулли—Коши (4.32). Позже было установлено (Виртингер 1902), что доказательство может быть проведено просто путем повторного интегрирования по частям, подобно доказательству формулы (4.32). Основную роль в доказательстве играют так называемые многочлены Бернулли.

Многочлены Бернулли. Многочлены

$$\begin{aligned} B_1(x) &= B_0x + B_1 && = x - \frac{1}{2} \\ B_2(x) &= B_0x^2 + 2B_1x + B_2 && = x^2 - x + \frac{1}{6} \\ B_3(x) &= B_0x^3 + 3B_1x^2 + 3B_2x + B_3 && = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \\ B_4(x) &= B_0x^4 + 4B_1x^3 + 6B_2x^2 + 4B_3x + B_4 && = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}, \end{aligned}$$

или в общем случае

$$(10.10) \quad B_k(x) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} B_i x^{k-i},$$

удовлетворяют соотношениям

$$(10.11) \quad B_k'(x) = kB_{k-1}(x), \quad B_k(0) = B_k(1) = B_k.$$

В самом деле, первая формула — это свойство биномиальных коэффициентов (см. теорему I.2.1), а вторая следует из определения и из формул (10.5').

(10.2) Теорема. Мы имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(i) &= \int_0^n f(x) dx + \frac{1}{2}(f(n) - f(0)) \\ &+ \sum_{j=2}^k \frac{B_j}{j!} (f^{(j-1)}(n) - f^{(j-1)}(0)) + \tilde{R}_k, \end{aligned}$$

где

$$(10.12) \quad \tilde{R}_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^n \tilde{B}_k(x) f^{(k)}(x) dx.$$

Здесь $\tilde{B}_k(x)$ является функцией, которая получена из многочлена $B_k(x)$ при $0 \leq x \leq 1$ путем его периодического продолжения с периодом 1 (см. рис. 10.1).

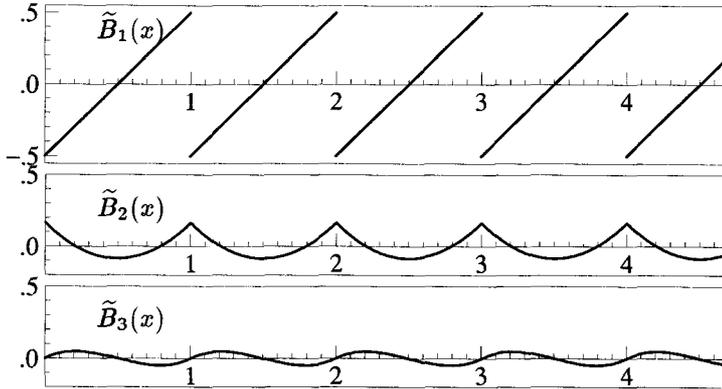


Рис. 10.1. Многочлены Бернулли.

Доказательство. Сначала докажем утверждение теоремы для случая $n = 1$. Учитывая, что $B_1'(x) = 1$, и интегрируя по частям, получаем:

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 B_1'(x) f(x) dx = B_1(x) f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 B_1(x) f'(x) dx.$$

Первый член равен $\frac{1}{2}(f(1) + f(0))$. Во втором члене в соответствии с (10.11) сделаем замену $B_1(x) = \frac{1}{2}B_2'(x)$ и проинтегрируем еще раз. Это дает

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}(f(1) + f(0)) - \frac{B_2}{2!}(f'(1) - f'(0)) + \frac{1}{2!} \int_0^1 B_2(x) f''(x) dx.$$

Повторяя этот прием, мы придем к равенству

$$(10.13) \quad \frac{1}{2}(f(1) + f(0)) = \int_0^1 f(x) dx + \sum_{j=2}^k \frac{(-1)^j B_j}{j!} (f^{(j-1)}(1) - f^{(j-1)}(0)) + R_k,$$

где

$$(10.14) \quad R_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^1 B_k(x) f^{(k)}(x) dx.$$

Теперь применим формулу (10.14) к смещенным функциям $f(x + i - 1)$. Заметив, что

$$\int_0^1 B_k(x) f^{(k)}(x + i - 1) dx = \int_{i-1}^i \tilde{B}_k(x) f^{(k)}(x) dx,$$

мы получим утверждение теоремы 10.2, суммируя эти формулы от $i = 1$ до $i = n$. \square

Оценка остаточного члена. Из оценок (для $0 \leq x \leq 1$)

$$|B_1(x)| \leq \frac{1}{2}, \quad |B_2(x)| \leq \frac{1}{6}, \quad |B_3(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{36}, \quad |B_4(x)| \leq \frac{1}{30},$$

которые легко проверить, а также из того факта, что $|\int_0^n g(x) dx| \leq \int_0^n |g(x)| dx$, видно, что

$$(10.15) \quad |\tilde{R}_1| \leq \frac{1}{2} \int_0^n |f'(x)| dx, \quad |\tilde{R}_2| \leq \frac{1}{12} \int_0^n |f''(x)| dx, \quad \dots$$

Это и есть те строгие оценки остаточного члена формулы суммирования Эйлера—Маклорена, которые мы хотели получить. Дальнейшие максимальные и минимальные значения многочленов Бернулли вычислил Лемер (1940); см. упр. 10.3.

(10.3) Замечание. Если мы применим формулу теоремы 10.2 к функции $f(t) = hg(a + th)$, где $h = (b - a)/n$, и перенесем член $(f(n) - f(0))/2$ в левую часть, то получим (положив $x_i = a + ih$)

$$(10.16) \quad \begin{aligned} \frac{h}{2} g(x_0) + h \sum_{i=1}^{n-1} g(x_i) + \frac{h}{2} g(x_n) &= \int_a^b g(x) dx \\ &+ \sum_{j=2}^k \frac{h^j}{j!} B_j \left(g^{(j-1)}(b) - g^{(j-1)}(a) \right) \\ &+ (-1)^{k-1} \frac{h^{k+1}}{k!} \int_0^n \tilde{B}_k(t) g^{(k)}(a + th) dt, \end{aligned}$$

где в левой части узнается правило *трапеций*. Из уравнения (10.16) видно, что главный член ошибки есть $(h^2/12)(g'(b) - g'(a))$. Однако если g — периодическая функция, то все члены в ряде Эйлера—Маклорена исчезают, и ошибка становится равной \tilde{R}_k при произвольном k ; это объясняет удивительно хорошие результаты в табл. 6.2 из разд. II.6.

Формула Стирлинга

Положим $f(x) = \ln x$ в формуле Эйлера—Маклорена. Поскольку

$$\sum_{i=2}^n f(i) = \ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \ln 5 + \dots + \ln n = \ln(n!),$$

мы получаем приближенное выражение для факториалов $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.

(10.4) Теорема. (Стирлинг 1730). *Справедлива формула*

$$(10.17) \quad n! = \frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n} n^n \cdot \exp\left(\frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{1}{1260n^5} - \frac{1}{1680n^7} + \tilde{R}_9\right),$$

где $|\tilde{R}_9| \leq 0.0006605/n^8$. Поэтому, когда $n \rightarrow \infty$, справедливо приближение

(10.18)

$$n! \approx \frac{\sqrt{2\pi n} n^n}{e^n}.$$

Замечание. Эта знаменитая формула особенно полезна в комбинаторном анализе, статистике и теории вероятностей. Уравнение (10.17) оборвано после четвертого члена просто потому, что следующий член не умещался на этой строке.

Численные значения, полученные из формул (10.18) и (10.17) (с одним, двумя и тремя членами) для $n = 10$ и $n = 100$, приведены в сравнении с $n!$ в табл. 10.1.

ТАБЛИЦА 10.1. Факториал и его приближение формулой Стирлинга

$n = 10$:	Стирлинг 0	=	0.359869561874103592162317593283	$\cdot 10^7$
	Стирлинг 1	=	0.362881005142693352994116531675	$\cdot 10^7$
	Стирлинг 2	=	0.362879997141301292538591223941	$\cdot 10^7$
	Стирлинг 3	=	0.362880000021301281279077612862	$\cdot 10^7$
	$n!$	=	0.362880000000000000000000000000	$\cdot 10^7$
$n = 100$:	Стирлинг 0	=	0.932484762526934324776475612718	$\cdot 10^{158}$
	Стирлинг 1	=	0.933262157031762340989619195146	$\cdot 10^{158}$
	Стирлинг 2	=	0.933262154439367463946383356624	$\cdot 10^{158}$
	Стирлинг 3	=	0.933262154439441532371338864918	$\cdot 10^{158}$
	$n!$	=	0.933262154439441526816992388563	$\cdot 10^{158}$

Доказательство. Выше мы видели (пример 10.1), что формула Эйлера—Маклорена становится неэффективной, когда высшие производные функции $f(x)$ на рассматриваемом интервале становятся большими. Поэтому мы используем формулу с $f(x) = \ln x$ для суммы от $i = n + 1$ до $i = m$. Поскольку

$$\int \ln x dx = x \ln x - x, \quad \frac{d^j}{dx^j} (\ln x) = (-1)^{j-1} \frac{(j-1)!}{x^j},$$

из теоремы 10.2 мы получаем, что

$$(10.19) \quad \sum_{i=n+1}^m f(i) = \ln m! - \ln n! = m \ln m - m - (n \ln n - n) + \frac{1}{2} (\ln m - \ln n) + \frac{1}{12} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{360} \left(\frac{1}{m^3} - \frac{1}{n^3} \right) + \tilde{R}_5,$$

где $|\tilde{R}_5| \leq 0.00123/n^4$ для всех $m > n$. Эта оценка получена из формул (10.12) и (10.15) и из того факта, что $|B_5(x)| \leq 0.02446$ при $0 \leq x \leq 1$. В выражении (10.19) каждый из членов $\ln n!$, $n \ln n$, n , и $(1/2) \ln n$ по отдельности расходится при $n \rightarrow \infty$. Поэтому соберем их вместе и положим

$$(10.20) \quad \gamma_n = \ln n! + n - \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln n,$$

после чего выражение (10.19) приводится к виду

$$(10.21) \quad \gamma_n = \gamma_m + \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) - \frac{1}{360} \left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{m^3} \right) - \tilde{R}_5.$$

При достаточно больших n и m γ_n и γ_m становятся сколь угодно близкими. Поэтому можно предположить, что значения γ_m при $m \rightarrow \infty$ сходятся к величине, которую мы обозначим как γ (строгое доказательство будет приведено в теореме III.1.8, принадлежащей Коши). Теперь в уравнении (10.21) перейдем к пределу $m \rightarrow \infty$, после чего получим

$$\ln n! + n - \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln n = \gamma + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \hat{R}_5,$$

где $|\hat{R}_5| \leq 0.00123/n^4$. Если теперь вычислить экспоненциальную функцию от этого выражения, мы получим

$$(10.22) \quad n! = D_n \frac{\sqrt{n} \cdot n^n}{e^n}, \quad \text{где} \quad D_n = e^\gamma \cdot \exp\left(\frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \hat{R}_5 \right).$$

Это равенство будет доказательством формулы (10.18), а также (10.17), если мы установим, что предел D_n (т.е. $D = e^\gamma$) равен $\sqrt{2\pi}$. С этой целью вычислим с помощью (10.22) выражение

$$\frac{D_n \cdot D_n}{D_{2n}} = \frac{n! \cdot n! \cdot (2n)^{2n} \cdot e^{-2n} \sqrt{2n}}{n^{2n} \cdot e^{-2n} \cdot n \cdot (2n)!} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}},$$

которое также стремится к D . Эта формула напоминает нам произведение Валлиса (уравнение (I.5.27)). Действительно, квадрат этой величины

$$\left(\frac{D_n \cdot D_n}{D_{2n}} \right)^2 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)(2n)}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-1)(2n+1)} \cdot \frac{2(2n+1)}{n},$$

$\xrightarrow{\quad} \pi/2$
 $\xrightarrow{\quad} 4$

стремится к 2π , так что $D = \sqrt{2\pi}$. Приведенная в теореме оценка \tilde{R}_9 следует из (10.12) и неравенства $|B_9(x)| \leq 0.04756$. □

Гармонический ряд и постоянная Эйлера

Попробуем вычислить сумму ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n},$$

полагая $f(x) = 1/x$ в теореме 10.2. Поскольку $f^{(j)}(x) = (-1)^j j! x^{-j-1}$, мы вместо (10.19), получаем

$$(10.23) \quad \sum_{i=n+1}^m \frac{1}{i} = \int_n^m \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{12} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) + \frac{1}{120} \left(\frac{1}{m^4} - \frac{1}{n^4} \right) - \frac{1}{252} \left(\frac{1}{m^6} - \frac{1}{n^6} \right) + \frac{1}{240} \left(\frac{1}{m^8} - \frac{1}{n^8} \right) + \tilde{R}_9,$$

где, в связи с тем, что $|B_9(x)| \leq 0.04756$, мы имеем $|\tilde{R}_9| \leq 0.00529/n^9$. В отличие от (10.20), при собирании расходящихся членов мы получаем выражение

$$\gamma_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \ln n,$$

которое можно исследовать в точности так же, как и выше, и показать, что это выражение сходится. При этом мы получаем постоянную

$$(10.24) \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \rightarrow \gamma = 0.57721566490153286 \dots$$

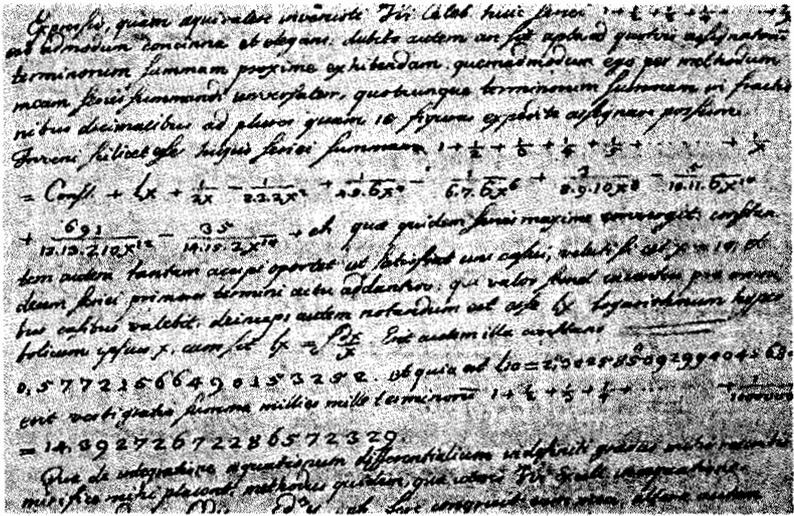


Рис. 10.2. Автограф Эйлера (письмо к Я. Бернулли 1740, см. Фельман 1983, с. 96.)¹

Эта новая математическая постоянная называется “постоянной Эйлера” (см. рис. 10.2, где приведен автограф Эйлера с его постоянной и ее использование для вычисления суммы примера 10.1). Полагая в (10.23), как и выше, $m \rightarrow \infty$, получаем

$$(10.25) \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = \gamma + \ln n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} - \frac{1}{252n^6} + \frac{1}{240n^8} + \tilde{R}_9,$$

где $|\tilde{R}_9| \leq 0.00529/n^9$. Чтобы вычислить постоянную γ , положим, например, $n = 10$ в уравнении (10.25) (как это сделал Эйлер) и получим значение (10.24). Эту постоянную вычислил с большой точностью Д. Кнут (1962), но до сих пор неизвестно, является ли она рациональным или иррациональным числом.

¹ Воспроизведено с разрешения издательства Birkhaeuser Verlag, Basel.

Упражнения

10.1 Спираль Феодора состоит из прямоугольных треугольников со сторонами длиной 1, \sqrt{n} и $\sqrt{n+1}$. Она делает полный оборот после построения 17 треугольников (по-видимому, именно поэтому Феодор не рассматривал корни большие $\sqrt{17}$). Сейчас нам нет нужды беспокоиться о таких мелочах. Давайте узнаем, скольким оборотам соответствует миллиард таких треугольников. Для этого нужно вычислить величину

$$1 + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=18}^{1000000000} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{i}}$$

(см. рис. 10.3) с ошибкой меньше чем 1. Это упражнение не только позволяет еще раз оценить мощь формулы Эйлера—Маклорена, но также приводит нас к необходимости вычисления интересного интеграла.

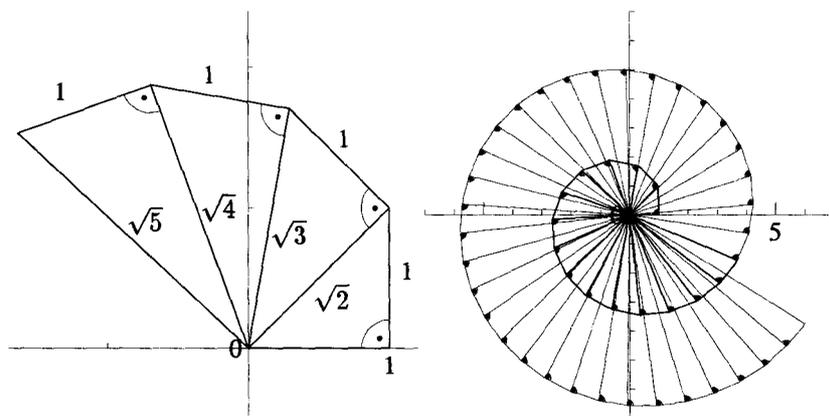


Рис. 10.3. Спираль Феодора Киренейского, 470–390 гг. до Р.Х.

10.2 (Формула ряда Тейлора для $\operatorname{tg} x$). Если положить $\operatorname{ctg} x = 1/\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{cth} x = 1/\operatorname{th} x$, то можно видеть, что уравнение (10.9) является рядом Тейлора функции $(x/2) \operatorname{cth} (x/2)$. Отсюда можно получить ряд для $x \cdot \operatorname{cth} x$ и, полагая $x \mapsto ix$, ряд для $x \cdot \operatorname{ctg} x$. Наконец, используйте формулу

$$2 \cdot \operatorname{ctg} 2x = \operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x$$

и получите коэффициенты разложения $\operatorname{tg} x$. Сравните их с формулой (I.4.18).

10.3 Проверьте численно оценки (Лемер 1940)

$$\begin{aligned} |B_3(x)| &\leq 0.04812, & |B_5(x)| &\leq 0.02446, & |B_7(x)| &\leq 0.02607, \\ |B_9(x)| &\leq 0.04756, & |B_{11}(x)| &\leq 0.13250, & |B_{13}(x)| &\leq 0.52357 \end{aligned}$$

при $0 \leq x \leq 1$.

III

Основания классического анализа

... Я не уверен в том, что буду заниматься геометрией через десять лет. Я также думаю, что может быть рудник уже слишком глубок, и раньше или позже его следует забросить. В настоящее время в физике и химии делаются более блестящие открытия, которые вдобавок легче использовать ... (Лагранж, 21 сентября 1781 г., письмо к Даламберу, *Oeuvres*, vol. 13, p. 368)

После смерти Эйлера в 1783 г. в математике наступил период застоя. Чего только не сделал Эйлер: создал непревзойденное изложение исчисления бесконечно малых и дифференциального исчисления (Эйлер 1748, 1755), взял берущиеся интегралы, решил решаемые дифференциальные уравнения (Эйлер 1768, 1769), раскрыл загадки жидкостей (Эйлер 1755b), механики (Эйлер 1736b, Лагранж 1788), вариационного исчисления (Эйлер 1744), алгебры (Эйлер 1770). Кажалось, что единственное, что следует делать — это изучать 30000 страниц работ Эйлера.

“Теория аналитических функций” Лагранжа (1797), “свободная от всех рассмотрений бесконечно малых величин, исчезающих величин, пределов и флюксий”, тезис Гаусса (1799) об “Основной теореме алгебры” и изучение сходимости гипергеометрических рядов (Гаусс 1812) ознаменовали начало новой эры.

Больцано заметил, что первое доказательство Гаусса недостаточно строго; в 1817 г. он приводит “чисто аналитическое доказательство теоремы о том, что между двумя числами, которые соответствуют противоположным знакам значений функции, существует по крайней мере один корень уравнения” (теорема III.3.5 ниже). В 1821 г. Коши вводит новые требования к строгости в своем знаменитом “Курсе анализа”. Он ставит следующие вопросы и отвечает на них.

- Что такое производная? Ответ: предел.
- Что такое интеграл? Ответ: предел.
- Что такое бесконечный ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$? Ответ: предел.

Отсюда следует вопрос:

— Что такое предел? Ответ: число.

И, наконец, последний вопрос:

— Что такое число?

Около 1870–1872 гг. Вейерштрасс и его соратники (Гейне, Кантор), а также Мере, ответили на этот вопрос. Они также исправили много неточностей в доказательстве Коши, прояснив понятия равномерной сходимости (см. рисунок ниже), равномерной непрерывности, а также почленного интегрирования и дифференцирования бесконечных рядов.

Основная часть этой главы — это разделы III.5, III.6 и III.7, которые посвящены соответственно интегральному исчислению, дифференциальному исчислению и бесконечным степенным рядам. Подготовительные разделы от III.1 до III.4 являются основой для построения нашей теории. Раздел III.8 завершает интегральное исчисление, а раздел III.9 содержит два результата Вейерштрасса о непрерывных функциях, которые представляли собой значительные достижения той эпохи.



Вейерштрасс объясняет Коши равномерную сходимость,
а тот размышляет над контрпримером Абеля
(рисунок К. Ваннер)

III.1 Бесконечные последовательности и действительные числа

Если для каждого положительного целого n задано число s_n , то говорят, что задана (*бесконечная*) *последовательность*, и мы пишем

$$(1.1) \quad \{s_n\} = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, \dots\}.$$

Число s_n называют n -м членом или *общим членом* последовательности. В качестве первого примера приведем последовательность

$$(1.2) \quad \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\},$$

которая является *арифметической прогрессией*. Этот термин означает, что разность между ее двумя последовательными членами постоянна. Последовательность

$$(1.3) \quad \{q^0, q^1, q^2, q^3, q^4, q^5, \dots\}$$

называется *геометрической прогрессией* (это значит, что частное от деления ее двух последовательных членов постоянно).

Сходимость последовательности

Говорят, что некоторая величина есть *предел* другой величины, если последняя приближается к первой ближе, чем на любую сколь угодно малую величину ...

(Даламбер 1765, *Encyclopédie*, tome neuvieme, à Neufchastel.)

Когда переменная величина сходится к некоторому пределу, часто бывает полезно указать этот предел с помощью специального обозначения, что мы будем делать, ставя аббревиатуру

$$\lim$$

перед рассматриваемой переменной ... (Коши 1821, *Cours d'Analyse*)

Если члены s_n последовательности (1.1) для достаточно больших n сколь угодно близко приближаются к некоторому числу s , мы называем это число *пределом* последовательности (1.1). Это понятие чрезвычайно важно и нужно определить его более точно:

- “сколь угодно близко” означает “на расстоянии меньшем, чем любое положительное число ε ”, т. е. $|s_n - s| < \varepsilon$. Здесь $|\cdot|$ есть *абсолютное значение* и поэтому s_n обязано быть близко к s как в положительном, так и в отрицательном направлении;
- “для достаточно больших n ” значит, что должно существовать такое N , что вышеприведенная оценка справедлива для всех $n \geq N$.

Используя символы \forall (“для всех”) и \exists (“существует”), мы можем представить изложенное выше в следующей компактной форме:

(1.1) Определение (Даламбер 1765, Коши 1821). *Мы говорим, что последовательность (1.1) сходится, если существует число s такое, что*

$$(1.4) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \geq 1 \quad \forall n \geq N \quad |s_n - s| < \varepsilon.$$

В этом случае мы пишем

$$(1.5) \quad s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \quad \text{или} \quad s_n \rightarrow s.$$

Если утверждение (1.4) не справедливо ни при каком s , то говорят, что последовательность (1.1) расходится.

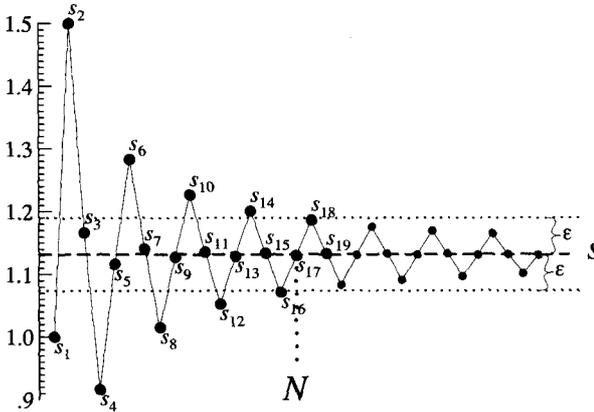


Рис. 1.1. Сходимость последовательности (1.6).

(1.2) Примеры. Рассмотрим последовательность

$$\left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots \right\}, \quad \text{где} \quad s_n = \frac{n}{n+1}.$$

Эта последовательность сходится к 1, поскольку

$$|s_n - 1| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

при $n > 1/\varepsilon - 1$. Таким образом, при данном $\varepsilon > 0$ в качестве N мы можем выбрать любое целое число, большее чем $1/\varepsilon - 1$, и условие (1.4) будет выполнено.

В качестве следующего примера возьмем последовательность

$$(1.6) \quad \begin{aligned} s_1 &= 1, & s_2 &= 1 + \frac{1}{2}, & s_3 &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \\ s_4 &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, & \dots, & & s_n &= \sum_{i=1}^n (-1)^{[(i-1)/2]} \frac{1}{i} \end{aligned}$$

(здесь $[i/2]$ обозначает наибольшее целое k , не превосходящее $i/2$; т.е. $[i/2] = k$, если $i = 2k$ или $i = 2k + 1$). Эта последовательность несколько менее тривиальна и изображена на рис. 1.1. Видно, что она сходится к числу, близкому к 1.13 (которое, как видно из результатов главы I, равно $\pi/4 + \ln 2/2$). Видно, что для данного ε (здесь $\varepsilon = 0.058$) существует последнее s_n (здесь s_{16}), для которого не выполняется неравенство $|s_n - s| < \varepsilon$. Следовательно, (1.4) справедливо для $N = 17$. То, что несколько предшествующих членов (s_3, s_5, \dots) также удовлетворяют оценке, не противоречит требованиям (1.4).

(1.3) Теорема. Если последовательность $\{s_n\}$ сходится, она ограничена, т.е.

$$(1.7) \quad \exists B \quad \forall n \geq 1 \quad |s_n| \leq B.$$

Доказательство. Положим $\varepsilon = 1$. По определению сходимости мы можем выбрать такое целое число N , что $|s_n - s| < 1$ для всех $n \geq N$. Используя

неравенство треугольника (см. упр. 1.1), мы получаем $|s_n| = |s_n - s + s| \leq |s_n - s| + |s| < 1 + |s|$ для $n \geq N$, и утверждение доказано, причем $B = \max\{|s_1|, |s_2|, \dots, |s_{N-1}|, |s| + 1\}$. \square

Ограниченность последовательности не является необходимым условием ее сходимости. Например, последовательность

$$(1.8) \quad \{s_n\} = \{1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots\}$$

ограничена (при $B = 1$), но не сходится. Последовательность (1.2) не сходится и не является ограниченной. Общая арифметическая прогрессия

$$(1.9) \quad \{s_n\} = \{d, 2d, 3d, 4d, 5d, \dots\}$$

тоже не ограничена (при $d \neq 0$). При $d > 0$ эта последовательность удовлетворяет следующему требованию:

$$(1.10) \quad \forall M > 0 \quad \exists N \geq 1 \quad \forall n \geq N \quad s_n > M.$$

Для того чтобы убедиться в этом, возьмем целое число N , удовлетворяющее условию $N > M/d$. Если (1.10) справедливо, мы говорим, что последовательность $\{s_n\}$ *стремится к бесконечности* и пишем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty \quad \text{ог} \quad s_n \rightarrow \infty.$$

Аналогичным образом можно определить $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = -\infty$.

Исследуем теперь сходимость последовательности (1.3).

(1.4) **Лемма.** *Для геометрической прогрессии (1.3) имеем*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{при } |q| < 1, \\ 1 & \text{при } q = 1, \\ \infty & \text{при } q > 1. \end{cases}$$

Последовательность (1.3) расходится при $q \leq -1$.

Доказательство. Начнем со случая $q > 1$. Положим $q = 1 + r$ ($r > 0$) и применим теорему I.2.1, после чего получим

$$q^n = (1 + r)^n = 1 + nr + \frac{n(n-1)}{2} r^2 + \dots \geq 1 + nr.$$

Таким образом, члены q^n стремятся к бесконечности (при заданном M следует выбрать $N \geq M/r$ в соотношении (1.10)). При $q = 1$ утверждение тривиально.

В случае, когда $|q| < 1$, рассмотрим последовательность $s_n = (1/|q|)^n$, которая в силу вышеизложенного стремится к бесконечности. При заданном $\varepsilon > 0$ положим $M = 1/\varepsilon$ и приложим (1.10) к последовательности $\{s_n\}$. Это доказывает существование такого целого числа N , что для всех $n \geq N$ мы получаем $s_n > M$, или, что то же самое, $|q^n| < \varepsilon$. Это доказывает, что $q^n \rightarrow 0$. При $q = -1$ последовательность осциллирует между -1 и 1 , а когда $q < -1$, она не ограничена и осциллирует. \square

Следующая теорема упрощает вычисление пределов.

(1.5) **Теорема.** *Рассмотрим две сходящиеся последовательности, $s_n \rightarrow s$ и $v_n \rightarrow v$. Тогда последовательности, составленные из вычисленных почленно сумм, произведений и частных их членов также сходятся, и мы имеем*

$$(1.11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n + v_n) = s + v$$

$$(1.12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n \cdot v_n) = s \cdot v$$

$$(1.13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{s_n}{v_n} \right) = \frac{s}{v}, \quad \text{если } v_n \neq 0 \text{ и } v \neq 0.$$

Доказательство. Начнем с доказательства соотношения (1.11). Из неравенства треугольника получаем

$$|(s_n + v_n) - (s + v)| = |s_n - s + v_n - v| \leq \underbrace{|s_n - s|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|v_n - v|}_{< \varepsilon} < 2\varepsilon = \varepsilon'$$

Для того, чтобы доказательство было логичным, эту последовательность формул следует читать справа налево: при заданном произвольно малом $\varepsilon' > 0$ выберем $\varepsilon > 0$ таким, что $2\varepsilon = \varepsilon'$. Согласно предположению, две последовательности $\{s_n\}$ и $\{v_n\}$ сходятся к s и v . Это означает, что существуют числа N_1 и N_2 такие, что $|s_n - s| < \varepsilon$ при $n \geq N_1$ и $|v_n - v| < \varepsilon$ при $n \geq N_2$. Выбирая $N = \max(N_1, N_2)$, мы получаем, что утверждение (1.4) справедливо для последовательности $\{s_n + v_n\}$. В дальнейшем мы не будем повторять эти рассуждения.

Для доказательства (1.12) мы должны оценить величину $s_n v_n - sv$. Прибавляя и вычитая “смешанные произведения” $-sv_n + sv_n$, получаем

$$\begin{aligned} |s_n v_n - sv| &= |s_n v_n - sv_n + sv_n - sv| \\ &\leq |v_n| \cdot |s_n - s| + |s| \cdot |v_n - v| < (B + |s|) \varepsilon = \varepsilon'. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали теорему 1.3 для последовательности $\{v_n\}$.

Достаточно доказать (1.13) для случая, когда $s_n = 1$ при всех n , и, следовательно, $s = 1$. Тогда результат для общего случая будет следовать из соотношения (1.12), потому что s_n/v_n есть произведение $(1/v_n)$ и s_n . Сначала заметим, что значения $|v_n|$ не могут стать сколь угодно малыми. Действительно, полагая $\varepsilon = |v|/2$ в определении сходимости, мы получаем $|v_n - v| < |v|/2$ (и следовательно также $|v_n| > |v|/2$) при достаточно большом n . С помощью этой оценки мы получаем

$$\left| \frac{1}{v_n} - \frac{1}{v} \right| = \frac{|v - v_n|}{|v_n| \cdot |v|} \leq \frac{2|v_n - v|}{|v|^2} \leq \frac{2\varepsilon}{|v|^2} = \varepsilon'. \quad \square$$

(1.6) Теорема. *Предположим, что последовательность $\{s_n\}$ сходится к s и что $s_n \leq B$ для всех достаточно больших n . Тогда предел этой последовательности также удовлетворяет неравенству $s \leq B$.*

Доказательство. Мы покажем, что $s > B$ приводит к противоречию. Для этого мы положим $\varepsilon = s - B > 0$ и используем соотношение (1.4), откуда следует, что для достаточно больших n мы имеем

$$s - s_n \leq |s_n - s| < \varepsilon = s - B,$$

так что $s_n > B$, что противоречит предположению теоремы. □

Замечание. Аналогичное утверждение для строгих неравенств (из $s_n < B$ для всех n следует $s < B$) не справедливо. Это следует из контрпримера $s_n = n/(n+1) < 1$, для которого $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1$.

Последовательности Коши. Теперь давайте разберемся в одном важном вопросе. Определение сходимости (1.4) приводит нас к необходимости оценить $|s_n - s|$; предел s должен быть известен. Но что нам делать, если предел s неизвестен, или, как в примере (1.6), мы знаем его недостаточно точно? В этом случае строгая оценка $|s - s_n| < \varepsilon$ невозможна при произвольном $\varepsilon > 0$. Чтобы преодолеть это препятствие, Коши предложил заменить $|s_n - s| < \varepsilon$ в (1.4) на $|s_n - s_{n+k}| < \varepsilon$ для всех членов s_{n+k} , следующих за членом s_n .

(1.7) Определение. Последовательность $\{s_n\}$ называется последовательностью Коши или фундаментальной последовательностью, если

$$(1.14) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \geq 1 \quad \forall n \geq N \quad \forall k \geq 1 \quad |s_n - s_{n+k}| < \varepsilon.$$

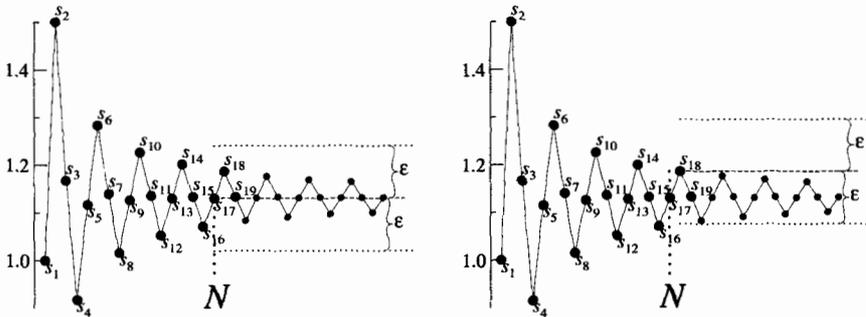


Рис. 1.2. Последовательность (1.6) как последовательность Коши.

Пример. Рис. 1.2 иллюстрирует условие (1.14) для последовательности (1.6). Видно, что, например, для $\varepsilon = 0.11$, условие (1.14) справедливо при $n \geq 17$. Более того, (1.14) справедливо для *любого* $\varepsilon > 0$, потому что $1/(n+2) + 1/(n+3)$ стремится к нулю.

(1.8) Теорема (Коши 1821). Последовательность $\{s_n\}$ действительных чисел сходится (к действительному числу в качестве предела) тогда и только тогда, когда она является последовательностью Коши.

То, что сходящиеся последовательности должны быть последовательностями Коши, следует непосредственно из неравенства $|s_n - s_{n+k}| \leq |s_n - s| + |s - s_{n+k}| < 2\varepsilon$. Отдавая должное интуиции Коши, отметим здесь, что строгое доказательство обратного утверждения возможно только в том случае, если мы поймем, что такое иррациональные и действительные числа. В отличие от ранее полученных результатов (теоремы 1.3, 1.5 и 1.6), теорема 1.8 не справедлива, если мы рассматриваем только рациональные числа. Например, рассмотрим последовательность

$$(1.15) \quad \{1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, \dots\}.$$

Разумеется, это последовательность Коши ($|s_n - s_{n+k}| < 10^{-n+1}$), но ее предел $\sqrt{2}$ не является рациональным числом.

Понятие действительного числа

Чем больше я думаю об основах теории функций, а думаю я об этом беспрестанно, тем больше я убеждаюсь в том, что фундамент, на котором они должны быть построены, это истины из алгебры ...
(Вейерштрасс 1875, *Werke*, vol. 2, p. 235)

Пожалуйста, забудьте все, что вы учили в школе, потому что вы этому не научились ... Мои дочери изучают (химию) уже несколько семестров. Они думают, что выучили дифференциальное и интегральное исчисление еще в школе, но даже сейчас они не знают, почему справедливо равенство $x \cdot y = y \cdot x$.
(Ландау 1930, англ. перевод 1945)

Итак, $\sqrt{3}$ — только символ для числа, которое еще нужно найти, но не определение этого числа. Однако это определение удовлетворительно дается с помощью моего метода как, скажем,

$$(1.7, 1.73, 1.732, \dots)$$

(Г. Кантор 1889)

... определение иррациональных чисел, геометрическое представление которых часто приводило к путанице ... В моем определении я исхожу из чисто формальной точки зрения, называя определенные символы числами, так что существование этих чисел не вызывает сомнения. (Гейне 1872)

И тогда мое чувство неудовлетворенности стало столь сильным, что, в конце концов, я решил начать думать, пока не найду чисто арифметического и абсолютно строгого обоснования принципов анализа бесконечно малых. ... Я достиг этой цели 24 ноября 1858 г., ... но я никак не мог решить вопрос о форме публикации, потому что, во-первых, предмет не легок для изложения, и, во-вторых, материал не очень плодотворный.
(Дедекинц 1872)

Приращение анализа до простой игры с символами ...
(Дюбуа-Реймон, *Allgemeine Funktionentheorie*, Tübingen 1882)

В течение многих десятилетий никто не знал, как следует строго вводить иррациональные числа, как правильно понять, что должно быть “пределным членом” последовательности Коши, такой как (1.15). Этот “гордиев узел” был в конце концов разрублен независимо Кантором (1872), Гейне (1872), Мере (1872) (и аналогичным образом Дедекиндом 1872) с помощью следующей смелой идеи: *объявляется, что вся последовательность Коши — “это и есть” искомое действительное число* (см. цитаты). Это значит, что мы связываем последовательность Коши, состоящую из рациональных чисел s_n (впредь называемую *рациональной последовательностью Коши*) с действительным числом.

По-видимому найден изящный способ разрешить трудности с теоремой 1.8. Однако нужно сделать еще многое: надо найти способ отождествлять различные рациональные последовательности Коши, представляющие одно и то же действительное число, определить алгебраические отношения и отношения порядка для этих новых объектов. Тогда станет ясно, что доказательство теоремы 1.8 будет более сложным, чем мы могли себе представить, потому что члены s_n в (1.14) сами могут быть действительными числами, т.е. рациональными последовательностями Коши. Все эти детали были подробно проработаны Ландау (1930) в его знаменитой книге, где он сам замечает, что многие ее части — “eine langweilige Mühe” (способны наводить скуку, — нем.).

Отношение эквивалентности. Предположим, что

$$\sqrt{2} \text{ соотнесено с } \{1.4; 1.41; 1.414; \dots\}$$

$$\sqrt{3} \text{ соотнесено с } \{1.7; 1.73; 1.732; \dots\},$$

тогда $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ должно быть соотнесено с последовательностью произведений

$$\{2.38 ; 2.4393 ; 2.449048, \dots\}.$$

С другой стороны, $\sqrt{6}$ может быть также соотнесено с $\{2.4 ; 2.44 ; 2.449 ; \dots\}$. Поэтому нам следует отождествить две эти последовательности.

Две рациональные последовательности Коши $\{s_n\}$ и $\{v_n\}$ называются эквивалентными, если $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - v_n) = 0$, т. е. если

$$(1.16) \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \geq 1 \quad \forall n > N \quad |s_n - v_n| < \epsilon.$$

В этом случае мы пишем $\{s_n\} \sim \{v_n\}$. Нетрудно проверить, что (1.16) определяет отношение эквивалентности на множестве всех рациональных последовательностей Коши. Это значит, что выполнены условия

$$\begin{aligned} \{s_n\} \sim \{s_n\} & \quad (\text{рефлексивность}) \\ \{s_n\} \sim \{v_n\} & \implies \{v_n\} \sim \{s_n\} \quad (\text{симметричность}) \\ \{s_n\} \sim \{v_n\}, \{v_n\} \sim \{w_n\} & \implies \{s_n\} \sim \{w_n\} \quad (\text{транзитивность}). \end{aligned}$$

Таким образом, становится возможным разделить множество рациональных последовательностей Коши на классы эквивалентности,

$$\overline{\{s_n\}} = \left\{ \overline{\{v_n\}} \mid \{v_n\} \text{ — рациональная последовательность Коши и } \{v_n\} \sim \{s_n\} \right\}.$$

Элементы классов эквивалентности называются их представителями.

(1.9) Определение. Действительными числами называются классы эквивалентности рациональных последовательностей Коши, т. е.

$$\mathbb{R} = \left\{ \overline{\{s_n\}} \mid \{s_n\} \text{ — рациональная последовательность Коши} \right\}.$$

Множество \mathbb{Q} рациональных чисел можно рассматривать как подмножество множества \mathbb{R} следующим образом: если r есть элемент множества \mathbb{Q} (сокращенно $r \in \mathbb{Q}$), то стационарная (постоянная) последовательность $\{r, r, r, \dots\}$ есть рациональная последовательность Коши. Следовательно, мы отождествляем рациональное число r с действительным числом $\overline{\{r, r, \dots\}}$.

Сложение и умножение. Чтобы работать в \mathbb{R} , мы должны определить обычные действия. Пусть $s = \overline{\{s_n\}}$ и $v = \overline{\{v_n\}}$ — два действительных числа. Тогда мы определяем их сумму (разность) и произведение (частное) как

$$(1.17) \quad s + v := \overline{\{s_n + v_n\}}, \quad s \cdot v := \overline{\{s_n \cdot v_n\}}.$$

Здесь нужна некоторая осторожность. Прежде всего, мы должны убедиться в том, что последовательности $\{s_n + v_n\}$ и $\{s_n \cdot v_n\}$ являются рациональными последовательностями Коши (это следует из соотношения $|(s_n + v_n) - (s_{n+k} + v_{n+k})| \leq |s_n - s_{n+k}| + |v_n - v_{n+k}|$ для суммы, а для произведения получается так же, как при доказательстве теоремы 1.5). Теперь мы должны показать, что (1.17) правильно определены. Если мы выберем другие представители классов эквивалентности s и v , например, $\{s'_n\}$ и $\{v'_n\}$, результат $s + v$ должен быть тем же самым. Чтобы это показать, нам нужно доказать, что из $s_n - s'_n \rightarrow 0$ и $v_n - v'_n \rightarrow 0$ следует $(s_n + v_n) - (s'_n + v'_n) \rightarrow 0$ и $(s_n \cdot v_n) - (s'_n \cdot v'_n) \rightarrow 0$. Это можно получить совершенно так же, как при доказательстве теоремы 1.5.

На следующем шаге нам нужно проверить известные правила вычислений с действительными числами (коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность). Здесь и начинается “langweilige Muhe” Ландау. Эти детали мы опускаем и отсылаем читателя или к прекрасной книге Ландау, или к любому учебнику алгебры.

Упорядоченность. Пусть $s = \overline{\{s_n\}}$ и $v = \overline{\{v_n\}}$ — два действительных числа. Введем определение

$$(1.18) \quad \begin{aligned} s < v &: \iff \exists \epsilon' > 0 \exists M \geq 1 \forall m \geq M \quad s_m \leq v_m - \epsilon', \\ s \leq v &: \iff s < v \text{ или } s = v \end{aligned}$$

(здесь число ϵ' должно быть рациональным для того, чтобы избежать двусмысленности в определении). Довольно сложное определение $s < v$ означает, что для достаточно больших m элементы s_m и v_m должны отчетливо отделяться друг от друга. Это обеспечивает также непротиворечивость определения. Очевидно, что недостаточно потребовать, чтобы $s_m < v_m$ (в качестве контрпримера приведем две последовательности $\{1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\}$ и $\{0, 0, 0, \dots\}$, они обе представляют действительное число 0).

Соотношение $s \leq v$ формулы (1.18) определяет *соотношение упорядоченности*. Это значит, что

$$\begin{aligned} s &\leq s \quad (\text{рефлексивность}) \\ s \leq v, v \leq w &\implies s \leq w \quad (\text{транзитивность}) \\ s \leq v, v \leq s &\implies s = v \quad (\text{антисимметричность}). \end{aligned}$$

Приведем здесь только доказательство антисимметричности. Предположим, что $s \leq v$ и $v \leq s$, но $s \neq v$. Тогда существуют положительные рациональные числа ϵ'_1 и ϵ'_2 такие, что $s_m \leq v_m - \epsilon'_1$ при $m \geq M_1$ и $v_m \leq s_m - \epsilon'_2$ при $m \geq M_2$. Следовательно, при $m \geq \max(M_1, M_2)$ имеем $\epsilon'_2 \leq s_m - v_m \leq -\epsilon'_1$, т.е. мы пришли к противоречию.

(1.10) Лемма. Упорядочение \leq в (1.18) является всеобщим, т.е. либо $s < v$, либо $v < s$ для любых двух действительных чисел s и v при $s \neq v$.

Замечание. Соотношение $s \neq v$ является отрицанием соотношения $s = v$, которое выражается формулой (1.16). Для того, чтобы сформулировать отрицание утверждения, подобного (1.16), нам потребуется несколько формул логики. Пусть $S(x)$ есть утверждение, зависящее от $x \in A$ (A — некоторое множество) и $\neg S(x)$ его отрицание. Тогда ¹

$$\begin{aligned} \forall x \in A \quad S(x) &\text{ является отрицанием} & \exists x \in A \quad \neg S(x), \\ \exists x \in A \quad S(x) &\text{ является отрицанием} & \forall x \in A \quad \neg S(x). \end{aligned}$$

Чтобы получить отрицание длинного утверждения, следует обратить все кванторы ($\forall \leftrightarrow \exists$) и заменить окончательное утверждение на его отрицание. Таким образом, для $s \neq v$ из (1.16) получается следующая формула:

$$(1.19) \quad \exists \epsilon > 0 \quad \forall N \geq 1 \quad \exists n \geq N \quad |s_n - v_n| \geq \epsilon.$$

¹ Утверждение “все (\forall) полярные медведи белые” несправедливо, если существует (\exists) по меньшей мере один окрашенный (не белый) полярный медведь, и наоборот.

Доказательство леммы 1.10. Пусть $s = \overline{\{s_n\}}$ и $v = \overline{\{v_n\}}$ — два различных действительных числа, так что для них (1.19) справедливо. Положим теперь $\epsilon' = \epsilon/3$. Поскольку $\{s_n\}$ и $\{v_n\}$ являются последовательностями Коши, существует N_1 такое, что $|s_n - s_{n+k}| < \epsilon'$ при $n \geq N_1$ и $k \geq 1$, и существует N_2 такое, что $|v_n - v_{n+k}| < \epsilon'$ при $n \geq N_2$ и $k \geq 1$. Если положить $N = \max(N_1, N_2)$, то из (1.19) следует, что существует целое число $n \geq N$ такое, что $|s_n - v_n| \geq \epsilon$. Есть две возможности:

$$(1.20) \quad s_n - v_n \geq \epsilon \quad \text{или} \quad v_n - s_n \geq \epsilon.$$

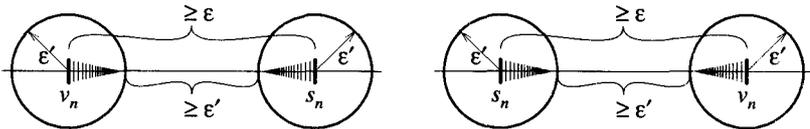


Рис. 1.3. Иллюстрация двух возможностей в (1.20).

При $k \geq 1$ числа s_{n+k} и v_{n+k} остаются в кругах радиуса $\epsilon' = \epsilon/3$ (см. рис. 1.3). Следовательно, (1.18) справедливо при $M = N$, и мы имеем $s > v$ в первом случае и $v > s$ во втором. \square

Абсолютная величина. Поскольку мы показали, что упорядочение является всеобщим (лемма 1.10), становится возможным определить абсолютную величину числа s как s для $s \geq 0$ и $-s$ для $s < 0$. Непосредственным следствием этого определения является формула

$$(1.21) \quad |s| = \overline{\{|s_n|\}} \quad \text{для} \quad s = \overline{\{s_n\}}.$$

Для действительных чисел справедливы неравенство треугольника $|s + v| \leq |s| + |v|$ и все его следствия.

Замечание. В определениях и теоремах 1.1–1.7 мы были недостаточно точны при использовании понятия “число”. Чтобы быть логически корректными, все утверждения должны были использовать только понятие рационального числа. Теперь, когда мы не без труда установили понятие действительного числа, можно распространить эти определения на действительные числа и проверить, что утверждения теорем остаются справедливыми и в более широком контексте.

Доказательство теоремы 1.8.

... до сих пор эти предложения рассматривались как аксиомы.

(Мере 1869, см. Дюга 1978, р. 82)

Пусть $\{s_i\}$ является последовательностью Коши *действительных чисел* такой, что каждое s_i само является классом эквивалентности рациональных последовательностей Коши, т.е. $s_i = \overline{\{s_{in}\}}_{n \geq 1}$. Идея доказательства состоит в том, чтобы выбрать для каждого i число, которое становится все меньше и меньше (например, $1/2i$) и использовать определение рациональной последовательности Коши, что приводит к формуле

$$\exists N_i \geq 1 \quad \forall n \geq N_i \quad \forall k \geq 1 \quad |s_{in} - s_{i,n+k}| < \frac{1}{2i}.$$

После этого мы полагаем $v_i := s_{i,N_i}$ и рассматриваем рациональную последовательность $\{v_i\}$ (см. рис. 1.4).

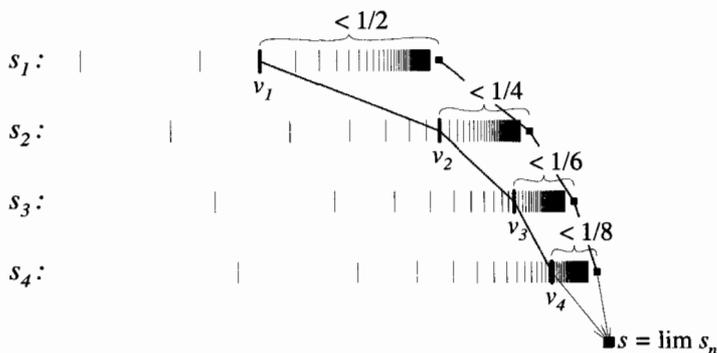


Рис. 1.4. Сходимость последовательности Коши.

а) Сначала мы покажем, что $|v_i - s_i| < 1/i$. Согласно (1.21), действительное число $|v_i - s_i|$ представляется рациональной последовательностью Коши $\{|v_i - s_{im}|\}_{m \geq 1}$. Поскольку при $m \geq N_i$

$$|v_i - s_{im}| = |s_{i, N_i} - s_{im}| < \frac{1}{2i} = \frac{1}{i} - \frac{1}{2i},$$

то из (1.18) при $\varepsilon' = 1/2i$ следует, что $|v_i - s_i| < 1/i$.

б) Далее мы покажем, что $\{v_i\}$ является рациональной последовательностью Коши. Замечая, что величина $|v_i - v_{i+k}|$ не меняется от того, что мы рассматриваем ее как рациональное или действительное число, мы имеем

$$(1.22) \quad |v_i - v_{i+k}| = |v_i - s_i + s_i - s_{i+k} + s_{i+k} - v_{i+k}| \leq |v_i - s_i| + |s_i - s_{i+k}| + |s_{i+k} - v_{i+k}| < \frac{1}{i} + \varepsilon + \frac{1}{i+k} < 2\varepsilon$$

для достаточно больших i и для $k \geq 1$. В качестве кандидата на предел $\{v_n\}$ рассмотрим класс эквивалентности $s := \overline{\{v_n\}}$, обозначаемый как $\{s_i\}$. Из (1.22) следует, что $|v_i - s| < 3\varepsilon$ (для достаточно больших i), так что $v_i \rightarrow s$.

с) Наконец, мы докажем, что $s_i \rightarrow s$. Из частей а) и б) этого доказательства и из неравенства треугольника имеем

$$|s_i - s| \leq |s_i - v_i| + |v_i - s| < \frac{1}{i} + 3\varepsilon < 4\varepsilon$$

для достаточно больших i . Следовательно, $s_i \rightarrow s$, и теорема 1.8 доказана. \square

Монотонные последовательности и наименьшая верхняя грань

Наша следующая задача — строго доказать, что ограниченная монотонно возрастающая последовательность сходится к действительному пределу. Этот результат много раз использовался в гл. II, особенно в разд. II.10. Для нашей цели полезно следующее определение.

(1.11) **Определение.** Пусть X является подмножеством \mathbb{R} . Действительное число ξ называется наименьшей верхней гранью (или точной верхней гранью) множества X , если

- 1) $\forall x \in X \quad x \leq \xi, u$
- 2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in X \quad x > \xi - \varepsilon.$

В этом случае мы пишем $\xi = \sup X$.

Условие 1) выражает тот факт, что ξ является верхней гранью X , в то время как условие 2) означает, что $\xi - \varepsilon$ уже не является верхней гранью, так что ξ действительно есть наименьшая из всех верхних граней. Наш следующий результат касается существования такой точной верхней грани: “Эта Теорема...”, как писал Больцано в 1817 г., “... чрезвычайно важна” (см. Штольц 1881, р. 257). Она основана на теореме 1.8 и не справедлива в \mathbb{Q} (множество $X = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ не имеет точной верхней грани в \mathbb{Q}).

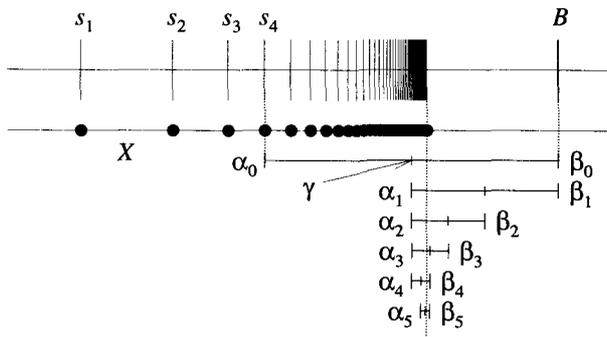


Рис. 1.5. Существование наименьшей верхней грани монотонной последовательности.

(1.12) Теорема. Пусть X — не пустое и ограниченное сверху подмножество \mathbb{R} (т. е. $\exists B \quad \forall x \in X \quad x \leq B$). Тогда существует действительное число ξ такое, что $\xi = \sup X$.

Доказательство. Следуя Больцано (а также Евклиду, *Начала*, Книга X), проведем доказательство с помощью *метода деления пополам*. Построим вложенные отрезки $[\alpha_n, \beta_n]$ с длинами, стремящимися к нулю как геометрическая прогрессия, такие, что α_n не является верхней гранью X , а β_n является. Поскольку X не пусто, можно найти такое число α_0 , которое не является верхней гранью (выберем элемент x множества X и возьмем α_0 слева от x). Из нашего второго предположения (X ограничено сверху) следует существование верхней грани. Выберем одну из них и обозначим ее как β_0 . Идея доказательства в том, чтобы рассмотреть среднюю точку $\gamma = (\alpha_0 + \beta_0)/2$ (см. рис. 1.5). Существуют две возможности: или γ есть верхняя грань X (в этом случае мы полагаем $\alpha_1 := \alpha_0$ и $\beta_1 := \gamma$), или это не так (тогда мы полагаем $\alpha_1 := \tilde{\gamma}$ и $\beta_1 := \beta_0$). Повторяя эту процедуру, мы получаем последовательность отрезков $[\alpha_n, \beta_n]$ с длинами $\beta_n - \alpha_n = (\beta_0 - \alpha_0)/2^n$.

Из построения видно, что все левые и правые границы последующих отрезков принадлежат отрезку $[\alpha_n, \beta_n]$. Следовательно, мы получаем оценки

$$|\alpha_n - \alpha_{n+k}| \leq \beta_n - \alpha_n = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2^n}, \quad |\beta_n - \beta_{n+k}| \leq \beta_n - \alpha_n = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2^n}.$$

Из этого следует, что $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ являются последовательностями Коши. В силу

не сходится, однако если из нее удалить члены через один, она сходится к 0 или к 1. Последовательность, из которой удалены некоторые члены, называется “подпоследовательностью”. Точнее,

(1.15) Определение. Последовательность $\{s'_n\}$ называется подпоследовательностью последовательности $\{s_n\}$, если существует возрастающее отображение $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ с $s'_n = s_{\sigma(n)}$ (“возрастающее” означает, что $\sigma(n) < \sigma(m)$, если $n < m$).

(1.16) Определение. Точка s называется точкой накопления (или предельной точкой) последовательности $\{s_n\}$, если существует подпоследовательность, сходящаяся к s .

Примеры. Точки 0 и 1 являются точками накопления последовательности (1.24). Интересным примером является последовательность

$$(1.25) \quad \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}, \frac{1}{8}, \dots \right\},$$

у которой все числа, расположенные между 0 и 1 (включая 0 и 1) являются точками накопления. Например, для того чтобы показать, что $\ln 2$ является точкой накопления последовательности (1.25), рассмотрим последовательность

$$\left\{ \frac{6}{10}, \frac{69}{100}, \frac{693}{1000}, \frac{6931}{10000}, \frac{69314}{100000}, \frac{693147}{1000000}, \dots \right\}.$$

Без сомнения, она содержится в (1.25) и сходится к $\ln 2$.

Неограниченные последовательности $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$, $\{-1, -2, -3, -4, -5, \dots\}$ и $\{1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \dots\}$ не имеют точек накопления.

(1.17) Теорема Больцано-Вейерштрасса (лекция Вейерштрасса 1874 г.). *Ограниченная последовательность $\{s_n\}$ имеет по меньшей мере одну точку накопления.*

Доказательство. В своем первоначальном доказательстве Вейерштрасс использовал метод деления пополам, так же, как в доказательстве теоремы 1.12. Располагая этой теоремой, рассмотрим множество

$$(1.26) \quad X = \{x \mid s_n > x \text{ для бесконечно многих } n\}$$

и просто положим $\xi = \sup X$, это и будет точка накопления (см. рис. 1.6). Такое число существует, потому что X не пусто и ограничено сверху (последовательность $\{s_n\}$ ограничена). По определению точной верхней грани только конечное число s_n может удовлетворять условию $s_n \geq \xi + \varepsilon$, и существует бесконечное число членов s_n , которые превосходят $\xi - \varepsilon$ (ε является произвольным положительным числом). Следовательно, бесконечное число членов s_n лежит в интервале $[\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon]$.

Теперь давайте произвольно выберем элемент последовательности, лежащий в промежутке $[\xi - 1, \xi + 1]$ и обозначим его как $s'_1 = s_{\sigma(1)}$. Выберем элемент в промежутке $[\xi - 1/2, \xi + 1/2]$, номер которого отличен от $\sigma(1)$ (это возможно, поскольку их бесконечно много), и обозначим его как $s'_2 = s_{\sigma(2)}$. На n -м шаге в качестве $s'_n = s_{\sigma(n)}$ выберем элемент последовательности, который лежит в промежутке $[\xi - 1/n, \xi + 1/n]$ и номер которого отличен от $\sigma(1), \dots, \sigma(n-1)$.

Подпоследовательность, полученная таким образом, сходится к ξ , потому что $|s'_n - \xi| \leq 1/n$. \square

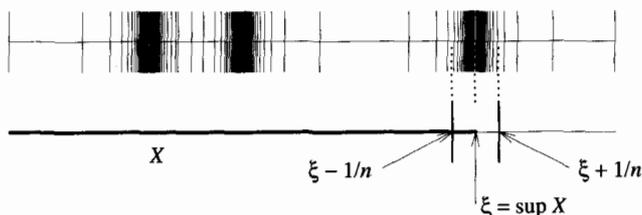


Рис. 1.6. Доказательство теоремы Больцано-Вейерштрасса.

Замечание. В доказательстве мы получили не просто точку накопления, а *наибольшую точку накопления*. Мы называем ее “верхним пределом” последовательности и обозначаем ее как

$$(1.27) \quad \xi = \limsup_{n \rightarrow \infty} s_n = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid s_n > x \text{ для бесконечно многих } n\}$$

(см. также упр. 1.12). *Наименьшая* точка накопления определяется как

$$(1.28) \quad \xi = \liminf_{n \rightarrow \infty} s_n = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid s_n < x \text{ для бесконечно многих } n\}.$$

Пример. Для последовательности

$$\left\{ \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{6}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{7}{6}, -\frac{1}{6}, \dots \right\}$$

имеем $\limsup_{n \rightarrow \infty} s_n = 1$, $\liminf_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$, $\sup\{s_n\} = 3/2$, $\inf\{s_n\} = -1/2$.

Упражнения

1.1 (Неравенство треугольника). Рассматривая все возможные комбинации знаков, покажите, что для любых двух действительных чисел u и v справедливо неравенство

$$(1.29) \quad |u + v| \leq |u| + |v|.$$

Теперь покажите, что для любых трех действительных чисел u , v и w справедливо неравенство

$$(1.29') \quad |u - w| \leq |u - v| + |v - w|.$$

1.2 Покажите, что последовательность $\{s_n\}$, где

$$s_n = \frac{2n - 1}{n + 3},$$

сходится к $s = 2$. Для заданного $\varepsilon > 0$, скажем, для $\varepsilon = 10^{-5}$, найдите такое число N , что $|s_n - s| < \varepsilon$ при $n \geq N$.

1.3 Покажите, что последовательности

$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{7 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{(2n - 1)(2n + 3)}$$

$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

являются последовательностями Коши, и найдите их пределы.

Указание. Разложите на элементарные дроби рациональные функции

$$\frac{1}{(2j-1)(2j+3)} \quad \text{и} \quad \frac{1}{(j-1)j(j+1)}.$$

- 1.4 Постройте примеры последовательностей s_n и v_n , обладающих свойствами $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$, чтобы проиллюстрировать следующие возможности:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n \cdot v_n) = \infty$;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n \cdot v_n) = c$, где c является произвольной постоянной;
- последовательность $s_n \cdot v_n$ ограничена, но не сходится.

- 1.5 Рассмотрите три последовательности

$$s_n = \sqrt{n+1000} - \sqrt{n}, \quad v_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}, \quad u_n = \sqrt{n+\frac{n}{1000}} - \sqrt{n}.$$

Покажите, что $s_n > v_n > u_n$ при $n < 10^6$, и вычислите $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$, если они существуют. Расставьте эти пределы в возрастающем порядке.

- 1.6 С помощью оценок из упр. I.2.5 покажите, что последовательность

$$v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

является последовательностью Коши. При $\varepsilon = 10^{-5}$ найдите такое целое N , что $|v_n - v_{n+k}| < \varepsilon$ при $n \geq N$ и $k \geq 1$.

- 1.7 Для двух рациональных последовательностей Коши $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ обозначим через $\{a_n \cdot b_n\}$ последовательность, полученную из почленных произведений их членов. Покажите, что

- последовательность $\{a_n \cdot b_n\}$ является последовательностью Коши; и
- если $\{a_n\} \sim \{s_n\}$ и $\{b_n\} \sim \{v_n\}$ согласно определению (1.16), то имеет место $\{a_n \cdot b_n\} \sim \{s_n \cdot v_n\}$. Это доказывает, что произведение двух действительных чисел, определенное соотношением (1.17), не зависит от выбора представителей.

- 1.8 Докажите следующее: если s является единственной точкой накопления ограниченной последовательности $\{s_n\}$, то последовательность сходится и $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$. С помощью контрпримера покажите, что это свойство не имеет места для неограниченных последовательностей.

- 1.9 (Коши 1821, р. 59; называется также “суммированием по Чезаро”). Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ и

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k.$$

Покажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$.

1.10 Пусть α является иррациональным числом (например, $\alpha = \sqrt{2}$). Рассмотрите последовательность $\{s_n\}$, определенную как

$$s_n = (n\alpha) \bmod 1,$$

т.е. $s_n \in (0, 1)$ есть $n\alpha$ с удаленной целой частью. Вычислите $s_1, s_2, s_3, s_4, \dots$ и изобразите эти значения. Покажите, что *каждая* точка отрезка $[0, 1]$ является точкой накопления этой последовательности.

Указание. Для $\varepsilon > 0$ и $n \geq 1/\varepsilon$ по меньшей мере две точки из s_1, s_2, \dots, s_{n+1} (назовем их s_k и s_{k+l}) находятся на расстоянии, меньшем чем ε . Тогда точки $s_k, s_{k+l}, s_{k+2l}, \dots$ образуют сетку с шагом $< \varepsilon$.

Замечание. В начале компьютерной эры эта процедура была стандартным методом получения псевдослучайных чисел.

1.11 Пусть $\{s_n\}$ и $\{v_n\}$ являются двумя ограниченными последовательностями. Покажите, что

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} (s_n + v_n) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} s_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} v_n \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} (s_n + v_n) &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} s_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} v_n. \end{aligned}$$

С помощью примеров покажите, что неравенство может быть строгим.

1.12 Докажите, что для последовательности $\{s_n\}$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n, \quad \text{где} \quad v_n = \sup \{s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \dots\}.$$

1.13 Вычислите все точки накопления последовательности

$$\{s_n\} = \{p_{11}, p_{21}, p_{22}, p_{31}, p_{32}, p_{33}, p_{41}, p_{42}, \dots\}, \quad p_{k\ell} = \sum_{i=\ell}^k \frac{1}{i^2}.$$

Покажите, что $\limsup s_n = \pi^2/6$ (см. формулу (I.5.23)) и что $\liminf s_n = 0$ (см. рис. 1.7).

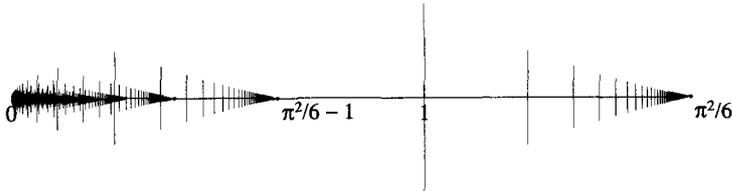


Рис. 1.7. Последовательность со счетным числом точек накопления.

III.2 Бесконечные ряды

Я приложу все усилия, чтобы внести ясность в ту ужасную невразумительность, которая сейчас царит в Анализе. В нем настолько отсутствует какой-либо план или система, что поистине удивительно, как много людей им занимаются. И что еще хуже — в нем абсолютно отсутствует строгость. (Абель 1826, *Oeuvres*, vol. 2, p. 263)

Коши сумасшедший и с ним невозможно поддерживать хорошие отношения, хотя в настоящее время он является единственным человеком, который знает, как нужно излагать математику. То, что он делает, великолепно, но очень путано ... (Абель 1826, *Oeuvres*, vol. 2, p. 259)

Со времен Ньютона и Лейбница бесконечные ряды

$$(2.1) \quad a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

являлись универсальным средством для всех вычислений (см. главу I). Сейчас мы точно сформулируем, что именно представляет собой ряд (2.1). Идея состоит в том, чтобы рассмотреть последовательность $\{s_n\}$ *частичных сумм*

$$(2.2) \quad s_0 = a_0, \quad s_1 = a_0 + a_1, \quad \dots, \quad s_n = \sum_{i=0}^n a_i$$

и использовать определения и результаты предыдущего раздела.

Классический справочник по бесконечным рядам — книга Кноппа (1922).

(2.1) Определение. Мы говорим, что бесконечный ряд (2.1) сходится, если последовательность $\{s_n\}$, определенная соотношением (2.2), сходится. В этом случае мы пишем

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \quad \text{или} \quad \sum_{i \geq 0} a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

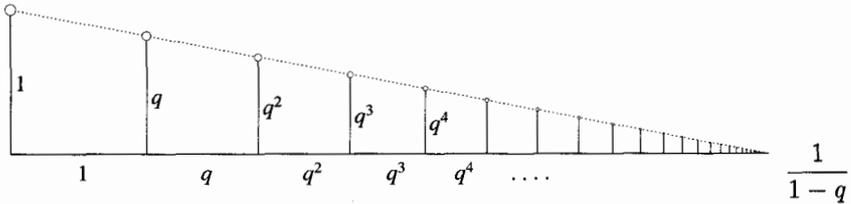


Рис. 2.1. “Геометрическое” изображение геометрической прогрессии.

(2.2) Пример. Рассмотрим геометрическую прогрессию, n -я частичная сумма которой дается выражением $s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$ (см. рис. 2.1). Если умножить это выражение на $1 - q$, большинство членов уничтожаются, и (если $q \neq 1$)

$$s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Тогда с помощью леммы 1.4 и теоремы 1.5 мы получаем

$$1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + \dots = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{если } |q| < 1, \\ \text{расходится} \rightarrow \infty & \text{если } q \geq 1, \\ \text{расходится} & \text{если } q \leq -1. \end{cases}$$

Критерии сходимости

Найти простое выражение для s_n обычно бывает невозможно, а явным образом вычислить предел последовательности $\{s_n\}$ трудно. В этом случае естественным будет приложить критерий Коши (теорему 1.8) к последовательности частичных сумм. Поскольку $s_{n+k} - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k}$, мы получаем

(2.3) Лемма. *Бесконечный ряд (2.1) сходится к действительному числу в том и только том случае, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \geq 0 \quad \forall n \geq N \quad \forall k \geq 1 \quad |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k}| < \varepsilon. \quad \square$$

Полагая в этом критерии $k = 1$, мы получаем, что

$$(2.3) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} a_i = 0$$

является необходимым условием сходимости (2.1). Однако (2.3) не является достаточным условием сходимости (2.1). Это следует из контрпримера:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots \rightarrow \infty.$$

Ниже мы обсудим некоторые достаточные условия сходимости (2.1).

Критерий Лейбница. Рассмотрим бесконечный ряд, в котором знаки членов чередуются:

$$(2.4) \quad a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots = \sum_{i \geq 0} (-1)^i a_i.$$

(2.4) Теорема (Лейбниц 1682). *Пусть члены знакопеременного ряда (2.4) при всех i удовлетворяют условиям*

$$a_i > 0, \quad a_{i+1} \leq a_i, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} a_i = 0;$$

тогда ряд (2.4) сходится к действительной величине s и справедлива оценка

$$(2.5) \quad |s - s_n| \leq a_{n+1},$$

т. е. величина ошибки n -й частичной суммы не больше, чем первый отброшенный член.

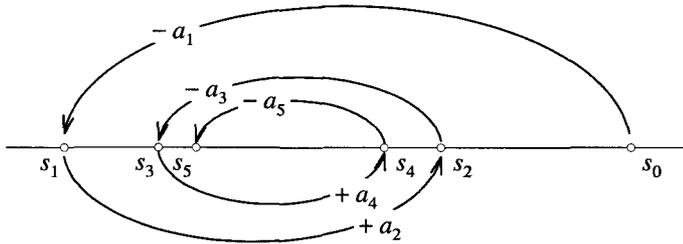


Рис. 2.2. Доказательство критерия Лейбница.

Доказательство. Обозначим через s_n n -ю частичную сумму ряда (2.4). Тогда из предположения монотонности следует, что $s_{2k+1} = s_{2k-1} + a_{2k} - a_{2k+1} \geq s_{2k-1}$ и что $s_{2k+2} = s_{2k} - a_{2k+1} + a_{2k+2} \leq s_{2k}$. Из положительности a_{2k+1} следует, что $s_{2k+1} < s_{2k}$, так что, комбинируя эти неравенства, мы получаем

$$s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq s_7 \leq \dots \leq s_6 \leq s_4 \leq s_2 \leq s_0$$

(см. рис. 2.2). Следовательно, s_{n+k} при всех k находится между s_n и s_{n+1} , и

$$(2.6) \quad |s_{n+k} - s_n| \leq |s_{n+1} - s_n| = a_{n+1}.$$

Отсюда вследствие теоремы 1.8 следует сходимость $\{s_n\}$, поскольку a_{n+1} стремится к 0 при $n \rightarrow \infty$. Наконец, оценка (2.5) получается путем рассмотрения предела $k \rightarrow \infty$ в (2.6) (с использованием теоремы 1.6). \square

Примеры. Итак, мы установили сходимость рядов (I.4.29) и (I.3.13a):

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad \text{и} \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Однако мы не доказали строго, что первая сумма равна $\pi/4$, а вторая $\ln 2$ (см. пример 7.11 ниже). Если превратить цепную дробь (I.6.7) в бесконечный ряд, мы получим (см. формулу (I.6.16))

$$q_0 + \frac{p_1}{B_1} - \frac{p_1 p_2}{B_1 B_2} + \frac{p_1 p_2 p_3}{B_2 B_3} - \frac{p_1 p_2 p_3 p_4}{B_3 B_4} + \dots$$

Если предположить, что целые числа p_i и q_i положительны, то это ряд с перемежающимися знаками (от второго члена и далее). Далее, мы имеем $B_k = q_k B_{k-1} + p_k B_{k-2} > p_k B_{k-2}$, из чего следует, что члены ряда монотонно убывают по абсолютной величине. При дополнительном предположении, что $0 < p_i \leq q_i$ для всех $i \geq 1$, (см. теорему I.6.4), мы имеем

$$B_k B_{k-1} = q_k B_{k-1}^2 + p_k B_{k-1} B_{k-2} > 2p_k B_{k-1} B_{k-2}$$

и, следовательно, также $B_k B_{k-1} > 2^{k-1} p_k p_{k-1} \dots p_1$. Это доказывает, что члены ряда стремятся к нулю, и, согласно теореме 2.4, рассматриваемый ряд сходится.

Мажорирование и минорирование рядов. Следующий критерий чрезвычайно полезен при исследовании бесконечных рядов с неотрицательными членами.

(2.5) Теорема. *Предположим, что $0 \leq a_i \leq b_i$ для всех (достаточно больших) i . Тогда*

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} b_i \text{ сходится} &\implies \sum_{i=0}^{\infty} a_i \text{ сходится,} \\ \sum_{i=0}^{\infty} a_i \text{ расходится} &\implies \sum_{i=0}^{\infty} b_i \text{ расходится.} \end{aligned}$$

Доказательство. Этот результат немедленно следует из следствия 1.14, если положить $s_n = \sum_{i=0}^n a_i$ и $v_n = \sum_{i=0}^n b_i$. \square

В качестве первого приложения этой теоремы приведем простое доказательство расходимости *гармонического ряда* $\sum_{i \geq 1} \frac{1}{i}$ (Н. Оресме, ок. 1350 г.; см. Стройк 1969, р. 320). Заминорируем этот ряд следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum b_i &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \dots \\ \sum a_i &= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{1/2} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{1/2} + \underbrace{\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}}_{1/2} + \frac{1}{32} + \dots \end{aligned}$$

Поскольку $\sum a_i$ расходится, из неравенства $0 < a_i \leq b_i$ следует, что гармонический ряд $\sum b_i$ также расходится.

В качестве другого примера рассмотрим ряд (1.2.18) для e^x (например, при $x = 10$):

$$(2.7) \quad 1 + 10 + \frac{10^2}{2!} + \frac{10^3}{3!} + \frac{10^4}{4!} + \frac{10^5}{5!} + \dots$$

Опустим первые 10 членов (это не влияет на сходимость), и сравним полученный ряд с геометрической прогрессией (пример 2.2 при $q = 10/11 < 1$):

$$\begin{aligned} \frac{10^{10}}{10!} + \frac{10^{11}}{11!} + \frac{10^{12}}{12!} + \dots &= \frac{10^{10}}{10!} \left(1 + \frac{10}{11} + \frac{10 \cdot 10}{11 \cdot 12} + \frac{10 \cdot 10 \cdot 10}{11 \cdot 12 \cdot 13} + \dots \right) \\ &\leq \frac{10^{10}}{10!} \left(1 + \frac{10}{11} + \frac{10^2}{11^2} + \frac{10^3}{11^3} + \dots \right). \end{aligned}$$

Из сходимости геометрической прогрессии следует сходимость ряда (2.7). Аналогично можно доказать, что ряд (1.2.18) сходится при любых x . Такое сравнение с геометрической прогрессией мы будем использовать в нескольких случаях (см. критерии 2.10 и 2.11, лемму 7.1, теоремы 7.5 и 7.7).

(2.6) Лемма. Ряд

$$(2.8) \quad \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \dots$$

сходится при всех $\alpha > 1$. Он расходится при $\alpha \leq 1$.

Доказательство. Расходимость ряда при $\alpha = 1$ (гармонический ряд) была установлена выше. При $\alpha < 1$ члены ряда становятся еще больше, так что ряд

расходится в силу теоремы 2.5. Далее мы покажем, что ряд (2.8) сходится при $\alpha = (k+1)/k$, где $k \geq 1$ есть целое число. Идея доказательства состоит в том, что рассматривается ряд

$$1 - \frac{1}{\sqrt[k]{2}} + \frac{1}{\sqrt[k]{3}} - \frac{1}{\sqrt[k]{4}} + \frac{1}{\sqrt[k]{5}} - \dots = \sum_{i \geq 1} (-1)^{i+1} \frac{1}{\sqrt[k]{i}},$$

который сходится в силу критерия Лейбница. Сумму двух его последовательных членов можно заминорировать следующим образом:

$$(2.9) \quad \frac{1}{\sqrt[k]{2i-1}} - \frac{1}{\sqrt[k]{2i}} = \frac{\sqrt[k]{2i} - \sqrt[k]{2i-1}}{\sqrt[k]{2i-1} \cdot \sqrt[k]{2i}} \geq C_k \cdot \frac{1}{i^{(k+1)/k}},$$

где $C_k = 1/(k \cdot 2^{(k+1)/k})$ есть постоянная, не зависящая от i . Последнее неравенство в (2.9) получается из тождества $a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \dots + b^{k-1})$ при $a = \sqrt[k]{2i}$ и $b = \sqrt[k]{2i-1}$ следующим образом:

$$\sqrt[k]{2i} - \sqrt[k]{2i-1} = \frac{1}{(2i)^{(k-1)/k} + \dots + (2i-1)^{(k-1)/k}} \geq \frac{1}{k \cdot (2i)^{(k-1)/k}}.$$

Таким образом, согласно теореме 2.5, ряд (2.8) сходится при $\alpha = (k+1)/k$. Наконец, при произвольном $\alpha > 1$ существует целое число k такое, что $\alpha > (k+1)/k$. Если еще раз применить теорему 2.5, мы получим сходимость при всех $\alpha > 1$. \square

Абсолютная сходимость

Пример. Согласно критерию Лейбница, ряд

$$(2.10) \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

сходится (к $\ln 2$). Если мы перегруппируем ряд следующим образом:

$$\underbrace{1 - \frac{1}{2}}_{1/2} - \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}}_{1/6} - \frac{1}{8} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{10}}_{1/10} - \frac{1}{12} + \underbrace{\frac{1}{7} - \frac{1}{14}}_{1/14} - \frac{1}{16} + \dots,$$

мы получим ряд

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \dots = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots \right),$$

сумма которого вдвое меньше, чем у первоначального. Это показывает, что значение суммы бесконечного ряда может зависеть от порядка суммирования.

(2.7) Определение. Ряд $\sum_{i=0}^{\infty} a'_i$ называется *перегруппировкой* ряда $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, если каждый член $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ появляется в $\sum_{i=0}^{\infty} a'_i$ ровно один раз, и наоборот (это значит, что существует биекция $\sigma : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ такая, что $a'_i = a_{\sigma(i)}$; здесь $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$).

Объяснение. Элегантное объяснение приведенного явления было дано Риманом (1854, *Werke*, p. 235, "... ein Umstand, welcher von den Mathematikern des vorigen Jahrhunderts übersehen wurde ..." — "... одно обстоятельство, не замеченное математиками прошлого столетия ...", нем.). В действительности Риман показал гораздо больше: *при любом заданном действительном числе A возможно так переставить члены ряда (2.10), что полученный таким образом ряд будет сходиться к A.* Причина этого в том, что ряд, составленный из положительных членов ряда (2.10) и ряд, составленный из его отрицательных членов,

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots \quad \text{и} \quad -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \dots,$$

расходятся (или, что эквивалентно, ряд (2.10), у которого все члены заменены на их абсолютные величины, расходится).

Идея доказательства состоит в том, чтобы взять несколько первых *положительных* членов $1 + 1/3 + \dots$, пока сумма их не превзойдет A (это обязательно произойдет, поскольку ряд из положительных членов расходится). Потом мы прибавляем *отрицательные* члены до тех пор, пока сумма не станет меньше A (это обязательно произойдет, потому что $-1/2 - 1/4 - \dots$ расходится). После этого мы опять продолжаем прибавлять положительные члены, пока A не будет снова превзойдено, и так далее. Продолжая далее этот процесс, мы получаем ряд с перегруппированными членами, который сходится к A (ср. примеры на рис. 2.3).

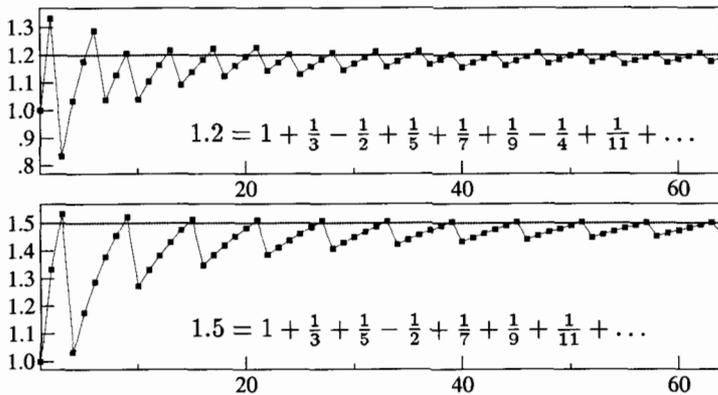


Рис. 2.3. Перегруппировки ряда (2.10).

(2.8) Определение. Ряд (2.1) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$$|a_0| + |a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots$$

(2.9) Теорема (Дирихле 1837b). Если ряд $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ абсолютно сходится, то все его перегруппировки сходятся к тому же пределу.

Доказательство. По критерию Коши абсолютная сходимость означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \geq 0 \quad \forall n \geq N \quad \forall k \geq 1 \quad |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+k}| < \varepsilon.$$

Для заданного $\varepsilon > 0$ и соответствующего $N \geq 0$ выберем целое число M таким образом, что все члены a_0, a_1, \dots, a_N имеются в M -й частной сумме $s'_M = \sum_{i=0}^M a'_i$ перегруппировки. Таким образом, в разности $s_m - s'_m$, все члены a_0, a_1, \dots, a_N исчезают (при $m \geq M$), и мы видим, что

$$|s_m - s'_m| \leq |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \dots + |a_{N+k}| < \varepsilon,$$

где k является достаточно большим целым числом. Тем самым мы показали, что $s_m - s'_m \rightarrow 0$ и что перегруппировка сходится к тому же пределу, что и первоначальный ряд. \square

Теперь мы сформулируем два критерия абсолютной сходимости бесконечных рядов.

(2.10) Критерий частных (Коши 1821). Если члены a_n ряда (2.1) удовлетворяют условию

$$(2.11) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1,$$

то ряд абсолютно сходится. Если $\liminf_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}|/|a_n| > 1$, то он расходится.

Доказательство. Выберем число q такое, что $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}|/|a_n| < q < 1$. В этом случае только конечное число частных $|a_{n+1}|/|a_n|$ превосходит q , и мы имеем

$$\exists N \geq 0 \quad \forall n \geq N \quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q.$$

Из этого, в свою очередь, следует, что $|a_{N+1}| \leq q|a_N|$, $|a_{N+2}| \leq q^2|a_N|$, $|a_{N+3}| \leq q^3|a_N|$ и т.д. Поскольку геометрическая прогрессия сходится (у нас $0 < q < 1$), ряд $\sum_{i \geq 0} |a_i|$ также сходится. Если $\liminf_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}|/|a_n| > 1$, последовательность $\{|a_n|\}$ монотонно возрастает при $n \geq N$, и необходимое условие сходимости (2.3) не удовлетворяется. \square

Примеры. Общим членом ряда для функции e^x является $a_n = x^n/n!$. В этом случае $|a_{n+1}|/|a_n| = |x|/(n+1) \rightarrow 0$, так что ряд (I.2.18) абсолютно сходится при всех действительных x . Аналогично, ряды для $\sin x$ и $\cos x$ абсолютно сходятся при всех x .

Для ряда (2.8) этот критерий не применим, потому что $|a_{n+1}|/|a_n| = (n/(n+1))^\alpha \rightarrow 1$.

(2.11) Критерий корня (Коши 1821). Если

$$(2.12) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1,$$

то ряд (2.1) абсолютно сходится. Если $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, он расходится.

Доказательство. Как и в предыдущем доказательстве, выберем число $q < 1$, строго большее $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Следовательно,

$$\exists N \geq 0 \quad \forall n \geq N \quad \sqrt[n]{|a_n|} \leq q.$$

Отсюда вытекает, что $|a_n| \leq q^n$ при $n \geq N$, и из сравнения с геометрической прогрессией следует абсолютная сходимость ряда $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$. Если $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, условие (2.3) не удовлетворяется, и ряд не может сходиться. \square

Двойные ряды

Рассмотрим двумерный массив действительных чисел

$$\begin{array}{cccccccc}
 a_{00} & + & a_{01} & + & a_{02} & + & a_{03} & + \dots = s_0 \\
 + & & + & & + & & + & \\
 a_{10} & + & a_{11} & + & a_{12} & + & a_{13} & + \dots = s_1 \\
 + & & + & & + & & + & \\
 a_{20} & + & a_{21} & + & a_{22} & + & a_{23} & + \dots = s_2 \\
 + & & + & & + & & + & \\
 a_{30} & + & a_{31} & + & a_{32} & + & a_{33} & + \dots = s_3 \\
 + & & + & & + & & + & \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 = & & = & & = & & = & \\
 v_0 & + & v_1 & + & v_2 & + & v_3 & + \dots = ???
 \end{array}
 \tag{2.13}$$

и предположим, что мы хотим просуммировать их все. Существует много естественных способов для этого. Можно сложить элементы i -й строки, обозначить результат как s_i , а потом вычислить $\sum_{i=0}^{\infty} s_i$; можно сложить элементы j -го столбца, обозначить результат как v_j , а потом вычислить $\sum_{j=0}^{\infty} v_j$. Можно также выписать все элементы в некотором линейном размещении этой последовательности. Например, мы можем начать с a_{00} , потом прибавить элементы a_{ij} , для которых $i + j = 1$, потом те, для которых $i + j = 2$, и т. д. Это дает

$$a_{00} + (a_{10} + a_{01}) + (a_{20} + a_{11} + a_{02}) + (a_{30} + \dots) + \dots .
 \tag{2.14}$$

Обозначим здесь пары индексов $(0, 0), (1, 0), (0, 1), (2, 0), \dots$ как $\sigma(0), \sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \dots$, так что σ является отображением $\sigma : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, где $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 = \{(i, j) \mid i \in \mathbb{N}_0, j \in \mathbb{N}_0\}$ — так называемое декартово произведение \mathbb{N}_0 на \mathbb{N}_0 . Для общего случая мы введем определение

(2.12) Определение. Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ называется линейным размещением двойного ряда (2.13) если существует биекция $\sigma : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ такая, что $b_k = a_{\sigma(k)}$.

Теперь зададим себе вопрос: приводят ли различные методы суммирования к одному и тому же результату? Будут ли выполняться равенства

$$s_0 + s_1 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} \right) = v_0 + v_1 + \dots ,
 \tag{2.15}$$

и сходятся ли разные линейные размещения двойного ряда к одной и той же величине?

$$\begin{array}{r}
 1 - 1 + 0 + 0 + \dots = 0 \\
 + + + + + \\
 0 + 1 - 1 + 0 + \dots = 0 \\
 + + + + + \\
 0 + 0 + 1 - 1 + \dots = 0 \\
 + + + + + \\
 0 + 0 + 0 + 1 - \dots = 0 \\
 + + + + + \\
 \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
 = = = = = \\
 1 + 0 + 0 + 0 + \dots = 1 \neq 0
 \end{array}$$

Рис. 2.4а. Контрпример.

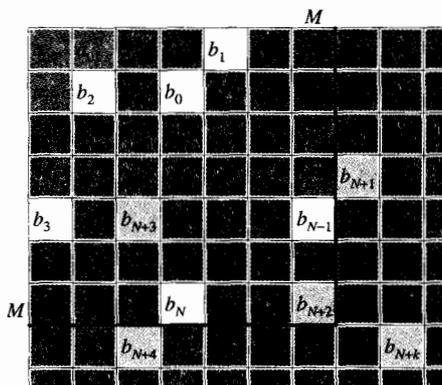


Рис. 2.4б. Двойные ряды.

Контрпример, изображенный на рис. 2.4а показывает, что это не так, если не ввести некоторые дополнительные предположения.

(2.13) Теорема. (Коши 1821, “Note VII”). Рассмотрим двойной ряд (2.13) и предположим, что

$$(2.16) \quad \exists B \geq 0 \quad \forall m \geq 0 \quad \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m |a_{ij}| \leq B.$$

Тогда все ряды в (2.15) сходятся, и выполняются все равенства (2.15). Более того, каждое линейное размещение двойного ряда сходится к одной и той же величине.

Доказательство. Пусть $b_0 + b_1 + b_2 + \dots$ есть линейное размещение двойного ряда (2.13). Последовательность $\{\sum_{i=0}^n |b_i|\}$ монотонно возрастает и является ограниченной (по предположению (2.16)), так что $\sum_{i=0}^{\infty} |b_i|$ и $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ также сходятся. Аналогично мы можем установить сходимость рядов $s_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}$ и $v_j = \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij}$.

По примеру доказательства теоремы 2.9, приложим критерий Коши к ряду $\sum_{i=0}^{\infty} |b_i|$ и получим

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \geq 0 \quad \forall n \geq N \quad \forall k \geq 1 \quad |b_{n+1}| + |b_{n+2}| + \dots + |b_{n+k}| < \varepsilon.$$

Для заданного $\varepsilon > 0$ и соответствующего $N \geq 0$ выберем целое число M такое, что все элементы b_0, b_1, \dots, b_N находятся в ящике $0 \leq i \leq M, 0 \leq j \leq M$ (см. Рис. 2.4б). При таком выборе b_0, b_1, \dots, b_N присутствуют как в сумме $\sum_{i=0}^l b_i$ (для $l \geq N$), так и в $\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij}$ (при $m \geq M$ и $n \geq M$). Следовательно, при $l \geq N, m \geq M$ и $n \geq M$ мы имеем

$$(2.17) \quad \left| \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n a_{ij} - \sum_{i=0}^l b_i \right| \leq |b_{N+1}| + \dots + |b_{N+k}| < \varepsilon$$

при достаточно большом k . Положим $s = \sum_{i=0}^{\infty} b_i$ и перейдем к пределам $l \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow \infty$ в (2.17). Теперь поменяем порядок конечных суммирований $\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \leftrightarrow \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m$ и перейдем к пределам $l \rightarrow \infty$ и $m \rightarrow \infty$. В силу теоремы 1.6 это приводит нас к

$$\left| \sum_{i=0}^m s_i - s \right| \leq \varepsilon \quad \text{and} \quad \left| \sum_{j=0}^n v_j - s \right| \leq \varepsilon.$$

Следовательно, $\sum_{i=0}^{\infty} s_i$ и $\sum_{j=0}^{\infty} v_j$ сходятся к одному и тому же пределу s . \square

Произведение Коши двух рядов

Если нам нужно вычислить произведение двух бесконечных рядов $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ и $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$, то следует сложить все элементы двумерного массива

$$(2.18) \quad \begin{array}{cccccc} a_0 b_0 & a_0 b_1 & a_0 b_2 & a_0 b_3 & \dots \\ a_1 b_0 & a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 & \dots \\ a_2 b_0 & a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 & \dots \\ a_3 b_0 & a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Если мы расположим элементы так, как это сделано в (2.14), то получим так называемое произведение Коши двух рядов.

(2.14) Определение. Произведение Коши двух рядов $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ и $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ определяется как

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n a_{n-j} \cdot b_j \right) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \dots$$

Вопрос в том, является ли произведение Коши сходящимся рядом и представляет ли оно в действительности произведение рядов $\sum_{i \geq 0} a_i$ и $\sum_{j \geq 0} b_j$.

(2.15) Контрпример (Коши 1821). Согласно критерию Лейбница, ряд

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \dots$$

сходится. Рассмотрим произведение Коши этого ряда на самого себя. Поскольку

$$\left| \sum_{j=0}^n a_{n-j} \cdot b_j \right| = \sum_{j=0}^n \frac{1}{\sqrt{n+1-j} \cdot \sqrt{j+1}} \geq \frac{2n+2}{n+2}$$

(это неравенство является следствием неравенства $(n+1-x)(x+1) \leq (1+n/2)^2$ при $0 \leq x \leq n$), необходимое условие (2.3) сходимости произведения Коши не удовлетворяется (см. рис. 2.5). Этот пример иллюстрирует тот факт, что произведение Коши двух сходящихся рядов не обязательно сходится.

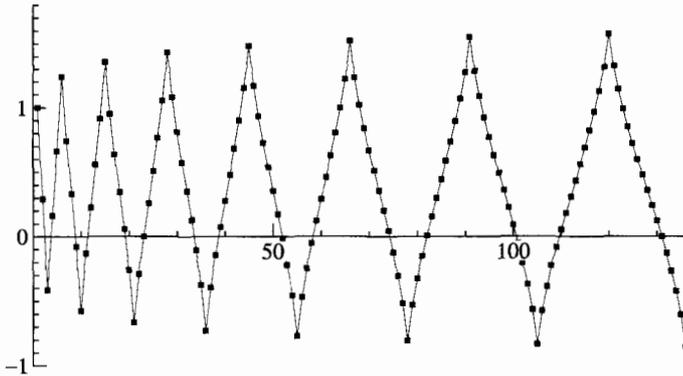


Рис. 2.5. Расходимость произведения Коши в контрпримере 2.15.

(2.16) Теорема (Коши 1821). Если два ряда $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ и $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ абсолютно сходятся, их произведение Коши также сходится, и мы имеем

$$(2.19) \quad \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n a_{n-j} \cdot b_j \right).$$

Доказательство. По предположению мы имеем $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \leq B_1$ и $\sum_{j=0}^{\infty} |b_j| \leq B_2$. Таким образом, для двумерного массива (2.18) для всех $m \geq 0$

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m |a_i| |b_j| \leq B_1 B_2,$$

и мы можем применить теорему 2.13. Сумма i -й строки равна $s_i = a_i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} b_j$ и $\sum_{i=0}^{\infty} s_i = (\sum_{i=0}^{\infty} a_i)(\sum_{j=0}^{\infty} b_j)$. Согласно теореме 2.13 произведение Коши, которое является линейным размещением (2.18), также сходится к этому значению. \square

Примеры. Рассмотрим два ряда при $|q| < 1$:

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1 - q} \quad \text{и} \quad 1 - q + q^2 - q^3 + \dots = \frac{1}{1 + q}.$$

Их произведение Коши

$$1 + q^2 + q^4 + q^6 + \dots = \frac{1}{1 - q^2}$$

действительно является произведением $(1 - q)^{-1}$ и $(1 + q)^{-1}$.

Произведение Коши абсолютно сходящихся рядов

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad \text{и} \quad e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots$$

дает ряд для e^{x+y} (используйте биномиальное тождество теоремы I.2.1).

Замечание. Утверждение теоремы 2.16 остается справедливым, если только один из рядов сходится абсолютно, а второй сходится (Ф. Мертенс 1875, см. упр. 2.3).

В предположении, что ряды $\sum_i a_i$, $\sum_j b_j$, а также их произведение Коши (определение 2.14) сходятся, тождество (2.19) справедливо (Абель 1826, см. упр. 7.9).

Изменение порядка суммирования и предельных переходов в бесконечных рядах

В нескольких местах в главе I мы сталкивались с проблемой перемены порядка суммирования бесконечного ряда и предельного перехода (например, при получении ряда для e^x в разд. I.2 и рядов для $\sin x$ и $\cos x$ в разд. I.4). Мы рассматривали ряд $d_n = \sum_{j=0}^{\infty} s_{nj}$, зависящий от целочисленного параметра n , и использовали тот факт, что $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \sum_{j=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} s_{nj}$. Уже в разд. I.2 (после формулы (I.2.17)) мы говорили, что это не всегда справедливо и что при этом необходима некоторая осторожность. В следующей теореме сформулированы достаточные условия справедливости такой перемены.

(2.17) Теорема. Пусть все элементы последовательности $\{s_{0j}, s_{1j}, s_{2j}, \dots\}$ имеют одинаковый знак и $|s_{n+1,j}| \geq |s_{nj}|$ для всех n и j . Если существует грань B такая, что $\sum_{j=0}^n |s_{nj}| \leq B$ для всех $n \geq 0$, то

$$(2.20) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\infty} s_{nj} = \sum_{j=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} s_{nj}.$$

Доказательство. Идея доказательства состоит в том, чтобы переформулировать предположения так, чтобы можно было бы непосредственно использовать теорему 2.13. В начале этого раздела мы видели, что каждый ряд можно превратить в бесконечную последовательность, если рассмотреть частичные суммы (2.2). И обратно, если заданы частичные суммы s_0, s_1, s_2, \dots , мы можем однозначно определить элементы a_i такие, что $\sum_{i=0}^n a_i = s_n$. Для этого нужно положить $a_0 = s_0$ и $a_i = s_i - s_{i-1}$ при $i \geq 1$. Применяя это рассуждение к последовательности $\{s_{0j}, s_{1j}, s_{2j}, \dots\}$, мы определяем

$$a_{0j} := s_{0j}, \quad a_{ij} := s_{ij} - s_{i-1,j}, \quad \text{так что} \quad \sum_{i=0}^n a_{ij} = s_{nj}.$$

Заменяя s_{nj} этим выражением, приведем (2.20) к виду

$$(2.21) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^n a_{ij} = \sum_{j=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n a_{ij}.$$

Меняя порядок суммирования в выражении в левой части (2.21) (это можно делать в силу теоремы 1.5), мы видим, что (2.21) эквивалентно (2.15). Таким образом, нам остается только проверить условие (2.16). Из предположений, относящихся к $\{s_{0j}, s_{1j}, \dots\}$ следует, что все элементы a_{0j}, a_{1j}, \dots имеют одинаковый знак. Следовательно, мы имеем

$$\sum_{i=0}^n |a_{ij}| = |s_{nj}| \quad \text{и} \quad \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n |a_{ij}| = \sum_{j=0}^n |s_{nj}| \leq B.$$

В силу теоремы 2.13 из этого следует (2.21), и следовательно также (2.20). \square

(2.18) Пример. Сейчас мы дадим строгое доказательство теоремы I.2.3. Из биномиальной теоремы следует, что

$$(2.22) \quad \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = 1 + y + \frac{y^2(1 - \frac{1}{n})}{1 \cdot 2} + \frac{y^3(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots,$$

что представляет собой ряд, зависящий от параметра n . Положим

$$s_{n0} = 1, \quad s_{n1} = y, \quad s_{n2} = \frac{y^2(1 - \frac{1}{n})}{1 \cdot 2}, \quad s_{n3} = \frac{y^3(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \quad \dots$$

Для фиксированного y все элементы последовательности $\{s_{0j}, s_{1j}, \dots\}$ имеют одинаковый знак, и $\{|s_{0j}|, |s_{1j}|, \dots\}$ монотонно возрастает. Более того, мы имеем

$$\sum_{j=0}^n |s_{nj}| \leq \sum_{j=0}^n \frac{|y|^j}{j!} \leq B,$$

потому что по критерию частных ряд $\sum_{j=0}^{\infty} |y|^j/j!$ сходится. Следовательно, можно применить теорему 2.17, и мы получаем,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \dots$$

Упражнения

2.1 Вычислите произведение Коши двух рядов

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad \text{и} \quad g(y) = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \dots$$

и найдите ряд для $f(x)g(y) + g(x)f(y)$. Обоснуйте свои вычисления. Не кажется ли вам результат знакомым?

2.2 Покажите, что произведение Коши двух расходящихся рядов

$$\left(2 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots\right) \left(-1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots\right)$$

сходится абсолютно.

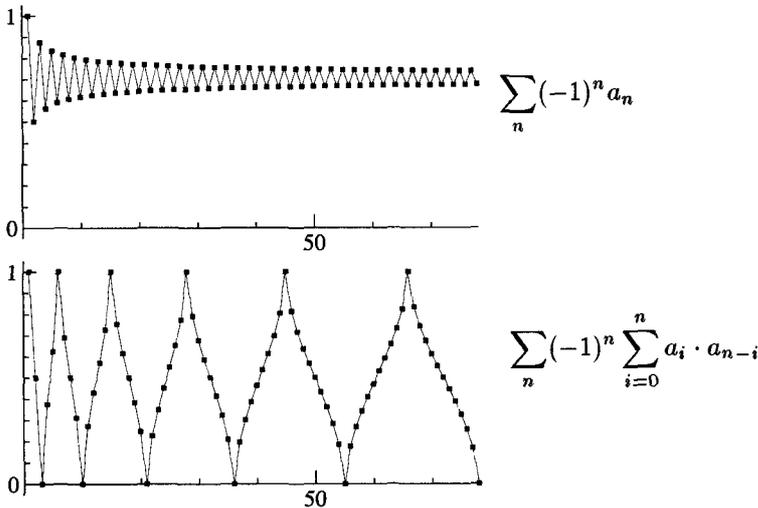


Рис. 2.6. Расходимость произведения Коши из упр. 2.4.

2.3 (Мертенс 1875). Предположим, что ряд $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ сходится и что $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ сходится абсолютно. Докажите, что произведение Коши, соответствующее определению 2.14, сходится, и что соотношение (2.19) справедливо.

Указание.

Положите $c_n = \sum_{j=0}^n a_{n-j} b_j$ и примените неравенство треугольника (только к первым суммам) в тождестве

				n		
	$a_0 b_0$	$a_0 b_1$	$a_0 b_2$	$a_0 b_3$	$a_0 b_4$	$a_0 b_5$
	$a_1 b_0$	$a_1 b_1$	$a_1 b_2$	$a_1 b_3$	$a_1 b_4$	$a_1 b_5$
	$a_2 b_0$	$a_2 b_1$	$a_2 b_2$	$a_2 b_3$	$a_2 b_4$	
n	$a_3 b_0$	$a_3 b_1$	$a_3 b_2$	$a_3 b_3$		
	$a_4 b_0$	$a_4 b_1$	$a_4 b_2$			
	$a_5 b_0$	$a_5 b_1$				
	$a_6 b_0$					

$$\sum_{i=0}^{2n} c_i - \left(\sum_{i=0}^n a_i \right) \left(\sum_{j=0}^n b_j \right) = \sum_{j=0}^n b_j \sum_{i=n+1}^{2n-j} a_i + \sum_{j=n+1}^{2n} b_j \sum_{i=0}^{2n-j} a_i.$$

2.4 Определите постоянные $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ так, чтобы произведение Коши двух рядов

$$\left(1 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots \right) \left(1 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots \right) = \left(1 - 1 + 1 - 1 + \dots \right)$$

стало расходящимся рядом $1 - 1 + 1 - \dots$. Покажите, что ряд $1 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots$ сходится (рис. 2.6). Может ли он сходиться абсолютно?

Указание. Использование производящей функции для чисел $1, -a_1, a_2, -a_3, \dots$ сводит это упражнение к известной формуле главы I и к произведению Валлиса.

2.5 Обоснуйте формулу (1.5.26). Для этого возьмите логарифм и используйте идеи примера 2.18.

III.3 Действительные функции и непрерывность

Здесь мы называем *Функцией* переменной величины такую величину, которая любым образом составлена из этой переменной величины и постоянных. (И. Бернулли 1718, *Opera*, vol. 2, p. 241)

Следовательно, если $f\left(\frac{x}{a} + c\right)$ обозначает некоторую произвольную функцию ... (Эйлер 1734, *Opera*, vol. XXII, p. 59)

Если теперь любому x соответствует единственное конечное y , ... то y называется функцией x на этом интервале ... Это определение не требует существования общего правила для разных частей кривой; можно представить себе, что кривая составлена из весьма разнородных компонент, или что она нарисована и не следует никакому закону. (Дирихле 1837)

Со времен Декарта действительные функции $y = f(x)$ действительной переменной x являются универсальным средством изучения геометрических кривых и, со времен Галилея и Ньютона, средством для механических и астрономических вычислений. Слово “*functio*” было предложено Лейбницем и И. Бернулли, обозначение $y = f(x)$ было введено Эйлером (1734) (см. цитаты). В эпоху Лейбница, Бернулли и Эйлера действительные функции обычно представляли себе составленными из элементарных функций (“*expressio analytica quomodocunque ... Sic $a + 3z, az - 4z^2, az + b\sqrt{a^2 - z^2}, c^z$ etc. sunt functiones ipsius z* ” — “каким бы ни было аналитическое выражение ... Так, $a + 3z, az - 4z^2, az + b\sqrt{a^2 - z^2}, c^z$ и т. п. суть функции от z ” — *лат.*, Эйлер 1748). При этом допускались разные формулы для разных областей (“*curvas discontinuas seu mixtas et irregulares appellamus*” — “кривые, называемые *не непрерывными* либо *составными* и *нерегулярными*” — *лат.*). 19 век, в основном под влиянием уравнения распространения тепла Фурье и исследований рядов Фурье, проведенных Дирихле, принес более широкое определение: “любая нарисованная кривая” или “любые значения y , определенные в зависимости от значений x ” (см. цитату выше).

(3.1) Определение (Дирихле 1837). *Функция* $f : A \rightarrow B$ состоит из двух множеств — области определения A и области значений B , и из правила, которое сопоставляет каждому $x \in A$ единственный элемент $y \in B$. Это соответствие обозначается как

$$y = f(x) \quad \text{или} \quad x \mapsto f(x).$$

Мы говорим, что y является образом x и что x является прообразом y .

На протяжении этого раздела областью значений будет \mathbb{R} (или некоторый интервал в \mathbb{R}), а областью определения — интервал или объединение интервалов, имеющих вид

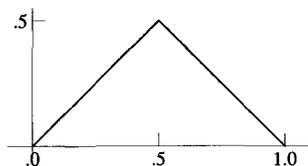
$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, \quad \text{или} \quad [a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \quad \text{или} \\ (a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}, \quad \text{или} \quad [a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < \infty\}, \quad \text{или} \dots$$

Интервал (a, b) называется *открытым*, а $[a, b]$ — *замкнутым* интервалом или *отрезком*.

При описании функций, которые заданы разными выражениями на различных частях A , мы будем обычно использовать фигурную скобку, как в нижеследующих примерах.

Примеры. 1. Функция $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

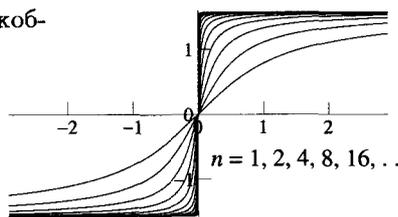
$$(3.1) \quad f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1-x & 1/2 \leq x \leq 1, \end{cases}$$



изображена справа. Видно, что у некоторых $y \in \mathbb{R}$ не существует прообразов, а у некоторых их больше одного.

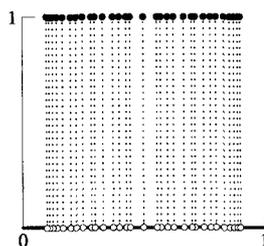
2. Следующую функцию можно определить или как предел единого выражения, или с помощью скобки, рассматривая отдельно три случая:

$$(3.2) \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arctg}(nx) = \begin{cases} \pi/2 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\pi/2 & x < 0. \end{cases}$$



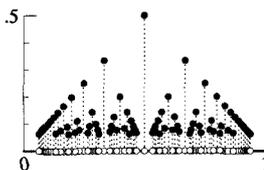
3. Следующая функция, нарисовать которую затруднительно, предложил Дирихле (см. *Werke*, vol. 2, p. 132, 1829, “On aurait un exemple d’une fonction ...” — “Будем иметь пример функции ...”, — *франц.*):

$$(3.3) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ иррационально} \\ 1 & x \text{ рационально.} \end{cases}$$



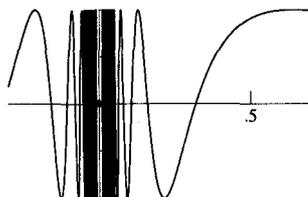
4. Эта функция похожа на функцию Дирихле, однако с увеличением знаменателей x ее пики становятся ниже:

$$(3.4) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ иррационально} \\ 1/q & x = p/q \text{ простая дробь.} \end{cases}$$



5. Когда x стремится к нулю, $1/x$ стремится к ∞ , поэтому

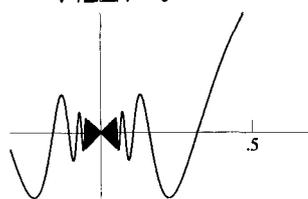
$$(3.5) \quad f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



будет иметь бесконечно много осцилляций в окрестности нуля (Коши 1821).

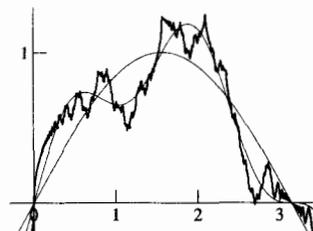
6. Благодаря множителю x в этом случае осцилляции вблизи нуля имеют меньшую амплитуду, однако их по-прежнему бесконечно много (Вейерштрасс 1874):

$$(3.6) \quad f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$



7. Согласно Вейерштрассу (1872), наш последний пример принадлежит Риману (см. разд. III.9). Здесь функция определена бесконечным сходящимся рядом

$$(3.7) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}.$$



Непрерывные функции

... $f(x)$ назовем *непрерывной* функцией, если ... численные значения разности

$$f(x + \alpha) - f(x)$$

неограниченно убывают вместе с α ...

(Коши 1821, *Cours d'Analyse*, p. 43)

Здесь мы называем величину y непрерывной функцией x , если, задаваясь величиной ϵ , мы можем доказать, что существует величина δ такая, что для любой величины, лежащей между $x_0 - \delta \dots x_0 + \delta$ соответствующая величина y лежит между $y_0 - \epsilon \dots y_0 + \epsilon$. (Вейерштрасс 1874)

Коши (1821) ввел понятие непрерывной функции, требуя, чтобы *неопределенно малые* изменения x приводили бы к *неопределенно малым* изменениям y (см. цитату). Больцано (1817) и Вейерштрасс (1874) были более точны (вторая цитата): разность $f(x) - f(x_0)$ должна быть *сколь угодно* мала, если разность $x - x_0$ *достаточно* мала.

(3.2) Определение. Пусть A есть подмножество \mathbb{R} и $x_0 \in A$. Функция $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ является непрерывной в точке x_0 , если для каждого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in A$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, мы имеем $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, или

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A : |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Функцию $f(x)$ называют непрерывной, если эта функция непрерывна во всех точках $x_0 \in A$.

На рис. 3.1a представлена непрерывная функция, а на рис. 3.1b–3.1f — функции с разрывами.

Обсуждение примеров (3.1)–(3.7). Функция (3.1) непрерывна везде, даже при $x_0 = 1/2$; функция (3.2) разрывна в 0; (3.3) разрывна везде; (3.4) непрерывна при иррациональных x_0 и разрывна при рациональных x_0 (см. упр. 3.1); (3.5) разрывна при $x_0 = 0$; (3.6) непрерывна везде, даже при $x = 0$; (3.7), у которой, как кажется, имеются громадные колебания, тем не менее везде непрерывна, как будет далее показано в теореме 4.2.

(3.3) Теорема. Функция $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна в точке $x_0 \in A$ тогда и только тогда, когда для каждой последовательности $\{x_n\}_{n \geq 1}$ с $x_n \in A$

$$(3.8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0), \quad \text{если} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0.$$

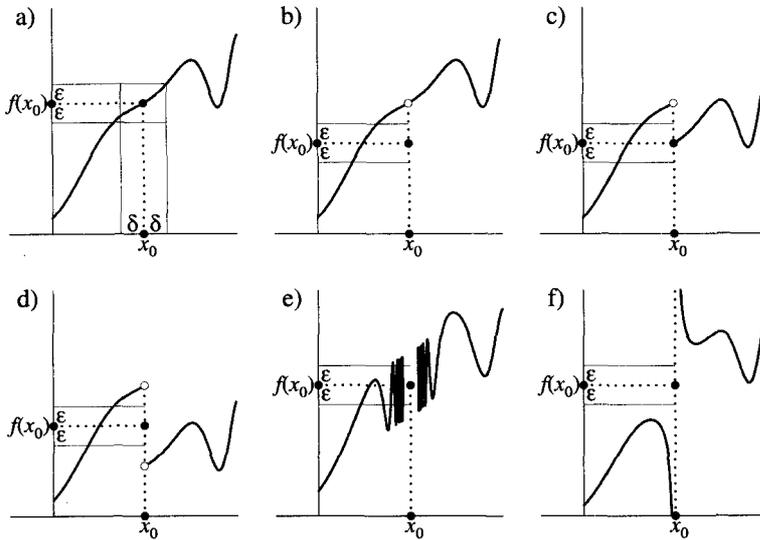


Рис. 3.1. Непрерывные и разрывные функции.

Доказательство. При заданном $\epsilon > 0$ выберем $\delta > 0$, как в определении 3.2. Поскольку $x_n \rightarrow x_0$, существует N такое, что $|x_n - x_0| < \delta$ при $n \geq N$. В силу непрерывности в точке x_0 мы имеем $|f(x_n) - f(x_0)| < \epsilon$ при $n \geq N$, и (3.8) справедливо.

Теперь предположим, что условие (3.8) выполнено, но $f(x)$ разрывна в точке x_0 . Отрицание непрерывности в точке x_0 формулируется как

$$\exists \epsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in A : |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon.$$

Идея доказательства состоит в том, чтобы взять $\delta = 1/n$ и приписать величине x (которая зависит от δ) индекс n . Это дает последовательность $\{x_n\}$ с элементами из A такими, что $|x_n - x_0| < 1/n$ (следовательно, $x_n \rightarrow x_0$), и в то же время $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \epsilon$, что противоречит (3.8). \square

(3.4) Теорема. Пусть $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ и $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ являются непрерывными в точке $x_0 \in A$ функциями, и пусть λ — действительное число. Тогда функции

$$f + g, \quad \lambda \cdot f, \quad f \cdot g, \quad f/g \quad (\text{если } g(x_0) \neq 0)$$

также являются непрерывными в точке x_0 функциями.

Доказательство. Возьмем последовательность $\{x_n\}$ с элементами, содержащимися в A и сходящуюся к x_0 . Из непрерывности функций f и g следует, что $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ и $g(x_n) \rightarrow g(x_0)$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда согласно теореме 1.5

$$f(x_n) + g(x_n) \rightarrow f(x_0) + g(x_0),$$

так что $f+g$ является непрерывной в точке x_0 в силу теоремы 3.3. Непрерывность остальных функций можно доказать аналогичным образом. \square

Пример. Очевидно, что постоянная функция $f(x) = a$ является непрерывной. Функция $f(x) = x$ также непрерывна (положите $\delta = \varepsilon$ в определении 3.2). В силу теоремы 3.4 все полиномы $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ непрерывны, и рациональные функции $R(x) = P(x)/Q(x)$ непрерывны во всех точках x_0 , где $Q(x_0) \neq 0$.

Теорема о промежуточном значении

Эта теорема была известна давно ...

(Лагранж 1807, *Oeuvres* vol. 8, p. 19, см. также p. 133)

Геометрически эта теорема представляется очевидной. Без колебаний ее использовали Эйлер и Гаусс (см. цитату). Только Больцано нашел, что “reine analytischer Beweis” (чисто аналитическое доказательство, — нем.) было необходимо для того, чтобы привести больше строгости в Анализ и Алгебру.

(3.5) Теорема (Больцано 1817). Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ является непрерывной функцией. Если $f(a) < c$ и $f(b) > c$, то существует $\xi \in (a, b)$ такое, что $f(\xi) = c$.

Доказательство. Мы докажем утверждение теоремы для $c = 0$. Из этого специального случая общий результат следует, если рассмотреть $f(x) - c$ вместо $f(x)$.

Множество $X = \{x \in [a, b] ; f(x) < 0\}$ не пусто ($a \in X$) и мажорируется величиной b . Следовательно, в силу теоремы 1.12 существует наименьшая верхняя грань $\xi = \sup X$. Мы покажем, что $f(\xi) = 0$ (рис. 3.2). Предположим, что $f(\xi) = K > 0$. Положим $\varepsilon = K/2 > 0$. Из непрерывности $f(x)$ в точке ξ следует существование некоторого $\delta > 0$ такого, что

$$|f(x) - K| < K/2 \quad \text{при} \quad |x - \xi| < \delta.$$

Из этого следует, что $f(x) > K/2 > 0$ при $\xi - \delta < x \leq \xi$, что противоречит тому, что ξ есть наименьшая верхняя грань X .

Случай $f(\xi) = K < 0$ исключается аналогично. □

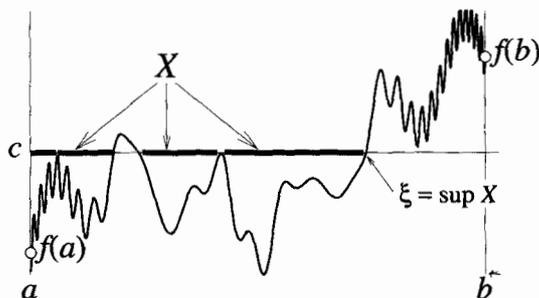


Рис. 3.2. Доказательство теоремы Больцано.

Теорема о максимуме

Этой теоремой, которая утверждает, что *непрерывная* функция действительной переменной достигает своих точных верхней и нижней граней, т. е. обязательно имеет максимум и минимум, Вейерштрасс создал инструмент, незаменимый в настоящее время для математиков, занимающихся тонкими аналитическими или арифметическими исследованиями.

(Гильберт 1897, *Gesammelte Abh.*, vol. 3, p. 333)

В лекциях Вейерштрасса 1861 г. следующая теорема названа “Hauptlehrsatz” (главной теоремой, — нем.). Она была опубликована Кантором в 1870 г.

(3.6) Теорема. Если $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ является непрерывной функцией, то она ограничена на $[a, b]$ и достигает своих максимума и минимума, т. е. существуют $u \in [a, b]$ и $U \in [a, b]$ такие, что

$$(3.9) \quad f(u) \leq f(x) \leq f(U) \quad \text{для всех } x \in [a, b].$$

Обсуждение предположений. Функция $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, определенная как $f(x) = 1/x$, не ограничена на $A = (0, 1]$. Следовательно, предположение о том, что область A замкнута, является важным.

Пример функции $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, заданной как $f(x) = x^2$, показывает, что ограниченность области определения функции $f(x)$ является важным предположением.

Функция $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, определенная как $f(1/2) = 0$ и

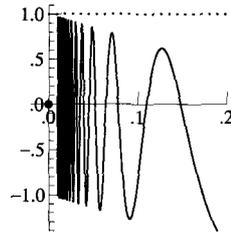
$$f(x) = (x - 1/2)^{-2} \quad \text{при } x \neq 1/2,$$

является разрывной в точке $x = 1/2$ и неограниченной. Таким образом, важно предположить, что функция является всюду непрерывной.

Наш последний пример — это функция $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, которая ограничена, но не имеет максимума:

$$f(x) = \begin{cases} -3x + \sin(1/x) & \text{при } x \neq 0 \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Наименьшая верхняя грань множества $\{f(x) \mid x \in [0, 1]\}$ равна 1, однако не существует $U \in [0, 1]$ такого, что $f(U) = 1$.



Доказательство теоремы 3.6. Сначала докажем, что $f(x)$ ограничена на $[a, b]$. Предположим противное:

$$(3.10) \quad \forall n \geq 1 \quad \exists x_n \in [a, b] \quad |f(x_n)| > n.$$

Согласно теореме Больцано-Вейерштрасса (теорема 1.17), в последовательности x_1, x_2, x_3, \dots содержится сходящаяся подпоследовательность. Чтобы не вводить для нее новых символов, обозначим ее члены опять через x_1, x_2, x_3, \dots и скажем “выделив подпоследовательность, предположим, что” $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$. Поскольку f непрерывна в точке ξ , из теоремы 3.3 следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\xi)$. Это противоречит предположению (3.10) и доказывает ограниченность $f(x)$.

Чтобы доказать существование $U \in [a, b]$, удовлетворяющего соотношению (3.9), рассмотрим множество $Y = \{y \mid y = f(x), a \leq x \leq b\}$. Это множество не пусто и ограничено (в чем мы только что убедились). Следовательно точная верхняя грань $M = \sup Y$ существует. По определению 1.11 точной верхней грани

величина $M - \varepsilon$ (при произвольном $\varepsilon > 0$) не является верхней гранью Y . Выбирая $\varepsilon = 1/n$, мы найдем последовательность элементов $x_n \in [a, b]$, удовлетворяющих соотношению

$$(3.11) \quad M - 1/n < f(x_n) \leq M.$$

Применяя теорему Больцано-Вейерштрасса и выделяя сходящуюся подпоследовательность $\{x_n\}$, обозначим ее предел через $U = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. В силу непрерывности $f(x)$ в точке U из (3.11) мы получаем $f(U) = M$.

Существование минимума доказывается аналогично. \square

Монотонные и обратные функции

(3.7) Определение. Пусть A и B являются подмножествами \mathbb{R} . Функцию $f : A \rightarrow B$ называют

- *инъективной*, если $f(x_1) \neq f(x_2)$ при $x_1 \neq x_2$,
- *сюръективной*, если $\forall y \in B \exists x \in A \quad f(x) = y$,
- *возрастающей*, если она является инъективной и сюръективной, $f(x_1) < f(x_2)$ при $x_1 < x_2$,
- *убывающей*, если $f(x_1) > f(x_2)$ при $x_1 < x_2$,
- *неубывающей*, если $f(x_1) \leq f(x_2)$ при $x_1 < x_2$,
- *невозрастающей*, если $f(x_1) \geq f(x_2)$ при $x_1 < x_2$,
- *монотонной*, если она является невозрастающей или неубывающей, и
- *строго монотонной*, если она является возрастающей или убывающей.

Строго монотонные функции являются инъективными. Интересно, что обратное утверждение для действительных непрерывных функций, определенных на интервале, является также справедливым.

(3.8) Лемма. Если функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и инъективна, она является строго монотонной.

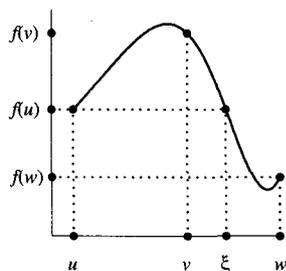
Доказательство. Надо доказать, что для любых трех точек $u < v < w$ справедливо соотношение

$$(3.12) \quad f(v) \text{ лежит между } f(u) \text{ и } f(w).$$

В самом деле, допустим, что величина $f(v)$ лежит вне этого интервала, причем она ближе, скажем, к $f(u)$. Тогда существует такое ξ , лежащее между v и w , что $f(u) = f(\xi)$ (теорема 3.5), а это противоречит инъективности f . Следовательно, если $a < c < d < b$, единственно возможными являются неравенства

$$f(a) < f(c) < f(d) < f(b) \quad \text{или} \quad f(a) > f(c) > f(d) > f(b);$$

все другие конфигурации неравенств противоречат (3.12). \square



Из сюръективности функции $f : A \rightarrow B$ следует, что каждое значение $y \in B$ имеет по меньшей мере один прообраз. Поэтому из инъективности следует единственность этого обратного образа. Следовательно, биективная функция имеет обратную функцию $f^{-1} : B \rightarrow A$, определенную как

$$(3.13) \quad f^{-1}(y) = x \quad \iff \quad f(x) = y.$$

(3.9) Теорема. Пусть функция $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ является непрерывной и биективной. Тогда обратная функция $f^{-1} : B \rightarrow A$ также является непрерывной.

Доказательство. Пусть последовательность $\{y_n\}$, где $y_n \in B$, такова, что $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$. Используя теорему 3.3, надо показать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y_0)$. Рассмотрим последовательность $\{x_n\} = \{f^{-1}(y_n)\}$. Пусть $\{x'_n\}$ есть сходящаяся подпоследовательность (которая существует в силу теоремы Больцано-Вейерштрасса). Обозначим ее предел как x_0 . Из непрерывности $f(x)$ в точке x_0 следует, что

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} y'_n = y_0$$

и, следовательно, $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Таким образом, каждая сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{x_n\} = \{f^{-1}(y_n)\}$ сходится к $f^{-1}(y_0)$. Эта точка является единственной точкой сгущения последовательности $\{f^{-1}(y_n)\}$ и мы имеем $f^{-1}(y_n) \rightarrow f^{-1}(y_0)$ (см. также упр. 1.8). \square

Пример. Каждая из функций x^2, x^3, \dots является строго монотонной на $[0, \infty)$ и имеет там обратную функцию: $\sqrt{x}, \sqrt[3]{x}, \dots$. Согласно теореме 3.9 эти функции непрерывны.

Предел функции

Возможно, что понятие *предела функции* впервые с достаточной строгостью определил Вейерштрасс.

(Принсгейм 1899, *Encyclopädie der Math. Wiss.*, Band II.1, p. 13)

Предположим, что $f(x)$ в точке x_0 не является непрерывной или даже не определена в ней. В этом случае интересно выяснить, существует ли, по крайней мере, *предел* функции $f(x)$ при x , приближающемся к x_0 . Очевидно, что x_0 должно быть тесно связано с областью определения f . Мы будем говорить, что x_0 является *точкой накопления* множества A , если

$$(3.14) \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in A \quad 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Для ограниченного интервала множество точек накопления состоит из интервала и двух его конечных точек.

(3.10) Определение. Рассмотрим функцию $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, и пусть x_0 является точкой накопления A . Мы говорим, что предел $f(x)$ в точке x_0 существует и равен y_0 , т. е.

$$(3.15) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0,$$

если

$$(3.16) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A : 0 < |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - y_0| < \varepsilon.$$

Это определение можно изменить так, чтобы включить в него такие ситуации, когда $x_0 = \pm\infty$ и/или $y_0 = \pm\infty$ (см., например, формулу (1.10)). Из

предположения, что x_0 — точка накопления, следует, что множество $x \in A$, $0 < |x - x_0| < \delta$ не пусто.

На основе определения 3.10 условие непрерывности $f(x)$ в точке x_0 можно сформулировать следующим образом (см. определение 3.2):

$$(3.17) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ существует и } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Примеры. Функция, изображенная на рис. 3.1b, имеет предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, отличный от $f(x_0)$. Для функции (3.4) предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ существует для всех x_0 (см. упр. 3.1; имейте в виду, что точка x_0 явно исключена в определении 3.10) и $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

Более слабым свойством является существование *односторонних* пределов.

(3.11) Определение. Мы говорим, что существует предел функции $f(x)$ в точке x_0 слева (соответственно справа), если (3.16) справедливо при условии $x < x_0$ (соответственно $x_0 < x$). Эти пределы обозначаются

$$(3.18) \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = y_0 \quad \text{и соответственно} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = y_0.$$

Функции, изображенные на рис. 3.1b, 3.1c и 3.1d обладают левосторонними и правосторонними пределами (часто равными $f(x_0)$). У функций, изображенных на рис. 3.1e и 3.1f, эти пределы не существуют. Следующая теорема является аналогом критерия Коши (теоремы 1.8).

(3.12) Теорема (Дедекинд 1872). Для существования предела $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$(3.19) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, \hat{x} \in A : \begin{array}{l} 0 < |x - x_0| < \delta \\ 0 < |\hat{x} - x_0| < \delta \end{array} \quad |f(x) - f(\hat{x})| < \varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость следует из неравенств

$$|f(x) - f(\hat{x})| \leq |f(x) - y_0| + |y_0 - f(\hat{x})| < 2\varepsilon.$$

Для доказательства достаточности выберем какую-нибудь сходящуюся к x_0 последовательность $\{x_i\}$ с $x_i \in A$. Из (3.19) следует, что последовательность $\{y_i\}$ с $y_i = f(x_i)$ является последовательностью Коши и, согласно теореме 1.8, сходится к некоторому пределу y_0 . Для любого x , удовлетворяющего условию $0 < |x - x_0| < \delta$, мы теперь получим (опять же с помощью (3.19)), что

$$|f(x) - y_0| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - y_0| < 2\varepsilon$$

при достаточно больших i . □

Аналогичные результаты имеют место и в случае $x_0 = \pm\infty$ или когда пределы односторонние.

Упражнения

3.1 Покажите, что функция (3.4) непрерывна во всех иррациональных x_0 и, разумеется, разрывна в рациональных x_0 .

Указание. Если у вас возникли затруднения, возьмите $x_0 = \sqrt{2} - 1$ и $\varepsilon = 1/10$ и определите, при каких значениях x будет $f(x) \geq \varepsilon$. Отсюда определяется то δ , для которого утверждение определения 3.2 справедливо.

3.2 (Прингсгейм 1899, р. 7). Покажите, что функция Дирихле (3.3) может быть представлена в виде

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} (\cos(n! \pi x))^m.$$

3.3 Вычислите пределы

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{2x}.$$

Не забудьте, что $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$.

3.4 Покажите, что если $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ непрерывна в точке x_0 и $g : [c, d] \rightarrow [u, v]$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$, сложная функция $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ непрерывна в точке x_0 .

3.5 Вот несколько функций $f : A \rightarrow \mathbb{R}$:

- | | |
|--|--------------------------|
| 1) $f(x) = x \cdot \sin(1/x) - 2x$ | $A = [0, 0.2]$ |
| 2) $f(x) = x/(x^2 + 1)$ | $A = [-4, +4]$ |
| 3) та же функция | $A = (-\infty, +\infty)$ |
| 4) $f(x) = (1/\sqrt{\sin x}) - 1$ | $A = (0, \pi)$ |
| 5) та же функция | $A = [0, \pi]$ |
| 6) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sin(x^2)$ | $A = [0, 7]$ |
| 7) та же функция | $A = [0, \infty)$ |
| 8) $f(x) = \operatorname{arctg}((x - 0.5)/(x^2 - 0.1x - 0.7))$ | $A = [-1.5, 1.5]$ |
| 9) $f(x) = \sin(x^2)$ | $A = [-5, 5]$ |
| 10) та же функция | $A = (-\infty, \infty)$ |
| 11) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ | $A = [-1, 1]$ |
| 12) та же функция | $A = (-\infty, \infty)$ |
| 13) $f(x) = \cos x + 0.1 \sin(40x)$ | $A = [-1.6, 1.6]$ |
| 14) $f(x) = x - [x]$ | $A = [0, 3]$ |
| 15) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sin(1/x) - 2\sqrt{x}$ | $A = [0, 0.1]$ |
| 16) $f(x) = 3 - 1/\sqrt{x(1-x)}$ | $A = (0, 1)$ |
| 17) $f(x) = \sin(5/x) - x$ | $A = [0, 0.4]$ |

Здесь $[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x . В тех случаях, когда вышеприведенные определения $f(x)$ не имеют смысла (например,

когда некоторый знаменатель равен нулю), положите $f(x) = 0$. Определите, какие из этих функций изображены на рис. 3.3.

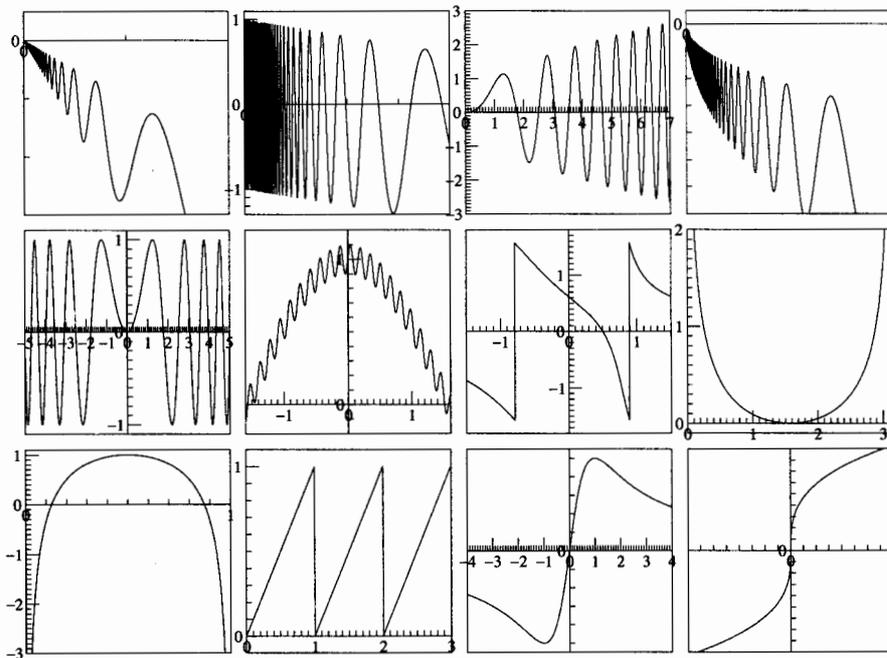


Рис. 3.3. Графики 12 функций из упр. 3.5.

- 3.6 Какие из функций упр. 3.5 *непрерывны* на A ? В каких точках они *разрывны*?
- 3.7 Какие из функций упр. 3.5. обладают *максимальным* значением на A ? Какие достигают *минимального* значения на A ?

III.4 Равномерная сходимость и равномерная непрерывность

В работе Г-на Коши можно найти следующую теорему: “Если члены ряда $u_0 + u_1 + u_2 + \dots$ — непрерывные функции, ... то сумма s ряда — тоже непрерывная функция x .” Однако мне кажется, что существуют исключения из этой теоремы. Например, ряд

$$\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x \dots$$

разрывает при каждом значении $(2m + 1)\pi$ величины x, \dots

(Абель 1826, *Oeuvres*, vol. 1, p. 224-225)

После эпохи Коши—Больцано (первая половина 19-го столетия) в анализе оставались два важных пробела. Во-первых, понятие равномерной сходимости, которое проясняет что такое предел последовательности непрерывных функций и интеграл от этого предела. Во-вторых, понятие равномерной непрерывности, обеспечивающей интегрируемость непрерывных функций. Оба эти пробела были восполнены Вейерштрассом и его школой (вторая половина 19-го столетия).

Предел последовательности функций

Рассмотрим *последовательность функций* $f_1, f_2, f_3, \dots : A \rightarrow \mathbb{R}$. При заданном $x \in A$ значения $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$ составляют последовательность чисел. Если предел

$$(4.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

существует для всех $x \in A$, мы говорим, что $\{f_n(x)\}$ *поточечно сходится* на A к $f(x)$. Коши утверждал в своем *Курсе анализа* (1821, *Cours d'analyse algébrique*, p. 131; *Oeuvres* II.3, p. 120), что если (4.1) сходится при всех x из A и если все $f_n(x)$ являются непрерывными, то $f(x)$ также непрерывна. Приведем четыре контрпримера к этому утверждению; первый принадлежит Абелю (1826, см. вышеприведенную цитату).

Примеры.

а) (Абель 1826, см. верхний левый график на рис. 4.1)

$$(4.2a) \quad f_n(x) = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots \pm \frac{\sin nx}{n}.$$

На рис. 4.1 представлены $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ и $f_{100}(x)$. По-видимому, что $\{f_n(x)\}$ сходится к прямой $y = x/2$ при $-\pi < x < \pi$ (это можно доказать с помощью теории рядов Фурье), но $f_n(\pi) = 0$ и при $\pi < x < 3\pi$ пределом является $y = x/2 - \pi$. Таким образом, предельная функция разрывна.

б) (правый верхний график рис. 4.1)

$$(4.2b) \quad f_n(x) = x^n \quad \text{на} \quad A = [0, 1], \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & |x| < 1 \\ 1 & x = 1. \end{cases}$$

с) (нижний левый график на рис. 4.1)

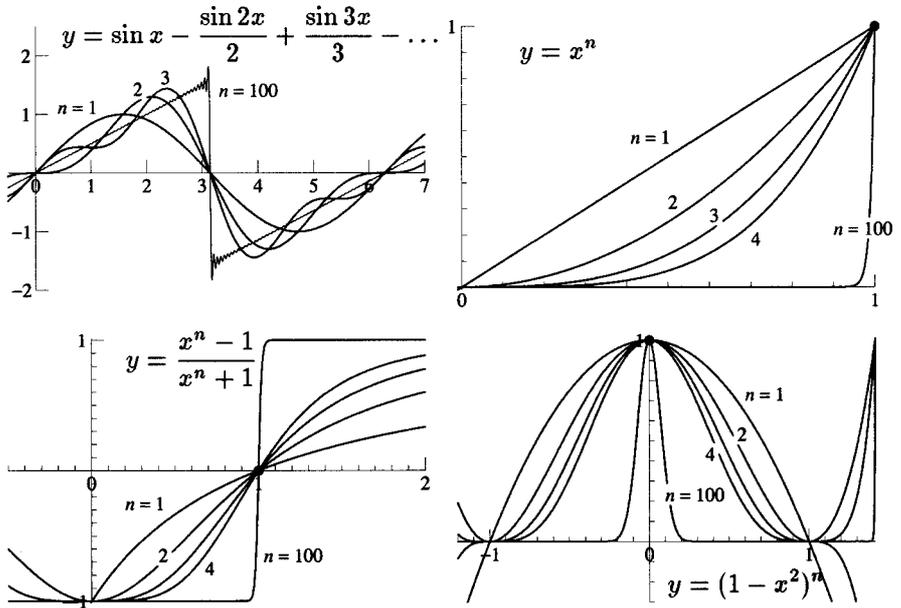


Рис. 4.1. Последовательности непрерывных функций с разрывным пределом.

$$(4.2c) \quad f_n(x) = \frac{x^n - 1}{x^n + 1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} -1 & |x| < 1 \\ 0 & x = 1 \\ +1 & x > 1. \end{cases}$$

d) (нижний правый график рис. 4.1)

$$(4.2d) \quad f_n(x) = (1 - x^2)^n \text{ на } A = [-1, 1], \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$

Другим примером, который нам уже встречался, является $f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx)$ (см. формулу (3.2)).

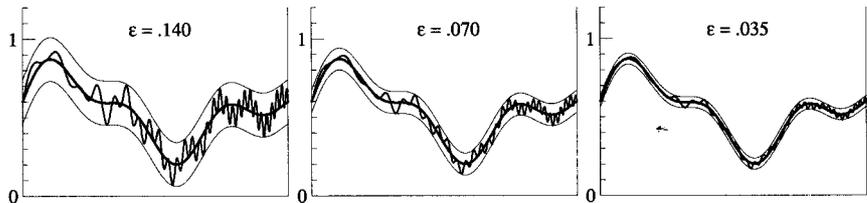


Рис. 4.2. Последовательность равномерно сходящихся функций.

Объяснение (Зейдель 1848). Посмотрим на верхний правый график рис. 4.1. Чем ближе точка x находится к точке $x = 1$, тем *медленнее* сходимость, и тем большее n нам нужно брать для того, чтобы достичь заданной точности ϵ . Это

и позволяет зародиться разрыву. Поэтому мы должны потребовать, чтобы при заданном $\varepsilon > 0$ разность $f_n(x) - f(x)$ была бы меньше, чем ε при всех $x \in A$, если, конечно, $n \geq N$ (см. рис. 4.2).

(4.1) Определение (Вейерштрасс 1841). *Последовательность $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ равномерно сходится на A к $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ если*

$$(4.3) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \geq 1 \quad \forall n \geq N \quad \forall x \in A \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

В этом определении важно, что N зависит только от ε и не зависит от $x \in A$. Именно поэтому в определении (4.3) “ $\forall x \in A$ ” стоит после “ $\exists N \geq 1$ ”.

Как и в разд. III.1 (определение 1.7), мы можем заменить $f(x)$ в (4.3) на элементы последовательности, следующие за $f_n(x)$. При этом мы получим *критерий Коши* равномерной сходимости:

$$(4.4) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \geq 1 \quad \forall n \geq N \quad \forall k \geq 1 \quad \forall x \in A \quad |f_n(x) - f_{n+k}(x)| < \varepsilon.$$

(4.2) Теорема (лекции Вейерштрасса 1861 г.). *Если $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ являются непрерывными функциями и если $f_n(x)$ равномерно сходится на A к $f(x)$, то $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ является непрерывной функцией.*

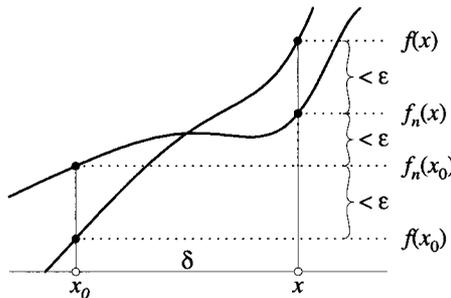


Рис. 4.3. Непрерывность $f(x)$.

Доказательство. Идея доказательства состоит в том, чтобы разложить $f(x) - f(x_0)$ “in drei Theile (на три части, — нем.) $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$ ”, после чего использовать оценку для $f_n(x) - f_n(x_0)$ и дважды оценку (4.3) (см. рис. 4.3). При заданном $\varepsilon > 0$ выберем N такое, что условие (4.3) будет выполнено. Поскольку функция $f_N(x)$ непрерывна, существует $\delta > 0$ такое, что $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \varepsilon$ при $|x - x_0| < \delta$. С помощью неравенства треугольника мы получаем, что если $|x - x_0| < \delta$, то

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \underbrace{|f(x) - f_N(x)|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|f_N(x) - f_N(x_0)|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|f_N(x_0) - f(x_0)|}_{< \varepsilon} < 3\varepsilon,$$

что может быть сделано произвольно малым. □

Вопрос. Существует ли последовательность непрерывных функций $f_n(x)$, сходящаяся к непрерывной функции $f(x)$, такая, что сходимость $f_n(x) \rightarrow f(x)$ не равномерная? Как мы видели выше, в теореме 4.2 равномерная сходимость является *достаточным* условием непрерывности $f(x)$, однако в каких-то частных случаях она может оказаться не необходимой. История этой задачи, которой занимались многие математики в 1850–1880-х годах, многократные попытки ее решения и ложное “доказательство” изложены у Г. Кантора (1880).

Первый пример (аналогичный примеру Кантора):

$$(4.5) \quad f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}.$$

Легко видеть, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ при любом заданном $x \neq 0$. Функции $f_n(x)$ имеют максимум высоты $y = 1$ при $x = 1/n$ (см. левый график на рис. 4.4), поэтому сходимость не является равномерной. Дело, однако, в том, что при $x = 0$ все функции $f_n(x)$ равны нулю. Поэтому здесь последовательность также сходится, и предельная функция является непрерывной.

Второй пример аналогичен первому, причем понять его еще проще (правый график на рис. 4.4):

$$(4.6) \quad f_n(x) = \begin{cases} nx & 0 \leq x \leq 1/n \\ 2 - nx & 1/n \leq x \leq 2/n \\ 0 & 2/n \leq x. \end{cases}$$

Третий пример приведен в упр. 4.1.

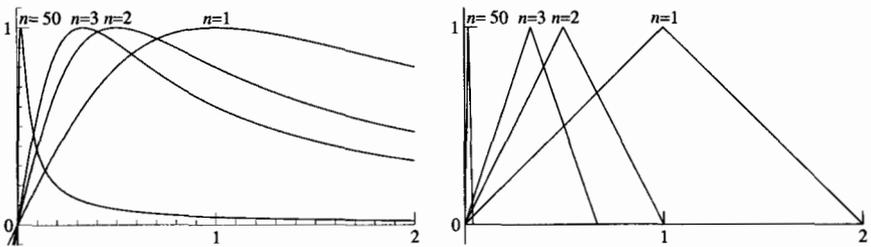


Рис. 4.4. Неравномерная сходимость к непрерывному пределу.

Критерий Вейерштрасса равномерной сходимости

Рассмотрим теперь важный случай, когда функции являются частичными суммами

$$(4.7) \quad s_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i(x),$$

где $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ — действительные функции. Назовем ряд

$$(4.8) \quad \sum_{i=0}^{\infty} f_i(x)$$

равномерно сходящимся на A , если последовательность $\{s_n(x)\}$ соотношения (4.7) равномерно сходится на A .

(4.3) Теорема (критерий Вейрштрасса). Пусть

$$(4.9) \quad |f_n(x)| \leq c_n \quad \text{для всех } x \in A$$

и пусть $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ является сходящимся рядом чисел. Тогда ряд (4.8) равномерно сходится на A .

Доказательство. Из (4.9) ясно, что $c_n \geq 0$. Далее, имеем

$$\begin{aligned} |s_{n+k}(x) - s_n(x)| &= |f_{n+k}(x) + \dots + f_{n+1}(x)| \\ &\leq |f_{n+k}(x)| + \dots + |f_{n+1}(x)| \leq c_{n+k} + \dots + c_{n+1} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Последняя оценка справедлива при $n \geq N$ и всех $k \geq 1$, потому что по условию теоремы ряд $\sum c_n$ сходится. Заключение теоремы следует из критерия Коши (4.4). \square

Примеры. а) Поскольку $|\sin(mx)| \leq 1$ и $\sum 1/n^2$ сходится, ряд (3.7) равномерно сходится на \mathbb{R} и представляет непрерывную функцию. С другой стороны, в примере Абеля (4.2а) требуется *расходимость* ряда $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + \dots$ для того, чтобы предельная функция была разрывной.

б) Ряд для показательной функции

$$(4.10) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

сходится при всех $x \in \mathbb{R}$, но не сходится равномерно на \mathbb{R} (см. рис. I.2.6b). Чтобы все-таки применить нашу теорему, выберем фиксированное u и рассмотрим $A = [-u, u]$. Мы знаем, что числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u^n/n!$ сходится, и так как $|x^n/n!| \leq u^n/n!$ для $|x| \leq u$, из теоремы 4.3 следует, что ряд (4.10) *равномерно сходится на каждом замкнутом интервале* $[-u, u]$. Поскольку u было произвольным, мы получаем, что e^x непрерывна при всех $x \in \mathbb{R}$.

Равномерная непрерывность

Кажется, до сих пор не отмечалось, что ... непрерывность в любой отдельной точке ... не является непрерывностью ... , которую можно назвать *равномерной непрерывностью*, потому что последняя равномерно распространяется на все точки и во всех направлениях. (Гейне 1870, р. 361)

Общие идеи доказательства нескольких теорем в §3 соответствуют принципам γ -на *Вейрштрасса*, которые стали мне известны из личных бесед с ним, а также с γ -ном *Шварцем* и γ -ном *Кантором*, так что ... (Гейне 1872, р. 182)

Определение 3.2 непрерывности функции $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ говорит, что для каждого $x_0 \in A$ и каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что разность $|f(x) - f(x_0)|$

ограничена величиной ε , если $|x - x_0|$ ограничена величиной δ . Проблема в том, что эта величина δ не обязательно одна и та же для всех $x_0 \in A$.

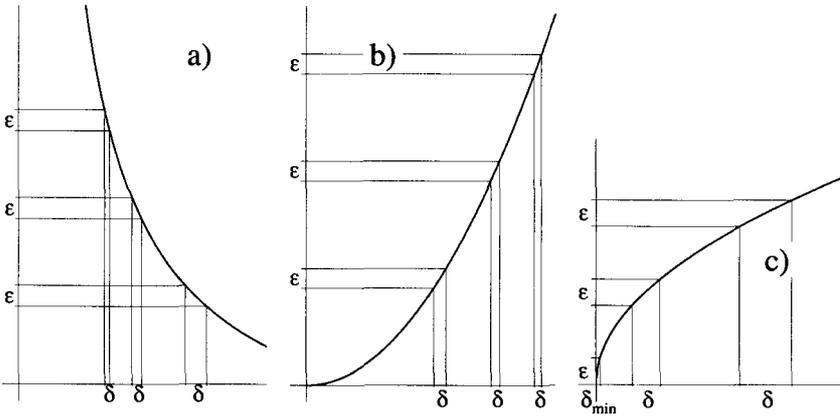


Рис. 4.5. Функции (a) и (b) неравномерно непрерывные, (c) — равномерно непрерывная.

Примеры. На рис. 4.5a,b представлены графики функций $y = 1/x$ на $A = (0, 1]$ и $y = x^2$ на $A = [0, \infty)$. В обоих случаях видно, что величина δ , обеспечивающая выполнение неравенства $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ при заданном ε , стремится к нулю, в первом случае при $x_0 \rightarrow 0$, а во втором — при $x_0 \rightarrow \infty$. Напротив, для функции $y = \sqrt{x}$ на $A = [0, 1]$ (рис. 4.5c), несмотря на то, что наклон ее графика в нуле бесконечен, существует наименьшее $\delta_{\min} = \varepsilon^2$, которое положительно. Это δ_{\min} , хотя и является обычно излишне малым, может быть использовано на всем интервале $A = [0, 1]$. Мы называем это свойство *равномерной непрерывностью*. Это понятие постепенно было формировалось в лекциях Дирихле в 1854 г. и Вейерштрасса в 1861 г.; первая публикация принадлежит Гейне (1870, р. 353).

(4.4) Определение. Функция $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ равномерно непрерывна на A , если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x_0 \in A \quad \forall x \in A : |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Замечание. Равномерная непрерывность заданной функции часто может быть установлена с помощью теоремы Лагранжа о среднем значении (см. теорему III.6.11)

$$(4.11) \quad f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0).$$

Если A является интервалом и f дифференцируема на A , причем

$$(4.12) \quad M = \sup_{\xi \in A} |f'(\xi)| < \infty,$$

то при заданном ε мы можем удовлетворить требованию определения 4.4, положив $\delta = \varepsilon/M$ (см. также упр. 4.3 ниже). Однако дифференцируемость отнюдь не является необходимой, и имеет место следующая удивительная теорема.

(4.5) Теорема (Гейне 1872). Пусть A является замкнутым интервалом $[a, b]$ и функция $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на A ; тогда f равномерно непрерывна на A .

Первое доказательство (по Гейне 1872, р. 188). Предположим, что условие в определении 4.4 не выполнено, и выберем $\delta = 1/n$ для $n = 1, 2, \dots$. Это приводит нас к

$$(4.13a) \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall 1/n > 0 \quad \exists x_{0n} \in A \quad \exists x_n \in A : |x_n - x_{0n}| < 1/n$$

$$(4.13b) \quad \text{такие, что} \quad |f(x_n) - f(x_{0n})| \geq \varepsilon.$$

Выбирая сходящуюся подпоследовательность из $\{x_n\}$ (которую мы опять обозначим через $\{x_n\}$; см. теорему 1.17), имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, а $|x_n - x_{0n}| < 1/n$, мы имеем также $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{0n} = x$. Так как f непрерывна, мы имеем (см. теорему 3.3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{0n}),$$

что противоречит (4.13b). □

Второе доказательство (Люрот 1873). Выберем $\varepsilon > 0$. Пусть для каждого $x \in [a, b]$ $\delta(x) > 0$ есть длина наибольшего открытого интервала I с центром в x такого, что $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$ для $y, z \in I$. Более точно,

$$(4.14) \quad \delta(x) = \sup\{\delta > 0 \mid \forall y, z \in [x - \delta/2, x + \delta/2] \quad |f(y) - f(z)| < \varepsilon\}$$

(где, разумеется, величины x, y , и z должны лежать в A). В силу непрерывности $f(x)$ в точке x множество $\{\delta > 0 \mid \dots\}$ в (4.14) не пусто, поэтому $\delta(x) > 0$ для всех $x \in A$. Если $\delta(x) = \infty$ при некотором $x \in A$, оценка $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$ справедлива без всяких ограничений, и любое $\delta > 0$ будет удовлетворять условиям определения 4.4.

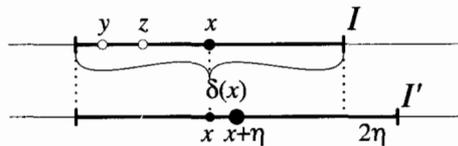


Рис. 4.6. Доказательство Люрота теоремы 4.5.

Если $\delta(x) < \infty$ для всех $x \in A$, мы переходим от x к $x \pm \eta$. Новый интервал I' не может быть больше, чем $\delta(x) + 2|\eta|$, потому что в противном случае I будет целиком содержаться в I' и может быть расширен; он не может быть также меньше, чем $\delta(x) - 2|\eta|$. Таким образом, $\delta(x)$ является непрерывной функцией. Из теоремы максимума Вейерштрасса (теорема 3.6) в ее “минимум”-варианте следует, что существует такое значение x_0 , что $\delta(x_0) \leq \delta(x)$ при всех $x \in A$. Это значение $\delta(x_0)$ по определению положительно и может быть использовано для того, чтобы удовлетворить условию в определении 4.4. □

Замечание. Если вас не удовлетворили два приведенных доказательства, вы можете ознакомиться с третьим, опубликованным Дарбу (1875, р. 73–74), основанным на последовательном делении интервалов.

Упражнения

4.1 Покажите, что функции

$$f_n(x) = (n+1)x^n(1-x), \quad x \in A = [0, 1]$$

сходятся к нулю при всех $x \in A$, однако имеют максимум при $x = n/(n+1)$ асимптотической высоты $1/e$. Следовательно, в этом примере нет равномерной сходимости, несмотря на то, что предельная функция непрерывна.

4.2 (Прингсгейм 1899, р. 34). Покажите, что ряд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^2} \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^n$$

а) абсолютно сходится при всех $x \in \mathbb{R}$ и

б) не сходится равномерно на $[-1, 1]$.

с) Вычислите $f(x)$. Является ли эта функция непрерывной?

4.3 Функция $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, определенная как

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \cdot \left(\sin \frac{1}{x} + 2 \right) & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{при } x = 0, \end{cases}$$

непрерывна на $[0, 1]$ и, следовательно, должна быть *равномерно* непрерывной. Для заданного $\varepsilon > 0$, скажем, $\varepsilon = 0.01$, найдите в явном виде $\delta > 0$ такое, для которого

$$\forall x_1, x_2 \in [0, 1] : |x_1 - x_2| < \delta \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Указание. Используйте теорему о среднем значении в стороне от начала координат и прямую оценку для значений, близких к 0.

4.4 Какие из функций, изображенных на рис. 3.3 (см. упр. 3.5) равномерно непрерывны на A ?

III.5 Интеграл Римана

Таким образом, наш первый вопрос состоит в следующем: какой смысл мы придаем $\int_a^b f(x) dx$? (Риман 1854, *Werke*, p. 239)

Благодаря озарению, на которое способны лишь величайшие умы, знаменитый геометр [Риман] обобщает понятие определенного интеграла, ... (Дарбу 1875)

Обсуждение понятия интеграла в разделах II.5 и II.6 было основано на формуле

$$(5.1) \quad \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ есть первообразная функции $f(x)$. Мы неявно предполагали, что такая первообразная всегда существует и является единственной (с точностью до аддитивной постоянной). Теперь мы дадим точное определение $\int_a^b f(x) dx$, не зависящее от дифференциального исчисления. Это позволит нам ввести $\int_a^b f(x) dx$ для более широкого класса функций, включающего разрывные функции и функции, для которых первообразная неизвестна. Строгое доказательство формулы (5.1) для непрерывных f будет дано в разд. III.6.

Коши (1823) ввел с доступной в то время строгостью понятие интеграла непрерывной функции как предела суммы. Риман (1854), просто как попутное замечание в своей диссертации, посвященной тригонометрическим рядам, определил интеграл для более общего класса функций. В этом разделе мы изложим теорию Римана и ее обобщения, принадлежащие Дюбуа-Реймону и Дарбу. Еще более общие теории, которые мы здесь не рассматриваем, принадлежат Лебегу (1902 г.) и Курцвайлю (1957 г.).

Общие предположения. На протяжении этого раздела мы будем рассматривать функции $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, где $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ — *ограниченный* интервал и $f(x)$ — *ограниченная* функция, т. е.

$$(5.2) \quad \exists M \geq 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad |f(x)| \leq M.$$

В противном случае определение сумм Дарбу (см. ниже) будет невозможно. Ситуации, в которых не выполняется одно из этих предположений, будут обсуждены в разд. III.8.

Определения и критерии интегрируемости

Мы хотим определить интеграл как площадь, заключенную между графиком функции и горизонтальной осью. Идея состоит в том, чтобы разделить интервал $[a, b]$ на меньшие подинтервалы и аппроксимировать площадь суммой площадей малых прямоугольников. *Разбиение* на подинтервалы обозначается

$$(5.3) \quad D = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\},$$

где $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, а длина подинтервала равна $\delta_i = x_i - x_{i-1}$. Теперь мы определим *нижнюю* и *верхнюю суммы Дарбу* (см. рис. 5.1):

$$(5.4) \quad s(D) = \sum_{i=1}^n f_i \delta_i, \quad S(D) = \sum_{i=1}^n F_i \delta_i,$$

где

$$(5.5) \quad f_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x), \quad F_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x).$$

Очевидно, что $s(D) \leq S(D)$, и любое разумное определение интеграла $\int_a^b f(x) dx$ должно приводить к значению, заключенному между $s(D)$ и $S(D)$.

Разбиение D' интервала $[a, b]$ называется *измельчением* D , если оно содержит все точки D , т. е. если $D' \supset D$.

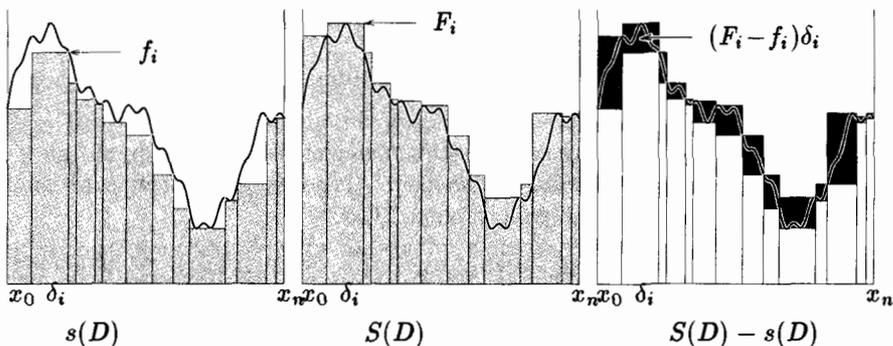


Рис. 5.1. Суммы Дарбу.

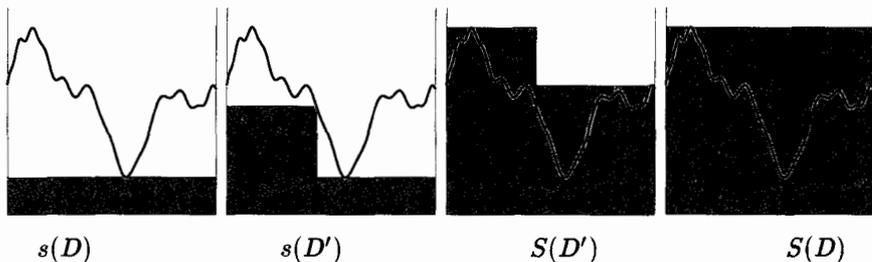


Рис. 5.2. Измельчение разбиения.

(5.1) **Лемма.** Если D' есть измельчение D , то

$$s(D) \leq s(D') \leq S(D') \leq S(D).$$

Доказательство. Добавление одной точки к разбиению D увеличивает нижнюю сумму Дарбу (или не меняет ее) и уменьшает верхнюю сумму (или не меняет ее, см. рис. 5.2). Справедливость утверждения сохраняется при повторном добавлении точек разбиения. □

(5.2) **Лемма.** Если D_1 и D_2 являются двумя произвольными разбиениями, то

$$s(D_1) \leq S(D_2).$$

Доказательство. Возьмем $D' = D_1 \cup D_2$, т. е. разбиение, содержащее все точки обоих разбиений (при этом точки, которые появляются дважды, считаются только один раз). Поскольку D' является измельчением как D_1 , так и D_2 , утверждение нашей леммы следует из леммы 5.1. \square

Из леммы 5.2 следует, что если задана функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, множество нижних сумм Дарбу мажорируется любой верхней суммой Дарбу (и наоборот):

$$(5.6) \quad \begin{array}{ccc} s(D) & & S(D) \\ \text{|||||} & \underbrace{\hspace{2cm}} & \text{|||||} \\ & ? & \end{array}$$

Таким образом (теорема 1.12), имеет смысл рассмотреть наименьшую верхнюю грань нижних сумм и наибольшую нижнюю грань верхних сумм. Следуя Дарбу (1875), введем обозначения

$$(5.7) \quad \int_a^b f(x) dx = \inf_D S(D) \quad (\text{верхний интеграл}),$$

$$(5.8) \quad \int_a^b f(x) dx = \sup_D s(D) \quad (\text{нижний интеграл}).$$

(5.3) **Определение.** Функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая условию (5.2), называется интегрируемой (в смысле Римана), если нижний и верхний интегралы (5.7) и (5.8) равны. В этом случае мы убираем черточки в формулах (5.7) и (5.8) и получаем “интеграл Римана”.

(5.4) **Теорема.** Функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема тогда и только тогда, когда

$$(5.9) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tilde{D} \quad S(\tilde{D}) - s(\tilde{D}) < \varepsilon.$$

Доказательство. По определению функция $f(x)$ интегрируема в том и только том случае, если два множества в соотношении (5.6) сколь угодно близки. Это значит, что при заданном $\varepsilon > 0$ существуют два разбиения D_1 и D_2 такие, что $S(D_2) - s(D_1) < \varepsilon$. Полагая $\tilde{D} = D_1 \cup D_2$ и применяя лемму 5.1, мы доказываем справедливость утверждения. \square

(5.5) **Пример.** Рассмотрим функцию $f(x) = x$ на интервале $[a, b]$. При эквидистантном разбиении $D_n = \{x_i = a + ih \mid i = 0, 1, \dots, n, h = (b - a)/n\}$ из (I.1.28) мы получаем

$$s(D_n) = \sum_{i=1}^n x_{i-1} \cdot (x_i - x_{i-1}) = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} - \frac{(b-a)^2}{2n}$$

$$S(D_n) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} + \frac{(b-a)^2}{2n},$$

так что $S(D_n) - s(D_n) = (b-a)^2/n$. Для достаточно больших n эта величина меньше, чем любое $\varepsilon > 0$. Таким образом, эта функция интегрируема и ее интеграл равен $b^2/2 - a^2/2$.

(5.6) Пример. Функция Дирихле $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, определенная с помощью соотношения (см. (3.3))

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ рационально} \\ 0 & x \text{ иррационально,} \end{cases}$$

не интегрируема в смысле Римана, потому что на каждом подинтервале присутствуют рациональные и иррациональные числа, так что $f_i = 0$ и $F_i = 1$ для каждого i . Следовательно, $s(D) = 0$, $S(D) = 1$ для всех разбиений.

(5.7) Пример. Функция $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ иррационально или } x = 0 \\ 1/q & x = p/q \text{ (несократимая дробь)} \end{cases}$$

(см. (3.4)) разрывна при всех положительных рациональных x . Однако при фиксированном $\varepsilon > 0$ только конечное число (скажем, k) значений x таковы, что $f(x) > \varepsilon$. Теперь мы выберем разбиение D с $\max_i \delta_i < \varepsilon/k$ такое, что значения x , для которых $f(x) > \varepsilon$, лежат внутри подинтервалов. Так как $f(x) \leq 1$, то из этого следует

$$S(D) \leq \varepsilon + k \cdot \max_i \delta_i < 2\varepsilon.$$

Но $s(D) = 0$, и мы видим, что наша функция интегрируема и что $\int_0^1 f(x) dx = 0$.

Теорема Дюбуа-Реймона и Дарбу

Однако я чувствую, что способ формулировки критерия интегрируемости должен быть улучшен. (Дюбуа-Реймон 1875, р. 259)

(5.8) Теорема (Дюбуа-Реймон 1875, Дарбу 1875). *Функция $f(x)$, удовлетворяющая условию (5.2), интегрируема в том и только том случае, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall D \in \mathcal{D}_\delta \quad S(D) - s(D) < \varepsilon.$$

Здесь \mathcal{D}_δ обозначает множество всех разбиений, удовлетворяющих условию $\max_i \delta_i \leq \delta$.

Доказательство. Достаточность (часть “в том случае”) является простым следствием теоремы 5.4. Трудность доказательства необходимости (части “только в том случае”) состоит в том, что разбиение D , о котором мы знаем лишь, что $\max_i \delta_i \leq \delta$, может быть совершенно иным, чем разбиение \tilde{D} теоремы 5.4.

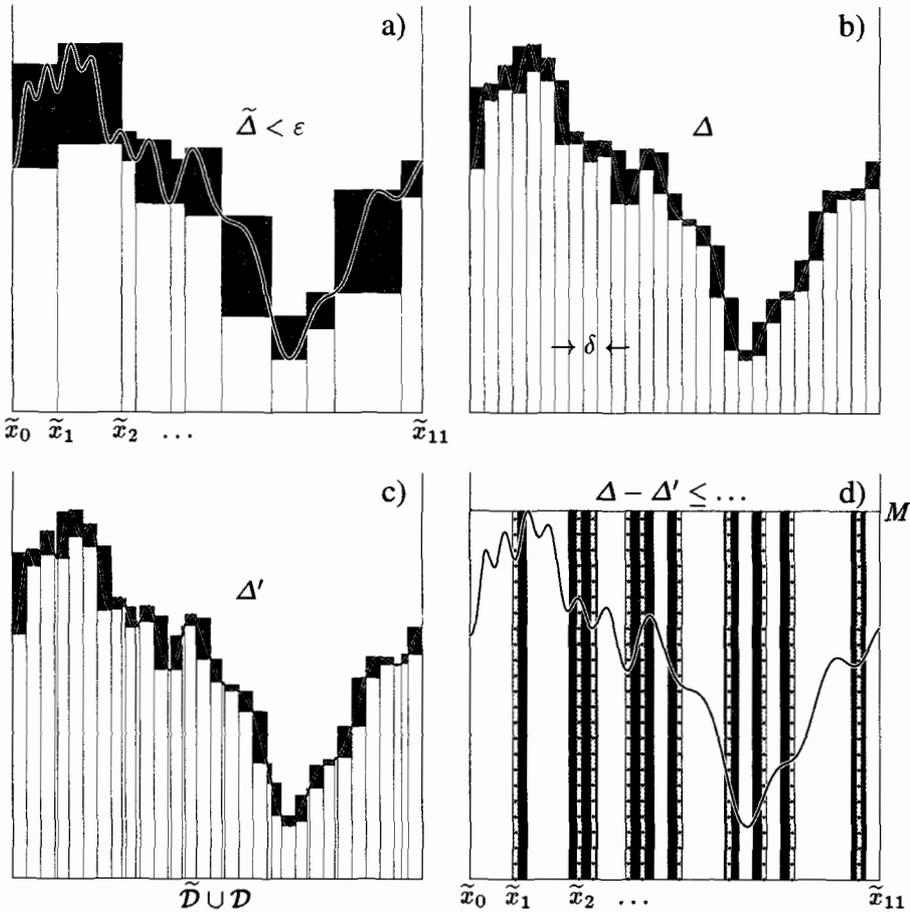


Рис. 5.3. Доказательство Дюбуа-Реймона и Дарбу.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и пусть \tilde{D} есть разбиение, удовлетворяющее условию (5.9), т. е. площадь заштрихованной области на рис. 5.3а $\tilde{\Delta} = S(\tilde{D}) - s(\tilde{D})$ меньше, чем ε . Важно, что $\tilde{D} = \{\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{\tilde{n}}\}$ состоит из *конечного* числа точек. Теперь возьмем произвольное разбиение $D \in \mathcal{D}_\delta$ (см. рис. 5.3б) и положим $\Delta = S(D) - s(D)$. Нам надо доказать, что Δ становится произвольно малым, когда $\delta \rightarrow 0$.

Рассмотрим объединение $D' = D \cup \tilde{D}$ двух разбиений и положим $\Delta' = S(D') - s(D')$ (см. рис. 5.3с). Суммы Дарбу для D' и D везде одинаковы, за исключением интервалов, содержащих точки из \tilde{D} (рис. 5.3д). Поскольку таких интервалов не больше, чем $\tilde{n} - 1$, их длина $\leq \delta$, а так как $-M \leq f(x) \leq M$, мы имеем

$$(5.10) \quad \Delta \leq \Delta' + 2(\tilde{n} - 1)\delta M.$$

Учитывая, что $\Delta' \leq \tilde{\Delta} < \varepsilon$ (заметим, что D' есть измельчение \tilde{D}), из этой оценки мы видим, что $\Delta < 2\varepsilon$ при условии, что $\delta \leq \varepsilon / (2(\tilde{n} - 1)M)$. \square

Суммы Римана. Рассмотрим разбиение (5.3), и пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ является таким множеством точек, что $x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq \dots$. Назовем сумму

$$(5.11) \quad \sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \delta_i$$

суммой Римана. В силу (5.5) мы имеем $f_i \leq f(\xi_i) \leq F_i$, так что $s(D) \leq \sigma \leq S(D)$. Из теоремы 5.8 следует, что

$$(5.12) \quad \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \delta_i \rightarrow \int_a^b f(x) dx \quad \text{при} \quad \max_i \delta_i \rightarrow 0,$$

при условии, что $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ является интегрируемой функцией. Римановы суммы весьма удобны для доказательств свойств интеграла. Например, переходя к пределу $\max_i \delta_i \rightarrow 0$ в тривиальном тождестве

$$\sum_{i=1}^n (c_1 f_1(\xi_i) + c_2 f_2(\xi_i)) \cdot \delta_i = c_1 \sum_{i=1}^n f_1(\xi_i) \cdot \delta_i + c_2 \sum_{i=1}^n f_2(\xi_i) \cdot \delta_i,$$

получаем формулу (II.4.13) при условии, что обе функции интегрируемы.

Интегрируемые функции

Посмотрим теперь, какие классы функций являются интегрируемыми.

(5.9) Теорема. Пусть f и g — две интегрируемые на $[a, b]$ функции и пусть λ — действительное число. Тогда функции

$$f + g, \quad \lambda \cdot f, \quad f \cdot g, \quad |f|, \quad f/g \quad (\text{if } |g(x)| \geq C > 0)$$

также интегрируемы.

Доказательство. На протяжении всего доказательства мы будем использовать тот факт, что $F_i - f_i$ является наименьшей верхней гранью вариаций $f(x)$ на $[x_{i-1}, x_i]$, т. е.

$$(5.13) \quad \sup_{x, y \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x) - f(y)| = F_i - f_i.$$

В самом деле, предположим, что $\varepsilon > 0$ задано. По определению F_i и f_i существуют $\xi, \eta \in [x_{i-1}, x_i]$ такие, что $f(\xi) > F_i - \varepsilon$, $f(\eta) < f_i + \varepsilon$, и, следовательно, $f(\xi) - f(\eta) > F_i - f_i - 2\varepsilon$. Поэтому $F_i - f_i$ является не только верхней гранью величины $|f(x) - f(y)|$, но также *наименьшей* верхней гранью.

а) Пусть $h(x) = f(x) + g(x)$; обозначим F_i, G_i, H_i их точные верхние грани и соответственно f_i, g_i, h_i точные нижние грани на $[x_{i-1}, x_i]$ (см. (5.5)). Используя неравенство треугольника и (5.13), при $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$ получим

$$(5.14) \quad \begin{aligned} |h(x) - h(y)| &\leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \\ &\leq (F_i - f_i) + (G_i - g_i). \end{aligned}$$

Применяя (5.13) к функции h , мы получим $(H_i - h_i) \leq (F_i - f_i) + (G_i - g_i)$, и разность верхней и нижней сумм Дарбу удовлетворяет неравенству

$$(5.15) \quad \sum (H_i - h_i) \delta_i \leq \sum (F_i - f_i) \delta_i + \sum (G_i - g_i) \delta_i.$$

При заданном $\varepsilon > 0$ выберем разбиение D (теорема 5.4) такое, чтобы каждый член в сумме в правой части неравенства (5.15) был меньше, чем ε (в действительности мы имеем два различных разбиения для f и g , но если взять их объединение, то можно считать, что они совпадают). Следовательно, $\sum_i (H_i - h_i) \delta_i < 2\varepsilon$ и функция $h(x) = f(x) + g(x)$ является интегрируемой в силу теоремы 5.4.

б) Доказательство остальных утверждений проводится аналогично. Например, для $h(x) = \lambda \cdot f(x)$ вместо (5.14) мы используем

$$|h(x) - h(y)| = |\lambda| \cdot |f(x) - f(y)|,$$

закключаем, что $(H_i - h_i) \leq |\lambda| \cdot (F_i - f_i)$, и получаем интегрируемость так же, как выше. Для произведения $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ мы используем

$$\begin{aligned} |h(x) - h(y)| &\leq |f(x)| \cdot |g(x) - g(y)| + |g(y)| \cdot |f(x) - f(y)| \\ &\leq M \cdot |g(x) - g(y)| + N \cdot |f(x) - f(y)| \end{aligned}$$

(обе функции $f(x)$ и $g(x)$ ограничены в силу предположения (5.2)). Наконец, для доказательства последнего утверждения достаточно показать, что $1/g(x)$ интегрируема (потому что $f(x)/g(x) = f(x) \cdot (1/g(x))$). Положим $h(x) = 1/g(x)$ и заменим (5.14) на

$$|h(x) - h(y)| = \frac{|g(y) - g(x)|}{|g(y)| \cdot |g(x)|} \leq \frac{|g(x) - g(y)|}{C^2}.$$

□

Поскольку постоянная функция и $f(x) = x$ интегрируемы (пример 5.5), из вышеприведенной теоремы следует, что полиномы и рациональные функции (вне сингулярностей) интегрируемы. Следующая теорема принадлежит Коши (1823), но строго доказана она была приблизительно 50 лет спустя с использованием понятия равномерной непрерывности.

(5.10) Теорема. *Если функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, то она интегрируема.*

Доказательство. Существенным является то обстоятельство, что f равномерно непрерывна (теорема 4.5). Это значит, что для данного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$|x - y| < \delta \quad \implies \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Возьмем разбиение D такое, что $\max_i \delta_i < \delta$. Если $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$, то $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ и (вследствие (5.13)) $F_i - f_i \leq \varepsilon$. Отсюда $S(D) - s(D) = \sum_{i=1}^n (F_i - f_i) \delta_i \leq \varepsilon \sum_{i=1}^n \delta_i = \varepsilon(b - a)$, и интегрируемость $f(x)$ следует из теоремы 5.4. □

(5.11) Теорема. Если функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ является неубывающей (или невозрастающей), то она интегрируема.

Доказательство. Неубывающая функция принимает свое наименьшее значение в левой крайней точке интервала $[x_{i-1}, x_i]$, а наибольшее — в его правой крайней точке. Следовательно, $f_i = f(x_{i-1})$, $F_i = f(x_i)$, так что $f_{i+1} = F_i$ для $i = 1, \dots, n-1$. Дальнейшая идея состоит в том, чтобы рассмотреть эквидистантные разбиения, где длина подинтервалов равна δ . В этом случае мы имеем

$$\sum (F_i - f_i)\delta = F_1\delta - f_1\delta + F_2\delta - f_2\delta + F_3\delta - f_3\delta + \dots = (f(x_n) - f(x_0)) \cdot \delta < \varepsilon,$$

если величина δ достаточно мала. Это доказывает интегрируемость $f(x)$. \square

(5.12) Замечание. Если мы изменим значения интегрируемой функции в конечном числе точек, функция останется интегрируемой и значение интеграла не изменится. Это видно из рассуждения, подобного приведенному в примере 5.7.

(5.13) Замечание. Пусть $a < b < c$ и $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, сужения которой на $[a, b]$ и на $[b, c]$ интегрируемы. Тогда f интегрируема на $[a, c]$, и

$$(5.16) \quad \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx.$$

Действительно, складывая суммы Дарбу сужений f на интервалы $[a, b]$ и $[b, c]$, мы получаем сумму Дарбу на интервале $[a, c]$.

Для $a > b$ или $a = b$ определим

$$(5.17) \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad \text{и} \quad \int_a^a f(x) dx = 0,$$

так что равенство (5.16) справедливо для любой тройки чисел (a, b, c) .

Неравенства и теорема о среднем значении

Следующие неравенства часто бывают полезны при оценке интегралов. Мы уже использовали их в разд. II.10 для получения оценок (II.10.15).

(5.14) Теорема. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на интервале $[a, b]$ (здесь $a < b$) и $f(x) \leq g(x)$ при всех $x \in [a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Доказательство. Для сумм Римана имеем $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\delta_i \leq \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\delta_i$, ибо $\delta_i > 0$. При $\max_i \delta_i \rightarrow 0$ мы получаем вышеприведенное неравенство (см. (5.12) и теорему 1.6). \square

(5.15) Следствие. Для интегрируемых функций справедливо соотношение

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Доказательство. Надо применить теорему 5.14 к очевидным неравенствам $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$. \square

Применяя следствие 5.15 к произведению $f(x) \cdot g(x)$ двух интегрируемых функций и используя соотношение $|f(x) \cdot g(x)| \leq M \cdot |g(x)|$, где $M = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$, мы получаем следующую полезную оценку:

$$(5.18) \quad \left| \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \right| \leq \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \cdot \int_a^b |g(x)| dx.$$

Следующее неравенство аналогично (5.18), однако функции f и g рассматриваются в нем симметричным образом.

(5.16) Неравенство Коши—Шварца (Коши 1821 в \mathbb{R}^n , Буняковский 1859 для интегралов, Шварц 1885, §15 для двойных интегралов). Следующее неравенство справедливо для интегрируемых функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$(5.19) \quad \left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x) dx}.$$

Доказательство. Из теоремы 5.9 известно, что функции $f \cdot g$, f^2 , и g^2 интегрируемы. Используя теорему 5.14 и линейность интеграла, мы имеем

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b (f(x) - \gamma g(x))^2 dx \\ &= \int_a^b f^2(x) dx - 2\gamma \int_a^b f(x)g(x) dx + \gamma^2 \int_a^b g^2(x) dx. \end{aligned}$$

Обозначив $A = \int_a^b f^2(x) dx$, $B = \int_a^b f(x)g(x) dx$ и $C = \int_a^b g^2(x) dx$, мы видим, что $A - 2\gamma B + \gamma^2 C \geq 0$ для всех действительных γ . При $C = 0$ из этого следует, что $B = 0$. При $C \neq 0$ дискриминант квадратного уравнения не может быть положительным (см. (I.1.12)). Поэтому $B^2 \leq AC$, но это и есть неравенство (5.19). \square

(5.17) Теорема о среднем значении (Коши 1821). Если $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ является непрерывной функцией, то существует $\xi \in [a, b]$ такое, что

$$(5.20) \quad \int_a^b f(x) dx = f(\xi) \cdot (b - a).$$

Доказательство. Пусть m и M являются минимальным и максимальным значениями функции $f(x)$ на $[a, b]$ (см. теорему 3.6), так что $m \leq f(x) \leq M$ для всех $x \in [a, b]$. Используя теорему 5.14 и деля обе части (5.20) на $(b - a)$, получаем

$$m \leq \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

Величина $\int_a^b f(x) dx / (b-a)$ лежит между $m = f(u)$ и $M = f(U)$. Следовательно, согласно теореме Больцано 3.5, существует такое $\xi \in [a, b]$, что эта величина равна $f(\xi)$. Это доказывает справедливость равенства (5.20). \square

(5.18) Теорема (Коши 1821). Пусть функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и функция $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема и всюду неотрицательна (или всюду неположительна). Тогда существует такое $\xi \in [a, b]$, что

$$(5.21) \quad \int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx.$$

Доказательство. Предположим, что $g(x) \geq 0$ при всех x (в противном случае заменим g на $-g$). Тогда

$$m \cdot g(x) \leq f(x)g(x) \leq M \cdot g(x) \quad \text{при } x \in [a, b],$$

где m и M — минимальное и максимальное значения функции $f(x)$. Остальная часть доказательства аналогична доказательству теоремы о среднем значении. \square

Интегрирование бесконечных рядов

До самого последнего времени считалось, что интеграл от сходящегося ряда ... равен сумме интегралов от отдельных членов, и г-н Вейерштрасс был первым, кто заметил, что ...

(Гейне 1870, *Ueber trig. Reihen*, J. f. Math., vol. 70, p. 353)

В нескольких случаях (например, при выводе ряда Меркатора (I.3.13), а также в примерах из разд. II.6) мы почленно интегрировали бесконечные ряды. Это означает, что мы меняли порядок интегрирования и перехода к пределу для функций. Теперь мы обсудим, при каких условиях это допустимо.

Первый пример. Пусть $r_1, r_2, r_3, r_4, \dots$ — последовательность, содержащая все рациональные числа в промежутке между 0 и 1, например,

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \dots$$

Определим функции

$$(5.22) \quad f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n\} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

По замечанию 5.12, каждая из функций $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема, и их интегралы равны нулю. Однако предельная функция $f(x)$, которая является функцией Дирихле из примера 5.6, не интегрируема. (От этой трудности поможет избавиться интеграл Лебега).

Второй пример. Графиками функций

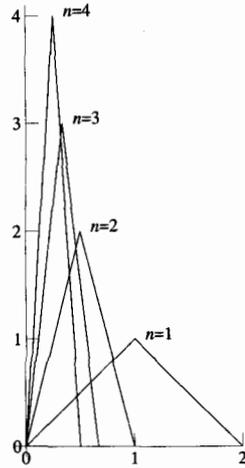
$$(5.23) \quad f_n(x) = \begin{cases} n^2x & 0 \leq x \leq 1/n \\ 2n - n^2x & 1/n \leq x \leq 2/n \\ 0 & 2/n \leq x \leq 2 \end{cases}$$

являются треугольниками с уменьшающимися основаниями и увеличивающимися высотами, причем

$$\int_0^2 f_n(x) dx = 1 \quad \text{для всех } n.$$

Однако предельная функция есть $f(x) = 0$ при всех $x \in [0, 1]$. Здесь $f(x)$ интегрируема, но

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^2 f_n(x) dx \neq \int_0^2 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$



(5.19) Теорема. Рассмотрим последовательность $f_n(x)$ интегрируемых функций и предположим, что она равномерно сходится на $[a, b]$ к функции $f(x)$. Тогда функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Доказательство. Равномерная сходимость означает, что для каждого $\varepsilon > 0$, существует целое число N такое, что для всех $n \geq N$ и всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Следовательно, для всех $x, y \in [a, b]$

$$|f(x) - f(y)| \leq |f_n(x) - f_n(y)| + 2\varepsilon.$$

Применив равенство (5.13), мы найдем, что

$$(F_i - f_i) \leq (F_{Ni} - f_{Ni}) + 2\varepsilon,$$

где, так же как в (5.5), мы использовали обозначения $F_{Ni} = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f_N(x)$ и $f_{Ni} = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f_N(x)$. Функция $f_N(x)$ интегрируема, так что для некоторого разбиения интервала $[a, b]$ величина разности между верхней и нижней суммами Дарбу, т.е. $\sum_i (F_{Ni} - f_{Ni})\delta_i$, меньше чем ε (теорема 5.4). Из этого следует, что $\sum_i (F_i - f_i)\delta_i < \varepsilon(1 + 2(b - a))$, и функция $f(x)$ оказывается интегрируемой. Поскольку интегрируемость предельной функции $f(x)$ установлена, из следствия 5.15 вытекает, что для $n \geq N$

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \varepsilon(b - a).$$

Отсюда следует утверждение теоремы. □

(5.20) Следствие. Рассмотрим последовательность $f_n(x)$ интегрируемых функций и предположим, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится на $[a, b]$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx. \quad \square$$

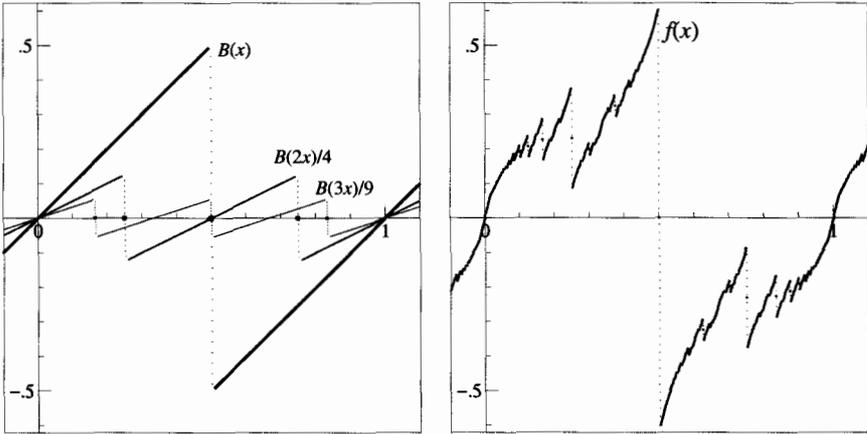


Рис. 5.4. Пример Римана интегрируемой функции.

Пример Римана.

Поскольку эти функции ранее не рассматривались, будет полезно начать с частного примера. (Риман 1854, *Werke*, p. 228)

Для того, чтобы продемонстрировать мощь своей теории интегрирования, Риман (1854) предложил следующий пример функции, являющейся разрывной на каждом интервале (см. рис. 5.4):

$$(5.24) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B(nx)}{n^2}, \quad \text{где} \quad B(x) = \begin{cases} x - \langle x \rangle & \text{при } x \neq k/2 \\ 0 & \text{при } x = k/2 \end{cases}$$

и $\langle x \rangle$ означает ближайшее к x целое число. Эта функция разрывна в точках $x = 1/2, 1/4, 3/4, 1/6, 3/6, 5/6, \dots$, но тем не менее в силу теоремы 4.3 ряд (5.24) равномерно сходится, и в силу замечания 5.13 функции $f_n(x)$ являются интегрируемыми. Следовательно, f интегрируема.

Упражнения

5.1 Для функции

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x = 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots \\ x & \text{в противном случае} \end{cases}$$

и заданного $\epsilon > 0$, например $\epsilon = 0.01$, явно постройте разбиение, для которого $S(D) - s(D) < \epsilon$. Из этого будет ясно, что f интегрируема в смысле Римана.

- 5.2 Рассмотрите функцию $f(x) = x^2$ на интервале $[0, 1]$. Вычислите нижнюю и верхнюю суммы Дарбу для эквидистантного разбиения $x_i = i/n$, где $i = 0, 1, \dots, n$. Из полученных результатов сделайте вывод, что f интегрируема.
- 5.3 Покажите, что численные приближения, полученные по правилу трапеций (см. разд. II.6)

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left(\frac{f(\xi_0)}{2} + f(\xi_1) + f(\xi_2) + f(\xi_3) + \dots + f(\xi_{N-1}) + \frac{f(\xi_N)}{2} \right)$$

($h = (b - a)/N$ и $\xi_i = a + ih$), а так же по правилу Симпсона (N четно)

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left(f(\xi_0) + 4f(\xi_1) + 2f(\xi_2) + 4f(\xi_3) + \dots + f(\xi_N) \right),$$

являются суммами Римана для некоторого разбиения D . Следовательно, сходимость этих методов обеспечена при $N \rightarrow \infty$ для всех функций, интегрируемых по Риману.

- 5.4 (Дини 1878, Шар. 13). Покажите, что

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx = 0 \quad \text{для } \alpha^2 < 1,$$

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx = \pi \ln \alpha^2 \quad \text{для } \alpha^2 > 1,$$

вычислив суммы Римана для эквидистантного разбиения $x_i = i\pi/n$, где ξ_i на каждом подинтервале является левой крайней точкой x_{i-1} . Суммы Римана окажутся логарифмом произведения, с которым мы уже встречались (см. разд. I.5).

- 5.5 Пусть функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим условиям:
 i) f непрерывна, ii) $\forall x \in [a, b]$ мы имеем $f(x) \geq 0$ и iii) $\exists x_0 \in (a, b)$ такое, что $f(x_0) > 0$. Покажите, что в этом случае

$$(5.25) \quad \int_a^b f(x) dx > 0.$$

Постройте контрпримеры, показывающие что для доказательства (5.25) необходимо соблюдение каждого из трех предположений i), ii) и iii).

- 5.6 Вычислите интегралы

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n},$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)}.$$

Используя тот факт, что $0 < \sin x < 1$ при $0 < x < \pi/2$, и теорему 5.14, покажите, что

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx > \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx > \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+2} x dx.$$

Если вышеприведенные значения подставить в эти неравенства, мы приходим к доказательству произведения Валлиса (I.5.27) с точной оценкой ошибки.

5.7 Покажите, что

$$\frac{1}{2} \int_0^1 x^4(1-x)^4 dx \leq \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} dx \leq \int_0^1 x^4(1-x)^4 dx.$$

Вычисление этих интегралов приведет к удивительному результату (вспомните разд. I.6).

Указание. Чтобы вычислить $\int_0^1 x^4(1-x)^4 dx$, см. упр. II.4.3.

5.8 Покажите, что ряд

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots$$

равномерно сходится на $A = [-b, b]$ при любом b таком, что $0 < b < 1$. Следовательно, этот ряд можно почленно интегрировать на $A = [0, b]$ (или на $A = [-b, 0]$), что приводит к хорошо известному ряду для $\arctg b$.

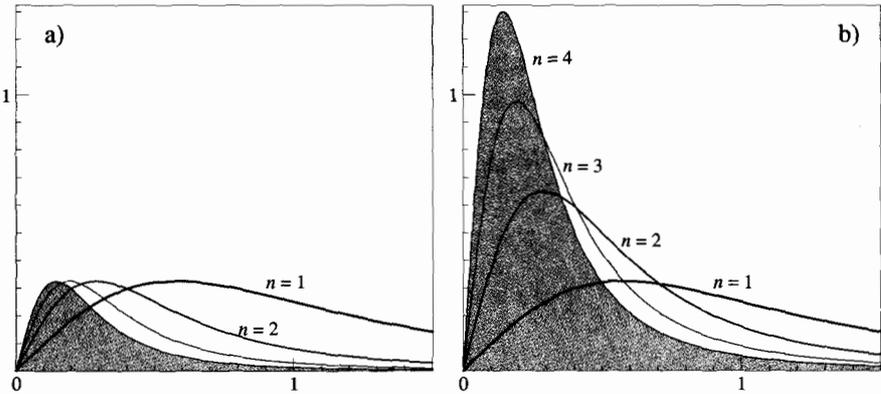


Рис. 5.5. Перемена порядка перехода к пределу и интегрирования.

5.9 Для последовательностей функций $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{a) } f_n(x) = \frac{nx}{(1+n^2x^2)^2}, \quad \text{b) } f_n(x) = \frac{n^2x}{(1+n^2x^2)^2}$$

(см. рис. 5.5) вычислите $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ при $x = 0$ и $x \neq 0$. Найдите точки максимумов $f_n(x)$ и определите, является ли сходимость равномерной. Наконец, докажете справедливость равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx.$$

III.6 Дифференцируемые функции

... строгость, которой я хотел достигнуть в моем *Cours d'analyse*, ...
(Коши 1829, *Leçons*)

Полная вариация $f(x+h) - f(x)$... в общем случае может быть представ-
лена ... в виде суммы двух членов ... (Вейерштрасс 1861)

Производная от функции была введена и обсуждалась в разд. II.1. Теперь, когда мы располагаем понятием предела, можно дать ее строгое определение.

(6.1) Определение (Коши 1821). Пусть I — интервал и $x_0 \in I$. Функция $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ называется дифференцируемой в точке x_0 , если предел

$$(6.1) \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

существует. Значение этого предела называется производной f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$. Если функция f дифференцируема во всех точках I и если $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, f называется непрерывно дифференцируемой.

Иногда удобно писать $x = x_0 + h$, так что

$$(6.2) \quad f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

При заданном x_0 можно также рассмотреть функцию $r : I \rightarrow \mathbb{R}$, определенную как $r(x_0) = 0$ и

$$(6.3) \quad r(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \quad \text{при } x \neq x_0.$$

Теперь равенство (6.1) эквивалентно $\lim_{x \rightarrow x_0} r(x) = 0$ и мы приходим к следующему критерию.

(6.2) Формулировка Вейерштрасса (Вейерштрасс 1861, см. вышеприведенную цитату). Функция $f(x)$ является дифференцируемой в точке x_0 тогда и только тогда, когда существуют число $f'(x_0)$ и непрерывная в точке x_0 функция $r(x)$ такая, что $r(x_0) = 0$ и

$$(6.4) \quad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x)(x - x_0). \quad \square$$

У формулы (6.4) есть то преимущество, что она не содержит предела (вместо этого в ней используется непрерывность $r(x)$) и включает в себя уравнение касательной $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ к $f(x)$ при $x = x_0$. Кроме того, это будет послужит основой для теории дифференцируемости функций нескольких переменных.

Еще более простые формулы и доказательства можно получить, если два члена в формуле (6.4) объединить, полагая

$$(6.5) \quad \varphi(x) = f'(x_0) + r(x).$$

(6.3) Формулировка Каратеодори (Каратеодори 1950, с. 121). *Функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда существует непрерывная в x_0 функция $\varphi(x)$ такая, что*

$$(6.6) \quad f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0).$$

Величина $\varphi(x_0)$ является производной $f'(x_0)$ функции f в точке x_0 . □

Из (6.6) видно, что если f дифференцируема в точке x_0 , то она непрерывна в этой точке. Далее, из (6.5) и (6.3) (или прямо из (6.6)) видно, что функция

$$(6.7) \quad \varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{при } x \neq x_0$$

определена единственным образом при $x \neq x_0$, т. е. производная $f'(x_0)$ определена единственным образом (если она существует).

Замечания и примеры.

1. Очевидно, что функции $f(x) = 1$ и $f(x) = x$ дифференцируемы. Дифференцируемость функции $f(x) = x^2$ следует, например, из (6.6), если воспользоваться тождеством $x^2 - x_0^2 = (x + x_0)(x - x_0)$ (см. также разд. II.1).

2. Подчеркнем, что дифференцируемость в точке x_0 является *локальным свойством*. Если мы изменим значения функции вне интервала $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ при некотором $\varepsilon > 0$, свойство ее дифференцируемости в точке x_0 и значение производной $f'(x_0)$ не изменятся.

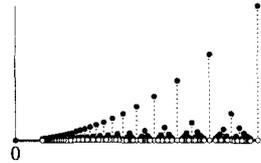
3. Если $I = [a, b]$ является замкнутым интервалом и $x_0 = a$, то (6.1) следует заменить правосторонним пределом.

4. Рассмотрим функцию $f(x) = |x|$ (абсолютная величина x). Если $x_0 > 0$, она дифференцируема и $f'(x_0) = 1$; при $x_0 < 0$ она также дифференцируема, но ее производная равна $f'(x_0) = -1$. Эта функция не дифференцируема в точке $x_0 = 0$, потому что $f(x)/x = |x|/x$ не имеет предела при $x \rightarrow 0$.

5. Функция

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{если } x \text{ иррациональное или целое} \\ 1/q^2 & \text{если } x = p/q \text{ (несократимая дробь)} \end{cases}$$

разрывна при каждом иррациональном x_0 . Однако она дифференцируема в точке $x_0 = 0$, ибо функция $\varphi(x)$ из (6.6) равна $\varphi(x) = f(x)/x$. Поскольку $|f(x)| \leq |x|^2$, $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0$ и $f'(x_0) = 0$.



(6.4) Теорема. *Если функция $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема в точке $x_0 \in (a, b)$ и $f'(x_0) > 0$, то существует такое $\delta > 0$, что*

$$\begin{aligned} f(x) &> f(x_0) && \text{для всех } x, \text{ удовлетворяющих неравенствам } x_0 < x < x_0 + \delta, \\ f(x) &< f(x_0) && \text{для всех } x, \text{ удовлетворяющих неравенствам } x_0 - \delta < x < x_0. \end{aligned}$$

Если функция достигает в точке x_0 максимума (или минимума), то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Неравенство $f'(x_0) > 0$ означает, что $\varphi(x_0) > 0$ (см. (6.6)). По непрерывности $\varphi(x) > 0$ в окрестности точки x_0 . Теперь доказываемые неравенства следуют из (6.7). Если функция имеет максимум в точке x_0 , то

$f(x) \leq f(x_0)$ по обе стороны от точки x_0 . Это возможно только если $f'(x_0) = 0$. □

(6.5) *Замечание.* Из теоремы 6.4 не следует, что функция, удовлетворяющая условию $f'(x_0) > 0$, монотонно возрастает в некоторой окрестности точки x_0 . В качестве контрпримера рассмотрим функцию $f(x)$ (см. рис. 6.1), заданную как $f(0) = 0$ и

$$f(x) = x + x^2 \sin(1/x^2) \quad \text{при } x \neq 0.$$

Она всюду дифференцируема и удовлетворяет условию $f'(0) = 1$ (потому что $f(x) = x + r(x) \cdot x$, где $|r(x)| \leq |x|$). При $x \neq 0$ производная

$$f'(x) = 1 + 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

сильно осциллирует вблизи начала координат. Поэтому, хотя $f(x)$ заключена между двумя параболлами, существуют точки с отрицательными производными, находящиеся сколь угодно близко к началу координат. Согласно теореме 6.4 существуют точки $\xi_1 < \xi_2$, близкие к 0, для которых $f(\xi_1) > f(\xi_2)$. Ниже мы покажем (следствие 6.12), что если $f'(x) > 0$ для всех $x \in (a, b)$, функция является монотонно возрастающей. Таким образом, построение этого контрпримера оказалось возможным только потому, что f не является непрерывно дифференцируемой функцией.

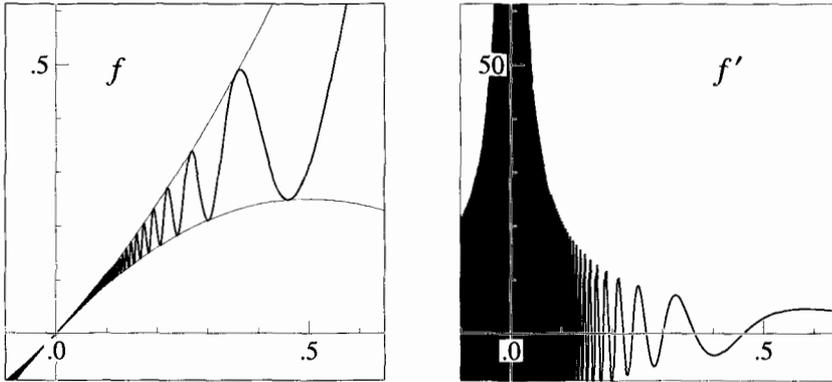


Рис. 6.1. Графики функции $y = x + x^2 \sin(1/x^2)$ и ее производной.

(6.6) Теорема. Если функции f и g дифференцируемы в точке x_0 , то функции

$$f + g, \quad f \cdot g, \quad f/g \quad (\text{если } g(x_0) \neq 0)$$

тоже дифференцируемы в этой точке, и справедливы формулы разд. II.1 для производных этих функций.

Доказательство. Мы приведем два различных доказательства для произведения $f \cdot g$. Для $f + g$ и f/g доказательства аналогичны.

Первое доказательство основано на тождестве

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = f(x)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + g(x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

которое получается путем прибавления и вычитания члена $f(x)g(x_0)$. Используя непрерывность функции f в точке x_0 (формула (6.4)), а также дифференцируемость f и g и теорему 1.5, мы получаем, что при $x \rightarrow x_0$ выражение в правой части равенства имеет конечный предел $f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0)$. Следовательно, произведение $f \cdot g$ дифференцируемо в точке x_0 .

Второе доказательство основано на формулировке Каратеодори 6.3. По предположению,

$$(6.8) \quad \begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0), & \varphi(x_0) &= f'(x_0), \\ g(x) &= g(x_0) + \psi(x)(x - x_0), & \psi(x_0) &= g'(x_0). \end{aligned}$$

Перемножив два равенства (6.8), мы получаем

$$f(x)g(x) = f(x_0)g(x_0) + \left(f(x_0)\psi(x) + g(x_0)\varphi(x) + \varphi \cdot \psi \cdot (x - x_0) \right) (x - x_0).$$

Очевидно, что функция в больших скобках является непрерывной в точке x_0 и ее значение при $x = x_0$ равно $f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0)$. \square

(6.7) Теорема (цепное правило для сложных функций). Если $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и если $z = g(y)$ дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$, то сложная функция $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ дифференцируема в точке x_0 и

$$(6.9) \quad (g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0).$$

Многие наши студенты оценят краткость и изящество этого доказательства. (Кун 1991)

Доказательство. Используя формулу (6.6), перепишем условие теоремы в виде

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \varphi(x)(x - x_0), & \varphi(x_0) &= f'(x_0), \\ g(y) - g(y_0) &= \psi(y)(y - y_0), & \psi(y_0) &= g'(y_0). \end{aligned}$$

Подставляя $y - y_0 = f(x) - f(x_0)$ из первого уравнения во второе, получаем

$$g(f(x)) - g(f(x_0)) = \psi(f(x)) \varphi(x)(x - x_0).$$

Функция $\psi(f(x)) \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0 , и ее значение при $x = x_0$ равно $g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$. \square

(6.8) Теорема (обратные функции). Пусть функция $f: I \rightarrow J$ является биективной и дифференцируемой в точке $x_0 \in I$, и предположим, что $f'(x_0) \neq 0$. Тогда обратная функция $f^{-1}: J \rightarrow I$ дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$, и

$$(6.10) \quad (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доказательство. По теореме 3.9 функция $f^{-1}(y)$ непрерывна. В формулировке Каратеодори (6.6)

$$f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0), \quad \varphi(x_0) = f'(x_0)$$

заменяем x и x_0 на $f^{-1}(y)$ и $f^{-1}(y_0)$, а $f(x)$ и $f(x_0)$ на y и y_0 , после чего получим

$$y - y_0 = \varphi(f^{-1}(y))(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)).$$

Из условия теоремы видно, что $\varphi(f^{-1}(y_0)) \neq 0$, и это неравенство остается справедливым (по непрерывности) в некоторой окрестности y_0 , поэтому деление допустимо, и мы получаем

$$f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) = \frac{1}{\varphi(f^{-1}(y))}(y - y_0).$$

Это завершает доказательство, так как по теореме 3.9 функция $1/\varphi(f^{-1}(y))$ тоже непрерывна. \square

Фундаментальная теорема дифференциального исчисления

Формула (II.4.6) является основным результатом всех вычислений разд. II.4. Сейчас мы изложим строгое доказательство этого результата. В частности, мы покажем, что у каждой непрерывной функции $f(x)$ есть первообразная, единственная с точностью до аддитивной постоянной.

(6.9) Теорема (существование первообразной). Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ есть непрерывная функция. Тогда функция

$$(6.11) \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

(которая существует в силу теоремы 5.10) дифференцируема на (a, b) и удовлетворяет соотношению $F'(x) = f(x)$. Следовательно, она является первообразной функции $f(x)$.

Доказательство. Из формулы (5.16) мы имеем

$$(6.12) \quad F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

Применяя теорему 5.17 о среднем значении, мы получаем

$$F(x) - F(x_0) = f(\xi)(x - x_0),$$

где $\xi = \xi(x, x_0)$ лежит между x и x_0 . При $x \rightarrow x_0$ значение $\xi(x, x_0)$ стремится к x_0 , и в силу непрерывности функции f в точке x_0 мы имеем $\lim_{x \rightarrow x_0} f(\xi) = f(x_0)$. Это доказывает (см. (6.6)) дифференцируемость $F(x)$, причем $F'(x_0) = f(x_0)$. \square

Единственность первообразных.

Это было получено с помощью *теоремы о среднем значении*, и величайшей заслугой Коши было то, что он распознал ее фундаментальную важность ... вот почему мы считаем Коши основоположником точного исчисления бесконечно малых. (Ф. Клейн 1908, англ. изд. р. 213)

Смотри прекрасное доказательство этой теоремы, принадлежащее г-ну Бонне, в *Traité de Calcul différentiel et intégral* г-на Серре, vol. I, р. 17. (Дарбу 1875, р. 111)

Наша следующая задача — доказательство *единственности* первообразной (с точностью до аддитивной постоянной). Нижеследующий ряд теорем, решающих эту задачу, стал одним из краеугольных камней в основании анализа после публикации книги Серре (1868; Серре приписывает эти идеи О. Бонне, см. цитаты).

(6.10) Теорема (Ролль 1690). Пусть функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ является непрерывной на $[a, b]$, дифференцируемой на (a, b) и такой, что $f(a) = f(b)$. Тогда существует $\xi \in (a, b)$ такое, что

$$(6.13) \quad f'(\xi) = 0.$$

Доказательство. Из теоремы 3.6 следует, что существуют $u, U \in [a, b]$ такие, что $f(u) \leq f(x) \leq f(U)$ для всех $x \in [a, b]$. Рассмотрим два случая. Если $f(u) = f(U)$, то $f(x)$ постоянна и ее производная всюду равна нулю. Если $f(u) < f(U)$, то по крайней мере одно из двух значений (скажем, $f(U)$) отлично от $f(a) = f(b)$. В этом случае $a < U < b$ и в соответствии с теоремой 6.4 $f'(U) = 0$. \square

(6.11) Теорема (Лагранж 1797). Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ есть функция, непрерывная на $[a, b]$ и дифференцируемая на (a, b) . Тогда существует число $\xi \in (a, b)$ такое, что

$$(6.14) \quad f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

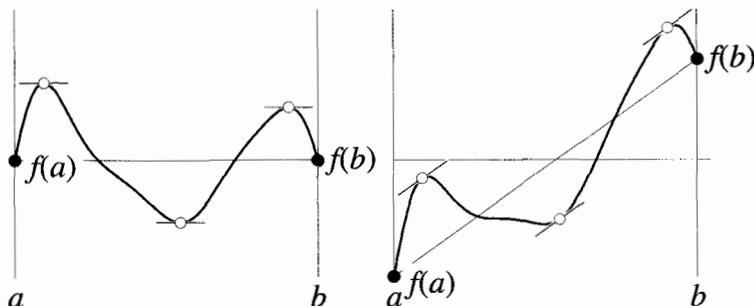


Рис. 6.2. Доказательство теорем Ролля и Лагранжа.

Доказательство. Идея состоит в том, чтобы вычесть из функции $f(x)$ функцию, соответствующую прямой линии, соединяющей точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ и

имеющей наклон $(f(b) - f(a))/(b - a)$, а затем применить теорему Ролля (рис. 6.2). Определим функцию

$$(6.15) \quad h(x) = f(x) - \left(f(a) + (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right).$$

В силу соотношений $h(a) = h(b) = 0$ и

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

Равенство (6.14) следует из $h'(\xi) = 0$ (теорема 6.10). □

(6.12) Следствие. Пусть функции $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны на $[a, b]$ и дифференцируемы на (a, b) . В этом случае

- a) если $f'(\xi) = 0$ при всех $\xi \in (a, b)$, то $f(x) = C$ (постоянная);
- b) если $f'(\xi) = g'(\xi)$ при всех $\xi \in (a, b)$, то $f(x) = g(x) + C$;
- c) если $f'(\xi) > 0$ при всех $\xi \in (a, b)$, то $f(x)$ монотонно возрастает, т. е., $f(x_1) < f(x_2)$ при всех $a \leq x_1 < x_2 \leq b$; и
- d) если $|f'(\xi)| \leq M$ при всех $\xi \in (a, b)$, то $|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$ при $x_1, x_2 \in [a, b]$.

Доказательство. Используя формулу (6.14) на интервале $[a, x]$ получаем утверждение (a) при $C = f(a)$. Утверждение (b) следует из (a). Два остальных утверждения получаются из теоремы 6.11, примененной на интервале $[x_1, x_2]$. □

(6.13) Фундаментальная теорема дифференциального исчисления¹. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Тогда существует первообразная $F(x)$ функции $f(x)$, единственная с точностью до аддитивной постоянной, и

$$(6.16) \quad \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Доказательство. Существование $F(x)$ очевидно из теоремы 6.9. Единственность (с точностью до постоянной) очевидна из следствия 6.12b. Если $F(x)$ является произвольной первообразной функции $f(x)$, мы имеем $F(x) = \int_a^x f(t) dt + C$. Полагая $x = a$, имеем $C = F(a)$, и формула (6.16) получается, если мы положим $x = b$. □

На рис. 6.3 представлено впечатляющее генеалогическое дерево теорем, необходимых для строгого доказательства Фундаментальной теоремы. Если бы Лейбниц увидел эту схему, у него могло бы не хватить смелости для того, чтобы сформулировать и использовать эту теорему.

“Фундаментальная теорема дифференциального исчисления” позволяет нам формулировать теоремы Дифференциального исчисления раздела III.6 как теоремы Интегрального исчисления (разд. III.5) и наоборот. В нескольких случаях

¹ В отечественной литературе эту теорему и формулу (6.16) обычно называют “основная формула интегрального исчисления”. — Прим. ред.

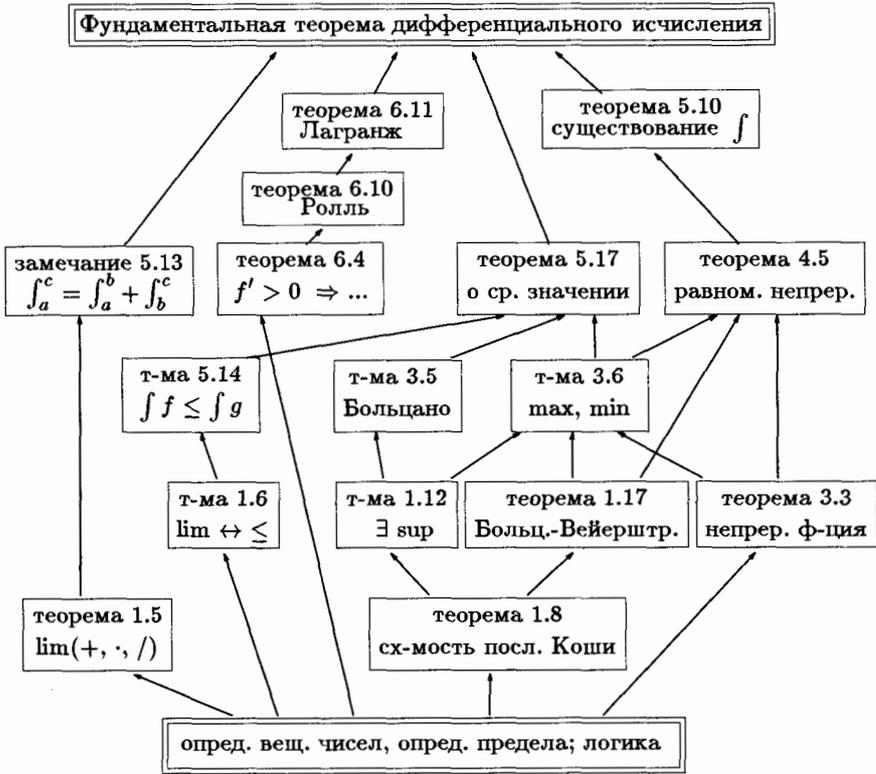


Рис. 6.3. Генеалогическое дерево Фундаментальной теоремы.

мы использовали этот факт в разд. II.4. “Интегрирование с помощью подстановки” (формула (II.4.14)) и “Интегрирование по частям” (формула (II.4.20)) теперь получают солидную теоретическую основу. Надо только потребовать, чтобы рассматриваемые функции были бы непрерывными с тем, чтобы интегралы существовали.

Правила Лопиталья

... совершенно чужд суетной славы, которую так жадно ищет большинство ученых ... (мнение Фонтенеля о Гийоме Франсуа Антуане де Лопитале, маркизе Сент-Месма и Монтелье, графе Антремонтском, сеньоре Дукском, 1661–1704)

Кроме того, я признаю, что я очень многим обязан светлым умам братьев Бернулли, особенно младшего, который ныне профессор в Гронингене. Я без ограничений пользовался их открытиями ... (де Лопиталь 1696)

Начнем со следующего обобщения теоремы Лагранжа 6.11.

(6.14) Теорема (Коши 1821). Пусть функции $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непре-

рывны на $[a, b]$ и дифференцируемы на (a, b) . Если $g'(x) \neq 0$ при $a < x < b$, то $g(b) \neq g(a)$ и существует $\xi \in (a, b)$ такое, что

$$(6.17) \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что из теоремы Ролля следует, что $g(b) \neq g(a)$, поскольку $g'(\xi) \neq 0$ при всех $\xi \in (a, b)$. Теперь заметим, что при $g(x) = x$ равенство (6.17) сводится к теореме 6.11. Действуя по аналогии с доказательством этой теоремы, вместо (6.15) возьмем

$$(6.18) \quad h(x) = f(x) - \left(f(a) + (g(x) - g(a)) \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \right).$$

Условия теоремы Ролля 6.10 для этой функции удовлетворены, и, следовательно, существует $\xi \in (a, b)$ такое, что $h'(\xi) = 0$. Это эквивалентно (6.17). \square

Задача. Предположим, что мы хотим вычислить предел частного $f(x)/g(x)$. Если обе функции $f(x)$ и $g(x)$ стремятся к 0 или ∞ при $x \rightarrow b$, мы приходим к неопределенным выражениям вида

$$\frac{0}{0} \quad \text{или} \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

Следующие теоремы и примеры показывают, как действовать в таких случаях.

(6.15) Теорема (И. Бернулли 1691/92, Лопиталь 1696). Пусть $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ и $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируемы на (a, b) и пусть $g'(x) \neq 0$ при $a < x < b$. Если

$$(6.19) \quad \lim_{x \rightarrow b-} f(x) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow b-} g(x) = 0$$

и существует $\lim_{x \rightarrow b-} f'(x)/g'(x) = \lambda$, то

$$(6.20) \quad \lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. Существование предела $f'(x)/g'(x)$ при $x \rightarrow b-$ означает, что при заданном $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$(6.21) \quad \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \lambda \right| < \varepsilon \quad \text{при} \quad b - \delta < \xi < b.$$

Из теоремы 6.14 для $u, v \in (b - \delta, b)$ следует, что

$$(6.22) \quad \left| \frac{f(u) - f(v)}{g(u) - g(v)} - \lambda \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \lambda \right| < \varepsilon.$$

В этой формуле мы полагаем $v \rightarrow b-$, используем (6.19) и получаем, что $|f(u)/g(u) - \lambda| \leq \varepsilon$ при $b - \delta < u < b$. Это доказывает равенство (6.20). \square

(6.16) Замечание. Слегка изменяя доказательство, можно видеть, что

- теорема справедлива при $b = +\infty$;
- теорема справедлива при $\lambda = +\infty$ или $\lambda = -\infty$; и
- теорема справедлива в пределе $x \rightarrow a+$.

(6.17) Теорема. В предположениях теоремы 6.15, где (6.19) заменено на

$$(6.23) \quad \lim_{x \rightarrow b-} f(x) = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow b-} g(x) = \infty,$$

формула (6.20) также справедлива.

Доказательство. Умножим (6.22) на $\frac{g(v) - g(u)}{g(v)} = 1 - \frac{g(u)}{g(v)}$, что дает

$$(6.24) \quad \left| \frac{f(v) - f(u)}{g(v)} - \lambda \left(1 - \frac{g(u)}{g(v)} \right) \right| < \varepsilon \left| 1 - \frac{g(u)}{g(v)} \right|.$$

В выражении в левой части выделим и оценим $|f(v)/g(v) - \lambda|$. Используя “обратное” неравенство треугольника $|A| - |B| \leq |A - B|$ (или $|A| \leq |A - B| + |B|$), получаем

$$\left| \frac{f(v)}{g(v)} - \lambda \right| < \varepsilon \left| 1 - \frac{g(u)}{g(v)} \right| + \left| \frac{f(u) - \lambda g(u)}{g(v)} \right|.$$

Теперь при фиксированном u устремим $v \rightarrow b-$. В силу (6.23) выражение в правой части стремится к ε . Следовательно, при v достаточно близком к b , справедливо неравенство $|f(v)/g(v) - \lambda| < 2\varepsilon$. Это и доказывает утверждение теоремы. \square

Примеры. Отношение функций $f(x) = \sin x$ и $g(x) = x$ при $x \rightarrow 0$ приводит к неопределенному выражению $0/0$. Используя теорему 6.15, мы получаем

$$(6.25) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

Очевидно, что эти равенства следует читать справа налево. Так как существует $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, то $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x/x$ также существует и равен 1.

Рассмотрим теперь функции $f(x) = e^{\alpha x}$ ($\alpha > 0$) и $g(x) = x^n$, которые обе стремятся к ∞ при $x \rightarrow \infty$. Повторное применение теоремы 6.17 (и замечания 6.16) дает

$$(6.26) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha e^{\alpha x}}{n x^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha^2 e^{\alpha x}}{n(n-1)x^{n-2}} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha^n e^{\alpha x}}{n!} = \infty.$$

Это показывает, что экспоненциальная функция $e^{\alpha x}$ при $x \rightarrow \infty$ возрастает быстрее, чем любой полином.

При $a > 0$ из теоремы 6.17 и замечания 6.16 мы получаем

$$(6.27) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^a} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{ax^{a-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{ax^a} = 0.$$

Следовательно, любой полином возрастает быстрее, чем логарифм.

Неопределенные выражения вида

$$0 \cdot \infty \quad \text{или} \quad 0^0 \quad \text{или} \quad \infty^0$$

можно рассматривать так же, как в следующих примерах:

$$(6.28) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0,$$

$$(6.29) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \exp(x \ln x) = \exp\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x\right) = \exp(0) = 1,$$

$$(6.30) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x} = \exp\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}\right) = \exp(0) = 1.$$

В последних двух примерах мы использовали непрерывность экспоненциальной функции.

Производные бесконечных рядов

Где доказано, что можно получить производную бесконечного ряда почленным его дифференцированием?

(Абель, 16 января 1826 г., *Oeuvres*, vol. 2, p. 258)

Следующая теорема дает обоснование почленного дифференцирования бесконечных рядов.

(6.18) Теорема. Пусть $f_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ — последовательность непрерывно дифференцируемых функций. Если

$$i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \text{ на } (a, b), \text{ и}$$

$$ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = p(x) \text{ и сходимость равномерная на } (a, b),$$

то $f(x)$ непрерывно дифференцируема на (a, b) , и для всех $x \in (a, b)$

$$(6.31) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = f'(x).$$

Доказательство. Нетрудно догадаться, что существенным “ингредиентом” этого доказательства (кроме фундаментальной теоремы дифференциального исчисления) является теорема 5.19 о перемене порядка перехода к пределу и интегрирования. Зафиксируем точку $x_0 \in (a, b)$. Так как $\{f'_n(x)\}$ сходится равномерно на (a, b) , то

$$\int_{x_0}^x p(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f'_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x) - f_n(x_0)) = f(x) - f(x_0).$$

Из теоремы 6.9 следует, что $p(x) = f'(x)$ и что равенство (6.31) справедливо. Непрерывность $f'(x)$ следует из теоремы 4.2. \square

(6.19) Контрпримеры. Примеры функций (см. рис. 6.4)

$$(6.32) \quad f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2} \quad \text{и} \quad f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$$

показывают, что одного условия $i)$ (даже при наличии равномерной сходимости) недостаточно для того, чтобы доказать равенство (6.31).

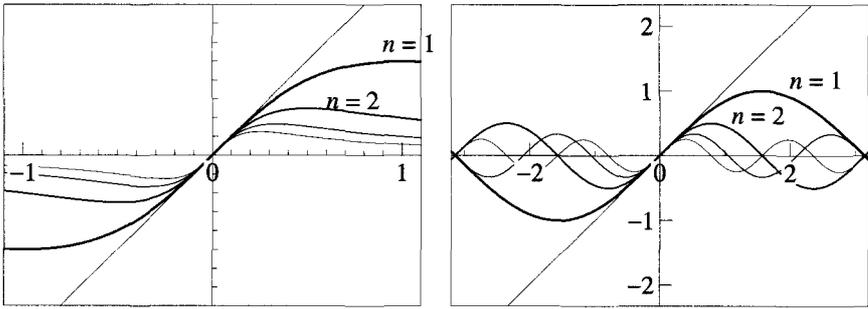


Рис. 6.4. Равномерная сходимость, при которой $\lim f'_n \neq (\lim f_n)'$.

Упражнения

6.1 Зададим положительное число n и определим функцию $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ как

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin(1/x^3) & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Сколько раз f_n дифференцируема и какие производные f_n непрерывны?

6.2 С помощью двух различных методов (используя (6.1), а также формулировку Каратеодори (6.6)) покажите, что если $g(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $g(x_0) \neq 0$, то $1/g(x)$ также дифференцируема в точке x_0 .

6.3 Покажите, что следующая функция является возрастающей на $[0, 1]$:

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot (2 - \cos(\ln x) - \sin(\ln x)) & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

но существует бесконечное количество точек, где $f'(\xi) = 0$. Противоречит ли это формуле (6.14)? Является ли $f(x)$ дифференцируемой при $x = 0$?

6.4 а) Пусть функция $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на $[a, b]$ и n раз дифференцируема на (a, b) . Покажите, что если $h(x)$ имеет $n + 1$ нулей на $[a, b]$, то существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что $h^{(n)}(\xi) = 0$.

Указание. Повторно применяйте теорему Ролля.

б) Положим $h(x) = f(x) - p(x)$, где $p(x)$ есть интерполяционный полином на равноотстоящих точках сетки (см. формулу (II.2.6)). Покажите, что для n раз дифференцируемой функции $f(x)$ (см. формулу (II.2.7))

$$(6.33) \quad \frac{\Delta^n y_0}{\Delta x^n} = f^{(n)}(\xi).$$

6.5 Функция, изображенная на рис. 6.5, которую часто называют “чертовой лестницей”, показывает, что теорема Лагранжа (см. следствие 6.12а) не столь тривиальна, как это может показаться. Если x в системе с основанием 3 имеет, например, представление $x = 0.20220002101220\dots$, то $f(x)$ в системе с основанием 2 получается посредством замены единицами всех двоек, предшествующих первой единице, и отбрасыванием всех следующих за ней цифр. (в нашем примере $f(x) = 0.101100011$). В частности,

$$f(x) = \frac{1}{2} \text{ при } x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \quad f(x) = \frac{1}{4} \text{ при } x \in \left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right], \quad f(x) = \frac{3}{4} \text{ при } x \in \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right].$$

Покажите, что эта функция непрерывная и неубывающая. Она дифференцируема, ее производная $f'(x) = 0$ на множестве меры $1/3 + 2/9 + 4/27 + 8/81 + \dots = 1$, т. е., как принято говорить, *почти всюду*. Тем не менее $f(0) \neq f(1)$.

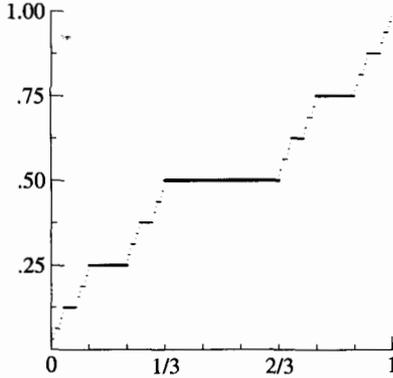


Рис. 6.5. "Чертова лестница".

6.6 Используя правило Лопиталя (и логарифмы), вычислите $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$.

6.7 (Приближенное спрямление дуги окружности). Пусть задана окружность радиуса 1. При заданной точке M на окружности пусть N будет точкой на касательной в точке O такой, что $\overline{NO} =$ дуге \overline{MO} . Вычислите точку P , находящуюся на прямой OC и на одной прямой с N и M (см. рис. 6.6). Каково предельное положение P , если α стремится к нулю?

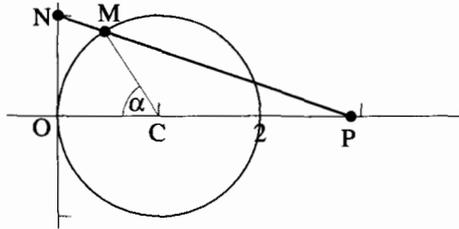


Рис. 6.6. Приближенное спрямление дуги окружности.

Замечание. Ответ равен 3. Поэтому, если P поместить точно в точке $x = 3$, \overline{NO} будет отличным приближением для дуги \overline{MO} .

6.8 Рассмотрим последовательность

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2} \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Покажите, что $f_n(x)$ равномерно сходится на $[-1, 1]$ к некоторой функции $f(x)$. Является ли $f(x)$ дифференцируемой? Для каких значений x $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = f'(x)$?

III.7 Степенные ряды и ряды Тейлора

После научной конференции, на которой Коши изложил свою теорию сходимости рядов, Лаплас поспешил домой и оставался там в уединении до тех пор, пока не окончил исследование рядов в своей *Mécanique céleste*. К счастью, все они оказались сходящимися. (М. Клайн 1972, р. 972)

Пусть $c_0, c_1, c_2, c_3, \dots$ — последовательность действительных коэффициентов и x — независимая переменная. Тогда ряд вида

$$(7.1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$$

называют *степенным рядом*. В этом разделе мы исследуем, на каком множестве значений x некоторый ряд вида (7.1) сходится. Мы изучим также свойства функций (непрерывность, производные, первообразные), представляемых степенными рядами (7.1).

(7.1) Лемма. *Предположим, что ряд (7.1) сходится при некотором \tilde{x} . Тогда он сходится также при всех x таких, что $|x| < |\tilde{x}|$. Более того, для каждого η такого, что $0 < \eta < |\tilde{x}|$, ряд (7.1) сходится абсолютно и равномерно на интервале $[-\eta, \eta]$.*

Доказательство. Из сходимости ряда $\sum c_n \tilde{x}^n$ следует, что последовательность $\{c_n \tilde{x}^n\}_{n \geq 0}$ ограничена (см. формулу (2.3) и теорему 1.3), т. е. существует $B \geq 0$ такое, что $|c_n \tilde{x}^n| \leq B$ при всех $n \geq 0$. Значит, при $|x| \leq \eta$ мы имеем

$$|c_n x^n| \leq |c_n| \eta^n = |c_n \tilde{x}^n| \cdot \left| \frac{\eta}{\tilde{x}} \right|^n \leq B q^n, \quad \text{где} \quad q = \frac{\eta}{|\tilde{x}|} < 1.$$

Из теоремы 2.5 следует, что сходимость и абсолютная сходимость $\sum c_n x^n$ имеет место. Равномерная сходимость следует из теоремы 4.3. \square

(7.2) Определение. *Введем определение*

$$(7.2) \quad \rho = \sup \left\{ |x| \text{ таких, что } \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ сходится} \right\}$$

и назовем ρ *радиусом сходимости ряда (7.1)*. Положим $\rho = \infty$, если (7.1) сходится при всех действительных x .

(7.3) Теорема. *Ряд (7.1) сходится при всех x , для которых $|x| < \rho$, он расходится при всех x , для которых $|x| > \rho$, и мы имеем равномерную сходимость на интервале $[-\eta, \eta]$, где $0 < \eta < \rho$.*

Доказательство. Пусть x удовлетворяет условию $|x| < \rho$. Тогда существует такое \tilde{x} , что $|x| < |\tilde{x}| < \rho$, причем ряд (7.1) сходится при \tilde{x} (в определении 1.11 положите $\varepsilon = (\rho - |x|)/2$). Таким образом, согласно лемме 7.1, мы имеем сходимость в точке x . Равномерная сходимость на интервале $[-\eta, \eta]$ доказывается аналогично. \square

Эта теорема ничего не говорит о сходимости ряда при $x = \rho$ и $x = -\rho$. И в самом деле, в этих точках могут возникать различные ситуации, как показывает следующий пример.

(7.4) Пример. Ряд

$$(7.3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^\alpha} = \frac{x}{1^\alpha} + \frac{x^2}{2^\alpha} + \frac{x^3}{3^\alpha} + \frac{x^4}{4^\alpha} + \dots$$

при $\alpha = 0$ является геометрической прогрессией (пример 2.2, не считая первого члена), при $\alpha = 1$ он сводится к $-\ln(1 - x)$ (формула (I.3.14)), а при $\alpha = 2$ это “дилогарифм Эйлера” (Эйлер 1768, *Inst. Calc. Int.*, Sectio Prima, Caput IV, Exemplum 2). Радиус сходимости ряда (7.3) $\rho = 1$ и не зависит от значения α (см. пример 7.6 ниже). При $\alpha = 0$ ряд расходится на обоих концах интервала сходимости. При $\alpha = 1$ он расходится при $x = +1$ (гармонический ряд), но сходится при $x = -1$ (по критерию Лейбница). При $\alpha = 2$ ряд сходится и при $x = +1$, и при $x = -1$ (см. лемму 2.6).

Определение радиуса сходимости

Следующие теоремы дают полезные формулы для определения радиуса сходимости.

(7.5) Теорема (Коши 1821). Если $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n/c_{n+1}|$ существует (или равен ∞), то

$$(7.4) \quad \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|.$$

Доказательство. Применим критерий 2.10 к ряду $\sum_n a_n$ с $a_n = c_n x^n$. Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1} x^{n+1}}{c_n x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = |x| / \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|,$$

ряд (7.1) сходится, если $|x| < \lim |c_n/c_{n+1}|$. Он расходится, если $|x| > \lim |c_n/c_{n+1}|$. Из этого следует формула (7.4). \square

(7.6) Примеры. Для ряда (7.3), где $c_n = 1/n^\alpha$, $|c_n/c_{n+1}| = (1 + 1/n)^\alpha \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, его радиус сходимости $\rho = 1$. Аналогично для биномиального ряда, который представляет функцию $(1 + x)^a$ (теорема I.2.2), имеем $|c_n/c_{n+1}| = (n + 1)/|a - n| \rightarrow 1$ и $\rho = 1$.

В разд. III.2 было доказано, что разложение в ряд функции e^x (см. теорему I.2.3), а также функций $\sin x$ и $\cos x$ (см. формулы (I.4.16) и (I.4.17)), сходится при всех действительных x . Следовательно, радиус их сходимости есть $\rho = \infty$. Примером ряда с радиусом сходимости $\rho = 0$ является ряд

$$1 + x + 2! x^2 + 3! x^3 + 4! x^4 + \dots$$

В этом случае $c_n = n!$ и $|c_n/c_{n+1}| = 1/(n + 1) \rightarrow 0$.

К ряду

$$(7.5) \quad \arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

формула теоремы 7.5 непосредственно не приложима,

потому что $|c_n/c_{n+1}|$ попеременно равно 0 и ∞ . Если мы поделим члены ряда на x и заменим x^2 на новую переменную z , ряд (7.5) будет представлен в виде $\sum_n c_n z^n$, где $c_n = 1/(2n+1)$. В силу теоремы 7.5 для этого ряда мы имеем $\rho = 1$. Следовательно, ряд (7.5) сходится при $|x^2| < 1$ (т.е. при $|x| < 1$), и $\rho = 1$.

В то время как в формуле (7.4) требуется существование предела, следующий результат справедлив без такого рода ограничения (см. также упр. 7.1 ниже).

(7.7) Теорема (Адамар 1892). *Радиус сходимости ряда (7.1) равен*

$$(7.6) \quad \rho = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Доказательство. Применим критерий 2.11 к ряду $\sum_n a_n$, где $a_n = c_n x^n$. Поскольку

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x| \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|},$$

видно, что ряд (7.1) сходится при $|x| < 1/\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{|c_n|}$. Он расходится, если $|x| > 1/\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{|c_n|}$. \square

Непрерывность

Пусть D есть область сходимости ряда (7.1):

$$(7.7) \quad D = \{x \mid \text{где ряд (7.1) сходится}\},$$

т.е. ряд (7.1) определяет функцию $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, заданную формулой

$$(7.8) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{при} \quad x \in D.$$

Из равномерной сходимости на $[-\eta, \eta]$ при $0 < \eta < \rho$ следует (см. теоремы 7.3 и 4.2), что $f(x)$ является непрерывной функцией в открытом интервале $(-\rho, \rho)$. Следующая знаменитая теорема Абеля рассматривает вопрос о непрерывности в конечных точках интервала сходимости.

(7.8) Теорема (Абель 1826). *Предположим, что ряд (7.8) сходится в точке $x_0 = \rho$ (или в точке $x_0 = -\rho$). Тогда функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 = \rho$ (или $x_0 = -\rho$).*

Доказательство. Предположим для простоты, что $\rho = 1$ и $x_0 = +1$. Если это не так, растянем и/или обратим интервал сходимости, сделав замену x_0 на $\pm x_0/\rho$. Поскольку согласно предположению сходимости при $x_0 = 1$ имеет место, из леммы 2.3 следует, что для $n \geq N$ и $k \geq 1$

$$(7.9) \quad |c_{n+1} + c_{n+2} + \dots + c_{n+k}| < \varepsilon.$$

Выберем теперь произвольное x из $[0, 1]$. Для $f_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i$ мы имеем

$$(7.10) \quad f_{n+k}(x) - f_n(x) = c_{n+1}x^{n+1} + c_{n+2}x^{n+2} + \dots + c_{n+k}x^{n+k}.$$

Если все $c_i \geq 0$, то из формулы (7.9) видно, что $|f_{n+k}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. В противном случае представим члены суммы (7.10) несколько более сложным способом (здесь мы записали это для случая $k = 4$):

$$\begin{aligned} & c_{n+1}x^{n+4} + c_{n+2}x^{n+4} + c_{n+3}x^{n+4} + c_{n+4}x^{n+4} + \\ & + c_{n+1}(x^{n+3} - x^{n+4}) + c_{n+2}(x^{n+3} - x^{n+4}) + c_{n+3}(x^{n+3} - x^{n+4}) + \\ & + c_{n+1}(x^{n+2} - x^{n+3}) + c_{n+2}(x^{n+2} - x^{n+3}) + \\ & + c_{n+1}(x^{n+1} - x^{n+2}) \end{aligned}$$

(этот процесс называется суммированием по частям (Абель 1826, см. упр. 7.2)). В каждой строке мы можем выделить общий (положительный) множитель x^{n+k} , $x^{n+k-1} - x^{n+k}$, ... и с помощью (7.9) и неравенства треугольника получить, что

$$|f_{n+k}(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \cdot (x^{n+k} + x^{n+k-1} - x^{n+k} + \dots + x^{n+1} - x^{n+2}) < \varepsilon$$

равномерно на $[0, 1]$. А тогда непрерывность функции $f(x)$ в точке $x_0 = 1$ следует из теоремы 4.2. □

Дифференцирование и интегрирование

Поскольку $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$ (см. формулу (6.30)), из теоремы 7.7 следует, что почленно продифференцированный или проинтегрированный степенной ряд имеет *такой же* радиус сходимости, что и первоначальный ряд. При этом имеет место следующая теорема.

(7.9) Теорема. Функция $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ дифференцируема при $|x| < \rho$, где ρ — радиус сходимости и $\rho > 0$, причем

$$(7.11) \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}.$$

Функция $f(x)$ имеет также первообразную на $(-\rho, \rho)$, которая равна

$$(7.12) \quad \int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Доказательство. При $0 \leq \eta < \rho$ сходимость этих рядов равномерна на $[-\eta, \eta]$ (конечно, также и на $(-\eta, \eta)$). Теперь из теоремы 6.18 следует, что функция $f(x)$ дифференцируема на $(-\eta, \eta)$ и что ее производная равна (7.11). Аналогично, формула (7.12) следует из следствия 5.20. □

(7.10) Замечание. Если ряд (7.1) сходится, скажем, в точке $x = \rho$, то продифференцированный ряд (7.11) вовсе не обязан сходиться в этой точке. Так обстоит дело, например, для ряда (7.3) при $\alpha = 2$. Однако из сходимости (7.1) в точке $x = \rho$ следует сходимость (7.12) в этой точке (см. упр. 7.3). Таким образом, используя теорему 7.8, мы видим, что тождество (7.12) справедливо при всех $x \in D$.

(7.11) **Пример.** Радиус сходимости геометрической прогрессии (пример 2.2) $\rho = 1$. Интегрируя ее почленно, используя теорему 7.9 и определение логарифмической функции \ln (разд. I.3), мы получаем, что при $x \in (-1, 1)$

$$(7.13) \quad \ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

Более того, ряд в (7.13) сходится при $x = 1$, и, в силу теоремы 7.8, мы получаем, что $\ln 2 = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \dots$ (на этот раз строго!).

Ряд Тейлора

... чтобы оценить величину остаточного члена этого ряда. Эта задача, одна из наиболее важных в теории рядов, до сих пор не решена ...
(Лагранж 1797, р. 42–43; *Oeuvres*, vol. 9, р. 71)

В 1797 г. (второе издание вышло в 1813 г.) Лагранж написал целый трактат, в котором в основу анализа было положено разложение функции в ряд Тейлора

$$(7.14) \quad f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a)$$

(см. формулу (II.2.8)), что, как он считал, позволило ему изгнать из анализа бесконечно малые величины, пределы и флюксии (“*dégagés de toute considération d’infiniment petits, d’évanouissans, de limites ou de fluxions*”, — *франц.*). Но эта мечта продержалась только около 25 лет.

Если рассматривать $x - a$ как новую переменную, наш ряд примет вид (7.1), и полученные выше результаты, относящиеся к сходимости рядов, будут применимы. Первая трудность состоит в том, что существуют бесконечно дифференцируемые функции, для которых ряд (7.14) не сходится ни в какой точке $x \neq a$ (см. упр. 7.6 ниже). Однако даже из сходимости ряда в (7.14) *не обязательно* следует тождество (7.14), как видно из следующего контрпримера.

(7.12) Контрпример.

... формула Тейлора, которую уже нельзя принимать в общем случае ...
(Коши 1823, *Résumé*, р. 1)

Коши (1823) рассмотрел функцию

$$(7.15) \quad f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{при } x \neq 0 \\ 0 & \text{при } x = 0, \end{cases}$$

которая везде непрерывна. Эта функция является настолько “плоской” в начале координат (см. рис. 7.1), что $f^{(i)}(0) = 0$ при всех i . Действительно, согласно правилам дифференцирования мы получаем (при $x \neq 0$)

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} \cdot e^{-1/x^2}, \quad f''(x) = \left(-\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right) \cdot e^{-1/x^2}$$

и видим, что $f^{(i)}(x)$ является полиномом от переменной $1/x$, умноженным на e^{-1/x^2} . Поскольку для всех n функции $x^{-n}e^{-1/x^2}$ стремятся к нулю, когда $x \rightarrow 0$ (см. примеры после теоремы 6.17), мы имеем $f^{(i)}(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$. Из того

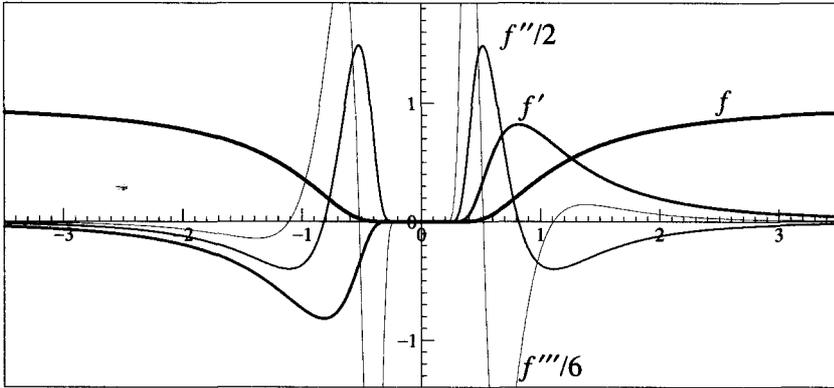


Рис. 7.1. Графики функции e^{-1/x^2} и ее производных.

факта, что $f^{(i)}(x)/x \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$, следует, что $f^{(i+1)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} f^{(i)}(h)/h = 0$. Таким образом, рядом Тейлора для функции $f(x)$ (7.15) является $0 + 0 + 0 + \dots$, который, очевидно, сходится при всех x . Однако формула (7.14) неверна при $x \neq 0$.

Чтобы установить справедливость равенства (7.14) для конкретных функций, надо рассмотреть *частичные суммы* их рядов Тейлора и оценить их остаточные члены. Полезная в этом контексте формула (II.4.32) была выведена в конце разд. II.4. Этот результат подытожен в следующей теореме.

(7.13) Теорема. Пусть $f(x)$ является $k + 1$ раз непрерывно дифференцируемой на $[a, x]$ (или на $[x, a]$, если $x < a$). Тогда

$$f(x) = \sum_{i=0}^k \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) dt. \quad \square$$

Биномиальный ряд

... но больше всего удовольствия мне доставляет статья ... о простом ряде

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2} x^2 + \dots$$

Я полагаю, что это первое строгое доказательство биномиальной формулы ... (Абель, письмо к Холмбо 1826, *Oeuvres*, vol. 2, p. 261)

Строгое доказательство биномиального тождества

$$(7.16) \quad (1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!} x^3 + \dots$$

при $|x| < 1$ и произвольном a было впервые получено Абелем в 1826 г. Доказательство, основанное на ряде Тейлора, можно найти в лекции Вейерштрасса (см. Вейерштрасс 1861).

Если положить $f(x) = (1+x)^a$ и вычислить производные этой функции $f'(x) = a(1+x)^{a-1}$, $f''(x) = a(a-1)(1+x)^{a-2}, \dots$, то мы увидим, что ряд (7.16)

является просто рядом Тейлора функции $f(x) = (1+x)^a$. Его радиус сходимости $\rho = 1$ был вычислен в примере 7.6. Чтобы доказать справедливость тождества (7.16) при $|x| < 1$, надо доказать, что остаточный член (см. теорему 7.13)

$$(7.17) \quad R_k(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^k}{k!} a(a-1) \cdots (a-k)(1+t)^{a-k-1} dt$$

сходится к нулю при $k \rightarrow \infty$.

Используя теорему 5.17 и полагая $\xi = \theta_k x$ при $0 < \theta_k < 1$, мы получаем

$$\begin{aligned} R_k(x) &= \frac{(x - \theta_k x)^k}{k!} a(a-1) \cdots (a-k)(1 + \theta_k x)^{a-k-1} \cdot x \\ &= \frac{(a-1)(a-2) \cdots (a-k)}{k!} \cdot x^k \cdot \left(\frac{1 - \theta_k}{1 + \theta_k x} \right)^k \cdot (1 + \theta_k x)^{a-1} \cdot ax. \end{aligned}$$

Множитель ax постоянен; величина $(1 + \theta_k x)^{a-1}$ лежит между $(1+x)^{a-1}$ и 1 и ограничена; из того, что $0 < 1 - \theta_k < 1 + \theta_k x$ для всех $|x| < 1$, следует, что множитель $\left(\frac{1 - \theta_k}{1 + \theta_k x} \right)^k$ ограничен единицей. Поскольку остающийся множитель

$$\frac{(a-1)(a-2) \cdots (a-k)}{k!} \cdot x^k$$

при всех $|x| < 1$ можно рассматривать как общий член сходящегося ряда, он стремится к нулю согласно (2.3). Следовательно, мы имеем $R_k(x) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, и тождество (7.16) установлено при $|x| < 1$.

Если ряд (7.16) сходится при $x = +1$ или $x = -1$, он представляет непрерывную функцию (теорема 7.8). Следовательно, он равен $(1+x)^a$ также и в этих точках.

Оценка остаточного члена без использования интегрального исчисления. Попытки Лагранжа (1797) вычислить остаточный член в формуле Тейлора увенчались получением следующих изящных формул (“ce théorème nouveau et remarquable par sa simplicité et sa généralité ...” — “эта новая теорема замечательна своей простотой и своей общностью ...”, — франц.):

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + (x-a)f'(\xi) \\ (7.18) \quad f(x) &= f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(\xi) \\ f(x) &= f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(\xi), \end{aligned}$$

и т. д., где ξ — неизвестная величина, заключенная между a и x .

(7.14) Теорема (Лагранж 1797). Пусть $f(x)$ — функция, непрерывная на $[a, x]$ и $k+1$ раз дифференцируемая на (a, x) . Тогда существует $\xi \in (a, x)$ такое, что

$$f(x) = \sum_{i=0}^k \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi).$$

Доказательство. Следуя элегантной идее Коши (1823), запишем остаточный член как

$$(7.19) \quad R_k(x) = f(x) - \sum_{i=0}^k \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a)$$

и сравним его с функцией $S_k(x) = (x-a)^{k+1}/(k+1)!$. Имеем

$$R(a) = 0, \quad R'(a) = 0, \quad \dots, \quad R^{(k)}(a) = 0$$

и аналогично $S^{(i)}(a) = 0$ для $i = 0, 1, \dots, k$. Последовательно применяя теорему 6.14, получаем

$$(7.20) \quad \begin{aligned} \frac{R_k(x)}{S_k(x)} &= \frac{R_k(x) - R_k(a)}{S_k(x) - S_k(a)} = \frac{R'_k(\xi_1)}{S'_k(\xi_1)} = \frac{R'_k(\xi_1) - R'_k(a)}{S'_k(\xi_1) - S'_k(a)} \\ &= \frac{R''_k(\xi_2)}{S''_k(\xi_2)} = \frac{R''_k(\xi_2) - R''_k(a)}{S''_k(\xi_2) - S''_k(a)} = \dots = \frac{R^{(k+1)}_k(\xi_{k+1})}{S^{(k+1)}_k(\xi_{k+1})}, \end{aligned}$$

где ξ_1 лежит между x и a , ξ_2 — между ξ_1 и a , и т.д. Поскольку $S^{(k+1)}_k(x) = 1$ и $R^{(k+1)}_k(x) = f^{(k+1)}(x)$, из (7.20) мы получаем, что

$$R_k(x) = S_k(x) \cdot f^{(k+1)}(\xi),$$

где $\xi = \xi_{k+1}$. Теорема доказана. □

Замечание. Соотношение между остаточными членами теорем 7.13 и 7.14 дается теоремой 5.18. Доказательство, принадлежащее Лагранжу, см. в упр. 7.8.

Упражнения

7.1 Определите радиус сходимости ряда

$$f(x) = 1 + 2x + x^2 + 2x^3 + x^4 + 2x^5 + \dots$$

и покажите, что теорема 7.5 здесь неприменима, а теорема 7.7 применима.

7.2 (Суммирование по частям, Абель 1826). Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — две последовательности. Докажите, что

$$\sum_{n=0}^N a_n b_n = \sum_{n=0}^N A_n (b_n - b_{n+1}) + A_N b_{N+1} - A_{-1} b_0,$$

где $A_{-1} = \alpha$ — произвольная постоянная, а $A_n = \alpha + a_0 + a_1 + \dots + a_n$.

Указание. Воспользуйтесь тождеством

$$a_n b_n = (A_n - A_{n-1}) b_n = A_n (b_n - b_{n+1}) - A_{n-1} b_n + A_n b_{n+1}.$$

7.3 Рассмотрим ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n}.$$

Докажите, что из сходимости первого ряда следует сходимость второго. Доказательство содержит трудность, аналогичную той, которая была в доказательстве теоремы 7.8 и которую можно преодолеть с помощью аналогичной идеи (суммирование по частям, см. предыдущее упражнение).

7.4 Исследуйте сходимость ряда Ньютона—Грегори

$$\arcsin(x) = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \dots$$

при $x = 1$ и $x = -1$.

Указание. Для понимания асимптотического поведения коэффициентов полезно вспомнить о произведении Валлиса.

7.5 Пусть D' — область сходимости ряда (7.11).

Докажите, что равенство в формуле (7.11)

имеет место при всех $x \in D'$.

7.6 Пример бесконечно дифференцируемой функции, ряд Тейлора которой не сходится (см. Лерх 1888, Прингсгейм 1888). Покажите, что ряд

$$f(x) = \frac{\cos 2x}{1!} + \frac{\cos 4x}{2!} + \frac{\cos 8x}{3!} + \frac{\cos 16x}{4!} + \dots$$

и все его производные равномерно сходятся на \mathbb{R} . Покажите, что его ряд Тейлора в начале координат имеет вид

$$f(0) + f'(0)x + \dots$$

$$= (e - 1) - \frac{e^4 - 1}{2!} x^2 + \frac{e^{16} - 1}{4!} x^4 - \frac{e^{64} - 1}{6!} x^6 + \dots$$

и расходится при всех $x \neq 0$.

Тем не менее, для того, чтобы вычислить, например, $f(0.01)$ (правильное значение $f(0.01) = 1.71572953$), полезны два первых члена этого ряда. Почему?

7.7 Исследуйте сходимость ряда (7.16) при $x = 1$ и $x = -1$.

7.8 Следуя Лагранжу, выведите формулы (7.18), используя, как бы мы сказали в настоящее время, соображения “гомотопии”.

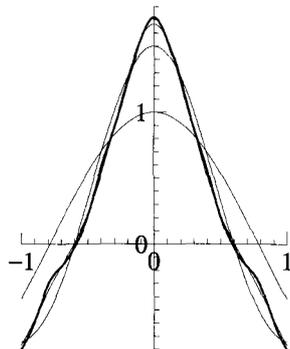
Указание. Положите

$$(7.21) \quad f(x) = f(x - zx) + zx f'(x - zx) + \frac{z^2 x^2}{2!} f''(x - zx) + \frac{x^3}{3!} R(z),$$

где z — переменная, заключенная между 0 и 1, и где x рассматривается как фиксированная постоянная. Положите $z = 0$, и получите $R(0) = 0$. Если $z = 1$, мы видим, что $(x^3/3!)R(1)$ есть искомым остаточный член. Теперь продифференцируйте (7.21) по z , что дает $R'(z) = 3z^2 f'''(x - zx)$. Наконец, проинтегрируйте от 0 до 1 и примените теорему 5.18.

7.9 (Абель 1826). Докажите, что тождество (2.19) справедливо, если ряды $\sum_i a_i$, $\sum_j b_j$ и их произведение Коши сходятся.

Указание. Примените теорему Абеля 7.8 к функции $f(x) \cdot g(x)$, где $f(x) = \sum_i a_i x^i$ и $g(x) = \sum_j b_j x^j$.



III.8 Несобственные интегралы

Теория интеграла Римана $\int_a^b f(x) dx$ в разд. III.5 основана на предположениях, что $[a, b]$ — конечный интервал и что функция $f(x)$ на нем ограничена. Теперь мы продемонстрируем, как эти ограничения можно преодолеть. Если хотя бы одно из этих двух предположений не выполнено, то говорят о *несобственном интеграле*.

Ограниченные функции на бесконечном интервале

(8.1) Определение. Пусть $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема на каждом интервале $[a, b]$, где $b > a$. Если предел

$$\int_a^\infty f(x) dx := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

существует, то мы говорим, что $f(x)$ интегрируема на $[a, \infty)$ и что $\int_a^\infty f(x) dx$ является сходящимся интегралом.

Только зануды излагают общий случай. Настоящие учителя разбирают примеры. (Парлетт, см. *Math. Intelligencer*, vol. 14, No. 1, p. 35)

(8.2) Примеры. Рассмотрим сначала экспоненциальную функцию на интервале $[0, \infty)$. По определению 8.1 мы имеем

$$\int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-e^{-x} \Big|_0^b \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} (1 - e^{-b}) = 1.$$

Привыкнув к этому определению, мы просто напишем

$$(8.1) \quad \int_0^\infty e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^\infty = 1.$$

Далее, рассмотрим функцию $x^{-\alpha}$ на интервале $[1, \infty)$:

$$(8.2) \quad \int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \int_1^\infty x^{-\alpha} dx = \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_1^\infty = \begin{cases} \text{расходится} & \text{при } \alpha < 1 \\ (\alpha - 1)^{-1} & \text{при } \alpha > 1. \end{cases}$$

При $\alpha = 1$ первообразная равна $\ln x$ и несобственный интеграл расходится. Но как мы можем проверить интегрируемость на интервале $[a, \infty)$ в случае, когда нам не известна первообразная в явном виде?

(8.3) Лемма. Пусть $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема на каждом интервале $[a, b]$.

- Если $|f(x)| \leq g(x)$ при всех $x \geq a$ и $\int_a^\infty g(x) dx$ сходится, то $\int_a^\infty f(x) dx$ также сходится.
- Если $0 \leq g(x) \leq f(x)$ при всех $x \geq a$ и $\int_a^\infty g(x) dx$ расходится, то $\int_a^\infty f(x) dx$ также расходится.

Доказательство. Часть (а) следует из критерия Коши (теорема 3.12) и теоремы 5.14, так как $|\int_b^{\hat{b}} f(x) dx| \leq \int_b^{\hat{b}} |f(x)| dx \leq \int_b^{\hat{b}} g(x) dx < \varepsilon$ при достаточно больших $b < \hat{b}$. Часть (б) очевидна. \square

(8.4) Пример. При $\alpha > 0$ рассмотрим функцию $(1 + x^\alpha)^{-1}$ на интервале $[0, \infty)$. Разделим интеграл на две части, а именно,

$$(8.3) \quad \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^\alpha} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^\alpha} + \int_1^\infty \frac{dx}{1+x^\alpha}.$$

Первый интеграл является “собственным”. Для оценки второго учтем, что

$$\frac{1}{2x^\alpha} \leq \frac{1}{1+x^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha} \quad \text{при } x \geq 1.$$

Таким образом, из леммы 8.3 и формулы (8.2) следует, что интеграл (8.3) сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

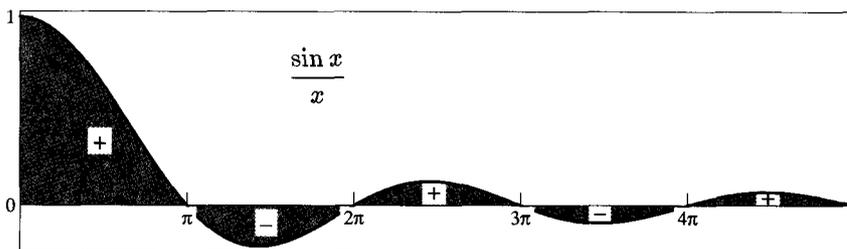


Рис. 8.1. График функции $\sin x/x$.

(8.5) Пример. Рассмотрим существование интеграла

$$(8.4) \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx.$$

Функция $f(x) = \sin x/x$ непрерывна в точке $x = 0$, причем $f(0) = 1$, так что в этой точке не создает трудностей. Использование оценки $|\sin x| \leq 1$ ничего не дает, поскольку интеграл $\int_1^\infty x^{-1} dx$ расходится. Однако из графика функции $f(x)$ (см. рис. 8.1) видно, что интеграл может быть представлен как знакопеременный ряд вида $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots$, где

$$a_0 = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx, \quad a_1 = - \int_\pi^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx, \quad a_2 = \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin x}{x} dx, \quad \dots$$

Этот ряд сходится в силу критерия Лейбница (теорема 2.4). Условие $a_{i+1} \leq a_i$ можно проверить путем подстановки $x \mapsto x - \pi$, а $a_i \rightarrow 0$ следует из простой оценки $0 < a_i \leq 1/i$.

(8.6) Теорема (Маклорен 1742). Пусть функция $f(x) \geq 0$ не возрастает на $[1, \infty)$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ сходится} \iff \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ сходится.}$$

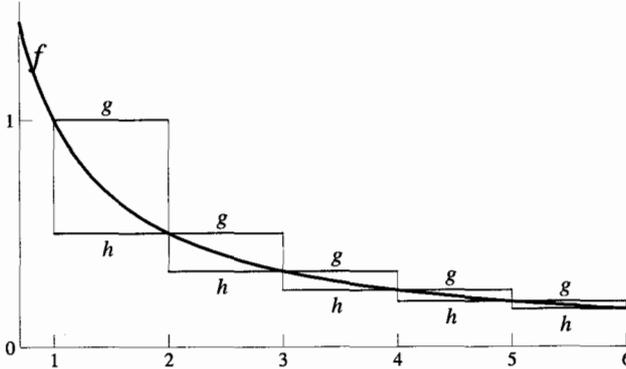


Рис. 8.2. Мажоризация и миноризация функции $f(x)$.

Доказательство. Пусть $g(x) = f([x])$ и $h(x) = f([x] + 1)$ представляют собой ступенчатые функции, изображенные на рис. 8.2 (здесь $[x]$ означает наибольшее целое число, не превосходящее x). Эти функции интегрируемы на конечных интервалах (в силу теоремы 5.11) и, поскольку $f(x)$ монотонна, мы имеем $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ при всех x . Следовательно,

$$\sum_{n=2}^N f(n) \leq \int_1^N f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{N-1} f(n)$$

и утверждение следует из теоремы 1.13, так как $f(x) \geq 0$. □

Поскольку интегралы часто бывает вычислять легче, чем суммы, эта теорема очень полезна при исследовании сходимости рядов. Например, из формулы (8.2) следует изящное новое доказательство леммы 2.6.

Если мы хотим посмотреть, что происходит “между” расходящимся рядом $\sum 1/n$ и сходящимся рядом $\sum 1/n^\alpha$ (при некотором $\alpha > 1$), надо исследовать ряд

$$(8.5) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$$

(для больших n и любых $\alpha > 1$ и $\beta > 0$ мы имеем $n < n(\ln n)^\beta < n^\alpha$ в силу формулы (6.27)). С помощью преобразования $u = \ln x$ мы получаем

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \cdot (\ln x)^\beta} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{du}{u^\beta},$$

и из теоремы 8.6 и формулы (8.2) следует, что ряд (8.5) сходится при $\beta > 1$, но расходится при $\beta \leq 1$.

Интегралы в пределах от $-\infty$ до $+\infty$.

Было бы неблагоприятно вводить следующее определение:

$$(8.6) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) dx$$

(если этот предел существует). Такое определение приводит к бессмыслице, если, например, использовать формулу преобразования (II.4.14) при $z = x+1$ ($dz = dx$). Согласно вышеприведенному определению мы получили бы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z dz = 0 \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} (x+1) dx = \infty.$$

(8.7) Определение. Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, интегрируемая на каждом ограниченном интервале $[a, b]$. В этом случае мы говорим, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{\infty} f(x) dx$$

существует, если оба несобственных интеграла в правой части существуют.

Два интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

сходятся в смысле определения 8.7. Первый стремится к π (первообразной является $\operatorname{arctg} x$). Сходимость второго интеграла видна из леммы 8.3, если использовать неравенство $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ при $x \geq 1$.

Неограниченные функции на конечном интервале

(8.8) Определение (Гаусс 1812, §36). Если функция $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема на каждом интервале вида $[a + \varepsilon, b]$, то мы вводим определение

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx,$$

если этот предел существует.

Это определение включает и случаи, когда $|f(x)| \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow a$. Аналогичное определение можно ввести, если $|f(x)| \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow b$. Для проверки интегрируемости такой функции нетрудно приспособить лемму 8.3, сделав очевидные изменения.

(8.9) Примеры. Для функции $x^{-\alpha}$ на интервале $(0, 1]$ имеем

$$(8.7) \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_\varepsilon^1 = \begin{cases} \text{расходится} & \text{при } \alpha > 1 \\ (1-\alpha)^{-1} & \text{при } \alpha < 1. \end{cases}$$

В случае $\alpha = 1$ интеграл также расходится. Следовательно, гипербола $y = 1/x$ ($\alpha = 1$) является предельным случаем с бесконечной площадью слева ($0 < x \leq 1$) и справа ($x \geq 1$). Если α уменьшается, площадь слева становится конечной, а если α увеличивается, становится конечной площадь справа.

Интеграл

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha} dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{x^{\alpha-1}} dx$$

сходится в том и только том случае, когда $\alpha - 1 < 1$, т.е. $\alpha < 2$. Это связано с тем фактом, что функция $f(x) = \sin x/x$ непрерывна в нуле и $f(0) = 1$.

Гамма-функция Эйлера

В течение всей своей жизни Эйлер интересовался “интерполяцией” факториалов $0! = 1, 1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, 4! = 24, \dots$ на нецелые значения. Эту величину он обозначал $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot x$ (“De Differentiatione Functionum Inexplicabilium”, см. 1755, Caput XVI of *Inst. Calc. Diff., Opera*, vol.X). В конце концов в 1781 г. он нашел определение (полностью “explicabilium” — явное, лат.), используемое и ныне: интегрирование по частям следующего интеграла (где $u(x) = x^n$, $v'(x) = e^{-x}$) приводит к

$$(8.8) \quad \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = -x^n e^{-x} \Big|_0^\infty + n \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx.$$

Член $x^n e^{-x}$ обращается в нуль при $x = 0$ ($n > 0$) и при $x \rightarrow \infty$, поэтому

$$(8.9) \quad \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$$

Заменим здесь n нецелым действительным числом.

(8.10) Определение. Для $\alpha > 0$ введем определение

$$(8.10) \quad \Gamma(\alpha) := \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Теперь надо показать, что интеграл (8.10) сходится. Здесь имеются две трудности: подынтегральная функция неограниченна при $x \rightarrow 0$ (если $\alpha < 1$), и интервал интегрирования бесконечен. Поэтому разобьем интеграл на два:

$$(8.11) \quad \int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx + \int_1^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Из оценки $x^{\alpha-1} e^{-x} \leq x^{\alpha-1}$, из леммы 8.3 и из формулы (8.7) следует, что первый интеграл в (8.11) сходится при $\alpha > 0$. Для второго интеграла в (8.11) используем оценку $x^{\alpha-1} e^{-x} = x^{\alpha-1} e^{-x/2} \cdot e^{-x/2} \leq M e^{-x/2}$ (см. примеры после теоремы 6.17) и опять лемму 8.3.

Из формулы (8.9) и вычислений в (8.8) следует, что

$$(8.12) \quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad \text{при } \alpha > 0.$$

С помощью второго соотношения в (8.12) можно распространить определение $\Gamma(\alpha)$ на отрицательные α ($\alpha \neq -1, -2, -3, \dots$), полагая

$$(8.13) \quad \Gamma(\alpha - 1) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\alpha - 1}$$

(см. рис. 8.3). В разд. IV.5 мы покажем, что $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

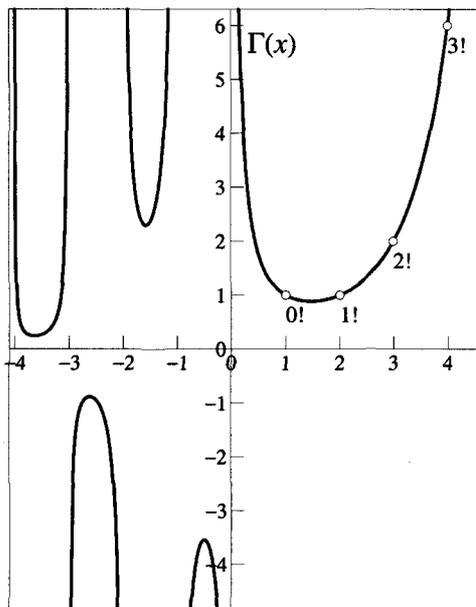


Рис. 8.3. Гамма-функция.

Упражнения.

8.1 Покажите, что интегралы Френеля (см. рис. II.6.2)

$$\int_0^{\infty} \sin x^2 dx, \quad \int_0^{\infty} \cos x^2 dx$$

сходятся (можно также использовать замену координат и найти интеграл, аналогичный (8.4); сравните с рис. 8.1).

8.2 Покажите, что для последовательности

$$a_n = 2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ существует и $1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq 2$ (может быть полезно вспомнить, что $\int (1/\sqrt{x}) dx = 2\sqrt{x}$).

8.3 Используя подходящую замену координат, покажите, что

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

III.9 Две теоремы о непрерывных функциях

Этот раздел посвящен двум результатам Вейерштрасса. Первый состоит в доказательстве существования нигде не дифференцируемых непрерывных функций. Второй — в том, что непрерывная функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ может быть с произвольной точностью приближена полиномами.

Непрерывные, но нигде не дифференцируемые функции

До самого последнего времени считалось, что ... непрерывная функция ... всегда имеет первую производную, значение которой может быть неопределенным или бесконечным только в некоторых изолированных точках. Насколько я знаю, даже в работах Гаусса, Коши и Дирихле, которые привыкли очень сурово критиковать все, что относится к области их интересов, не высказывалось иное мнение. (Вейерштрасс 1872)

Лет сто назад такую функцию считали бы надругательством над здравым смыслом.

(Пуанкаре 1899, *L'oeuvre math. de Weierstrass*, Acta Math., vol. 22, p. 5)

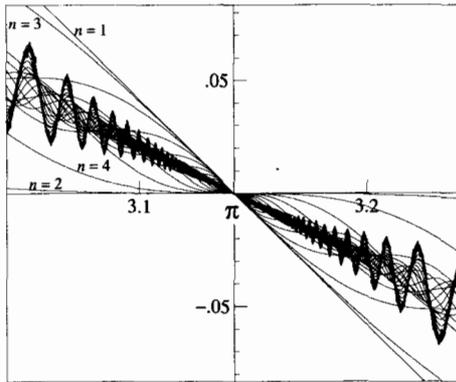


Рис. 9.1. Функция Римана (9.1) в окрестности $x = \pi$.

До эпохи Римана и Вейерштрасса обычно считалось, что каждая непрерывная функция является дифференцируемой везде, кроме, быть может, некоторых особых точек (см. цитаты). В 1806 г. А.-М. Ампер (имя которого вам, конечно, знакомо) даже опубликовал “доказательство” этого утверждения (*J. Ecole Polyt.*, vol. 6, p. 148). Первым шоком был приведенный Риманом пример функции (5.24), которая, будучи проинтегрированной, дает функцию, не дифференцируемую на всюду плотном множестве точек. После этого начался поиск функций, которые *нигде* не дифференцируемы. Около 1861 г. (см. Вейерштрасс 1872) Риман считал, что функция

$$(9.1) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2} = \sin x + \frac{1}{4} \sin(4x) + \frac{1}{9} \sin(9x) + \dots$$

(см. формулу (3.7)), которая непрерывна, поскольку ее ряд равномерно сходится (см. теоремы 4.3 и 4.2), нигде не дифференцируема. Вейерштрасс признал, что ему не удалось *доказать* это утверждение, и действительно, Жерве (1970) нашел, что в некоторых точках функция (9.1) дифференцируема, например, в точке $x = \pi$ (см. рис. 9.1).

(9.1) Теорема (Вейерштрасс 1872). *Существуют непрерывные функции, которые нигде не дифференцируемы.*

Доказательство. В результате вычислений объемом в две страницы Вейерштрасс показал, что ряд

$$(9.2) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos(a^n x),$$

равномерно сходящийся при $b < 1$, нигде не дифференцируем при $ab > 1 + 3\pi/2$. В дальнейшем многие исследователи, заинтригованные этим явлением, изобрели новые примеры. Среди них были, в частности, Дини (1878, Chap. 10), фон Кох (1906, см. рис. IV.5.6 ниже), Гильберт (1891, см. рис. IV.2.3 ниже) и Такаги (1903). Функцию Такаги вновь открыл Толл (1982) и назвал ее функцией “бланманже”. Эта функция определяется следующим образом. Рассмотрим функцию

$$(9.3) \quad K(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1-x & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

и продолжим ее периодически (т. е. $K(x+1) = K(x)$ при всех x), что дает непрерывную зигзагообразную функцию. Теперь определим (см. рис. 9.2) функцию

$$(9.4) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} K(2^n x) = K(x) + \frac{1}{2} K(2x) + \frac{1}{4} K(4x) + \frac{1}{8} K(8x) + \dots$$

Поскольку $|K(x)| \leq 1/2$ и $1+1/2+1/4+1/8+\dots$ сходится, ряд (9.4) сходится равномерно (теорема 4.3) и представляет непрерывную функцию $f(x)$ (теорема 4.2). У функции $f(x)$ есть замечательное “фрактальное” свойство: разность между $f(x)$ и усеченными рядами в (9.4) опять является функцией “бланманже”, однако масштабированной с помощью множителя 2^{-n} , т. е.

$$f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2^j} K(2^j x) = \frac{1}{2^n} f(2^n x).$$

Чтобы показать, что функция (9.4) *нигде* не дифференцируема, воспользуемся изящным рассуждением, которое предложил де Рам (1957). Его идея состоит в том, чтобы для заданной точки x_0 взять числа $\alpha_n = i/2^n$ и $\beta_n = (i+1)/2^n$ (где i — целое число, такое, что $\alpha_n \leq x_0 < \beta_n$) и рассмотреть отношение

$$(9.5) \quad r_n = \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n}.$$

Так как при значениях x , равных α_n и β_n , сумма в (9.4) оказывается конечной, то r_n определяет наклон функции, заданной усеченным рядом $\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2^j} K(2^j x)$

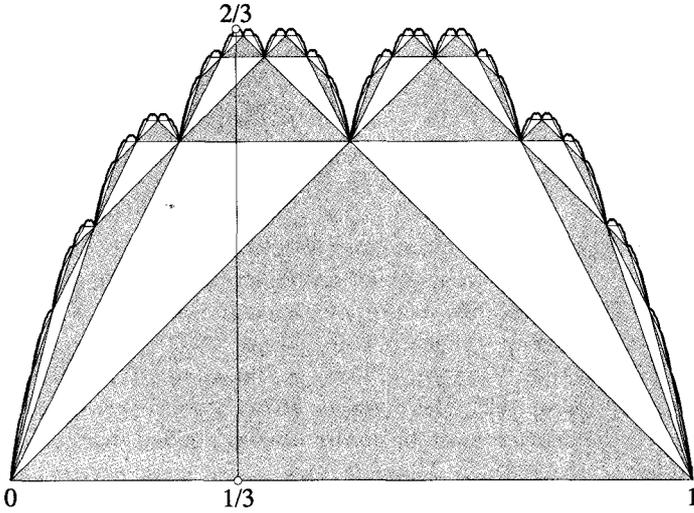


Рис. 9.2. Функция “бланманже”.

на интервале (α_n, β_n) (см. рис. 9.2, где видно, что при $x_0 = 1/3$ эти наклоны попеременно равны $0, 1, 0, 1, \dots$).

При увеличении n всегда $r_{n+1} = r_n \pm 1$, так что последовательность $\{r_n\}$ не может сходиться.

С другой стороны, r_n есть среднее взвешенное двух наклонов:

$$r_n = \lambda_n \frac{f(\beta_n) - f(x_0)}{\beta_n - x_0} + (1 - \lambda_n) \frac{f(x_0) - f(\alpha_n)}{x_0 - \alpha_n},$$

где $\lambda_n = (\beta_n - x_0)/(\beta_n - \alpha_n) \in (0, 1]$ (если $\alpha_n = x_0$, то $\lambda_n = 1$ и второе слагаемое отсутствует). Поэтому из дифференцируемости (9.4) в точке x_0 вытекало бы, что при достаточно больших n

$$|r_n - f'| < \lambda_n \varepsilon + (1 - \lambda_n) \varepsilon = \varepsilon.$$

Мы пришли к противоречию. □

Аппроксимационная теорема Вейерштрасса

Это фундаментальное предложение установил Вейерштрасс.
(Борель 1905, р. 50)

Мы только что переварили первый сюрприз Вейерштрасса — существование непрерывных функций, не имеющих производной. Теперь займемся вторым: мы можем сделать такие функции дифференцируемыми столько раз, сколько пожелаем, даже полиномами, если только мы согласны примириться с произвольно малой ошибкой ε .

(9.2) Теорема (Вейерштрасс 1885). Пусть $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция. При каждом $\varepsilon > 0$ существует полином $p(x)$ такой, что

$$(9.6) \quad |p(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{для всех } x \in [a, b].$$

Другими словами, $f(x) - \varepsilon \leq p(x) \leq f(x) + \varepsilon$, т. е. полином $p(x)$ заключен между $f(x) - \varepsilon$ и $f(x) + \varepsilon$ на всем интервале $[a, b]$.

Приведем компиляцию составленных Борелем (1905, р. 50) и Мейнардузом (1964, р. 7) списков математиков, представивших доказательства этой теоремы (что показывает, насколько оба были очарованы красотой этого результата): Вейерштрасс (1885), Пикар (1890, р. 259), Лерх 1892, Вольтерра 1897, Лебег 1898, Миттаг-Лёфлер 1900, Ландау (1908), Д. Джексон 1911, С. Бернштейн 1912, П. Монтель 1918, Маршан 1927, В. Гончаров 1934. Эта теорема, связанная и с аппроксимацией тригонометрическими полиномами, обобщалась различными способами (см. Мейнардус 1964, §2). Приведенное далее доказательство основано на идее, которую сегодня мы назвали бы идеей “последовательностей Дирака”.

Последовательности Дирака. Следуя Ландау (1908, см. рис. 9.3а), положим

$$(9.7) \quad \varphi_n(x) = \begin{cases} \mu_n(1-x^2)^n & \text{если } -1 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где множитель

$$(9.8) \quad \mu_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}$$

выбран так, чтобы

$$(9.9) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) dx = 1$$

(см. упр. II.4.3). При возрастании n эти функции все более концентрируют свою “массу” вблизи начала координат.

(9.3) Лемма. Пусть функции $\varphi_n(x)$ определены формулой (9.7). Для каждого $\varepsilon > 0$ и каждого $\delta > 0$ ($0 < \delta < 1$) существует целое число N такое, что для всех $n \geq N$ (см. рис. 9.3б)

$$(9.10) \quad 1 - \varepsilon < \int_{-\delta}^{\delta} \varphi_n(x) dx \leq 1,$$

$$(9.11) \quad \int_{-1}^{-\delta} \varphi_n(x) dx + \int_{\delta}^1 \varphi_n(x) dx < \varepsilon.$$

Доказательство. Начнем с доказательства (9.11). Так как $1 - x^2 \geq 1 - x$ при $0 \leq x \leq 1$, то $\int_0^1 (1 - x^2)^n dx \geq \int_0^1 (1 - x)^n dx = 1/(n+1)$, и поэтому $\mu_n \leq \frac{1}{2}(n+1)$. Следовательно, при $\delta \leq |x| \leq 1$ мы имеем

$$0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_n(\delta) \leq 2(n+1) \cdot (1 - \delta^2)^n.$$

Положим $q := 1 - \delta^2 < 1$, тогда $(1 - \delta^2)^n = q^n$ убывает по степенному закону, так что $(n + 1) \cdot (1 - \delta^2)^n \rightarrow 0$ (см. (6.26)). При достаточно больших n из этого следует, что $0 \leq \varphi_n(x) \leq \varepsilon/2$, если $\delta \leq |x| \leq 1$, и неравенство (9.11) вытекает из теоремы 5.14. Оценка (9.10) получается вычитанием (9.11) из (9.9). \square

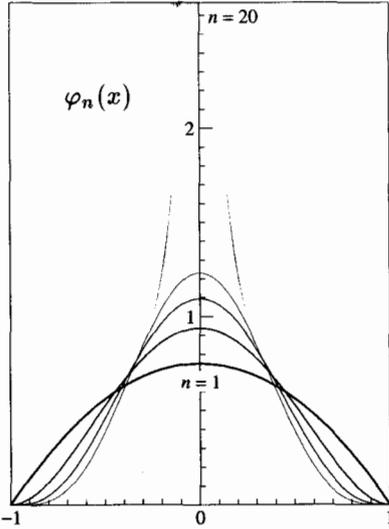


Рис. 9.3а. Последовательность Дирака.

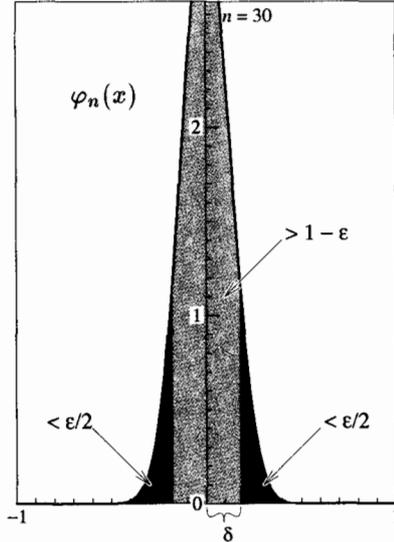


Рис. 9.3б. Концентрация массы.

Доказательство аппроксимационной теоремы Вейерштрасса. Предположим, что $0 < a < b < 1$ (общий случай приводится к этому путем преобразования вида $x \mapsto \alpha + \beta x$ с подходящим образом выбранными постоянными α и β). Теперь продолжим $f(x)$ до непрерывной функции на $[0, 1]$, например, полагая $f(x) = f(a)$ при $0 \leq x < a$ и $f(x) = f(b)$ при $b < x \leq 1$, и для $\xi \in [a, b]$ положим

$$(9.12) \quad p_n(\xi) := \int_0^1 f(x) \varphi_n(x - \xi) dx = \mu_n \int_0^1 f(x) (1 - (x - \xi)^2)^n dx.$$

Если мы разложим множитель $(1 - (x - \xi)^2)^n$ с помощью биномиальной теоремы, мы получим полином от ξ степени $2n$, коэффициенты которого являются функциями x . Подставляя его в (9.12), мы видим, что $p_n(\xi)$ является полиномом степени $2n$.

Мотивация. При фиксированном $\xi \in [a, b]$ пик функции $\varphi_n(x - \xi)$ будет сдвинут к точке ξ (рис. 9.5). Следовательно, произведение $f(x) \cdot \varphi_n(x - \xi)$ умножает величину пика на приблизительно $f(\xi)$. Поэтому, учитывая (9.9), можно ожидать, что интеграл (9.12) будет близок к $f(\xi)$.

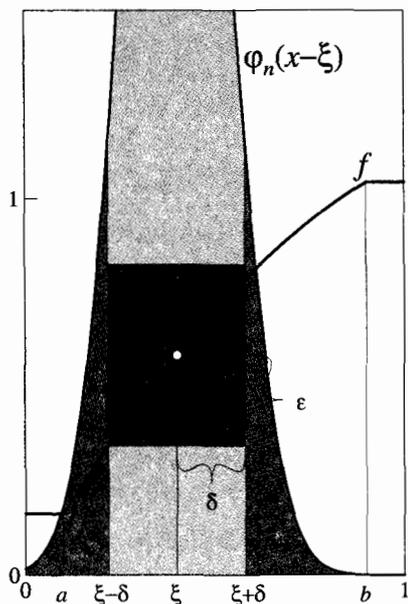


Рис. 9.4. Доказательство Ландау.

Оценка ошибки аппроксимации. Для оценки величины разности между $p_n(\xi)$ и $f(\xi)$ воспользуемся неравенством треугольника следующим образом:

$$\begin{aligned}
 |p_n(\xi) - f(\xi)| &\leq \left| \int_0^1 f(x)\varphi_n(x - \xi) dx - \int_{\xi - \delta}^{\xi + \delta} f(x)\varphi_n(x - \xi) dx \right| \\
 (9.13) \quad &+ \left| \int_{\xi - \delta}^{\xi + \delta} f(x)\varphi_n(x - \xi) dx - \int_{\xi - \delta}^{\xi + \delta} f(\xi)\varphi_n(x - \xi) dx \right| \\
 &+ \left| f(\xi) \int_{\xi - \delta}^{\xi + \delta} \varphi_n(x - \xi) dx - f(\xi) \right|.
 \end{aligned}$$

Зафиксируем некоторое $\varepsilon > 0$. Поскольку f непрерывна на $[0, 1]$, она является там равномерно непрерывной (теорема 4.5). Следовательно, существует $\delta > 0$, не зависящее от ξ и такое, что

$$(9.14) \quad |f(x) - f(\xi)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |x - \xi| < \delta.$$

Если это необходимо, значения δ можно уменьшить так, чтобы выполнялись неравенства $\delta \leq a$ и $\delta \leq 1 - b$. Следовательно, всегда будет $[\xi - \delta, \xi + \delta] \subset [0, 1]$. Кроме того, функция $f(x)$ ограничена, т. е. удовлетворяет неравенству $|f(x)| \leq M$ при $x \in [0, 1]$ (теорема 3.6).

Мы можем теперь оценить три члена в правой части неравенства (9.13) следующим образом. Для первого из них используем ограниченность функции $f(x)$ и неравенство (9.11) и найдем, что он ограничен величиной $M\varepsilon$. Аналогично из неравенства (9.10) следует, что третий член ограничен величиной $M\varepsilon$. Наконец,

из (9.14) и (9.9) следует, что второй член ограничен величиной ε . Таким образом, при достаточно больших n мы получаем

$$|p_n(\xi) - f(\xi)| \leq (2M + 1)\varepsilon.$$

Поскольку эта оценка справедлива равномерно на $[a, b]$, теорема доказана. \square

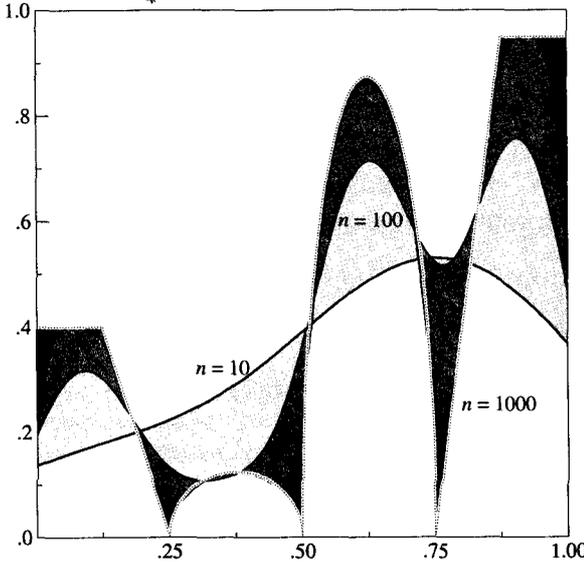


Рис. 9.5. Сходимость полиномов (9.12) к функции $f(x)$ из (9.15).

(9.4) Пример. Рассмотрим функцию $f : [1/8, 7/8] \rightarrow \mathbb{R}$, определенную как

$$(9.15) \quad f(x) = \begin{cases} -3.2x + 0.8 & \text{при } 1/8 \leq x \leq 1/4, \\ \sqrt{1/64 - (x - 3/8)^2} & \text{при } 1/4 \leq x \leq 1/2, \\ 7 \cdot \sqrt{1/64 - (x - 5/8)^2} & \text{при } 1/2 \leq x \leq 3/4, \\ 7.6x - 5.7 & \text{при } 3/4 \leq x \leq 7/8. \end{cases}$$

Как и в предыдущем доказательстве, мы продолжим ее до непрерывной функции на $[0, 1]$. Полиномы $p_n(\xi)$ (9.12) изображены на рис. 9.5 для $n = 10, 100$ и 1000 . Видно, что равномерная сходимость имеет место на $[1/8, 7/8]$, но не на $[0, 1]$. Это связано с тем, что при $\xi = 0$ или $\xi = 1$ половина пика функции $\varphi_n(x)$ в (9.12) срезана. Поэтому предположение $0 < a < b < 1$ в вышеприведенном доказательстве не может быть отброшено.

Графики на рис. 9.5 были получены с помощью вычисления интеграла в (9.12) для 400 значений ξ методом, аналогичным описанным в разд. II.6. Вычислять 2000 коэффициентов полинома смысла не имело.

Упражнения

9.1 Используя произведение Валлиса, покажите, что множители μ_n в (9.8) при $n \rightarrow \infty$ ведут себя асимптотически как $\sqrt{n/\pi}$, и что оценка в доказательстве леммы 9.3 немного грубовата.

9.2 Покажите, что

$$(9.16) \quad \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

является последовательностью Дирака, т.е. удовлетворяет условиям (9.9), (9.10) и (9.11) (в разд. IV.5 мы увидим, что $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$). Это та последовательность, на которой Вейерштрасс основывал свое доказательство.

9.3 Найдите постоянные c_n такие, что последовательность функций

$$(9.17) \quad \varphi_n(x) = \begin{cases} c_n \left(\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right)^n & \text{при } -1 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

будет последовательностью Дирака (см. упр. 5.6).

Эта последовательность, с помощью тригонометрических формул типа (I.4.4'), приводит к аппроксимациям непрерывных на $[-\pi, \pi]$ функций тригонометрическими полиномами.

9.4 Пусть

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} n & \text{при } |x| \leq 1/(2n), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Покажите, что для каждой непрерывной функции $f(x)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x - \xi) f(x) dx = f(\xi) \quad \text{при всех } a < \xi < b.$$

9.5 Разложите $(1 - (x - \xi)^2)^3$ по степеням ξ и покажите, что

$$\int_0^1 \frac{4 + \cos(x^4 + \sqrt{x}) - \sin(3x)}{72 \ln(x+1) + x^x} (1 - (x - \xi)^2)^3 dx$$

является полиномом от ξ .

IV

Функции нескольких переменных



Рисунок К. Ваннер

Следует отметить стимулирующее влияние физики на рождение таких математических сущностей, как кватернионы, гиперчисла Грассмана и векторы. Эти творения стали частью математики. (М. Клайн 1972, р. 791)

Функции нескольких переменных берут свое начало из геометрии (например, кривые, зависящие от параметров (Лейбниц 1694а)) и из физики. Одной из наиболее известных задач в 18-м веке был расчет движения колеблющейся струны (Даламбер 1748, см. рис. 0.1). Положение струны $u(x, t)$ является функцией пространственной координаты x и времени t . Важным прорывом в систематическом изучении исчисления нескольких переменных, который произошел около середины 19-го столетия, была идея обозначать *пары* (а затем и n -мерные наборы)

$$(x_1, x_2) = : x \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) = : x$$

одной буквой и рассматривать их как новые математические объекты.

Их называли “экстенсивными величинами” — Грассман (1844, 1862), “комплексами” — Пеано (1888) и “векторами” — Гамильтон (1853).

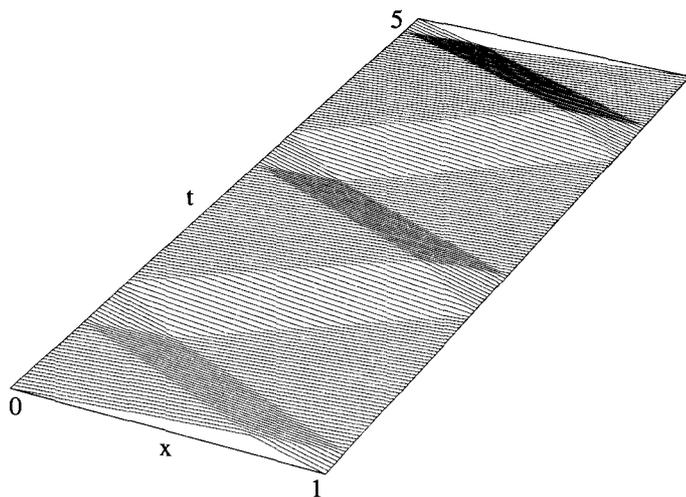


Рис. 0.1. Движение колеблющейся струны (клавесин).

В разд. IV.1 будут определены *нормы* в n -мерном пространстве, что позволит нам довольно просто обобщить определения и теоремы о сходимости и непрерывности (разд. IV.2). Однако дифференциальное (разделы IV.3 и IV.4), так же как и интегральное (разд. IV.5) исчисление в случае нескольких переменных приводят к новым сложностям (перестановка частных производных, изменение порядка интегрирования, перестановка операций интегрирования и дифференцирования).

IV.1 Топология n -мерного пространства

Замечательно, что эта идея, которая настолько проста и в своей основе заключается в рассмотрении совокупности нескольких различных величин (таких, как рассматриваемые далее “экстенсивные величины”) как новой независимой величины, развилась фактически в новую науку; ...

(Грассман 1862г., *Ausdehnungslehre*, p. 5)

... весьма полезно рассмотреть “комплексы” из чисел или числа, составленные из нескольких величин, ...

(Пеано 1888г., *Мат. Анн.*, vol. 32, p. 450)

Введем пары действительных чисел (x_1, x_2) , наборы n упорядоченных действительных чисел (x_1, x_2, \dots, x_n) и будем называть их *векторами*. Совокупность всех таких пар обозначается

$$(1.1) \quad \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2) ; x_1, x_2 \in \mathbb{R}\},$$

а совокупность всех n -мерных наборов

$$(1.2) \quad \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) ; x_k \in \mathbb{R}, k = 1, \dots, n\}.$$

Векторы можно складывать (покомпонентно) и умножать на действительные числа. С добавлением этих операций мы назовем \mathbb{R}^n n -мерным *действительным векторным пространством*.

Расстояния и нормы

Двумерное пространство \mathbb{R}^2 можно представлять себе как плоскость, где компоненты x_1 и x_2 являются декартовыми координатами. Расстояние между двумя точками $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ находится по теореме Пифагора (рис. 1.1):

$$(1.3) \quad d(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}.$$

Это расстояние зависит только от разности $y - x$ и обозначается также $\|y - x\|_2$, где $\|z\|_2 = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$ если $z = (z_1, z_2)$.

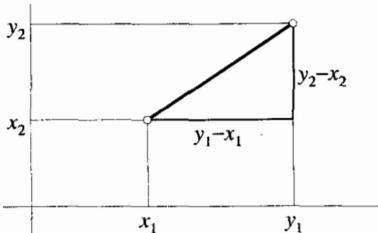


Рис. 1.1. Расстояние в \mathbb{R}^2 .

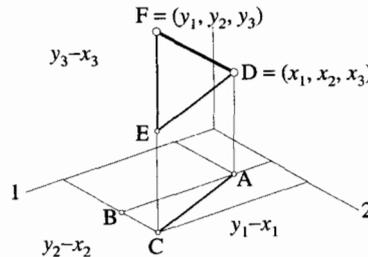


Рис. 1.2. Расстояние в \mathbb{R}^3 .

В трехмерном пространстве расстояние между точками $x = (x_1, x_2, x_3)$ и $y = (y_1, y_2, y_3)$ находится путем двукратного применения теоремы Пифагора (первый раз для треугольника DEF, затем для треугольника ABC, рис. 1.2). В этом случае мы получим $d(x, y) = \|y - x\|_2$, где $\|z\|_2 = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}$.

Аналогично, в n -мерном пространстве \mathbb{R}^n мы определим

$$(1.4) \quad \|z\|_2 = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2}$$

и назовем это *евклидовой нормой* $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$. Расстояние между $x \in \mathbb{R}^n$ и $y \in \mathbb{R}^n$ определяется как $d(x, y) = \|y - x\|_2$.

(1.1) Теорема. *Евклидова норма (1.4) обладает следующими свойствами:*

$$(N1) \quad \|x\| \geq 0 \quad \text{и} \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$(N2) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \text{для} \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(N3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{неравенство треугольника}).$$

Доказательство. Свойство (N1) тривиально. Так как $\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$, мы имеем $\|\lambda x\|_2^2 = (\lambda x_1)^2 + \dots + (\lambda x_n)^2 = |\lambda|^2 \cdot \|x\|_2^2$, что и доказывает свойство (N2). Доказательство свойства (N3) следует из цепочки выкладок

$$\begin{aligned} \|x + y\|_2^2 &= \sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 + 2 \sum_{k=1}^n x_k y_k + \sum_{k=1}^n y_k^2 \\ &\leq \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2 \|y\|_2 + \|y\|_2^2 = (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2. \quad \square \end{aligned}$$

Замечание. В этом доказательстве мы использовали оценку

$$(1.5) \quad \left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2},$$

которая называется *неравенством Коши—Шварца*. Оно выводится из неравенства $\sum_{k=1}^n (x_k - \gamma y_k)^2 \geq 0$ аналогично (III.5.19). Вводя обозначение

$$(1.6) \quad \langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

для *скалярного произведения* двух векторов x и y , неравенство (1.5) можно записать короче:

$$(1.5') \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_2 \cdot \|y\|_2.$$

В дальнейшем равенством (1.4) в явном виде мы будем пользоваться редко. Обычно мы будем просто использовать свойства (N1), (N2) и (N3).

(1.2) Определение. *Отображение $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющее свойствам (N1), (N2) и (N3), называется нормой в \mathbb{R}^n . Пространство \mathbb{R}^n с введенной в нем нормой называется нормированным векторным пространством.*

Примеры (Жордан 1882, *Cours d'Analyse*, vol. I, p. 18; Пеано 1890b, p. 186, сноска; Фреше 1906). Кроме евклидовой нормы (1.4) существуют и другие нормы:

$$(1.7) \quad \|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k| \quad \ell_1\text{-норма,}$$

$$(1.8) \quad \|x\|_\infty = \max_{k=1, \dots, n} |x_k| \quad \text{максимум-норма,}$$

$$(1.9) \quad \|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \quad \ell_p\text{-норма, } p \geq 1.$$

Проверка свойств (N1) и (N2) для этих норм и проверка свойства (N3) для норм (1.7) и (1.8) тривиальна. Далее, мы увидим, что неравенство треугольника (свойство (N3)) справедливо и для (1.9) при любых $p \geq 1$ (“неравенство Гёльдера”, см. формулу (4.42)).

(1.3) Теорема. *Для любых $x \in \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства*

$$(1.10) \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n \cdot \|x\|_\infty.$$

Доказательство. Мы докажем только второе неравенство (для остальных доказательство тривиально и поэтому опускается). Возведя в квадрат $\|x\|_1^2$ равенство (1.7) и выполнив умножение в правой части, мы получим сумму квадратов $\sum x_k^2$ (которая равна $\|x\|_2^2$) и смешанных произведений $|x_k| \cdot |x_l|$, которые не отрицательны. Из этого следует, что $\|x\|_1^2 \geq \|x\|_2^2$. \square

Каждая из этих норм может быть мажорантой и минорантой для каждой из остальных (при умножении на положительное число). Это показывает, что нормы $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ и $\|x\|_\infty$ эквивалентны в смысле следующего определения.

(1.4) Определение. *Две нормы $\|\cdot\|_p$ и $\|\cdot\|_q$ называются эквивалентными, если существуют положительные константы C_1 и C_2 такие, что*

$$(1.11) \quad C_1 \cdot \|x\|_p \leq \|x\|_q \leq C_2 \cdot \|x\|_p \quad \text{при любых } x \in \mathbb{R}^n.$$

Сходимость последовательностей векторов

Нашей следующей целью является распространение определений и результатов разд. III.1 на бесконечные последовательности векторов. Мы рассмотрим последовательность $\{x_i\}_{i \geq 1}$, где каждый x_i является вектором, т. е.

$$(1.12) \quad x_i = (x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni}), \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

(1.5) **Определение.** Будем говорить, что последовательность $\{x_i\}_{i \geq 1}$, задаваемая (1.12), сходится к вектору $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \geq 1 \quad \forall i \geq N \quad \|x_i - a\| < \varepsilon.$$

Как и в одномерном случае, будем писать $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = a$.

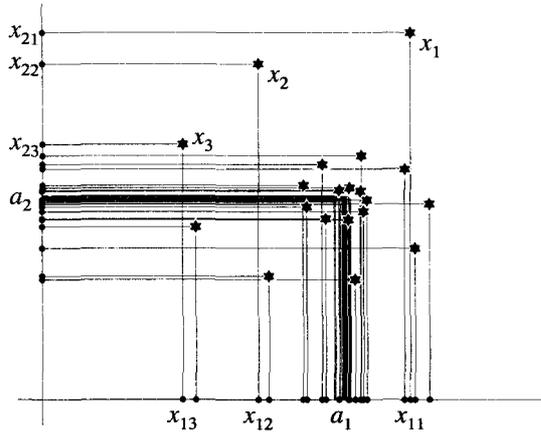


Рис. 1.3. Сходящаяся последовательность в \mathbb{R}^2 .

Это определение в точности совпадает с (III.1.4), только “абсолютные величины” заменены “нормами”.

(1.6) **Замечание.** Чтобы быть точным, следует указать норму, используемую в определении 1.5, например, евклидову норму. Но если норма $\|\cdot\|_p$ эквивалентна норме, $\|\cdot\|_q$, то справедливо утверждение

$$(1.13) \quad \text{сходимость по норме } \|\cdot\|_p \iff \text{сходимость по норме } \|\cdot\|_q.$$

Действительно, из $\|x_i - a\|_p < \varepsilon$ и (1.11) следует, что $\|x_i - a\|_q < C_2\varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ в определении (1.5) произвольно, мы можем заменить его на $\varepsilon' = C_2\varepsilon$, и мы увидим, что из сходимости по норме $\|\cdot\|_p$ следует сходимость по норме $\|\cdot\|_q$.

Теорема 1.3 показывает, что нормы $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_\infty$ эквивалентны. Далее мы увидим, что все нормы в \mathbb{R}^n эквивалентны (теорема 2.4). Следовательно, мы могли использовать любую норму в определении 1.5 и сходимость последовательности векторов $\{x_i\}$ не зависит от выбора нормы.

(1.7) **Теорема.** Для последовательности векторов (1.12) мы имеем

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = a \iff \lim_{i \rightarrow \infty} x_{ki} = a_k \quad \text{для } k = 1, 2, \dots, n,$$

т. е. сходимость в \mathbb{R}^n означает покомпонентную сходимость.

Доказательство. Для нормы (1.8) имеем

$$(1.14) \quad \|x_i - a\|_\infty < \varepsilon \iff |x_{ki} - a_k| < \varepsilon \quad \text{для } k = 1, 2, \dots, n.$$

Выбирая норму $\|\cdot\|_\infty$ в определении 1.5, мы и получаем требуемое утверждение. \square

После этой подготовки легко переписать и другие определения и результаты разд. III.1 для случая большей размерности. Например, мы назовем последовательность $\{x_i\}_{i \geq 1}$ векторов *ограниченной*, если существует число $B \geq 0$ такое, что $\|x_i\| \leq B$ для всех $i \geq 1$. Опять-таки, ограниченность не зависит от выбора нормы. Так же, как в теореме III.1.3, мы видим, что сходящиеся векторные последовательности ограничены.

Последовательность $\{x_i\}_{i \geq 1}$ называется *последовательностью Коши*, если

$$(1.15) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \geq 1 \quad \forall i \geq N \quad \forall \ell \geq 1 \quad \|x_i - x_{i+\ell}\| < \varepsilon.$$

Используя максимум-норму в (1.15), видим, что для $k = 1, \dots, n$ действительные последовательности $\{x_{ki}\}_{i \geq 1}$ являются последовательностями Коши. В результате, мы непосредственно получаем следующее обобщение теоремы III.1.8.

(1.8) Теорема. *Последовательность векторов в \mathbb{R}^n сходится тогда и только тогда, когда она является последовательностью Коши.* \square

Обобщение теоремы Больцано—Вейерштрасса несколько сложнее.

(1.9) Теорема (Больцано—Вейерштрасса). *Любая ограниченная последовательность векторов в \mathbb{R}^n содержит в себе сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_i\}_{i \geq 1}$ ограничена. Сначала рассмотрим последовательность $\{x_{1i}\}_{i \geq 1}$ первых компонент. Эта последовательность также ограничена, и по теореме III.1.17 мы можем выделить из нее сходящуюся подпоследовательность, скажем,

$$(1.16) \quad x_{1,1}, x_{1,5}, x_{1,9}, x_{1,22}, x_{1,37}, x_{1,58}, x_{1,238}, x_{1,576}, \dots$$

Затем мы рассмотрим вторые компоненты. Однако основная идея состоит в учете только тех членов последовательности вторых компонент, которые соответствуют членам, присутствующим в (1.16), а не всем членам первоначальной последовательности. Полученная последовательность ограничена, и мы вновь можем применить теорему III.1.17 для нахождения сходящейся подпоследовательности, скажем,

$$(1.17) \quad x_{2,1}, x_{2,9}, x_{2,58}, x_{2,576}, \dots$$

Теперь подпоследовательность $x_1, x_9, x_{58}, x_{576}, \dots$ сходится и по первой, и по второй компоненте. Для случая $n = 2$ доказательство закончено. Если же $n > 2$, рассмотрим третьи компоненты, соответствующие (1.17), и т. д. После выборки n -й подпоследовательности число ее членов все еще бесконечно, и мы имеем подпоследовательность, сходящуюся по всем компонентам. \square

Окрестности, открытые и замкнутые множества

Под “множеством” мы подразумеваем сущность M , образованную из собранных воедино по нашей интуиции или нашему замыслу неких определенных и различных объектов m . Эти объекты мы называем “элементами” множества M .
(Г. Кантор 1895, *Werke*, p. 282)

Никто не сможет изгнать нас из рая, который Кантор создал для нас.
(Гильберт, *Math. Ann.*, vol. 95, p. 170)

Новая эпоха в математике началась, когда Дедекиннд (около 1871 г.) и Кантор (около 1875 г.) стали рассматривать *множества* точек как новые математические объекты.

Для множеств A, B в \mathbb{R}^n мы будем использовать следующие символы:

$$(1.18) \quad A \subset B \quad \text{если все элементы } A \text{ принадлежат также } B,$$

$$(1.19) \quad A \cap B = \{x \in \mathbb{R}^n; x \in A \text{ и } x \in B\},$$

$$(1.20) \quad A \cup B = \{x \in \mathbb{R}^n; x \in A \text{ или } x \in B\},$$

$$(1.21) \quad A \setminus B = \{x \in \mathbb{R}^n; x \in A \text{ но } x \notin B\},$$

$$(1.22) \quad \complement A = \{x \in \mathbb{R}^n; x \notin A\}.$$

В \mathbb{R}^n роль открытого интервала играет множество

$$(1.23) \quad B_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - a\| < \varepsilon\},$$

которое мы назовем кругом (шаром) радиуса ε с центром в точке a (см. рис. 1.4).

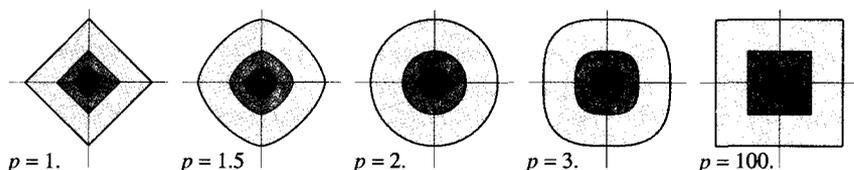


Рис. 1.4. Круги радиусов $\varepsilon = 1, 1/2, 1/4$ для $\|x\|_p$, $p = 1, 1.5, 2, 3, 100$.

(1.10) Определение (Хаусдорф 1914, Чап. VII, §1; см. также p. 456). Пусть $a \in \mathbb{R}^n$. Множество $V \subset \mathbb{R}^n$ называют *окрестностью* точки a , если существует $\varepsilon > 0$ такое, что $B_\varepsilon(a) \subset V$.

Круги (или шары) $B_\varepsilon(a)$ зависят от нормы ($\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$, или $\|\cdot\|_\infty, \dots$); определение “окрестности”, однако, не зависит от используемой нормы (при условии эквивалентности норм). Каждый шар $B_\varepsilon(a)$, соответствующий некоторой норме, всегда содержит в себе шар $B_{\varepsilon'}(a)$, соответствующий какой-нибудь другой норме (рис. 1.5).

(1.11) Определение (Вейерштрасс, Хаусдорф 1914, p. 215). Множество $U \subset \mathbb{R}^n$ открыто (в оригинале “ein Gebiet” — область, нем.), если U является окрестностью каждой своей точки, т. е.

$$U \text{ открыто} \iff \forall x \in U \exists \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon(x) \subset U.$$

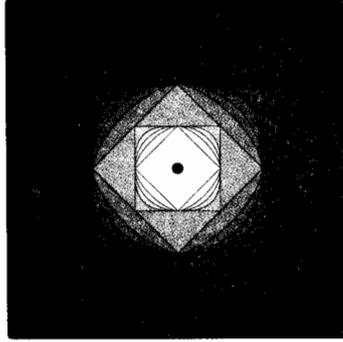


Рис. 1.5. Окрестности.

(1.12) Определение (Г. Кантор 1884, р. 470; см. *Ges. Abhandlungen*, р. 226). Множество $F \subset \mathbb{R}^n$ называется замкнутым, если каждая сходящаяся последовательность $\{x_i\}_{i \geq 1}$ с $x_i \in F$ имеет своим пределом точку, принадлежащую F , т. е.

$$F \text{ замкнуто} \iff a = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i \text{ и } x_i \in F \text{ влечет } a \in F.$$

Примеры в \mathbb{R} . Так называемый “открытый интервал” $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$ является открытым множеством. Действительно, для каждого $x \in (a, b)$ число $\varepsilon = \min(x - a, b - x)$ является строго положительным, так что $B_\varepsilon(x) \subset (a, b)$. С другой стороны, последовательность $\{a + 1/i\}$ (где $i \geq 1$) сходится, её элементы принадлежат (a, b) для достаточно больших i , но её предел не принадлежит (a, b) . Поэтому множество (a, b) не замкнуто.

Множество $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$ замкнуто (см. теорему III.1.6). Однако ни a , ни b не имеют окрестности, полностью принадлежащей $[a, b]$. Следовательно, $[a, b]$ не является открытым множеством.

Интервал $A = [a, b)$ не является, ни открытым ни замкнутым, так как a не имеет окрестности, полностью принадлежащей $[a, b)$, а предел последовательности $\{b - 1/i\}$ не лежит в $[a, b)$.

В заключение отметим, что множество $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ является одновременно открытым и замкнутым, и таким же свойством обладает пустое множество \emptyset .

(1.13) Лемма.

- а) Множество $A = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < 1\}$ открыто.
- б) Множество $A = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq 1\}$ замкнуто.

Доказательство. а) Для $a \in A$ возьмем $\varepsilon = 1 - \|a\|$, которое является положительным. При таком выборе $B_\varepsilon(a) \subset A$ (см. рис. 1.6), так как, используя неравенство треугольника, для $x \in B_\varepsilon(a)$ имеем

$$\|x\| = \|x - a + a\| \leq \|x - a\| + \|a\| < \varepsilon + \|a\| = 1.$$

Следовательно, A является открытым множеством.

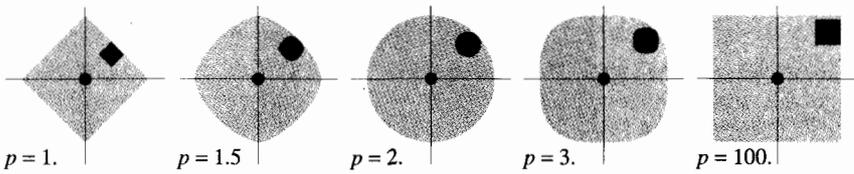


Рис. 1.6. Открытые множества $\{x \in \mathbb{R}^2; \|x\|_p < 1\}$.

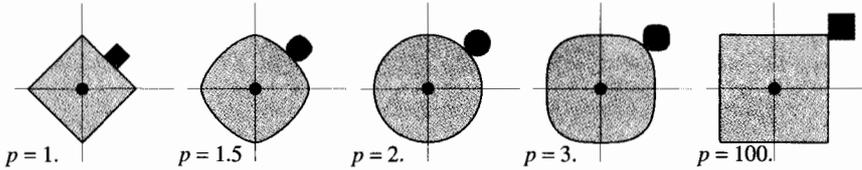


Рис. 1.7. Закрытые множества $\{x \in \mathbb{R}^2; \|x\|_p \leq 1\}$.

б) Рассмотрим последовательность $\{x_i\}_{i \geq 1}$, элементы которой удовлетворяют условию $x_i \in A$ (для любых i) и $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = a$. Покажем, что $a \in A$. Допустим обратное: $a \notin A$ (т.е. $\|a\| > 1$, см. рис. 1.7), и возьмем $\varepsilon = \|a\| - 1$. Для этого ε существует $N \geq 1$ такое, что $\|x_i - a\| < \varepsilon$ при $i \geq N$. Используя неравенство треугольника (или, лучше, упр. 1.1), мы получаем

$$\|x_i\| = \|x_i - a + a\| \geq \|a\| - \|x_i - a\| > \|a\| - \varepsilon = 1$$

для достаточно больших i . Это противоречит сделанному предположению, что $x_i \in A$ для всех i . Поэтому $A = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq 1\}$ является замкнутым множеством. \square

Дальнейшие примеры. Множество $A = \{x \in \mathbb{R}^2; x_1, x_2 \in \mathbb{Q}, \|x\| \leq 1\}$ не является ни открытым, ни замкнутым. Действительно, каждый круг содержит иррациональные точки, а предел рациональных точек может быть иррациональным.



Рис. 1.8. Канторово множество.

Знаменитое канторово множество (Г. Кантор 1883, *Werke*, p. 207, Example 11; см. рис. 1.8) задается следующим образом:

$$\begin{aligned}
 (1.24) \quad A &= [0, 1] \setminus \left\{ (1/3, 2/3) \cup (1/9, 2/9) \cup (7/9, 8/9) \cup \dots \right\} \\
 &= \left\{ x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i}; a_i \in \{0, 2\} \right\}.
 \end{aligned}$$

Оно не является открытым (например, точка $x = 1/3$ не имеет окрестности в A), но является замкнутым (см. замечание 1.16 ниже).

“Треугольник Серпиньского” (рис. 1.9) и “ковер Серпиньского” (рис. 1.10) (Серпиньский 1915, 1916) — двумерные обобщения канторова множества. Изображения на рисунках 1.9 и 1.10 не только очаровательны из-за их эстетической привлекательности, они еще напоминают нам, что множества могут быть весьма сложными объектами.

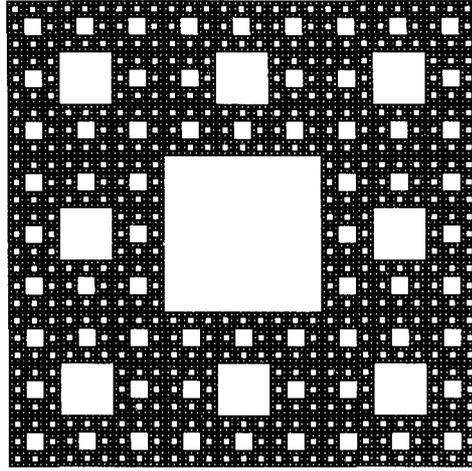
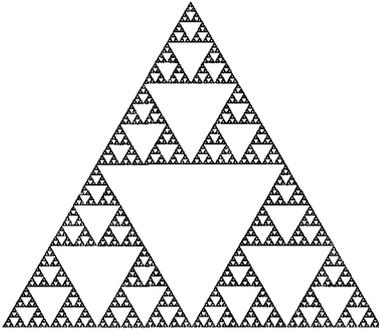


Рис. 1.9. Треугольник Серпиньского.

Рис. 1.10. Ковер Серпиньского.

(1.14) **Теорема.** *Справедливы утверждения:*

- i) F замкнуто $\implies \mathbb{C}F$ открыто ,
- ii) U открыто $\implies \mathbb{C}U$ замкнуто .

Доказательство. i) Пусть F замкнуто; допустим, что $\mathbb{C}F$ не открыто. Тогда существует такая точка $a \in \mathbb{C}F$ (т.е. $a \notin F$), что для всех $\varepsilon > 0$ имеем $B_\varepsilon(a) \not\subset \mathbb{C}F$. Выбирая $\varepsilon = 1/i$, видим, что существует последовательность $\{x_i\}_{i \geq 1}$, члены которой удовлетворяют условиям $x_i \in F$ и $\|x_i - a\| < 1/i$. Так как F — замкнутое множество, то $a \in F$, и мы пришли к противоречию.

ii) Допустим теперь, что $\mathbb{C}U$ не замкнуто. Это означает, что существует последовательность с элементами $x_i \in \mathbb{C}U$ (т.е. $x_i \notin U$), которая сходится к некоторому $a \notin \mathbb{C}U$ (т.е. $a \in U$). Поскольку U — открытое множество, существует такое $\varepsilon > 0$, что $B_\varepsilon(a) \subset U$. Значит, $x_i \notin B_\varepsilon(a)$ при любом i . Мы пришли к противоречию.

□

(1.15) **Теорема** (Хаусдорф 1914, р. 216). *Для конечного набора множеств справедливы утверждения:*

- i) U_1, U_2, \dots, U_m открытые $\implies U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_m$ открыто,
- ii) F_1, F_2, \dots, F_m замкнутые $\implies F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_m$ замкнутое.

Для произвольного семейства множеств (с индексами из множества Λ) справедливы утверждения:

- iii) U_λ открытые множества $\forall \lambda \in \Lambda \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n; \exists \lambda \in \Lambda, x \in U_\lambda\}$ является открытым множеством,
- iv) F_λ замкнутые множества $\forall \lambda \in \Lambda \Rightarrow \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n; \forall \lambda \in \Lambda, x \in F_\lambda\}$ является замкнутым множеством.

Доказательство. Начнем с доказательства утверждения (i). Предположим, что $x \in U_1 \cap \dots \cap U_m$, т.е. $x \in U_k$ для всех $k = 1, \dots, m$. Так как U_k являются открытыми множествами, то существуют $\varepsilon_k > 0$ такие, что $B_{\varepsilon_k}(x) \subset U_k$. Полагая $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$, получаем положительное ε такое, что $B_\varepsilon(x) \subset U_1 \cap \dots \cap U_m$.

Доказательство утверждения (iii) еще проще и поэтому опускается. Эквивалентности утверждений (i) \Leftrightarrow (ii) и (iii) \Leftrightarrow (iv) следуют из “правил де Моргана”

$$(1.25) \quad \begin{aligned} \mathcal{C}(U_1 \cap U_2) &= (\mathcal{C}U_1) \cup (\mathcal{C}U_2), \\ \mathcal{C}(U_1 \cup U_2) &= (\mathcal{C}U_1) \cap (\mathcal{C}U_2) \end{aligned}$$

и теоремы 1.14. □

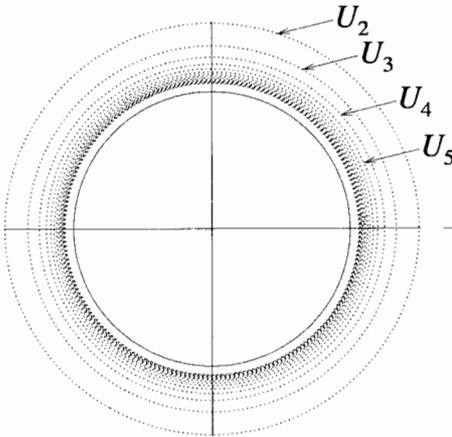


Рис. 1.11. Открытые множества с замкнутым пересечением.

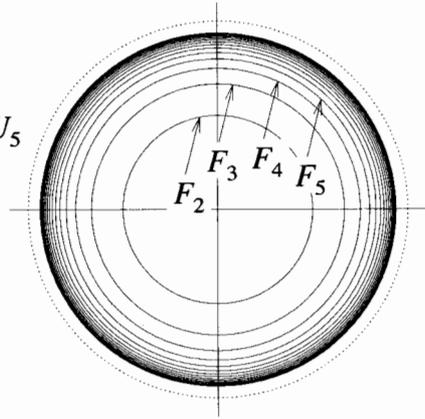


Рис. 1.12. Замкнутые множества с открытым объединением.

(1.16) Замечание. Из этой теоремы видно, что канторово множество в равенстве (1.24) является замкнутым. Действительно, его дополнение

$$\mathcal{C}A = (-\infty, 0) \cup (1, \infty) \cup (1/3, 2/3) \cup (1/9, 2/9) \cup (7/9, 8/9) \cup \dots$$

является объединением бесконечного числа открытых интервалов и будет открытым множеством согласно теореме 1.15.

(1.17) Замечание. Утверждения (i) и (ii) теоремы 1.15 для бесконечного числа множеств в общем случае не справедливы.

Рассмотрим, например, семейство открытых множеств

$$(1.26) \quad U_i = \left\{ x \in \mathbb{R}^2; \|x\| < 1 + 1/i \right\},$$

однако их пересечение $U_2 \cap U_3 \cap U_4 \cap \dots = \{x \in \mathbb{R}^2; \|x\| \leq 1\}$ не является открытым (рис. 1.11).

Аналогично, семейство замкнутых множеств (рис. 1.12)

$$(1.27) \quad F_i = \{x \in \mathbb{R}^2; \|x\| \leq 1 - 1/i\}$$

имеет объединение $F_2 \cup F_3 \cup F_4 \cup \dots = \{x \in \mathbb{R}^2; \|x\| < 1\}$, которое не является замкнутым множеством.

Компактные множества

Мы уже обращали на это внимание и далее во всей книге будем убеждаться в важности понятия компактных множеств. Все, кто занимался общим анализом, понимают, что невозможно обойтись без этого понятия.

(Фреше 1928, *Espaces abstraits*, p. 66)

(1.18) Определение (Фреше 1906). *Множество $K \subset \mathbb{R}^n$ называется компактным, если для каждой последовательности $\{x_i\}_{i \geq 1}$ с элементами из K существует подпоследовательность, сходящаяся к некоторому элементу $a \in K$.*

(1.19) Теорема. *Для множества $K \subset \mathbb{R}^n$ справедливо утверждение*

K компактно	\iff	K ограничено и замкнуто.
---------------	--------	----------------------------

Доказательство. Пусть K ограничено (т.е. $\|x\| \leq B$ для всех $x \in K$) и замкнуто. Возьмем последовательность $\{x_i\}_{i \geq 1}$ с элементами из K . Эта последовательность ограничена и имеет согласно теореме 1.9 сходящуюся подпоследовательность. Предел этой подпоследовательности принадлежит множеству K , так как K замкнуто. Следовательно, K — компактное множество.

Пусть теперь K — компактное множество. Из этого следует, что K замкнуто, так как каждая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к тому же пределу. Чтобы показать, что множество K ограничено, мы предположим обратное, т.е. существование последовательности $\{x_i\}$, удовлетворяющей условию: $x_i \in K$ для всех i и $\|x_i\| \rightarrow \infty$. Очевидно, что из нее невозможно выделить сходящуюся подпоследовательность, так что K не может быть в этом случае компактным множеством. \square

(1.20) Замечание. Компактные множества являются, по определению 1.18, именно теми множествами, к которым применима теорема Больцано—Вейерштрасса. Так как эта теорема является базовой для всех основных результатов о равномерной сходимости, равномерной непрерывности, о максимуме и минимуме, утверждение Фреше не было преувеличением (см. цитату).

(1.21) Теорема (Гейне 1872, Борель 1895). *Пусть K — компактное множество, а $\{U_\lambda\}_{\lambda \in A}$ — семейство открытых множеств U_λ , удовлетворяющее условию*

$$(1.28) \quad \bigcup_{\lambda \in A} U_\lambda \supset K \quad (\text{открытое покрытие}).$$

Тогда, существует конечное число индексов $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ таких, что

$$U_{\lambda_1} \cup U_{\lambda_2} \cup \dots \cup U_{\lambda_m} \supset K.$$

Контрпримеры. Прежде чем перейти к доказательству этой теоремы, покажем, что ни одно из предположений не может быть опущено.

В примере

$$K = \{x ; \|x\| < 1\}, \quad U_i = \{x ; \|x\| < 1 - 1/i\}, \quad i = 1, 2, \dots$$

невозможно найти конечное покрытие K . Это обусловлено тем, что K не замкнуто.

Если

$$K = \mathbb{R}^n, \quad U_i = \{x ; \|x\| < i\}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

множество K не ограничено. И в этом случае невозможно найти конечное покрытие K . Следовательно, ограниченность K является существенной.

В последнем примере рассмотрим компактное множество $K = \{x ; \|x\| \leq 1\}$, но не открытые множества U_i , задаваемые формулой

$$U_i = \left\{ (r \cos \varphi, r \sin \varphi) ; 0 \leq r \leq 1, \frac{1}{2^{i+1}} \leq \frac{\varphi}{2\pi} \leq \frac{1}{2^i} \right\}.$$

Ни одно из U_i не является лишним в покрытии $\{U_i\}_{i \geq 0}$ (рис. 1.13).

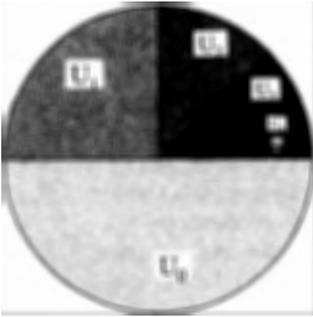


Рис. 1.13. Неоткрытое покрытие K .

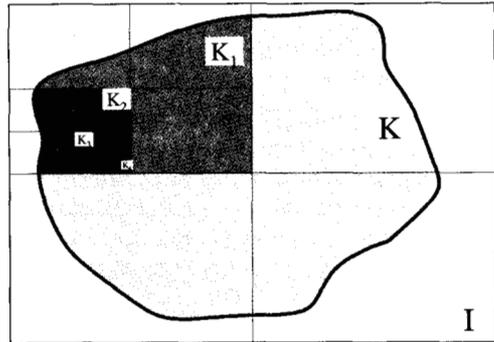


Рис. 1.14. Доказательство Гейне.

Доказательство. Следуя Гейне (1872), мы вкладываем компактное множество K в n -мерный куб I (квадрат для $n = 2$; см. рис. 1.14). Допустим, что нам необходимо бесконечное число множеств U_λ для покрытия множества K . Разделим куб I на 2^n маленьких кубов путем деления его ребер пополам (здесь I_1, I_2, I_3, I_4). Одно из множеств $K \cap I_j$ ($j = 1, \dots, 2^n$) требует бесконечного числа множеств U_λ для покрытия. Допустим, что этим множеством является $K \cap I_\ell$ и обозначим его K_1 . Далее разделим куб I_ℓ на 2^n маленьких кубов и т.д. Таким образом получаем последовательность множеств

$$K \supset K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots,$$

каждое из которых требует бесконечного числа открытых множеств U_λ для своего покрытия.

В каждом K_i мы выберем $x_i \in K_i$. Последовательность $\{x_i\}$ является последовательностью Коши, так как диаметр K_i стремится к нулю. Следовательно

(теорема 1.8), она сходится, и мы обозначим ее предел a . Так как K — компактное (следовательно, замкнутое) множество, то $a \in K$. Из (1.28) следует существование λ такого, что $a \in U_\lambda$. Так как U_λ — открытое множество, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что $B_\varepsilon(a) \subset U_\lambda$. Используя тот факт, что диаметр K_i стремится к нулю, заключаем, что для достаточно больших m мы имеем $K_m \subset B_\varepsilon(a) \subset U_\lambda$. Следовательно, K_m покрывается одним U_λ . Это противоречит предположению, что K не может быть покрыто конечным числом U_λ . \square

Упражнения

1.1 Пусть $\|\cdot\|$ — норма в \mathbb{R}^n . Докажите, что

$$| \|x\| - \|y\| | \leq \|x - y\|.$$

Указание. Применить неравенство треугольника к $\|x\| = \|x - y + y\|$.

1.2 Покажите, что

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \cdot \|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Покажите, что эти оценки “оптимальны”, т. е. если

$$c \cdot \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C \cdot \|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

то $c \leq 1$ и $C \geq \sqrt{n}$.

1.3 У г-на К.Л. Эвера была идея ввести “норму” вида

$$\|x\|_{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{1/2} \right)^2.$$

Покажите, что эта “норма” не удовлетворяет неравенству треугольника. Исследуйте также множество $B = \{x \in \mathbb{R}^2 ; \|x\|_{1/2} \leq 1\}$ и покажите, что оно не выпукло.

1.4 Для каждого множества A из \mathbb{R}^n определяется множество $\overset{\circ}{A}$ внутренних точек множества A как

$$\overset{\circ}{A} = \{x \mid A \text{ является окрестностью } x\}$$

и замыкание \bar{A} множества A как

$$\bar{A} = \{x \mid A \text{ пересекается с любой окрестностью } x\}.$$

Покажите, что \bar{A} является замкнутым множеством (в действительности наименьшим замкнутым множеством, содержащим в себе A) и что $\overset{\circ}{A}$ — открытое множество (наибольшее открытое множество, содержащееся в A).

1.5 Покажите, что для двух множеств A и B из \mathbb{R}^n

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}, \quad \overset{\circ}{A \cap B} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}.$$

Найдите два множества A и B из \mathbb{R} , для которых справедливо

$$\overline{A \cap B} \neq \bar{A} \cap \bar{B} \quad \overset{\circ}{A \cup B} \neq \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}.$$

1.6 (Треугольник Серпиньского 1915). Пусть a, b, c три точки в \mathbb{R}^2 , образующие равносторонний треугольник. Рассмотрите множество

$$T = \left\{ \lambda a + \mu b + \nu c ; \lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{2^i}, \mu = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_i}{2^i}, \nu = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\nu_i}{2^i} \right\},$$

где λ_i, μ_i, ν_i равны 0 либо 1, причем справедливо равенство $\lambda_i + \mu_i + \nu_i = 1$ для всех i . Определите вид T . Является ли оно открытым? Замкнутым? Компактным?

1.7 Покажите, что

$$\|x\| = \frac{1}{3}(|x_1| + |x_2|) + \frac{2}{3} \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

является нормой в \mathbb{R}^2 . Определите для этой нормы вид “единичного круга”

$$B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 ; \|x\| \leq 1\}.$$

1.8 Покажите, что отображение $N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, определенное как

$$N(x_1, x_2) = \sqrt{ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2},$$

является нормой в \mathbb{R}^2 тогда и только тогда, когда $a > 0, ac - b^2 > 0$.

1.9 Выведите теорему Больцано—Вейерштрасса из теоремы Гейне—Бореля.

Указание. Предположим, что $\{x_n\}$ является последовательностью, у которой все $\|x_n\| \leq M$, но нет точек накопления. Тогда для каждого a с $\|a\| \leq M$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что $B_\varepsilon(a)$ содержит только конечное число членов последовательности $\{x_n\}$.

1.10 Докажите, что \mathbb{R}^n и \emptyset являются единственными подмножествами \mathbb{R}^n , одновременно замкнутыми и открытыми.

IV.2 Непрерывные функции

... согласно мнению всех математиков, трудности, которые испытывали читатели этой работы, связаны с тем, что ее текст написан скорее в философской, чем математической манере ... Преодоление этих трудностей было существенной задачей для меня, так как я хотел, чтобы эта книга была читаема и понятна не только для меня, но также и для остальных.
 (Грассман 1862, "Professor am Gymnasium zu Stettin")

Пусть A подмножество \mathbb{R}^n . Функция

$$(2.1) \quad f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$$

отображает вектор $x = (x_1, \dots, x_n) \in A$ в вектор $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$. Каждая компонента y является функцией n независимых переменных. Таким образом, запишем

$$(2.2) \quad y = f(x) \quad \text{или} \quad \begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ y_m &= f_m(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

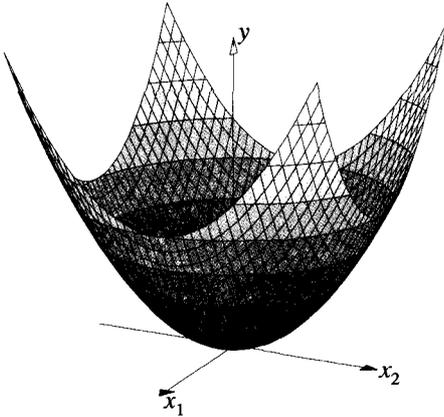


Рис. 2.1a. Функция $y = x_1^2 + x_2^2$.

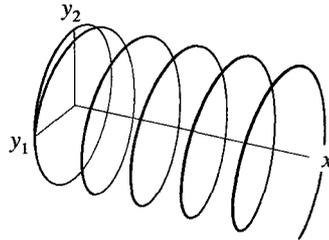


Рис. 2.1b. $y_1 = \cos 10x, y_2 = \sin 10x, 0 \leq x \leq 3$.

Примеры. а) Скалярная функция ($m = 1$) двух переменных ($n = 2$) может быть интерпретирована как поверхность в \mathbb{R}^3 . Например, функция $y = x_1^2 + x_2^2$ представляет параболоид (рис. 2.1a).

б) Двумерная вектор-функция ($m = 2$) одной переменной ($n = 1$) представляет кривую в \mathbb{R}^3 . Например, спираль на рис. 2.1b задается соотношениями $y_1 = \cos 10x, y_2 = \sin 10x$. Если мы спроецируем кривую на плоскость (y_1, y_2) , то получим ее "параметрическое представление" в \mathbb{R}^2 (в нашем примере — окружность).

(2.1) Определение. Функция $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m, A \subset \mathbb{R}^n$ непрерывна в точке $x_0 \in A$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A : \|x - x_0\| < \delta \quad \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon.$$

Это в точности соответствует определению III.3.2 с заменой абсолютных величин на нормы. Наше определение *не* зависит от конкретного выбора норм, коль скоро нормы эквивалентны (по тем же соображениям, что и в замечании 1.6). Если мы используем максимум-норму в \mathbb{R}^m , то получим, по аналогии с теоремой 1.7, следующий результат.

(2.2) Теорема. *Функция $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$, задаваемая формулами (2.2), непрерывна в точке $x_0 \in A$ тогда и только тогда, когда функции $f_j : A \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны в точке x_0 для всех $j = 1, \dots, m$. \square*

Как следствие этой теоремы, для изучения непрерывности достаточно рассматривать только случай $m = 1$. Постоянная функция $f(x) = c$, очевидно, всюду непрерывна. Проекция вектора $x = (x_1, \dots, x_n)$ на k -ю координатную ось, т. е. $p(x) = x_k$ является тоже непрерывной в каждой точке $x_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0})$, так как $|x_k - x_{k0}| \leq \|x - x_0\|$ (в определении 2.1 выбирается $\delta = \varepsilon$).

Почти тривиально обобщение определения III.3.10 предела функции и теорем III.3.3 и III.3.4 на случай нескольких переменных, если, конечно, произведение и отношение имеют смысл (простой заменой абсолютных величин на норму). Следовательно, полиномы нескольких переменных, например, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 x_2^5 - x_1 x_2^3 x_3 + 4x_2^5 - 1$, являются непрерывными всюду, и рациональные функции непрерывны во всех точках, где знаменатель не равен нулю.

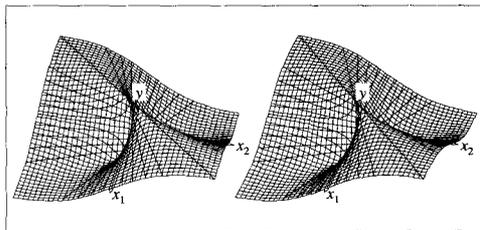


Рис. 2.2. Стереограмма разрывной функции $f(x_1, x_2)$ формулы (2.3) (держите рисунок на расстоянии около 20 см и пристально смотрите как бы сквозь бумагу на некий объект на расстоянии 20 см за ней, тогда две картинки сольются в одну трехмерную).

Пример. Рассмотрим функцию $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, задаваемую выражением

$$(2.3) \quad y = f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{при } x_1^2 + x_2^2 > 0 \\ 0 & \text{при } x_1 = x_2 = 0 \end{cases}$$

(см. рис. 2.2). Она непрерывна в точках удовлетворяющих условию $x_1^2 + x_2^2 > 0$. Для выяснения её поведения в окрестности начала координат используем полярные координаты $x_1 = r \cos \varphi$, $x_2 = r \sin \varphi$, так что (при $r > 0$)

$$y = \frac{r^2 \cos \varphi \sin \varphi}{r^2} = \frac{1}{2} \sin 2\varphi.$$

Следовательно, функция постоянна на прямых, проходящих через начало координат, величина этой постоянной зависит от угла φ . В каждой окрестности точки $(0, 0)$ функция (2.3) принимает все значения между $+1/2$ и $-1/2$. Поэтому она не может быть непрерывной в точке $(0, 0)$.

Этот пример интересен тем, что соответствующие функции одной переменной $x_1 \mapsto f(x_1, 0)$ и $x_2 \mapsto f(0, x_2)$ непрерывны в начале координат. Поэтому у теоремы 2.2 для независимых переменных x нет аналога, как думал Коши (1821, р. 37). Его ошибку исправил Пеано (1884, "Annotazione N. 99"), указав контрпример, приведенный выше.

Непрерывные функции и компактность

Мы продолжим обобщение результатов разд. III.3 на функции нескольких переменных. Многие из них обобщаются буквально. Например, аналогом теоремы III.3.6 является следующая

(2.3) Теорема. Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — компактное множество и функция $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на K . Тогда f ограничена на K и достигает на нем максимума и минимума, т. е. существуют $u \in K$ и $U \in K$ такие, что

$$f(u) \leq f(x) \leq f(U) \quad \text{для всех } x \in K. \quad \square$$

Эта теорема приводит к следующему результату, который мы анонсировали ранее в замечании 1.6.

(2.4) Теорема. Все нормы в \mathbb{R}^n эквивалентны. Это означает, что если $N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ является отображением, удовлетворяющим условиям (N1) — (N3) теоремы 1.1, т. е. если

$$(N1) \quad N(x) \geq 0 \quad \text{и} \quad N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$(N2) \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x) \quad \text{для } \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(N3) \quad N(x + y) \leq N(x) + N(y) \quad (\text{неравенство треугольника}),$$

то существуют числа $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ такие, что

$$(2.4) \quad C_1 \|x\|_2 \leq N(x) \leq C_2 \|x\|_2 \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}^n.$$

Доказательство. Покажем сначала, что $N(x)$ непрерывна. Запишем вектор x в виде $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$, где $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ и т. д. Тогда из (N3), (N2) и неравенства Коши—Шварца (1.5) следует, что

$$(2.5) \quad \begin{aligned} N(x) &= N(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) \leq N(x_1 e_1) + \dots + N(x_n e_n) \\ &\leq |x_1| \cdot N(e_1) + \dots + |x_n| \cdot N(e_n) \leq \|x\|_2 \cdot C_2, \end{aligned}$$

где с $C_2 = \sqrt{N(e_1)^2 + \dots + N(e_n)^2}$. Это доказывает правое неравенство в (2.4). Непрерывность $N(x)$ доказывается теперь следующим образом:

$$\begin{aligned} N(x) - N(x_0) &= N(x - x_0 + x_0) - N(x_0) \\ &\leq N(x - x_0) + N(x_0) - N(x_0) \leq C_2 \|x - x_0\|_2, \end{aligned}$$

и аналогично $N(x_0) - N(x) = \dots \leq C_2 \|x_0 - x\|_2$, так что

$$(2.6) \quad |N(x) - N(x_0)| \leq C_2 \|x - x_0\|_2.$$

Рассмотрим теперь функцию $N(x)$ на компактном множестве

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x\|_2 = 1\}.$$

Из теоремы 2.3 следует, что минимум нашей функции достигается в некоторой точке $u \in K$, т. е.

$$(2.7) \quad N(z) \geq N(u) \quad \text{для всех } z \in K.$$

Полагая $C_1 = N(u)$ (согласно свойству (N1) это положительно число) и учитывая, что для произвольного $x \in \mathbb{R}^n$ ($x \neq 0$) будет $x/\|x\|_2 \in K$, мы получим

$$C_1 \leq N\left(\frac{x}{\|x\|_2}\right) = \frac{1}{\|x\|_2} N(x).$$

Это доказывает левое неравенство в (2.4). □

Равномерная непрерывность и равномерная сходимость

Как и в разд. III.4, назовем функцию $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$ *равномерно непрерывной*, если она непрерывна на A , и δ из определения 2.1 можно выбрать не зависящим от точки $x_0 \in A$. Мы получим следующее обобщение теоремы III.4.5.

(2.5) Теорема (Гейне 1872). Пусть $f : K \rightarrow \mathbb{R}^m$ непрерывна на K и $K \subset \mathbb{R}^n$ — компактное множество. Тогда f равномерно непрерывна на K .

Доказательство. Два доказательства теоремы III.4.5 могут быть легко перенесены на случай нескольких переменных. Приведем здесь третье доказательство этой теоремы, основанное на теореме 1.21 Гейне—Бореля.

Из условия теоремы мы знаем, что

$$(2.8) \quad \forall x_0 \in K \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in K : \|x - x_0\| < \delta \quad \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon.$$

Простейшей идеей было бы рассмотреть множество шаров $\{B_\delta(x_0)\}_{x_0 \in K}$ как открытое покрытие K и выделить из него конечное покрытие. Но мы быстро поймем, что эта идея не эффективна. Выберем более осторожный путь.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и для каждого $a \in K$ определим открытое множество

$$U_a = \{x ; \|x - a\| < \delta/2, \quad \text{где } \delta \text{ зависит от } x_0 = a \text{ и определено в (2.8)}\}.$$

Эти множества образуют открытое покрытие K . Так как K — компактное множество, то уже конечный набор множеств U_{a_1}, \dots, U_{a_N} покрывает множество K . Используя соответствующие этому набору числа $\delta_1, \dots, \delta_N$, определим

$$\delta = \min\{\delta_1/2, \delta_2/2, \dots, \delta_N/2\}.$$

Теперь, пусть $x \in K$ и $y \in K$ — произвольные точки, удовлетворяющие условию $\|x - y\| < \delta$. Покажем, что $\|f(x) - f(y)\| < 2\varepsilon$. Так как $x \in K$, то

существует индекс i такой, что $x \in U_{a_i}$, т.е. $\|x - a_i\| < \delta_i/2$. Тогда из условия $\|x - y\| < \delta \leq \delta_i/2$ и неравенства треугольника следует, что $\|y - a_i\| < \delta_i$. Из (2.8) мы, таким образом, получаем

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|f(x) - f(a_i)\| + \|f(a_i) - f(y)\| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

что и доказывает утверждение. □

Все определения и результаты разд. III.4, относящиеся к *равномерной сходимости* последовательности функций, переносятся непосредственно на случай нескольких измерений. Поэтому, если последовательность непрерывных функций $f_k : A \rightarrow \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$ равномерно сходится на A к функции $f(x)$, эта предельная функция будет непрерывной (прямое обобщение теоремы III.4.2). Рассмотрим интересный пример.

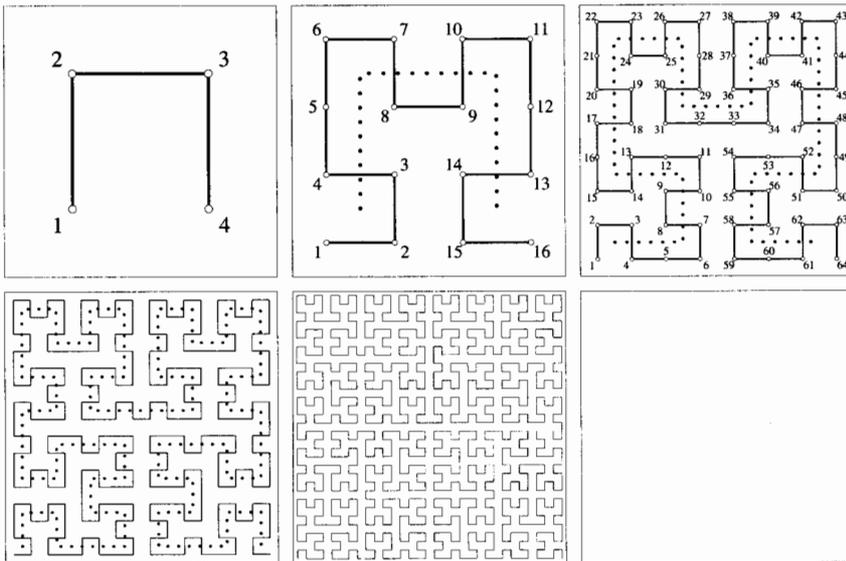


Рис. 2.3. Кривая Пеано—Гильберта.

Кривая Пеано—Гильберта.

Непрерывная кривая может заполнять некоторую часть пространства: это один из наиболее замечательных фактов теории множеств, открытием которого мы обязаны Г. Пеано. (Хаусдорф 1914, р. 369)

Кантор(1878) открыл сенсационный факт: существует взаимно-однозначное соответствие между точками интервала и точками квадрата. Но отображение Кантора не было непрерывным. Затем Пеано (1890) нашел, искусно манипулируя координатами, представленными в системе счисления с основанием 3, *непрерывную* кривую, полностью заполняющую квадрат. Вскоре после этого Гильберт (1891) обнаружил такие кривые с помощью красивого “*geometrische Anschauung*”

(геометрически наглядного приема, — нем.): он повторно делил квадраты на четыре подквадрата и соединял их центры кривой так, чтобы выдерживалось направление аналогичной кривой с предыдущего шага (см. рис. 2.3).

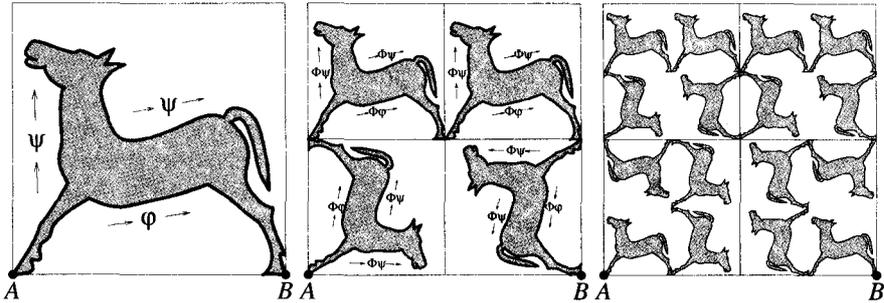


Рис. 2.4. Построение кривых Гильберта.

Другое построение. Пусть $\varphi(t) = (x(t), y(t))$, $0 \leq t \leq 1$ произвольная непрерывная кривая, соединяющая точки $A = (0, 0)$ для $t = 0$ и $B = (1, 0)$ для $t = 1$ (см. рис. 2.4). Определим новую кривую $\Phi\varphi$ посредством соотношения

$$(\Phi\varphi)(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(y(4t), x(4t)) & \text{при } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}(x(4t - 1), 1 + y(4t - 1)) & \text{при } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{2}{4} \\ \frac{1}{2}(1 + x(4t - 2), 1 + y(4t - 2)) & \text{при } \frac{2}{4} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2}(2 - y(4t - 3), 1 - x(4t - 3)) & \text{при } \frac{3}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Это соотношение опять задает непрерывную кривую, соединяющую $A = (0, 0)$ для $t = 0$ и $B = (1, 0)$ для $t = 1$ (см. вторую картинку на рис. 2.4) так, что процедура может быть повторена (см. третью картинку на рис. 2.4). Эта процедура приводит к последовательности функций $\varphi_0 = \varphi$, $\varphi_1 = \Phi\varphi_0$, $\varphi_2 = \Phi\varphi_1$ и так далее. Когда же мы стартуем с *другой* кривой $\psi(t)$ с $\|\varphi(t) - \psi(t)\|_\infty \leq K$ для $t \in [0, 1]$, то $\|\Phi\varphi(t) - \Phi\psi(t)\|_\infty \leq K/2$ (см. рис. 2.4). Отсюда следует, что

$$(2.9) \quad \|\varphi_k(t) - \psi_k(t)\| \leq K \cdot 2^{-k},$$

и взяв $\psi(t) = \varphi_m(t)$ и $K = 1$, получим

$$(2.10) \quad \|\varphi_k(t) - \varphi_{k+m}(t)\| \leq 2^{-k}.$$

Из (2.10) видим, что последовательность функций $\varphi_k(t)$ сходится *равномерно* (по критерию Коши (III.4.4)) и, следовательно, имеет непрерывный предел $\varphi_\infty(t)$ (теорема III.4.2). Далее, из (2.9) видим, что предельная функция *не зависит* от начальной функции $\varphi_0(t)$. Кривая Гильберта на рис.2.3 по сравнению с кривыми на рис.2.4 имеет незначительное отклонение вблизи конечных точек интервалов $[i/4^k, (i+1)/4^k]$, которое исчезает при $k \rightarrow \infty$.

Интересно, что обе координаты $x(t)$ и $y(t)$ являются новыми примерами непрерывных функций, которые нигде не дифференцируемы (ср. с разд. III.9).

Линейные отображения

Линейные отображения являются важными примерами равномерно непрерывных функций. Пусть A — матрица

$$(2.11) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим отображение $x \mapsto y = Ax$, где

$$(2.12) \quad y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

(при работе с матрицами удобно записывать векторы как векторы-столбцы, так что (2.12) — просто обычное произведение двух матриц).

(2.6) Теорема (Пеано 1888а, р. 454). *В евклидовой норме для всех $x \in \mathbb{R}^n$*

$$(2.13) \quad \|Ax\|_2 \leq M \cdot \|x\|_2 \quad \text{с} \quad M = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}.$$

Доказательство. Применяя неравенство Коши—Шварца (1.5) к сумме в формуле (2.12):

$$y_i^2 \leq \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right),$$

и суммируя последнее неравенство по i от 1 до m , получаем желаемый результат. \square

Как следствие линейности Ax получим

$$\|Ax - Ax_0\| \leq M \cdot \|x - x_0\|$$

с M из теоремы 2.6. Это показывает, что отображение $x \mapsto Ax$ является равномерно непрерывным на \mathbb{R}^n (возьмите $\delta = \varepsilon/M$, не зависящее от x_0).

Пример. Рассмотрим двумерную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} + 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad M = \sqrt{6 + 2\sqrt{2}} = 2.9713.$$

На рис. 2.5 построены множества $\{x; \|x\|_2 \leq 1\}$ и $\{y = Ax; \|x\|_2 \leq 1\}$. Мы видим, что второе множество лежит в круге радиуса M , что подтверждает оценку (2.13). Более того, мы видим, что величина M не является оптимальной.

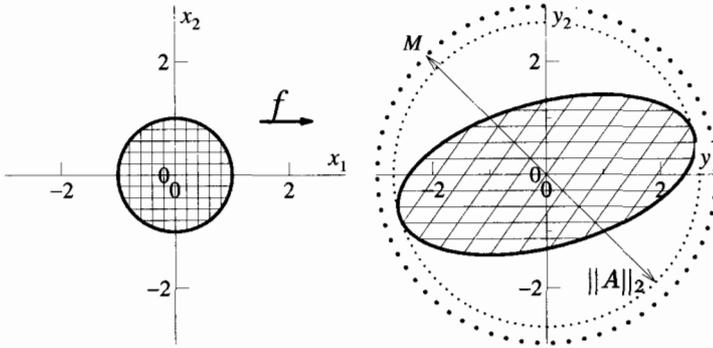


Рис. 2.5. Мажорирование линейной функции.

Матричная норма. Наименьшее число M , удовлетворяющее неравенству (2.13) называется нормой A (матричной нормой). Обозначим

$$(2.14) \quad \|A\|_2 := \sup\{\|Ax\|_2; \|x\|_2 \leq 1\}.$$

Очевидно, что $\|A\|_2 \leq M$ с M из (2.13), и что

$$(2.15) \quad \|Ax\|_2 \leq \|A\|_2 \|x\|_2$$

для всех векторов x . Точное вычисление величины $\|A\|_2$ использует собственные значения матрицы $A^T A$. В частности, для предыдущего примера она равна

$$\|A\|_2 = \sqrt{3 + \sqrt{2} + \sqrt{5 + 2\sqrt{2}}} = 2.6855 \text{ (см. рис. 2.5 и упр. 4.9).}$$

Хаусдорфово описание непрерывных функций

Рассмотрим теперь новое описание непрерывности, более изящное, чем в определении 2.1. Вместо работы с нормами мы будем использовать окрестности и открытые множества.

Для заданной функции $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ и множеств $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m$ определим

$$(2.16) \quad f(U) = \{f(x) \in \mathbb{R}^m; x \in U\} \quad (\text{образ } U),$$

$$(2.17) \quad f^{-1}(V) = \{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \in V\} \quad (\text{прообраз } V).$$

(2.7) Пример. Рассмотрим функцию $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, отображающую (x, y) на (u, v) по формуле

$$(2.18) \quad u = x + \frac{y}{2}, \quad v = (x + 2)y^3 - \frac{3}{2}(x + 1)y + \frac{x}{4}.$$

Эта функция изображена на рис. 2.6 для $-1.1 \leq x, y \leq 1.1$. Для подмножества U (светло-серое животное из породы кошачьих¹) нарисуем множество $f(U)$, а для V (темно-серое животное из породы кошачьих) множество $f^{-1}(V)$. Видно, что

¹ Кот Арнольда (ср. рис. I.5.3 и I.5.4 — Прим. ред.).

обратное отображение связного множества не обязательно связно. Это обусловлено тем обстоятельством, что в нашем примере функция f не является взаимно однозначной.

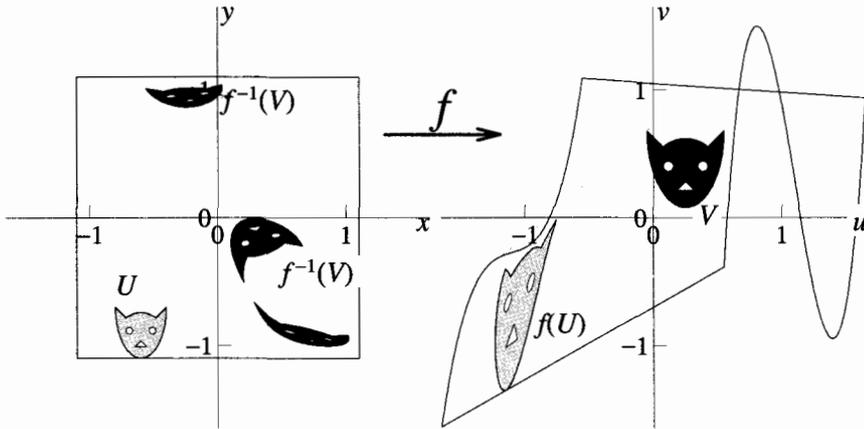


Рис. 2.6. Прямое и обратное отображение для функции (2.18).

Описание непрерывности на языке окрестностей. Множество, состоящее из таких $x \in \mathbb{R}^n$, которые удовлетворяют условию $\|x - x_0\| < \delta$, есть $B_\delta(x_0)$ (см. формулу (1.23)). Множество тех $x \in \mathbb{R}^n$, для которых $\|f(x) - y_0\| < \varepsilon$, есть $f^{-1}(B_\varepsilon(y_0))$. Поэтому, если $y_0 = f(x_0)$ и $A = \mathbb{R}^n$, условие определения 2.1 может быть записано как

$$(2.19) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(y_0)).$$

Так как окрестность V точки y_0 характеризуется существованием $\varepsilon > 0$ такого, что $B_\varepsilon(y_0) \subset V$, мы видим, что (2.19) эквивалентно следующему утверждению:

$$(2.20) \quad \text{для каждой окрестности } V \text{ точки } y_0 \quad f^{-1}(V) \text{ — окрестность точки } x_0.$$

Эта интерпретация непрерывности в точке x_0 более изящна и остается верной в более общих “топологических пространствах”. Характеристика всюду непрерывной функции $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ в терминах открытых и замкнутых множеств дается следующей теоремой.

(2.8) Теорема (см. Хаусдорф 1914, р. 361). Для функции $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ следующие три утверждения эквивалентны:

- i) f непрерывна на \mathbb{R}^n ;
- ii) для каждого открытого множества $V \subset \mathbb{R}^m$ множество $f^{-1}(V)$ является открытым в \mathbb{R}^n ;
- iii) для каждого замкнутого множества $F \subset \mathbb{R}^m$ множество $f^{-1}(F)$ является замкнутым в \mathbb{R}^n .

Доказательство. (i) \Rightarrow (ii): пусть $V \subset \mathbb{R}^m$ — открытое множество, выберем $x_0 \in f^{-1}(V)$, такое, что $f(x_0) \in V$. Так как V — открытое множество, то оно является окрестностью $f(x_0)$, а согласно (2.20) $f^{-1}(V)$ является окрестностью x_0 . Это справедливо для всех $x_0 \in f^{-1}(V)$. Следовательно, множество $f^{-1}(V)$ является открытым согласно определению 1.11.

(ii) \Rightarrow (i): пусть справедливо (ii), докажем, что f непрерывна в произвольной точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Пусть задано $\varepsilon > 0$ и положим $y_0 = f(x_0)$. Множество $B_\varepsilon(y_0)$ — открытое, поэтому согласно утверждению (ii), $f^{-1}(B_\varepsilon(y_0))$ также открыто. Определение 1.11 подразумевает существование $\delta > 0$ с $B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(y_0))$. Но это и есть просто непрерывность функции f в точке x_0 (см. (2.19)).

(ii) \Leftrightarrow (iii): эквивалентность утверждений (ii) и (iii) следует из $f^{-1}(fV) = f^{-1}(V)$ и теоремы 1.14. \square

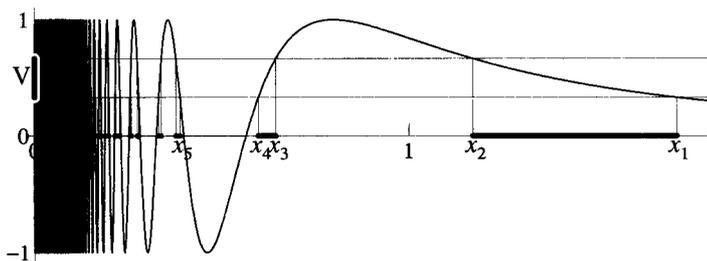


Рис. 2.7. Отображение, обратное к функции (2.21).

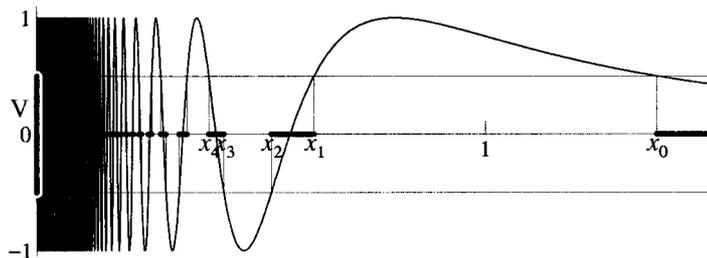


Рис. 2.8. Отображение, обратное к функции (2.21).

(2.9) Пример. Пусть функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию $f(0) = 0$ и

$$(2.21) \quad f(x) = \sin(1/x^2) \quad \text{для } x \neq 0.$$

Эта функция разрывна в точке $x = 0$. Покажем, что для разрывных функций утверждения (ii) и (iii) в общем случае не верны.

Например, множество $V = (1/3, 2/3)$ открыто, и его обратное отображение $f^{-1}(V) = (x_2, x_1) \cup (x_4, x_3) \cup \dots$ также открыто (см. рис. 2.7). Однако для замкнутого множества $F = [1/3, 2/3]$ его прообраз $f^{-1}(F) = [x_2, x_1] \cup [x_4, x_3] \cup \dots$ не замкнут, так как предел последовательности $\{x_i\}$ не лежит в $f^{-1}(F)$.

Рассмотрим открытое множество $V = (-1/2, 1/2)$; его обратное отображение $f^{-1}(V) = (x_0, \infty) \cup (x_2, x_1) \cup \dots \cup \{0\}$ не является открытым, так как оно не является окрестностью нуля (см. рис. 2.8). С другой стороны, обратное отображение замкнутого множества $F = [-1/2, 1/2]$, которое есть $f^{-1}(F) = [x_0, \infty) \cup [x_2, x_1] \cup \dots \cup \{0\}$, является замкнутым.

(2.10) Пример. Наш последний пример иллюстрирует тот факт, что теорема 2.8 не имеет аналога для прямых отображений. Рассмотрим непрерывную функцию $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (см. рис. 2.9)

$$(2.22) \quad f(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

Отображение открытого множества $U = (3/4, 2)$ есть множество $f(U) = (4/5, 1]$, которое не является открытым; отображение замкнутого множества $F = [3, \infty)$ есть множество $f(F) = (0, 3/5]$, которое не является замкнутым.

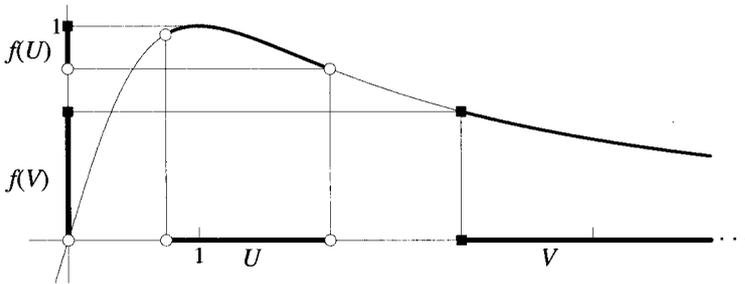


Рис. 2.9. Прямые отображения для функции (2.22).

Интегралы с параметрами

Допустим, что мы имеем функцию двух переменных $f(x, p)$, определенную для $x \in [a, b]$ и $p \in [c, d]$. Если мы проинтегрируем эту функцию по x ,

$$(2.23) \quad F(p) = \int_a^b f(x, p) dx,$$

мы получим функцию от p . Возникает вопрос, можем ли мы гарантировать, что функция $F(p)$ будет непрерывной.

(2.11) Контрпримеры. В формуле (b) из упр. III.5.9 заменим n^2 один раз на $1/p$, а другой раз — на p :

$$(2.24) \quad f(x, p) = \frac{x/p}{(1+x^2/p)^2}, \quad p > 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$(2.25) \quad f(x, p) = \frac{px}{(1+px^2)^2}, \quad p > 0, \quad 0 \leq x < \infty,$$

и в обоих случаях положим $f(x, p) = 0$ при $p = 0$.

В первом случае $p \rightarrow 0$ соответствует $n \rightarrow \infty$ на рис. III.5.5.b, следовательно, $F(p) = \int_0^1 f(x, p) dx$ будет стремиться к неравной нулю константе, тогда как $F(0) = 0$. Заметим, что $f(x, p)$ непрерывна везде, кроме точки $x = p = 0$.

Во втором случае при $p \rightarrow 0$ функция $f(x, p)$ имеет вид все более низкого и расплывающегося к бесконечности горба, причем площадь под кривой сохраняется. И в этом случае $F(p)$ не является непрерывной в точке $p = 0$. В то же время функция $f(x, p)$ непрерывна *всюду*, но область интегрирования не ограничена.

В случае, когда $f(x, p)$ непрерывна всюду и область интегрирования является компактным множеством, мы знаем, что функция $f(x, p)$ равномерно непрерывна (теорема 2.5), и доказательство следующего утверждения будет легким упражнением (см. также доказательство теоремы 3.11 ниже).

(2.12) Теорема. Если $f(x, p)$ — непрерывная функция на $[a, b] \times [c, d]$, то

$$F(p) = \int_a^b f(x, p) dx$$

является непрерывной функцией на $[c, d]$. □

Упражнения

- 2.1 Покажите, что существуют три различных значения переменной t , для которых координаты кривой Гильберта $\varphi_\infty(t)$ равны $(1/2, 1/2)$.
- 2.2 Докажите, что “матричная норма” (2.14) является нормой в $\mathbb{R}^{n \cdot m}$.

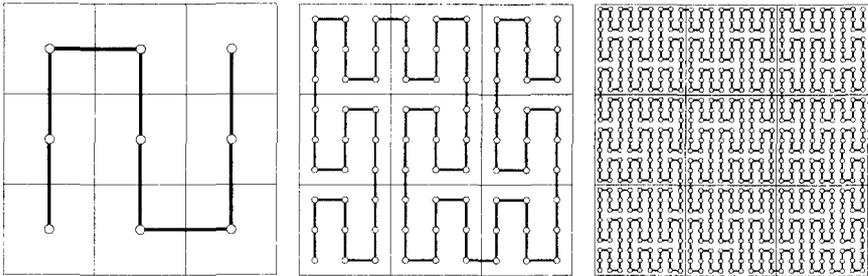


Рис. 2.10. Кривые Пеано.

- 2.3 а) Рис. 2.10 показывает кривые Пеано, построенные на основе оригинальных формул (см. Пеано 1890). Дайте объяснение их структуры, аналогичное приведенному для рис. 2.4 (вам понадобится рассмотреть животное, которое связывает *противоположные* углы квадрата).
- б) В самом последнем предложении своей статьи Пеано утверждает без каких-либо дальнейших разъяснений, что x и y как функции t нигде не имеют производных (“Ces x et y , fonctions continues de la variable t , manquent toujours de dérivée” — “У этих x и y , непрерывных функций переменной t , всегда отсутствует производная”, — *франц.*). Докажите это утверждение.

Указание. Модифицируйте доказательство теоремы III.9.1, которое предложил де Рам. Положите $\alpha_n = i/9^n$, $\beta_n = (i + 1)/9^n$. При этих значениях аргументов точки кривой Пеано окажутся в противоположных углах квадрата со стороной 3^{-n} , так что $r_n = 3^n$.

- 2.4 Покажите, что если $K \subset \mathbb{R}^n$ является компактным множеством и функция $f : K \rightarrow \mathbb{R}^m$ непрерывна, то $f(K) \subset \mathbb{R}^m$ тоже компактное множество.
- 2.5 Функция $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, определяемая формулой

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{при } x_1^2 + x_2^2 > 0, \\ 0 & \text{при } x_1 = x_2 = 0, \end{cases}$$

разрывна в точке $(0, 0)$ (почему?). Найдите открытое множество $U \subset \mathbb{R}$ и замкнутое множество $F \subset \mathbb{R}$ такие, что $f^{-1}(U)$ не будет открытым и $f^{-1}(F)$ не будет замкнутым.

- 2.6 Определим отображение $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (которое назовем *проекцией*) так:

$$P(x_1, x_2) = (x_1, 0).$$

- а) Покажите, что отображение P является непрерывным.
- б) Найдите открытое множество $U \subset \mathbb{R}^2$, для которого $P(U)$ не будет открытым.
- с) Найдите замкнутое множество $F \subset \mathbb{R}^2$, для которого $P(F)$ не будет замкнутым.

Замечание. Пункт (б) очень прост, но пункт (с) сложнее. Как видно из упр. 2.4, вам придется искать неограниченное множество F .

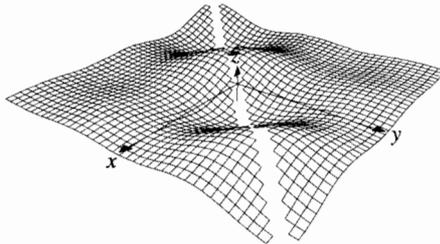


Рис. 2.11. График функции $(\cos x - \cos y)/(x - y)$.

- 2.7 Один наивный пользователь компьютерного пакета математических программ (такого, как “Maple”) захотел построить трехмерный график функции

$$g(x, y) = \frac{\cos x - \cos y}{x - y}, \quad -8 \leq x \leq 8, \quad -8 \leq y \leq 8$$

и получил результат вроде показанного на рис. 2.11. Как надо определить g при $x = y$, чтобы получить непрерывную функцию? Для полученной функции проверьте условия определения 2.1 непрерывности функций двух переменных.

IV.3 Дифференцируемые функции нескольких переменных

Мы, немцы, следуя Якоби, вместо этого употребляем круглое ∂ для обозначения частных производных. (Вейерштрасс 1874)

Нашей следующей целью является введение понятия дифференцируемости для функций более чем одной переменной. Так как деление на вектор $x - x_0$ смысла не имеет, прямого пути для обобщения определения III.6.1 нет.

Частные производные. Если в рассматриваемой функции $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ зафиксировать все переменные кроме одной и рассмотреть ее теперь как функцию этой переменной, мы сможем применить определение III.6.1. Рассмотрим, например, функцию $y = f(x_1, x_2)$ двух переменных в окрестности точки (x_{10}, x_{20}) . Введем для ее производных обозначения

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_{10} + h, x_{20}) - f(x_{10}, x_{20})}{h} &= : \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{10}, x_{20}) \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_{10}, x_{20} + h) - f(x_{10}, x_{20})}{h} &= : \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{10}, x_{20}) \end{aligned}$$

и назовем их *частными производными* f по x_1 и по x_2 соответственно. Используются также другие обозначения частных производных: $f_{x_i}(x_{10}, x_{20})$, $D_i f(x_{10}, x_{20})$, $\partial_i f(x_{10}, x_{20})$ или сходные с ними.

Геометрически частные производные можно интерпретировать следующим образом. Функция $y = f(x_1, x_2)$ определяет поверхность в \mathbb{R}^3 (с координатами x_1, x_2 и y), пересечение которой с плоскостью $x_2 = x_{20}$ представляет собой кривую $x_1 \mapsto f(x_1, x_{20})$. Поэтому частная производная $\partial f / \partial x_1$ определяет наклон этой кривой, а уравнение

$$y = f(x_{10}, x_{20}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{10}, x_{20})(x_1 - x_{10})$$

является уравнением касательной к этой кривой в точке (x_{10}, x_{20}) . Аналогично, уравнение касательной к кривой $x_2 \mapsto f(x_{10}, x_2)$ есть $y = f(x_{10}, x_{20}) + \partial f / \partial x_2(x_{10}, x_{20})(x_2 - x_{20})$, а плоскость, проходящая через две касательные, задается уравнением

$$(3.2) \quad y = f(x_{10}, x_{20}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{10}, x_{20})(x_1 - x_{10}) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{10}, x_{20})(x_2 - x_{20}).$$

Функцию $f(x_1, x_2)$ называют дифференцируемой в точке (x_{10}, x_{20}) , если плоскость (3.2) является “хорошей” аппроксимацией для $f(x_1, x_2)$ в некоторой окрестности точки (x_{10}, x_{20}) , причем не только вдоль прямых $x_1 = x_{10}$ и $x_2 = x_{20}$.

(3.1) Пример. Поверхность, определенная выражением $y = e^{-x_1^2 - x_2^2}$, построена на рис. 3.1. Частными производными этой функции будут

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = -2x_1 e^{-x_1^2 - x_2^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = -2x_2 e^{-x_1^2 - x_2^2}.$$

Вычислив значения этих производных в точке $(x_{10}, x_{20}) = (0.8, 1.0)$, можно построить касательную плоскость в этой точке с помощью уравнения (3.2). Она тоже показана на рис. 3.1.

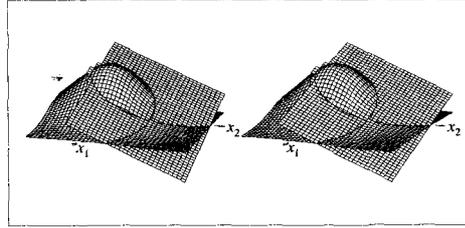


Рис. 3.1. Касательная плоскость к поверхности $y = e^{-x_1^2 - x_2^2}$ (стереограмма).

Случай двух зависимых переменных. В случае двух функций двух переменных

$$(3.3) \quad y_1 = f_1(x_1, x_2), \quad y_2 = f_2(x_1, x_2)$$

запишем уравнение (3.2) для каждой из этих функций:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} y_1 &= f_1(x_{10}, x_{20}) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_{10}, x_{20})(x_1 - x_{10}) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_{10}, x_{20})(x_2 - x_{20}), \\ y_2 &= f_2(x_{10}, x_{20}) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_{10}, x_{20})(x_1 - x_{10}) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_{10}, x_{20})(x_2 - x_{20}). \end{aligned}$$

Эти уравнения удобнее записывать в векторной форме:

$$(3.4') \quad y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

где $f'(x_0)$ теперь матрица, называемая *матрицей Якоби* (см. Якоби 1841):

$$(3.5) \quad f'(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) \end{pmatrix}.$$

Эти обозначения позволят нам перенести большинство формул разд. III.6 на случай нескольких переменных.

(3.2) Пример. Рассмотрим функцию $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, определенную выражением

$$(3.6) \quad f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}x_1 + \sin(x_1 + x_2) \\ \sqrt{2}x_2 + \cos(x_1 - x_2) \end{pmatrix}.$$

Эта функция переводит начало координат $(x_1, x_2) = (0, 0)$ в точку $(y_1, y_2) = (0, 1)$, прямые линии в кривые и малые квадраты в множества, похожие на параллелограммы (см. рис. 3.2). Матрица Якоби для (3.6) имеет вид:

$$(3.7) \quad f'(x) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} + \cos(x_1 + x_2) & \cos(x_1 + x_2) \\ -\sin(x_1 - x_2) & \sqrt{2} + \sin(x_1 - x_2) \end{pmatrix},$$

и уравнение (3.4) при $x_0 = (0, 0)^T$, $y_0 = f(x_0)$ преобразуется в уравнение

$$(3.8) \quad \begin{pmatrix} y_1 - y_{10} \\ y_2 - y_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} + 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_{10} \\ x_2 - x_{20} \end{pmatrix}.$$

Линейное отображение, задаваемое формулой (3.8), в точности то же самое, что и на рис. 2.5. Сравнивая рис. 3.2 с рис. 2.5, можно заметить, что нелинейное отображение (3.6) в малой окрестности x_0 аппроксимируется линейным отображением, определяемым матрицей Якоби. Можно заметить, что для малых величин $x - x_0$ точки оси x_1 (для которых $x_2 = x_{20} = 0$) отображаются в векторы, кратные $(\sqrt{2} + 1, 0)^T$, а точки оси x_2 — в векторы, кратные $(1, \sqrt{2})^T$ (см. стрелки на рис. 3.2). Следовательно, столбцы матрицы Якоби являются образами “инфинитезимальных единичных векторов”.

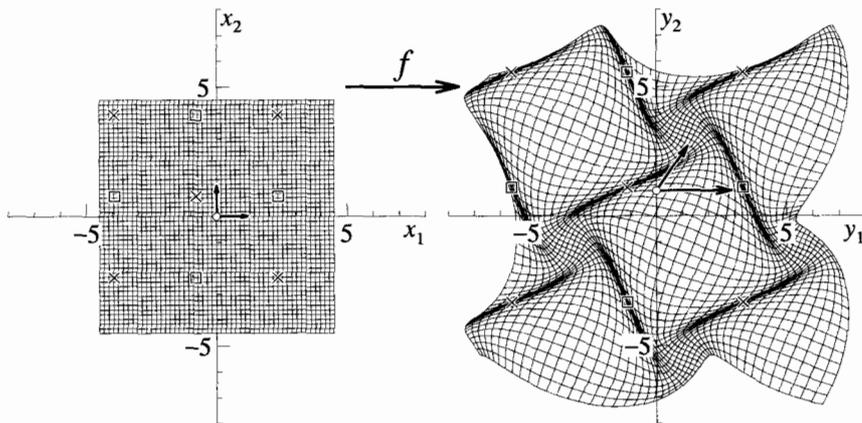


Рис. 3.2. График отображения (3.6).

Дифференцируемость

... что непосредственное обучение у Вейерштрасса приводило студентов в уныние и было вполне понятно только тем, кто уже познакомился с предметом где-нибудь еще. Наиболее важные учебники были написаны иностранцами ... Вероятно, первым из них был учебник моего друга Штольца (Иннсбрук): “Vorlesungen über allgemeine Arithmetik” (“Лекции по общей арифметике”, — нем.) ...

(Ф. Клейн 1926, *Entwicklung der Math.*, p. 291)

Рассмотрим функцию

$$(3.9) \quad f: U \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad U \subset \mathbb{R}^n,$$

и пусть $x_0 \in U$ — внутренняя точка U (U является окрестностью x_0).

(3.3) Определение (Штольц 1887, Фреше 1906). Функция (3.9) называется дифференцируемой в точке x_0 , если существуют линейное отображение $f'(x_0): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ и непрерывная в точке x_0 функция $r: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ такие, что $r(x_0) = 0$ и

$$(3.10) \quad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x)\|x - x_0\|.$$

(3.4) Замечание. Если функция является дифференцируемой в точке x_0 , то она непрерывна в этой точке. Более того, все ее частные производные существуют в точке x_0 . Это следует из того, что для $x - x_0 = he_j$ (где $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ с j -й компонентой, равной 1) равенство (3.10) обращается в

$$(3.11) \quad \frac{f(x_0 + he_j) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)e_j + r(x_0 + he_j)\frac{|h|}{h}.$$

Так как $r(x)$ непрерывна в точке x_0 , предел этого выражения существует при $h \rightarrow 0$ и равен

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = f'(x_0)e_j, \quad \text{откуда} \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) = f'_i(x_0)e_j$$

(здесь $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$). Следовательно, линейное отображение единственно.

Аналог формулировки Каратеодори (равенство (6.6) из разд. III.6) дает следующая лемма.

(3.5) Лемма. Функция $f(x)$ из (3.9) является дифференцируемой в точке x_0 тогда и только тогда, когда существует матричнозначная функция $\varphi(x)$, зависящая от x_0 и непрерывная в точке x_0 , такая, что

$$(3.12) \quad f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0).$$

Производная функции $f(x)$ в точке x_0 равна $f'(x_0) = \varphi(x_0)$.

Доказательство. Для заданной функции $\varphi(x)$ положим

$$f'(x_0) := \varphi(x_0), \quad r(x) := (\varphi(x) - \varphi(x_0)) \frac{(x - x_0)}{\|x - x_0\|}$$

и заметим, что равенство (3.10) выполняется. Так как норма вектора $(x - x_0)/\|x - x_0\|$ равна единице, то из непрерывности функции $\varphi(x)$ в точке x_0 следует, что $r(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$.

С другой стороны, предположим, что имеет место (3.10). Определим теперь $\varphi(x_0) := f'(x_0)$, а при $x \neq x_0$

$$(3.13) \quad \varphi(x) := f'(x_0) + r(x) \frac{(x - x_0)^T}{\|x - x_0\|}$$

(произведение вектора-столбца $r(x)$ на вектор-строку $(x - x_0)^T$ является матрицей). Тогда $\varphi(x)(x - x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + r(x)\|x - x_0\|$. Функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0 , так как по теореме 2.6 $\|\varphi(x) - f'(x_0)\| \leq \|r(x)\|$ и $\|r(x)\| \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$. \square

Следующий результат дает достаточное условие дифференцируемости, которое может быть проверено рассмотрением только частных производных.

(3.6) Теорема. Пусть $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ и $x_0 \in U$ (внутренняя точка). Если все частные производные $\partial f / \partial x_i$ существуют в окрестности точки x_0 и непрерывны в x_0 , то функция f дифференцируема в этой точке.

Доказательство. Рассмотрим доказательство для случая $n = 2$. Обобщение на случай произвольных n проводится непосредственно. Идея доказательства заключается в записи разности $f(x) - f(x_0)$ в виде

$$f(x_1, x_2) - f(x_{10}, x_{20}) = (f(x_1, x_2) - f(x_{10}, x_2)) + (f(x_{10}, x_2) - f(x_{10}, x_{20}))$$

и применении теоремы Лагранжа III.6.11 к каждой из разностей. Это дает

$$f(x_1, x_2) - f(x_{10}, x_{20}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2)(x_1 - x_{10}) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{10}, \xi_2)(x_2 - x_{20}).$$

Полагая $\varphi(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{10}, \xi_2) \right)$, приходим к равенству (3.12). Непрерывность $\varphi(x)$ в точке x_0 следует из условия теоремы. \square

Согласно определению 3.3 вектор-функция $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))^T$ дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда функции $f_i(x)$ дифференцируемы в точке x_0 для всех $i = 1, \dots, m$. Из теоремы 3.6 следует, что функции, компоненты которых являются полиномами от x_1, \dots, x_n , рациональными функциями или элементарными функциями, дифференцируемы в всех точках, где они определены.

Контрпримеры

Разрывная функция, у которой частные производные существуют всюду. Рассмотрим функцию $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, заданную выражением

$$(3.14) \quad f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{при } x_1^2 + x_2^2 > 0 \\ 0 & \text{при } x_1 = x_2 = 0 \end{cases}$$

(см. рис. 2.2). Частные производные в начале координат равны нулю, так как $f(x_1, 0) = 0$ для всех x_1 и $f(0, x_2) = 0$ для всех x_2 . А в любой точке вне начала координат существование частных производных очевидно. Тем не менее, функция (3.14) является разрывной в начале координат (см. разд. IV.2).

Разрывная функция, у которой производные по направлению существуют всюду. Частные производные являются специальным случаем так называемых производных по направлению. Рассмотрим функцию $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ и вектор v единичной длины ($\|v\|_2 = 1$). Тогда функция $g(t) := f(x_0 + tv)$ представляет кривую, образуемую пересечением поверхности $y = f(x_1, x_2)$ с вертикальной плоскостью $\{(x, y) \mid x = x_0 + tv, t \in \mathbb{R}\}$. Её производная обозначается как

$$(3.15) \quad \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h}$$

и называется *производной функции f по направлению* (вектора v). Частные производные получаются из нее при $v = (1, 0)^T$ и $v = (0, 1)^T$.

Рассмотрим функцию

$$(3.16) \quad f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{при } x_1^2 + x_2^2 > 0 \\ 0 & \text{при } x_1 = x_2 = 0. \end{cases}$$

Для $v = (\cos \theta, \sin \theta)^T$ получим

$$g(t) = f(tv) = \frac{t \cos^2 \theta \sin \theta}{t^2 \cos^4 \theta + \sin^2 \theta}.$$

Эта функция дифференцируема при $t = 0$ и любом значении θ (заметим, что для $\sin \theta = 0$ имеем $g(t) = 0$ при любых t). Следовательно, все производные по направлению существуют. Однако на параболах $x_2 = ax_1^2$ функция является константой, а именно, $f(x_1, ax_1^2) = a/(1 + a^2)$, и все значения между $-1/2$ и $1/2$ реализуются в каждой окрестности начала координат (см. рис. 3.3) Таким образом, она не является здесь непрерывной.

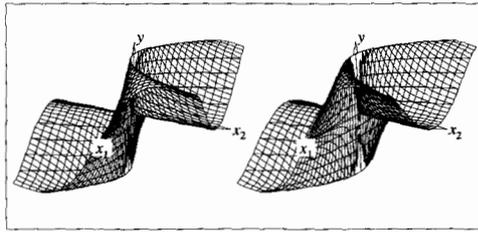


Рис. 3.3. Функции (3.16) (стереограмма).

Геометрическая интерпретация градиента

Для функции $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, т. е. для случая $m = 1$ и произвольного n , матрица $f'(x_0)$ в (3.5) является вектором-строкой. Его обычно обозначают

$$(3.17) \quad \text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) f = \nabla f.$$

Здесь формальный вектор (оператор)

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

(Гамильтон 1853, art. 620) называется *набла* “из-за того, что этот знак удивительно напоминает ассирийскую арфу” (Дж. У. Гиббс 1907, р. 138). Формула (3.10) тогда приводится к виду

$$(3.18) \quad f(x) = f(x_0) + \text{grad } f(x_0) \cdot (x - x_0) + r(x) \|x - x_0\|,$$

а уравнение (3.2) касательной плоскости к поверхности $y = f(x)$ примет вид

$$y = f(x_0) + \text{grad } f(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Чтобы исследовать функцию $f(x)$ в окрестности точки x_0 , возьмем $x = x_0 + tv$ и пренебрежем последним членом в (3.18). Получим

$$(3.19) \quad f(x_0 + tv) = f(x_0) + t \operatorname{grad} f(x_0) \cdot v + \dots$$

Пусть v — вектор единичной длины. Легко вывести следующие свойства:

- Вектор $\operatorname{grad} f(x_0)$ ортогонален линии уровня $\{x; f(x) = f(x_0)\}$. Это следует из (3.19), если мы устремим $t \rightarrow 0$, так как из равенства $f(x_0 + tv) = f(x_0)$ следует $\operatorname{grad} f(x_0) \cdot v = 0$.
- Функция возрастает при $\operatorname{grad} f(x_0) \cdot v > 0$. Из неравенства Коши—Шварца (1.5) следует, что $v = \operatorname{grad} f(x_0) / \|\operatorname{grad} f(x_0)\|$ есть направление, в котором $f(x)$ растет быстрее всего. Напротив, направление наиболее крутого спуска функции задает вектор $v = -\operatorname{grad} f(x_0) / \|\operatorname{grad} f(x_0)\|$.
- Если функция $f(x)$ имеет максимум (или минимум) в точке x_0 , то необходимым условием этого является равенство $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$.

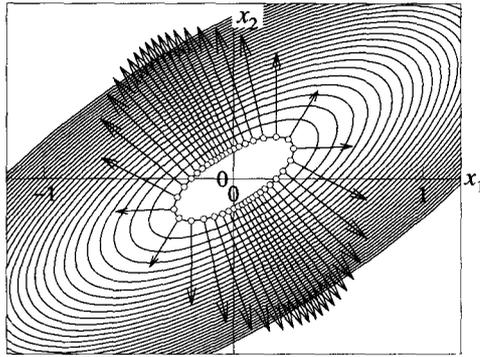


Рис. 3.4. Линии уровня и градиенты функции (3.20).

Рис. 3.4 показывает линии уровня $f(x) = C$ (где $C = i/20$; $i = 1, \dots, 30$) для функции

$$(3.20) \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2.$$

Её градиент $\operatorname{grad} f(x_1, x_2) = (2x_1 - 4x_2, -4x_1 + 10x_2)$ показан стрелками. Мы видим, что градиент ортогонален линии уровня и что длина $\operatorname{grad} f(x_0)$ показывает крутизну поверхности $y = f(x)$.

Цепное правило. Рассмотрим две функции

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^p \\ x & \longmapsto & y & \longmapsto & z \end{array}$$

и исследуем дифференцируемость сложной функции $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Как и в разд. III.6, мы используем описание Каратеодори (здесь это лемма 3.5). Предполагая, что функция f дифференцируема в точке x_0 , а функция g — в точке $y_0 = f(x_0)$, мы имеем

$$f(x) = f(x_0) + \varphi(x)(x - x_0), \quad g(y) = g(y_0) + \psi(y)(y - y_0).$$

Взяв $y = f(x)$, $y_0 = f(x_0)$ и подставив первое равенство во второе, получим

$$(3.21) \quad g(f(x)) = g(f(x_0)) + \psi(f(x))\varphi(x)(x - x_0).$$

Так как произведение $\psi(f(x))\varphi(x)$ непрерывно в точке x_0 , производная сложной функции $g \circ f$ равна этому выражению, вычисленному в точке x_0 , т. е.

$$(3.22) \quad (g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0).$$

Записанное в координатном представлении, признание (3.22) примет вид

$$(3.23) \quad \left\{ \frac{\partial z_i}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial z_i}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial y_j}{\partial x_k} \right\}$$

который обобщает формулу Лейбница (II.1.16).

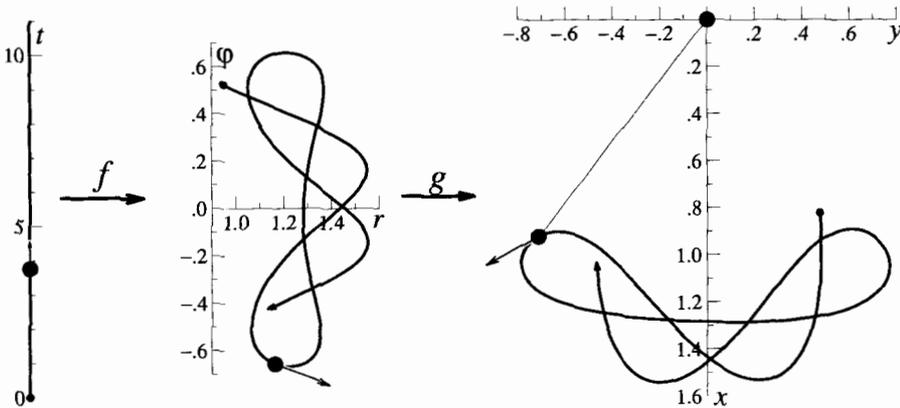


Рис. 3.5. Движение эластичного маятника.

Пример. Предположим, что движение эластичного маятника задано в полярных координатах: $f(t) = (r(t), \varphi(t))^T$, см. рис. 3.5.¹ Если мы хотим найти скорость маятника в декартовых координатах

$$(3.24) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix},$$

надо продифференцировать x и y по t . Так как матрица Якоби преобразования (3.24) задается выражением

$$(3.25) \quad g'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix},$$

¹ Кривые на этом рисунке являются решениями дифференциальных уравнений и были получены с помощью численных методов (см. разд. II.9).

мы получим из (3.22), что

$$\dot{x} = \cos \varphi \cdot \dot{r} - r \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}, \quad \dot{y} = \sin \varphi \cdot \dot{r} + r \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}$$

(производная по времени t обозначается точкой сверху). Это позволяет, например, вычислить кинетическую энергию

$$T(t) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2).$$

Теорема о среднем значении

Мы хотим обобщить формулу $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ из теоремы Лагранжа (разд. III.6) на случай нескольких переменных.

Случай $m = 1$. Рассмотрим функцию $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, и пусть заданы две точки $a \in \mathbb{R}^n$ и $b \in \mathbb{R}^n$. Соединим эти точки прямой линией

$$x = a + (b - a)t, \quad 0 \leq t \leq 1$$

и положим

$$g(t) := f(a + (b - a)t).$$

Если $f(x)$ является дифференцируемой во всех точках интервала $\{a + (b - a)t; t \in (0, 1)\}$, то $g(t)$ тоже дифференцируема, и из (3.22) следует, что

$$g'(t) = f'(a + (b - a)t)(b - a).$$

Так как $g(0) = f(a)$, $g(1) = f(b)$, теорема III.6.11, примененная к функции $g(t)$, дает $g(1) - g(0) = g'(\tau)(1 - 0)$ и, следовательно, также

$$(3.26) \quad f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a),$$

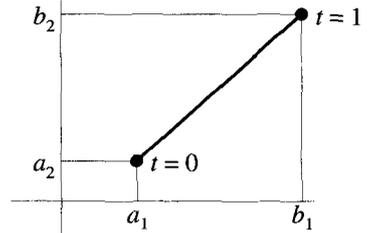
где точка ξ лежит на отрезке, соединяющем точки a и b . Уравнение (3.26) выглядит подобно (III.6.14), но здесь $f'(\xi)(b - a)$ — скалярное произведение двух векторов.

Общий случай. Для функции $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ мы можем применить (3.26) для каждой компоненты $f(x)$. Это дает

$$(3.27) \quad \begin{pmatrix} f_1(b) - f_1(a) \\ \vdots \\ f_m(b) - f_m(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\xi_1) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\xi_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\xi_m) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\xi_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ \vdots \\ b_n - a_n \end{pmatrix},$$

где все $\xi_i \in \mathbb{R}^n$ принадлежат отрезку прямой, соединяющей точки a и b . Недостаток этой формулы в том, что аргумент ξ_i различен для каждой строки.

Мы не можем надеяться, что равенство (3.26) будет справедливо для всех компонент функции $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Контрпримером является: $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = \sin x$, $a = 0$, $b = 2\pi$. Если мы удовлетворимся неравенством, то ситуация здесь такова:



(3.7) Теорема. Пусть функция $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ дифференцируема во всех точках “открытого” сегмента $(a, b) := \{x = a + (b - a)t ; 0 < t < 1\}$ (предполагается, что эти точки являются внутренними точками U) и в норме (2.14)

$$\|f'(x)\| \leq M \quad \text{для всех } x \in (a, b).$$

Тогда

$$(3.28) \quad \|f(b) - f(a)\| \leq M \cdot \|b - a\|.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$(3.29) \quad g(t) := \sum_{i=1}^m c_i f_i(a + (b - a)t) = c^T f(a + (b - a)t),$$

где c_1, \dots, c_m — произвольные пока коэффициенты. Производная функции $g(t)$ равна

$$g'(t) = \sum_{i=1}^m c_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a + (b - a)t)(b_j - a_j) = c^T f'(a + (b - a)t)(b - a).$$

Применение теоремы III.6.11 дает

$$(3.30) \quad c^T (f(b) - f(a)) = g(1) - g(0) = g'(\tau) = c^T f'(\xi)(b - a),$$

где $\xi = a + (b - a)\tau$ принадлежит сегменту (a, b) . Разумно положить $c = f(b) - f(a)$, чтобы сделать выражение в левой части (3.30) по возможности бóльшим. Тогда, применяя неравенство Коши—Шварца к правой части (3.30), получим с учетом (2.15):

$$\|f(b) - f(a)\|^2 \leq \|f(b) - f(a)\| \cdot M \cdot \|b - a\|.$$

Отсюда получим (3.28) после деления на $\|f(b) - f(a)\|$ (заметим, что утверждение (3.28) очевидно при $\|f(b) - f(a)\| = 0$). \square

Теорема о неявной функции

Неявные уравнения $f(x, y) = C$ были центральной темой “Геометрии” Декарта 1637 года (см., напр., уравнение (I.1.18)). Никто не сомневался, что такие уравнения определяют геометрические кривые $y = y(x)$, а Лейбниц даже знал, как дифференцировать такие функции. Однако в эпоху Вейерштрасса (см. Дженокки—Пеано 1884, р. 149-151) математики почувствовали необходимость более строгого доказательства, которое гарантировало бы, что уравнение $f(x, y) = C$ эквивалентно уравнению $y = y(x)$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) , удовлетворяющей условию $f(x_0, y_0) = C$. Мы будем говорить, что неявное уравнение $f(x, y) = C$ может быть разрешено относительно y .

Рассмотрим, например, окружность $x^2 + y^2 = C$ и фиксируем точку (x_0, y_0) , причем $x_0^2 + y_0^2 = C$. Если $y_0 > 0$, мы получим $y(x) = \sqrt{C - x^2}$, а для $y_0 < 0$ имеем $y(x) = -\sqrt{C - x^2}$, но если $y_0 = 0$, то невозможно найти функцию $y(x)$,

удовлетворяющую условию $x^2 + y(x)^2 = C$ для всех x в некоторой окрестности точки x_0 .

В дальнейшем мы положим $F(x, y) = f(x, y) - C$ и заменим условие $f(x, y) = C$ на $F(x, y) = 0$.

(3.8) Теорема о неявной функции. Рассмотрим функцию $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ и точку $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ и предположим, что частные производные $\partial F/\partial x$ и $\partial F/\partial y$ существуют и непрерывны в окрестности (x_0, y_0) . Если

$$(3.31) \quad F(x_0, y_0) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0,$$

то существуют окрестности U у точки x_0 и V у точки y_0 , а также единственная функция $y : U \rightarrow V$ такие, что $y(x_0) = y_0$ и

$$(3.32) \quad F(x, y(x)) = 0 \quad \text{для всех } x \in U.$$

Функция $y(x)$ дифференцируема в U , и ее производная равна

$$(3.33) \quad y'(x) = -\frac{\partial F/\partial x(x, y(x))}{\partial F/\partial y(x, y(x))}.$$

Доказательство. Предположим, что $\partial F/\partial y(x_0, y_0) > 0$ (в противном случае мы будем работать с $-F$ вместо F). Из непрерывности $\partial F/\partial y$ следует существование $\delta > 0$ и $\beta > 0$ таких, что

$$(3.34) \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \geq \beta > 0 \quad \text{при } |x - x_0| \leq \delta \text{ и } |y - y_0| \leq \delta.$$

Отсюда следует, что $F(x_0, y)$ является монотонной возрастающей функцией y , и, так как $F(x_0, y_0) = 0$, мы имеем $F(x_0, y_0 - \delta) < 0 < F(x_0, y_0 + \delta)$. Из непрерывности F следует существование $\delta_1 > 0$ ($\delta_1 \leq \delta$) такого, что (см. рис. 3.6)

$$F(x, y_0 - \delta) < 0 < F(x, y_0 + \delta) \quad \text{при } |x - x_0| \leq \delta_1.$$

Теперь положим $U = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$, $V = (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ и применим для каждого фиксированного $x \in U$ теорему Больцано III.3.5 к $F(x, y)$, рассматриваемой как функция от y . Это доказывает существование функции $y : U \rightarrow V$, удовлетворяющей условию (3.32). Единственность функции $y(x)$ в V следует из монотонности $F(x, y)$ как функции y .

Нам еще надо доказать, что функция $y(x)$ дифференцируема в произвольной точке $x_1 \in U$. Как и в доказательстве теоремы 3.6, мы воспользуемся соотношением

$$F(x, y(x)) = F(x_1, y_1) + \frac{\partial F}{\partial x}(\xi, y(x))(x - x_1) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_1, \eta)(y(x) - y_1),$$

где $y_1 = y(x_1)$, ξ лежит между x и x_1 , а η — между $y(x)$ и y_1 . Используя (3.22) и (3.34), мы получим

$$(3.35) \quad y(x) - y_1 = \varphi(x)(x - x_1), \quad \varphi(x) = -\frac{\partial F/\partial x(\xi, y(x))}{\partial F/\partial y(x_1, \eta)}.$$

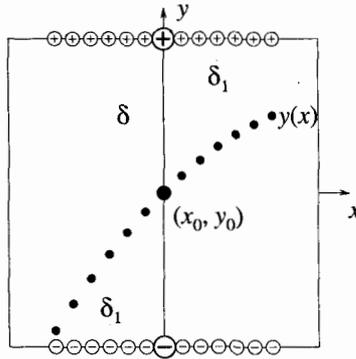


Рис. 3.6. Доказательство теоремы о неявной функции.

Функция $\partial F/\partial x$ непрерывна и, следовательно, ограничена при $|x - x_0| \leq \delta_1$ и $|y - y_0| \leq \delta$ некоторой величиной M . Отсюда, учитывая неравенство (3.34), мы заключаем, что $|\varphi(x)| \leq M/\beta$ и непрерывность $y(x)$ является следствием (3.35). После того как непрерывность $y(x)$ доказана, становится очевидной и непрерывность $\varphi(x)$ в x_1 , вследствие чего $y(x)$ является дифференцируемой в x_1 . Формула (3.33) получается вычислением предела $\lim_{x \rightarrow x_1} \varphi(x)$. \square

Замечание. Если дифференцируемость функции $y(x)$ установлена, формула (3.33) получается посредством дифференцирования тождества $F(x, y(x)) = 0$. Эта процедура называется *дифференцированием неявной функции* и уже была использована в конце разд. II.1.

Дифференцирование интегралов по параметру

Теперь мы хотим выяснить, является ли интеграл, содержащий параметр p (см. формулу 2.23), *дифференцируемой* функцией p , и если является, то может ли быть вычислена его производная путем перемены порядка интегрирования и дифференцирования по параметру, т. е. интегрированием $\partial f/\partial p$.

(3.9) Пример. Интеграл

$$(3.36) \quad \int_0^{\pi/2} e^{ax} \cos x \, dx = \frac{e^{a\pi/2} - a}{a^2 + 1}$$

легко вычисляется, если взять действительную часть интеграла $\int_0^{\pi/2} e^{(a+i)x} \, dx$. Если мы продифференцируем обе части (3.36) несколько раз по параметру a , то получим формулу

$$(3.37) \quad \int_0^{\pi/2} x^n e^{ax} \cos x \, dx = \left(\frac{d}{da}\right)^n \left(\frac{e^{a\pi/2} - a}{a^2 + 1}\right),$$

которую получить другими методами было бы гораздо сложнее.

(3.10) Контрпример. Рассматривая рис. III.5.5а, мы видим, что интеграл от $f_n(x)$ при $n \rightarrow \infty$ ведет себя подобно C/n . Это наводит на мысль заменить в формуле (а) упр. III.5.9 целое n действительной переменной $1/p$ и определить функцию

$$(3.38) \quad f(x, p) = \frac{x/p}{(1 + x^2/p^2)^2} = \frac{xp^3}{(p^2 + x^2)^2} \quad \text{при } p^2 + x^2 > 0$$

и $f(0, 0) = 0$. Тогда,

$$(3.39) \quad F(p) = \int_0^1 f(x, p) dx = \frac{p}{2(p^2 + 1)}$$

имеет производную в нуле $F'(0) = 1/2$. С другой стороны, интеграл от функции

$$\frac{\partial f}{\partial p}(x, p) = \begin{cases} -\frac{xp^2(p^2 - 3x^2)}{(p^2 + x^2)^3} & \text{при } x \neq 0 \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

при $p = 0$ равен нулю. Так как производная $\partial f/\partial p$ в начале координат разрывна, этот контрпример не противоречит следующей теореме.

(3.11) Теорема. Рассмотрим функцию $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ и предположим, что частная производная $\frac{\partial f}{\partial p}(x, p)$ существует и непрерывна на $[a, b] \times [c, d]$. Если интеграл

$$(3.40) \quad F(p) := \int_a^b f(x, p) dx$$

существует для всех $p \in [c, d]$, то функция $F(p)$ дифференцируема и ее производная равна

$$(3.41) \quad F'(p) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial p}(x, p) dx.$$

Доказательство. Рассмотрим очевидное тождество

$$\frac{F(p) - F(p_0)}{p - p_0} = \int_a^b \left(\frac{f(x, p) - f(x, p_0)}{p - p_0} \right) dx.$$

К подынтегральному выражению правой части применим теорему Лагранжа III.6.11, которая дает частную производную $\frac{\partial f}{\partial p}(x, \eta)$ (η , зависящим от x). Вычтем $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial p}(x, p_0) dx$ из обеих частей тождества. Используя неравенство из следствия III.5.15, получим, что

$$(3.42) \quad \left| \frac{F(p) - F(p_0)}{p - p_0} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial p}(x, p_0) dx \right| \leq \int_a^b \underbrace{\left| \frac{\partial f}{\partial p}(x, \eta) - \frac{\partial f}{\partial p}(x, p_0) \right|}_{< \varepsilon} dx.$$

Так как $\partial f/\partial p$ непрерывна на компактном множестве $[a, b] \times [c, d]$, то она равномерно непрерывна на нем (теорема 2.5), так что для достаточно малых $p - p_0$

разность в правой части (3.42) может быть ограничена сверху для всех x сколь угодно малым ε . Это показывает, что левая часть (3.42) сколь угодно близка к нулю и, следовательно, F дифференцируема, а ее производная имеет вид (3.41). \square

Упражнения

3.1 Рассмотрим функцию $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (см. рис. 3.7а),

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^2 + x_2^2} & \text{при } x_1^2 + x_2^2 > 0 \\ 0 & \text{при } x_1 = x_2 = 0. \end{cases}$$

Является ли функция f непрерывной? Имеет ли она производные по направлению в начале координат? Являются ли частные производные $\partial f / \partial x_1$ и $\partial f / \partial x_2$ непрерывными? И является ли f дифференцируемой?

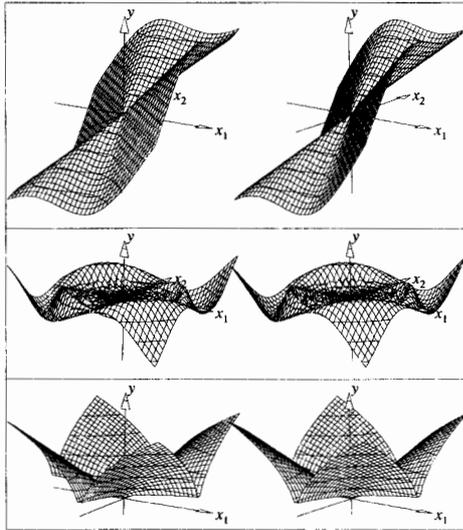


Рис. 3.7. Стереогаммы к упражнениям 3.1, 3.2 и 3.3.

3.2 Рассмотрите те же вопросы для функции $f(x_1, x_2) = \sqrt{|x_1 x_2|}$, показанной на рис. 3.7с (Оперный театр города Сидней).

3.3 Покажите, что $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, определенная как

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2 \sin\left(\frac{1}{x_1^2 + x_2^2}\right) & \text{при } x_1^2 + x_2^2 > 0 \\ 0 & \text{при } x_1 = x_2 = 0 \end{cases}$$

(см. рис. 3.7b) всюду дифференцируема, но ее частные производные не непрерывны в начале координат. Эта функция — двумерный аналог функции, изображенной на рис. III.6.1.

3.4 Для заданной константы a определим функцию $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ формулой

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} |x_1 x_2|^a & \text{при } x_1 x_2 \neq 0 \\ 0 & \text{при } x_1 x_2 = 0. \end{cases}$$

Определите значения параметра a , при которых (а) f непрерывна и (б) f дифференцируема.

3.5 Пусть функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ задана выражением $f(x) = x^T A x$, где A постоянная $n \times n$ матрица. Покажите, что ее производная имеет вид $f'(x) = x^T (A + A^T)$ (в случае затруднения выпишите явно все члены f при $n = 2$).

3.6 Пусть $V(x, y)$ — дифференцируемая функция и

$$W(r, \varphi) := V(r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Примените цепное правило и покажите, что

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2.$$

3.7 Дифференцируемую функцию $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называют *однородной порядка p* , если

$$(3.43) \quad f(ax) = a^p f(x) \quad \text{при } a > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Покажите, что функции $\operatorname{tg}(x_1/x_2)$, $\sqrt{2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2}$ и $x_1^4 - 5x_1x_2^3 + x_1^2x_2^2$ являются однородными (какого порядка?) и покажите, что однородные функции удовлетворяют тождеству Эйлера:

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = p f(x).$$

Указания. Продифференцируйте (3.43) по a .

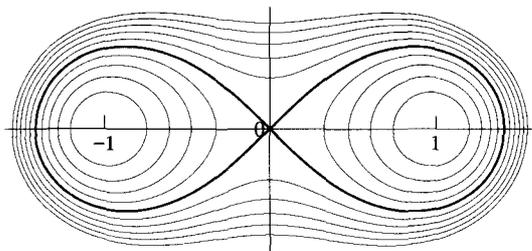


Рис. 3.8. Лемниската Бернулли и овалы Кассини.

3.8 Исследуйте функции $y(x)$, неявно определяемые уравнением

$$(3.44) \quad (x^2 + y^2)^2 - 2x^2 + 2y^2 = C.$$

При $C = 0$ это уравнение описывает знаменитую “лемнискату” Якоба Бернулли (1694), см. рис. 3.8. Найдите положения точек, в которых $\partial F/\partial y = 0$,

т.е. точек, в которых теорема о неявной функции не применима. Найдите также положения максимумов решений (3.44), т.е. точек, в которых $y'(x) = 0$, и покажите, что они лежат на окружности.

3.9 Рассмотрите те же вопросы для “декартова листа”

$$x^3 + y^3 = 3xy$$

(см. рис. 4.2 ниже).

3.10 Найдите точки $x \in \mathbb{R}^2$, где столбцы матрицы $f'(x)$ в (3.7) являются векторами одинакового направления (т.е. $\det f'(x) = 0$). Эти точки помечены, соответственно, “o” и “x” на рис. 3.2.

Ответ. $((k+l+3/4)\pi, (k-l+1/4)\pi)$ и $((k+l+3/4)\pi, (k-l-3/4)\pi)$ для $k, l \in \mathbb{Z}$.

3.11 Как вы думаете, какой из следующих двух интегралов проще вычислить:

$$\int_0^1 (\ln x)^2 dx \quad \text{или} \quad \int_0^1 x^a (\ln x)^2 dx ?$$

Видно, что второй интеграл можно продифференцировать по параметру a . Сделайте это, дав обоснование, и вычислите оба интеграла.

3.12 Используя тот факт, что

$$\int_0^\pi \frac{dx}{a - \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}} \quad \text{при} \quad a > 1,$$

проверьте, что

$$\int_0^\pi \frac{dx}{(5 - \cos x)^2} = \frac{5\sqrt{6}\pi}{288} \quad \text{и} \quad \int_0^\pi \frac{dx}{(6 - 4\cos x)^3} = \frac{11\sqrt{5}\pi}{1000}.$$

3.13 Покажите, что при $\alpha \geq 0$

$$\int_0^\alpha \frac{\log(1 + \alpha x)}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\alpha) \cdot \log(1 + \alpha^2).$$

Указание. Продифференцируйте интеграл по α и обоснуйте это действие.

3.14 Покажите, что

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Указание. Используя определение III.8.1, теоремы 3.11 и III.6.18, а также упр. II.4.2.h, покажите, что при $\alpha > 0$

$$F(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx \Rightarrow F'(\alpha) = - \int_0^\infty e^{-\alpha x} \sin x dx = \frac{1}{1 + \alpha^2}.$$

Наконец, видоизменив доказательство из примера III.8.5, покажите, что функция $F(\alpha)$ непрерывна справа при $\alpha = 0+$.

IV.4 Производные высших порядков и ряд Тейлора

Теперь легко видеть, что дифференциалы этого рода сохраняют свою величину, если изменить порядок дифференцирования по переменным.
(Коши 1823, *Résumé*, p. 76)

Рассмотрим сначала функции $f(x, y)$ двух переменных. Частные производные, такие, как $\partial f/\partial x$, тоже являются функциями двух переменных, и мы можем для них тоже вычислять частные производные, как показано на следующей схеме:

$$\begin{array}{ccccc}
 f(x, y) & \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} & \frac{\partial f}{\partial x} & \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \dots \\
 \frac{\partial}{\partial y} \downarrow & & \frac{\partial}{\partial y} \downarrow & & \\
 \frac{\partial f}{\partial y} & \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \stackrel{?}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} & \dots \\
 \frac{\partial}{\partial y} \downarrow & & \frac{\partial}{\partial y} \downarrow & & \\
 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} & \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \stackrel{?}{=} \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} & \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} & \dots
 \end{array}$$

Возникает вопрос: зависят ли эти производные от порядка дифференцирования?

(4.1) Пример. Следуя Эйлеру (1734, *Comm. Acad. Petrop.*, vol. VII, p. 177), рассмотрим функцию $f(x, y) = \sqrt{x^2 + ny^2}$ и вычислим частные производные (при $x^2 + ny^2 > 0$):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + ny^2}}, & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{-nxy}{(x^2 + ny^2)^{3/2}}, \\
 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{ny}{\sqrt{x^2 + ny^2}}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{-nxy}{(x^2 + ny^2)^{3/2}}.
 \end{aligned}$$

Эйлер затем объявил (см. также Эйлер 1755, §226), что вообще

$$(4.1) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y).$$

Однако это не верно без некоторых дополнительных предположений, как мы можем увидеть из следующего контрпримера.

(4.2) Контрпример. Г.А.Шварц (1873) привел первый, довольно сложный контрпример для (4.1) (см. упр. 4.1). Более простой контрпример позже получил Пеано (1884, "Annotazione N. 103"), рассмотрев функцию

$$(4.2) \quad f(x, y) = x y g(x, y),$$

где $g(x, y)$ ограничена (но необязательно непрерывна) в окрестности начала координат. Для этой функции имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(0, y)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} y g(x, y).$$

Производная этого выражения по y

$$(4.3) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} g(x, y) \right)$$

при условии, что этот предел существует. Аналогично имеем

$$(4.4) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} g(x, y) \right).$$

Остается только выбрать функцию $g(x, y)$ такую, чтобы пределы (4.3) и (4.4) были различными. Такой функцией будет, например,

$$(4.5) \quad g(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{при } x^2 + y^2 > 0,$$

для которой $\lim_{x \rightarrow 0} g(x, y) = -1$ для всех $y \neq 0$, а $\lim_{y \rightarrow 0} g(x, y) = +1$ для всех $x \neq 0$. Следовательно, смешанные частные производные

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$$

различны для функции, определенной соотношениями (4.2) и (4.5).

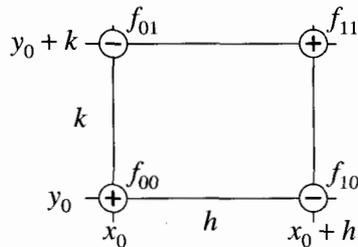
(4.3) Теорема. Рассмотрим функцию $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, для которой частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ существуют в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) , причем $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ непрерывна в точке (x_0, y_0) . Тогда существует $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ в точке (x_0, y_0) и верно равенство

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0).$$

Доказательство. Рассмотрим маленький прямоугольник со сторонами h и k . Значения f в его вершинах обозначим f_{00} , f_{01} , f_{10} и f_{11} . Тогда частные производные приблизительно равны

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &\approx \frac{f_{10} - f_{00}}{h}, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0 + k) &\approx \frac{f_{11} - f_{01}}{h}, \end{aligned}$$

$$(4.7) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \approx \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{k} \approx \frac{f_{11} - f_{01} - f_{10} + f_{00}}{h \cdot k}$$



и аналогично

$$(4.8) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \approx \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{h} \approx \frac{f_{11} - f_{10} - f_{01} + f_{00}}{k \cdot h}.$$

Выражение для правых частей в (4.7) и (4.8) одинаковы (Эйлер: "... huius theorematibus veritatem exercitati facile perspiciant ..." — показать справедливость такой теоремы представляется легким упражнением, — *лат.*), и утверждение теоремы представляется правдоподобным.

Чтобы сделать доказательство строгим, мы заменим разности в (4.6) по теореме Лагранжа III.6.11. Однако здесь возникает некоторое затруднение из-за того, что промежуточные точки ξ для двух разностей будут различными. Чтобы обойти эту трудность, рассмотрим функцию

$$(4.9) \quad g(x) := f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)$$

и применим к ней теорему Лагранжа: $g(x_0 + h) - g(x_0) = hg'(\xi)$. Это дает

$$f_{11} - f_{10} - f_{01} + f_{00} = h \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0) \right),$$

где ξ лежит между x_0 и $x_0 + h$. Далее применим теорему Лагранжа к производной $\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y)$, рассматривая её при этом как функцию y , и получим

$$(4.10) \quad \frac{f_{11} - f_{10} - f_{01} + f_{00}}{h \cdot k} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta)$$

(η лежит между y_0 и $y_0 + k$).

Благодаря непрерывности $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ в точке (x_0, y_0) из (4.10) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $h^2 + k^2 < \delta^2$

$$\left| \frac{f_{11} - f_{10} - f_{01} + f_{00}}{h \cdot k} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \right| < \varepsilon.$$

При $k \rightarrow 0$ разности $(f_{11} - f_{10})/k$ и $(f_{01} - f_{00})/k$ стремятся к $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y_0)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ соответственно. Следовательно, при $|h| < \delta$

$$\left| \frac{1}{h} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \right| \leq \varepsilon.$$

Это как раз и означает, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0),$$

и утверждение теоремы, таким образом, доказано. \square

Эта теорема, примененная несколько раз, позволяет нам изменять порядок дифференцирования и в производных более высокого порядка. Например,

$$\frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x}}_g \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x}}_g \frac{\partial}{\partial y} f = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} f = \dots$$

Теорема применима также для функций более чем двух переменных. Действительно, мы всегда можем за один раз переставить *две частные производные*, считая остальные переменные константами.

Ряд Тейлора двух переменных

Нашей следующей целью является обобщение ряда Тейлора на функции двух переменных. Идея такого обобщения (Коши 1829, р. 244) заключается в сведении проблемы к задаче с *одной* переменной путем соединения точек (x_0, y_0) и $(x_0 + h, y_0 + k)$ прямой линией. Рассмотрим, таким образом, функцию

$$(4.11) \quad g(t) := f(x_0 + th, y_0 + tk)$$

и применим к ней формулу (III.7.18) (ряд Тейлора для функции одной переменной). Для этого вычислим производные от $g(t)$. Если функция $f(x, y)$ дифференцируема достаточное число раз, цепное правило нам дает

$$(4.12) \quad g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + th, y_0 + tk) h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + th, y_0 + tk) k,$$

затем

$$(4.13) \quad g''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\cdot)hh + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\cdot)kh + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\cdot)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\cdot)kk,$$

где опущенный аргумент частных производных f есть $(x_0 + th, y_0 + tk)$. Два центральных члена в (4.13) равны согласно теореме 4.3 (дальнейшее дифференцирование будет давать биномиальные коэффициенты). Подстановка найденных выше производных $g(t)$, например, в

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2} g''(0) + \frac{1}{6} g'''(\theta)$$

(где $0 < \theta < 1$) приводит к следующему результату:

$$(4.14) \quad \begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)k^2 \right) \\ &+ \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\xi, \eta)h^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(\xi, \eta)h^2k \right. \\ &\quad \left. + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(\xi, \eta)hk^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\xi, \eta)k^3 \right), \end{aligned}$$

где $\xi = x_0 + \theta h$ и $\eta = y_0 + \theta k$ — промежуточные точки. Можно, конечно, применить и теорему III.7.13 с остаточным членом в интегральной форме.

(4.4) **Пример.** Рассмотрим функцию $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ (см. также пример 3.1). Ее частные производные равны

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= -2xe^{-x^2-y^2}, & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -2ye^{-x^2-y^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= (4x^2 - 2)e^{-x^2-y^2}, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= (4y^2 - 2)e^{-x^2-y^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 4xye^{-x^2-y^2}.\end{aligned}$$

Если мы пренебрежем остаточным членом в (4.14) и положим $x_0 = 0.9$, $y_0 = 1.2$, то получим квадратичную аппроксимацию

$$f(0.9 + h, 1.2 + k) \approx e^{-2.25} (1 - 1.8h - 2.4k + 0.62h^2 + 2.16hk + 1.88k^2).$$

На рис 4.1 сравниваются эта аппроксимация и рассматриваемая функция $f(x, y)$. Область изменения переменных на графике $-1 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 2$.

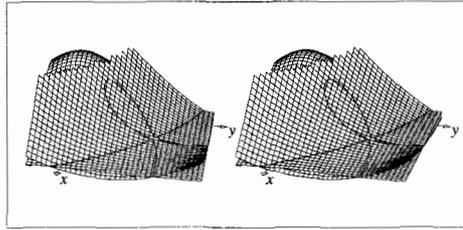


Рис. 4.1. Аппроксимация Тейлора второго порядка для функции $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$.

Ряд Тейлора для случая n переменных

Теперь мы распространим наши формулы на функции вида

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

где $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))^T$ состоит из m действительных функций от $x \in \mathbb{R}^n$. Зафиксируем $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $h \in \mathbb{R}^n$ и применим результаты разд. III.7 к функции $g(t) := f_i(x_0 + th)$. Получаем

$$\begin{aligned}(4.15) \quad f_i(x_0 + h) &= f_i(x_0) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) h_j + \frac{1}{2!} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(x_0) h_j h_k \\ &+ \frac{1}{3!} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial^3 f_i}{\partial x_j \partial x_k \partial x_\ell}(x_0 + \theta_i h) h_j h_k h_\ell.\end{aligned}$$

Мы можем пойти даже дальше и записать (формально, без рассмотрения сходимости ряда)

$$f_i(x_0 + h) = f_i(x_0) + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q!} \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \dots \sum_{j_q=1}^n \frac{\partial^q f_i(x_0)}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_q}} h_{j_1} \dots h_{j_q}.$$

Эти формулы довольно громоздки и “зывают” о более компактной записи, которая, говоря словами Дьёдонне, “изгнала бы орды индексов”. Линейный член в (4.15) является как раз i -м элементом произведения $f'(x_0)h$ (матрицы Якоби на вектор h). Чтобы упростить квадратичный член, рассмотрим *билинейное отображение* $f''(x) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, чья i -я компонента при действии на пару векторов u и v определяется как

$$(4.16) \quad \left(f''(x)(u, v) \right)_i := \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(x) u_j v_k.$$

Следовательно, квадратичный член в (4.15) есть i -й элемент вектора $f''(x_0)(h, h)$. Мы можем продолжить интерпретацию высших производных как *полилинейных отображений*. Например, $f'''(x) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ определяется выражением

$$(4.17) \quad \left(f'''(x)(u, v, w) \right)_i := \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial^3 f_i}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l}(x) u_j v_k w_l.$$

В этих обозначениях формулу (4.15) можно переписать как

$$(4.18) \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2!} f''(x_0)(h, h) + R_3.$$

Для остаточного члена R_3 нельзя написать $R_3 = (1/3!)f'''(x_0 + \theta h)(h, h, h)$, так как промежуточные точки $x_0 + \theta_i h$ in (4.15) в (4.15) могут быть различны для каждой компоненты. Однако мы можем использовать интегральное представление (теорема III.7.13) для получения формулы

$$(4.19) \quad R_3 = \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2!} f'''(x_0 + th)(h, h, h) dt.$$

(4.5) *Замечание.* Для вектор-функции $g(t) = (g_1(t), \dots, g_m(t))^T$ мы используем запись

$$(4.20) \quad \int_0^1 g(t) dt := \left(\int_0^1 g_1(t) dt, \dots, \int_0^1 g_m(t) dt \right)^T.$$

Вид этой записи наводит на мысль об использовании оценки

$$(4.21) \quad \left\| \int_0^1 g(t) dt \right\| \leq \int_0^1 \|g(t)\| dt,$$

которая получается как результат рассмотрения римановых сумм и применения к ним неравенства треугольника, записанного в виде $\| \sum_i g(\xi_i) \delta_i \| \leq \sum_i \|g(\xi_i)\| \delta_i$.

Оценка остаточного члена. Допустим, мы хотим оценить остаточный член R_3 (4.19). Принимая во внимание (4.21), нам надо оценить выражение $\|f'''(x)(h, h, h)\|$. Для евклидовой нормы эта оценка может быть получена повторным применением неравенства Коши—Шварца. Обозначив выражение (4.17) через a_i , имеем

$$\begin{aligned} a_i &:= \sum_{j=1}^n b_{ij} u_j, & a_i^2 &\leq \left(\sum_{j=1}^n b_{ij}^2 \right) \|u\|^2, \\ b_{ij} &:= \sum_{k=1}^n c_{ijk} v_k, & b_{ij}^2 &\leq \left(\sum_{k=1}^n c_{ijk}^2 \right) \|v\|^2, \\ c_{ijk} &:= \sum_{\ell=1}^n d_{ijk\ell} w_\ell, & c_{ijk}^2 &\leq \left(\sum_{\ell=1}^n d_{ijk\ell}^2 \right) \|w\|^2, \end{aligned}$$

где $d_{ijk\ell} = \frac{\partial^3 f_i(x)}{\partial x_j \partial x_k \partial x_\ell}$. Подстановка c_{ijk}^2 из последнего неравенства в предыдущее, а затем b_{ij}^2 в первое дает

$$a_i^2 \leq \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n d_{ijk\ell}^2 \right) \|u\|^2 \|v\|^2 \|w\|^2.$$

Вычислив $\sum_i a_i^2$ и квадратный корень из этой суммы, мы получим

$$(4.22) \quad \|f'''(x)(u, v, w)\| \leq M(x) \|u\| \|v\| \|w\|,$$

где

$$(4.23) \quad M(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \left(\frac{\partial^3 f_i}{\partial x_j \partial x_k \partial x_\ell}(x) \right)^2}.$$

(4.6) Лемма. Пусть функция $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ трижды непрерывно дифференцируема. Тогда остаточный член R_3 в формуле (4.18) удовлетворяет неравенству

$$\|R_3\| \leq \frac{\|h\|^3}{3!} \sup_{t \in [0,1]} M(x_0 + th),$$

где $M(x)$ определена формулой (4.23).

Доказательство. Применение оценки (4.21) к (4.19) дает

$$\|R_3\| \leq \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2!} \|f'''(x_0 + th)(h, h, h)\| dt.$$

Из неравенства (4.22) следует, что выражение $\|f'''(x_0 + th)(h, h, h)\|$ не превосходит $\sup_{t \in [0,1]} M(x_0 + th) \|h\|^3$, и утверждение леммы теперь следует из неравенства (III.5.18). \square

Задачи на максимум и минимум

Наша следующая цель — обобщить результаты разд. II.2 относительно необходимых и достаточных условий локального максимума(или минимума) на случай функций $z = f(x, y)$ двух переменных. Мы уже видели в разд. IV.3 (геометрическая интерпретация градиента), что $\text{grad } f(x_0, y_0) = 0$, т. е.

$$(4.24) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

— необходимое условие максимума (или минимума). Точки, удовлетворяющие условию (4.24), называются *стационарными точками* функции $f(x, y)$.

В достаточно малой окрестности стационарной точки (x_0, y_0) (если $|x - x_0|$ и $|y - y_0|$ малы) остаточным членом в (4.14) можем пренебречь, и условие

$$(4.25) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)k^2 > 0$$

гарантирует, что $f(x_0 + h, y_0 + k) > f(x_0, y_0)$ (если функция только дважды непрерывно дифференцируема, то берем меньшее число членов ряда Тейлора и используем непрерывность вторых частных производных). Поэтому, мы имеем локальный минимум, если (4.25) выполняется для всех $(h, k) \neq (0, 0)$. Если выражение в (4.25) отрицательно для всех $(h, k) \neq (0, 0)$, мы имеем локальный максимум. В случае, когда (4.25) принимает и положительные, и отрицательные значения в зависимости от выбора (h, k) , точка (x_0, y_0) называется седловой точкой функции, т. е. существуют направления, в которых функция возрастает, и другие, в которых она убывает.

Для того чтобы проверить, является ли положительной квадратичная форма $Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$ для всех $(h, k) \neq (0, 0)$, возьмем $\lambda = h/k$ и рассмотрим квадратный трехчлен $A\lambda^2 + 2B\lambda + C$. Этот полином принимает только положительные значения, если $A > 0$ и $AC - B^2 > 0$, и только отрицательные значения, если $A < 0$ и $AC - B^2 > 0$. Мы, таким образом, доказали следующий результат, который был опубликован в самой первой работе молодого Лагранжа.

(4.7) Теорема (Лагранжа 1759). Пусть функция $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируема, и условие (4.24) удовлетворяется. Тогда

а) точка (x_0, y_0) есть точка локального минимума, если в этой точке

$$(4.26) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0;$$

б) точка (x_0, y_0) является точкой локального максимума, если в точке (x_0, y_0)

$$(4.27) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0;$$

в) в случае, когда в точке (x_0, y_0) выполняется неравенство

$$(4.28) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 < 0,$$

эта точка является седловой точкой. □

(4.8) Пример. Функция

$$(4.29) \quad f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

порождает знаменитый “декартов лист” (письмо Декарта к Мерсенну 23 августа 1638 г.). Линии уровня этой функции построены на рис. 4.2. Вычисляя частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3x,$$

мы видим, что функция (4.29) имеет две стационарные точки, а именно, $(0, 0)$ и $(1, 1)$. Проверка достаточных условий теоремы 4.7 показывает, что точка $(0, 0)$ — седловая точка, а точка $(1, 1)$ — точка локального минимума (см. рис. 4.2).

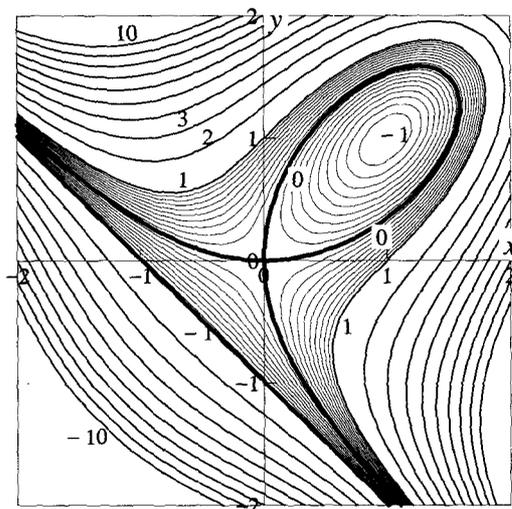


Рис. 4.2. Линии уровня декартова листа (4.29).

Обобщение на случай n переменных. Рассмотрим действительную функцию $z = f(x_1, \dots, x_n)$ более чем двух переменных. Мы видели в разд. IV.3, что необходимым условием локального экстремума (максимума или минимума) в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$ является

$$(4.30) \quad \text{grad } f(x_0) = 0.$$

Для получения достаточных условий надо исследовать квадратичный член в (4.15). Если положить $h = (h_1, \dots, h_n)^T$, этот член может быть записан как $(h^T H(x_0)h)/2$, где матрица

$$(4.31) \quad H(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \end{pmatrix}$$

называется *матрицей Гессе*, или *гессианом* (Гессе 1857, Crelle J. f. Math., vol. 54, p. 251). Если условия теоремы 4.3 выполняются, то эта матрица симметрична.

Если в дополнение к (4.30) матрица (4.31) является “положительно определенной” в точке x_0 , т.е. $h^T H(x_0)h > 0$ для всех $h \neq 0$, то точка x_0 является точкой локального минимума. Стационарная точка x_0 будет точкой локального максимума, если $H(x_0)$ является “отрицательно определенной”, т.е. $h^T H(x_0)h < 0$ для всех $h \neq 0$. По вопросам о способах проверки условий положительной (отрицательной) определенности матрицы размерности ≥ 3 мы отсылаем читателя к любому стандартному курсу линейной алгебры (см., напр., Халмош 1958, p. 141, 153).

Условный минимум (множитель Лагранжа)

Задача. Требуется найти локальный максимум (или минимум) функции $f(x, y)$ при дополнительном условии (связи) $g(x, y) = 0$. Если мы обозначим множество точек линии уровня функции g как $A = \{(x, y) \mid g(x, y) = 0\}$, то нам надо найти точку $(x_0, y_0) \in A$ такую, что $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ для всех $(x, y) \in A$.

При прямом подходе мы должны были бы разрешить неявное уравнение $g(x, y) = 0$ относительно y для получения явной функции $y = G(x)$ (см. теорему о неявной функции 3.8) и отыскания экстремума функции $F(x) = f(x, G(x))$. При более общем подходе мы можем попытаться найти параметризацию $(x(t), y(t))$ линии уровня A и рассмотреть функцию $F(t) = f(x(t), y(t))$. Необходимым условием для экстремума в точке $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$ будет $F'(t_0) = 0$, т.е.

$$(4.32) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)y'(t_0) = 0.$$

Это уравнение служит для определения t_0 и отбора возможных кандидатов на решение. Однако этот подход часто является бесполезным, так как трудно получить подходящую параметризацию.

Идея Лагранжа (1788, première partie, Sect. IV, §1, *Oeuvres*, vol. 11, p. 78). Из (4.32) видно, что $\text{grad } f(x_0, y_0)$ ортогонален вектору $(x'(t_0), y'(t_0))$ касательной к линии уровня A . Следовательно (см. разд. IV.3), в точке локального экстремума векторы $\text{grad } f(x_0, y_0)$ и $\text{grad } g(x_0, y_0)$ имеют одинаковое направление (см. рис. 4.3), и мы получили необходимое условие экстремума

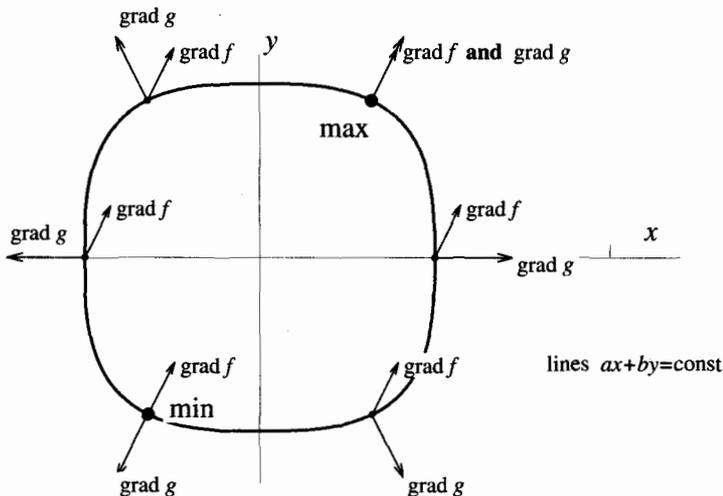
$$(4.33) \quad \text{grad } f(x_0, y_0) = \lambda \text{grad } g(x_0, y_0), \quad g(x_0, y_0) = 0$$

(если $\text{grad } f(x_0, y_0) \neq 0$). Параметр λ называется *множителем Лагранжа*. Уравнения (4.33) представляют собой три условия для трех параметров x_0, y_0, λ . Введя функцию Лагранжа

$$(4.34) \quad \mathcal{L}(x, y, \lambda) := f(x, y) - \lambda g(x, y),$$

мы можем представить условие (4.33) в более изящном виде:

$$(4.35) \quad \text{grad } \mathcal{L}(x_0, y_0, \lambda) = 0.$$

Рис. 4.3. Условный максимум функции $f(x, y) = x + 2y$, $p = 3$.

(4.9) Пример. Пусть даны положительные числа a, b и $p > 1$. Вычислим максимум функции

$$(4.36) \quad f(x, y) = ax + by$$

в области $x > 0, y > 0$ при наличии связи $g(x, y) = x^p + y^p - 1 = 0$ (см. рис. 4.3). Следуя идее Лагранжа, пишем функцию $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = ax + by - \lambda(x^p + y^p - 1)$; необходимое условие (4.35) примет вид

$$(4.37) \quad a - p\lambda x_0^{p-1} = 0, \quad b - p\lambda y_0^{p-1} = 0, \quad x_0^p + y_0^p = 1.$$

Первые два соотношения дают

$$(4.38) \quad x_0 = \left(\frac{a}{\lambda p}\right)^{1/(p-1)}, \quad y_0 = \left(\frac{b}{\lambda p}\right)^{1/(p-1)},$$

и подставляя результат в оставшееся соотношение, получим

$$(4.39) \quad \left(\frac{a}{\lambda p}\right)^q + \left(\frac{b}{\lambda p}\right)^q = 1,$$

где

$$(4.40) \quad q = \frac{p}{p-1} \quad \text{или} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Равенство (4.39) позволяет нам вычислить λ . Подставляя результат в (4.38), получаем искомое решение

$$(4.41) \quad x_0 = \frac{a^{q/p}}{(a^q + b^q)^{1/p}}, \quad y_0 = \frac{b^{q/p}}{(a^q + b^q)^{1/p}},$$

(см. рис. 4.3).

Неравенство Гёльдера (Гёльдер 1889). Пусть ξ, η и $p > 1$ — положительные числа. Тогда

$$x = \frac{\xi}{(\xi^p + \eta^p)^{1/p}}, \quad y = \frac{\eta}{(\xi^p + \eta^p)^{1/p}}$$

удовлетворяют равенству $x^p + y^p = 1$, и из примера (4.9) следует, что

$$\frac{a\xi + b\eta}{(\xi^p + \eta^p)^{1/p}} = ax + by \leq ax_0 + by_0 = \frac{a^q + b^q}{(a^q + b^q)^{1/p}}.$$

Таким образом, мы получаем

$$a\xi + b\eta \leq (\xi^p + \eta^p)^{1/p} (a^q + b^q)^{1/q},$$

где p и q связаны соотношением (4.40). С помощью индукции по n это неравенство может быть обобщено:

$$(4.42) \quad \sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{1/q},$$

где x_i и y_i положительны. Это и есть так называемое неравенство Гёльдера. При $p = q = 2$ оно сводится к неравенству Коши—Шварца (1.5).

Используя (4.42), мы можем доказать неравенство треугольника для нормы $\|x\|_p$, определяемой равенством (1.9). Действительно, для двух векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\|x + y\|_p^p = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1}.$$

Применим (4.42) к обеим суммам в правой части этого неравенства и получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot |x_i + y_i|^{p-1} &\leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^{q(p-1)} \right)^{1/q} \\ &= \|x\|_p \cdot \|x + y\|_p^{p-1}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем $\|x + y\|_p^p \leq (\|x\|_p + \|y\|_p) \cdot \|x + y\|_p^{p-1}$ и как следствие неравенство треугольника $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.

Упражнения

4.1 (Г.А. Шварц 1873). Покажите, что для функции

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - y^2 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} & \text{при } xy \neq 0 \\ 0 & \text{при } xy = 0 \end{cases}$$

вторые частные производные в начале координат различны: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

- 4.2 Покажите, что формула Тейлора (4.14) справедлива только в случае, когда все частные производные, входящие в нее, непрерывны. Это отличается от случая одной переменной (см., напр., теорему III.6.11). Пеано (1884, "Annatazione N. 109") привел следующий контрпример: пусть

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{при } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

и $x_0 = y_0 = -a$, $h = k = a + b$. Он показывает, что равенство (4.14) может нарушиться, если его записать с остаточным членом первого порядка

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, \eta)h + \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, \eta)k,$$

где $\xi = x_0 + \theta h$ и $\eta = y_0 + \theta k$ — промежуточные точки. Этот контрпример исправил ошибку в книге Серре.

- 4.3 Проанализируйте в примере 4.4 пересечения графика функции $f(x, y)$ с графиком ее тейлоровской аппроксимации второго порядка в окрестности точки (x_0, y_0) и объясните звездообразную форму кривых (см. рис. 4.1). Как вы думаете, почему авторы выбрали именно точку $(0.9, 1.2)$ для этого рисунка, а не точку $(0.8, 1.0)$, как для рис. 3.1?

Указание. Используйте поправочный член в формуле (4.14).

- 4.4 Пусть $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию

$$\text{grad } f(x) = g(x) \cdot x^T,$$

где $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Покажите, что f — постоянная на окружности $\{x \in \mathbb{R}^2; \|x\| = r\}$.

- 4.5 Покажите, что $U = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad \text{при } x^2 + y^2 + z^2 > 0.$$

- 4.6 Найдите стационарные точки функции

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 8xy$$

и исследуйте линии уровня $f(x, y) = \text{Const}$ в окрестностях этих точек (сходство этих кривых с уже рассмотренными — преднамеренно).

- 4.7 Найдите максимум функции $\sqrt[3]{xyz}$ при условии $(x + y + z)/3 = 1$. Какой вывод можно сделать из этого результата? (Мы видели в примере 4.9, что вычисление условного максимума является превосходным способом получения интересных неравенств.)

- 4.8 Найдите максимумы или минимумы функции $x^2 + y^2 + z^2$ при наличии связей

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1 \quad \text{и} \quad z = x + y.$$

Замечание. Если требуется удовлетворить *двум* условиям, надо ввести *два* множителя Лагранжа.

4.9 Пусть

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} + 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

— матрица из примера в разд. IV.2. Найдите максимум функции $f(x) = \|Ax\|_2^2$ при наличии связи $\|x\|_2^2 - 1 = 0$. Результатом будет величина $\|A\|_2$, определяемая равенством (2.14).

4.10 Покажите, что функция $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, задаваемая формулой

$$f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2),$$

имеет в начале координат стационарную точку, но не локальный минимум. Тем не менее, на всех прямых, проходящих через начало координат, функция *имеет* локальный минимум. Этим контрпримером Пеано (1884, “Annotazioni N. 133-136”) исправил другую ошибку в книге Серре. Такая непочтительная критика работы крупнейшего французского математика никому неизвестным 25-летним итальянцем никого не привела в восторг (см., напр., Пеано, *Opere*, p. 40-46).

IV.5 Кратные интегралы

Известно, что вычисление или даже только редукция кратных интегралов обычно представляет весьма значительные трудности ...

(Дирихле 1839, *Werke*, vol. I, p. 377)

Риманов интеграл от функции одной переменной (разд. III.5) представляет собой геометрически площадь между графиком функции и осью x . Мы обобщим это понятие на функции двух переменных $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ (где $A \subset \mathbb{R}^2$) таким образом, что интеграл будет представлять объем между поверхностью $z = f(x, y)$ и плоскостью (x, y) . Многие определения и результаты разд. III.5 могут быть перенесены непосредственно. Однако возникают дополнительные технические трудности, так как области интегрирования в \mathbb{R}^2 часто оказываются более сложными, чем в \mathbb{R} (см. рис. 5.1). После этого обобщение на функции более чем двух переменных будет более или менее простым.



Рис. 5.1. Возможные области в \mathbb{R}^2 .

Двойные интегралы по прямоугольной области

Мы начнем с рассмотрения функций $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, область определения которых $I = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ является замкнутым и ограниченным прямоугольником в \mathbb{R}^2 , и предположим, что функция ограничена, т. е.

$$(5.1) \quad \exists M \geq 0 \quad \forall (x, y) \in I \quad |f(x, y)| \leq M.$$

Рассмотрим разбиения

$$(5.2) \quad \begin{aligned} D_x &= \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \quad \text{для } [a, b], \\ D_y &= \{y_0, y_1, \dots, y_m\} \quad \text{для } [c, d], \end{aligned}$$

где $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ и $c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$. Обозначим $I_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ маленький прямоугольник, показанный на рис.5.2, а его площадь как

$$(5.3) \quad \mu(I_{ij}) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

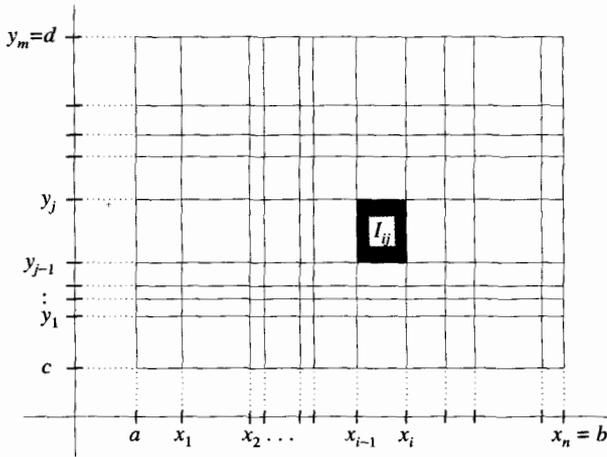


Рис. 5.2. Разбиение прямоугольника на элементы I_{ij} .

Используя обозначения

$$(5.4) \quad f_{ij} = \inf_{(x,y) \in I_{ij}} f(x,y), \quad F_{ij} = \sup_{(x,y) \in I_{ij}} f(x,y),$$

определим теперь верхнюю и нижнюю суммы:

$$(5.5) \quad s(D_x \times D_y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f_{ij} \mu(I_{ij}), \quad S(D_x \times D_y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m F_{ij} \mu(I_{ij}).$$

Если добавлять точки к разбиению D_x (или к D_y), то нижняя сумма не убывает и верхняя сумма не возрастает (ср. с леммой III.5.1). Более того, нижняя сумма не может стать больше чем верхняя сумма (лемма III.5.2). Поэтому имеет смысл следующее определение.

(5.1) Определение. Пусть функция $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию (5.1). Если

$$(5.6) \quad \sup_{(D_x, D_y)} s(D_x \times D_y) = \inf_{(D_x, D_y)} S(D_x \times D_y),$$

то функция $f(x,y)$ интегрируема на I , а величина (5.6) обозначается как

$$(5.7) \quad \int_I f(x,y) d(x,y) \quad \text{или} \quad \iint_I f(x,y) d(x,y).$$

Из этого определения и вышеупомянутых свойств, следует, что функция $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ является интегрируемой тогда и только тогда, когда

$$(5.8) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists (\tilde{D}_x, \tilde{D}_y) \quad S(\tilde{D}_x \times \tilde{D}_y) - s(\tilde{D}_x \times \tilde{D}_y) < \varepsilon$$

(см. теорему III.5.4). Теорема Дюбуа-Реймона (теорема III.5.8) также имеет свой аналог.

(5.2) Теорема. Пусть \mathcal{D}_δ — множество всех пар разбиений (D_x, D_y) таких, что $\max_i(x_i - x_{i-1}) < \delta$ и $\max_j(y_j - y_{j-1}) < \delta$. Функция $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая условию (5.1), является интегрируемой тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall (D_x, D_y) \in \mathcal{D}_\delta \quad S(D_x \times D_y) - s(D_x \times D_y) < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть для некоторого $\varepsilon > 0$ задано разбиение $(\tilde{D}_x, \tilde{D}_y)$, удовлетворяющее условию (5.8). Это индуцирует сетку, длина которой (внутри прямоугольника $[a, b] \times [c, d]$) равна $L = (\tilde{n} - 1)(d - c) + (\tilde{m} - 1)(b - a)$ (см. левый рис. 5.3). Возьмем теперь произвольное разбиение $(D_x, D_y) \in \mathcal{D}_\delta$, обозначим $\Delta = S(D_x \times D_y) - s(D_x \times D_y)$ и положим $D'_x = D_x \cup \tilde{D}_x$, $D'_y = D_y \cup \tilde{D}_y$ и $\Delta' = S(D'_x \times D'_y) - s(D'_x \times D'_y)$. Тогда получим, как и в (III.5.10),

$$\Delta \leq \Delta' + L \cdot \delta \cdot 2M$$

(см. правый рис. 5.3). Дальнейшее умозаключение такое же, как в доказательстве теоремы III.5.8. \square

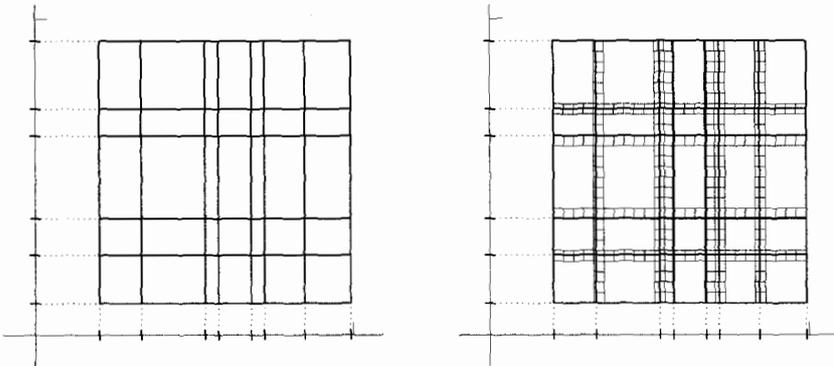


Рис. 5.3. Разбиение $\tilde{D}_x \times \tilde{D}_y$ (слева); разбиение $D'_x \times D'_y$ и его элементы I_{ij} , пересекающие $\tilde{D}_x \times \tilde{D}_y$ (справа).

Пусть ξ_1, \dots, ξ_n и η_1, \dots, η_m таковы, что $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ и $y_{j-1} \leq \eta_j \leq y_j$. Тогда из теоремы 5.2 следует:

$$(5.9) \quad \left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\xi_i, \eta_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) - \iint_I f(x, y) d(x, y) \right| < \varepsilon$$

при условии, что $\max_i(x_i - x_{i-1}) < \delta$ и $\max_j(y_j - y_{j-1}) < \delta$. Это неравенство справедливо, потому что и сумма, и интеграл в (5.9) заключены между $s(D_x \times D_y)$ и $S(D_x \times D_y)$.

Повторные интегралы. Внутренняя сумма в (5.9), т. е. $\sum_{j=1}^m f(\xi_i, \eta_j)(y_j - y_{j-1})$, является суммой Римана для функции $f(\xi_i, y)$. Предполагая эту функцию интегрируемой (в смысле определения III.5.3) для всех i , мы получим из (5.9), что

$$(5.10) \quad \left| \sum_{i=1}^n \int_c^d f(\xi_i, y) dy (x_i - x_{i-1}) - \iint_I f(x, y) d(x, y) \right| \leq \varepsilon.$$

Здесь мы снова сталкиваемся с римановой суммой, на этот раз для функции $x \mapsto \int_c^d f(x, y) dy$. Оценка (5.10) отражает тот факт, что суммы Римана сходятся к $\iint_I f(x, y) d(x, y)$, если $\max_i (x_i - x_{i-1}) \rightarrow 0$. Следовательно,

$$(5.11) \quad \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \iint_I f(x, y) d(x, y)$$

(см. упр. 5.1), и доказан следующий результат.

(5.3) Теорема (Штольц 1886, р. 93). Пусть $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема, и предположим, что для каждого $x \in [a, b]$ функция $y \mapsto f(x, y)$ является интегрируемой на $[c, d]$. Тогда функция $x \mapsto \int_c^d f(x, y) dy$ интегрируема на $[a, b]$ и имеет место тождество (5.11). \square

Следовательно, вычисление двойного интеграла сводится к вычислению двух более простых (повторных) интегралов, и может быть использована техника, развитая в разделах II.4, II.5 и III.5. По симметрии мы имеем также формулу

$$(5.12) \quad \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \iint_I f(x, y) d(x, y)$$

при условии, что $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема и функция $x \mapsto f(x, y)$ является интегрируемой на $[a, b]$ для каждого $y \in [c, d]$. Два тождества (5.11) и (5.12) вместе показывают, что повторные интегралы независимы от порядка интегрирования (при выполнении указанных предположений).

Контрпримеры. Покажем, что существование одного из интегралов в (5.11) необязательно влечет за собой существования другого.

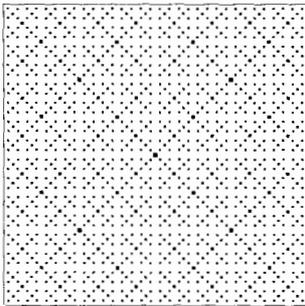


Рис. 5.4а. Неинтегрируемая функция.



Рис. 5.4б. Интегрируемая функция.

1) Пусть функция $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ (рис.5.4а) определена выражением

$$(5.13) \quad f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{если } (x, y) = \left(\frac{2k-1}{2^n}, \frac{2\ell-1}{2^n}\right), \text{ где } n, k, \ell \text{ — целые,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для любого фиксированного $x \in [0, 1]$ существует только конечное число точек, в которых $f(x, y) \neq 0$. Следовательно, $\int_0^1 f(x, y) dy = 0$ и повторный интеграл в левой части (5.11) существует. Однако каждый прямоугольник $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ содержит точки, в которых $f(x, y) = 1$, и точки, в которых $f(x, y) = 0$. Следовательно, $s(D_x \times D_y) = 0$ и $S(D_x \times D_y) = 1$ для всех разбиений, и интеграл в правой части (5.11) не существует.

2) Функция (рис. 5.4b)

$$(5.14) \quad f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } (x = 0 \text{ или } x = 1) \text{ и } y \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{при } (y = 0 \text{ или } y = 1) \text{ и } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

интегрируема, так как точки, в которых $f(x, y) \neq 0$, составляют множество, которым можно пренебречь (см. ниже). Но при $x = 0$ или $x = 1$, функция $y \mapsto f(x, y)$ является функцией Дирихле из примера III.5.6, которая не интегрируема.

Множества меры нуль и разрывные функции

Непрерывные функции $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ являются равномерно непрерывными (I — компактное множество, теорема 2.5) и, следовательно, интегрируемыми. Доказательство этого факта аналогично доказательству теоремы III.5.10. В дальнейшем мы докажем интегрируемость функций, у которых множество точек разрыва не слишком велико.

(5.4) Определение. Говорят, что множество $X \subset I \subset \mathbb{R}^2$ есть множество меры нуль, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует конечное множество прямоугольников $I_k = [a_k, b_k] \times [c_k, d_k]$, ($k = 1, \dots, n$) таких, что

$$(5.15) \quad X \subset \bigcup_{k=1}^n I_k \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^n \mu(I_k) < \varepsilon.$$

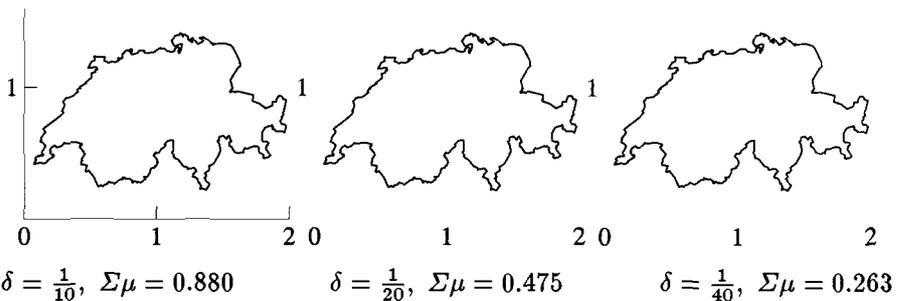


Рис. 5.5. Множество меры нуль.

Типичными множествами меры нуль являются границы “регулярных” множеств, например, треугольников, кругов, многоугольников (см. пример на рис. 5.5¹). Это вытекает из следующего результата.

(5.5) Лемма. Пусть $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ представляет кривую на плоскости и допустим, что

$$(5.16) \quad \|\varphi(s) - \varphi(t)\|_\infty \leq M \cdot |s - t| \quad \text{для всех } s, t \in [0, 1].$$

Тогда образ $\varphi([0, 1])$ есть множество меры нуль.

Доказательство. Разделим $[0, 1]$ на n интервалов J_1, J_2, \dots, J_n одинаковой длины $1/n$. Для $s, t \in J_k$ имеем $\|\varphi(s) - \varphi(t)\|_\infty \leq M/n$, т.е. $\varphi(J_k)$ содержится в квадрате I_k со стороной $\leq 2M/n$. Следовательно, вся кривая целиком содержится в области, состоящей из n квадратов I_1, \dots, I_n , площадь которой ограничена величиной

$$\sum_{k=1}^n \mu(I_k) \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{2M}{n}\right)^2 = \frac{4M^2}{n} < \varepsilon,$$

если n достаточно велико. Это и доказывает выполнение условия (5.15). □

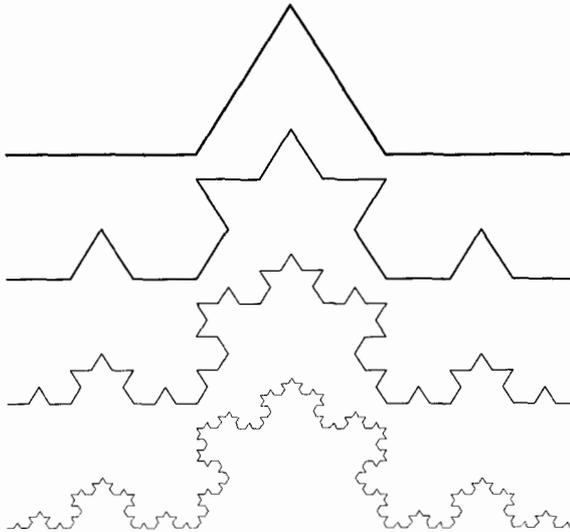


Рис. 5.6. Множество меры нуль, кривая фон Коха.

Условие (5.16) является достаточным, но не необходимым для того, чтобы кривая являлась множеством меры нуль. Например, кривая фон Коха (1906)

¹ Множество имеет меру нуль, конечно, только в строго математическом смысле!

на рис. 5.6 является множеством меры нуль (см. упр. 5.5), хотя имеет бесконечную длину (следовательно, условие (5.16) выполняться не может). Кривая Пеано—Гильберта (рис. 2.3), конечно, не является множеством меры нуль. Однако треугольник и ковер Серпиньского (рис. 1.9 и рис. 1.10) являются другими интересными примерами множеств меры нуль.

(5.6) Теорема. Пусть $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная функция (удовлетворяет условию (5.1)) и определено множество

$$X = \{(x, y) \in I ; f \text{ разрывна в точке } (x, y)\}.$$

Если X является множеством меры нуль, то функция $f(x, y)$ интегрируема.

Доказательство. Пусть дано $\varepsilon > 0$ и $\bigcup_{k=1}^n I_k$ является конечным покрытием множества X , удовлетворяющим условию (5.15). Слегка расширим I_k и рассмотрим открытые прямоугольники J_1, \dots, J_n такие, что $J_k \supset I_k$ для всех k и $\sum_{k=1}^n \mu(J_k) < 2\varepsilon$. Множество $H := I \setminus \bigcup_{k=1}^n J_k$ является тогда замкнутым (теоремы 1.15 и 1.14) и, следовательно, компактным (теорема 1.19). Сужение на H функции $f(x, y)$ является равномерно непрерывным (теорема 2.5), что означает существование $\delta > 0$ такого, что $|f(x, y) - f(\xi, \eta)| < \varepsilon$ всякий раз, когда $|x - \xi| < \delta$ и $|y - \eta| < \delta$.

Стартуем теперь с сетки $D_x \times D_y$, содержащей все вершины прямоугольников J_1, \dots, J_n , и измельчаем ее до тех пор, пока расстояния $x_i - x_{i-1}$ и $y_j - y_{j-1}$ не станут меньшими, чем δ . Затем разобьем разности $S(D_x \times D_y) - s(D_x \times D_y)$ в соответствии с

$$\sum_{I_{ij} \subset H} (F_{ij} - f_{ij})\mu(I_{ij}) + \sum_{I_{ij} \not\subset H} (F_{ij} - f_{ij})\mu(I_{ij}).$$

Левая сумма $\leq \varepsilon\mu(I)$ вследствие равномерной непрерывности $f(x, y)$ на H ; правая сумма $\leq 4M\varepsilon$ из-за того, что объединение прямоугольников I_{ij} (которые не содержатся в H) содержится в $\bigcup_{k=1}^n J_k$ с площадью меньшей, чем 2ε . Обе оценки вместе показывают, что разность $S(D_x \times D_y) - s(D_x \times D_y)$ может быть сколь угодно малой. \square

Произвольные ограниченные области

Этот метод заключается просто в умножении подлежащего интегрированию выражения на коэффициент, равный единице в области интегрирования и нулю вне нее. (Дирихле 1839, *Werke*, vol. I, p. 377)

Пусть $A \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область, содержащаяся в прямоугольнике I (т.е. $A \subset I$), и $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная функция. Мы хотим найти объем цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, а снизу частью плоскости (x, y) , а именно, A .

Идея Дирихле (1839) состоит в рассмотрении функции $F : I \rightarrow \mathbb{R}$, определяемой как

$$(5.17) \quad F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{если } (x, y) \in A, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если F интегрируема в смысле определения 5.1, то мы определим

$$(5.18) \quad \iint_A f(x, y) d(x, y) = \iint_I F(x, y) d(x, y).$$

Обычная ситуация — когда $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на A и граница A , т.е. множество

$$(5.19) \quad \partial A := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} \text{каждая окрестность точки } (x, y) \\ \text{содержит элементы из } A \text{ и из } \mathbb{C}A \end{array} \right\}$$

является множеством меры нуль. В этом случае все точки разрыва функции F лежат на границе ∂A , и из теоремы 5.6 следует интегрируемость F .

Повторные интегралы. Множество A часто может быть описано одним из следующих способов:

$$(5.20) \quad A = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\},$$

$$(5.21) \quad A = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\},$$

где $\varphi_i(x)$ и $\psi_j(y)$ — известные функции (см. рис. 5.7). В этом случае формулы (5.11) и (5.12) вместе с (5.18) дают

$$(5.22) \quad \iint_A f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx,$$

$$(5.23) \quad \iint_A f(x, y) d(x, y) = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

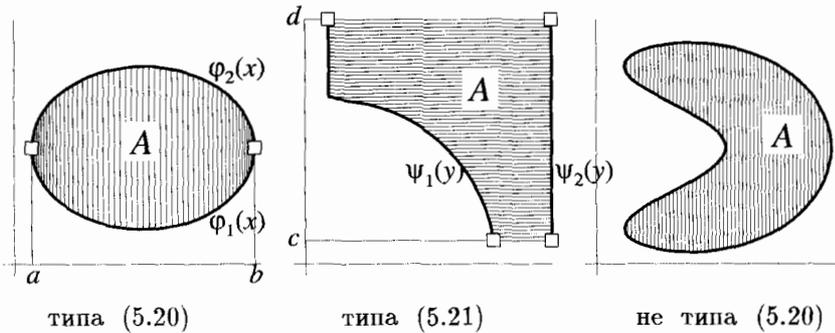


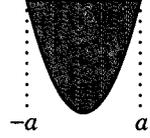
Рис. 5.7. Области в \mathbb{R}^2 .

Примеры. 1) Для множества $A = \{(x, y) \mid -a \leq x \leq a, x^2 \leq y \leq a^2\}$ мы хотим вычислить центр тяжести:

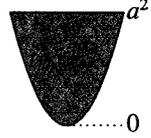
$$\bar{y} = \frac{\iint_A y d(x, y)}{\iint_A d(x, y)} = \frac{3a^2}{5}.$$

С помощью формул (5.22) и (5.23) находим:

$$\iint_A y d(x, y) \stackrel{(5.22)}{=} \int_{-a}^a \underbrace{\left(\int_{x^2}^{a^2} y dy \right)}_{a^4/2 - x^4/2} dx = \frac{4a^5}{5},$$



$$\iint_A d(x, y) \stackrel{(5.23)}{=} \int_0^{a^2} \underbrace{\left(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx \right)}_{2\sqrt{y}} dy = \frac{4a^3}{3}.$$



2) Вычислим момент инерции круга $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$, вращающегося вокруг одного из своих диаметров:

$$(5.24) \quad I = \iint_A y^2 d(x, y) = \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} y^2 dy dx.$$

Величина внутреннего интеграла равна $\frac{2}{3}(a^2 - x^2)^{3/2}$, а для внешнего интеграла мы используем замену $x = a \sin t$, $dx = a \cos t dt$, $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t$. Это дает

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2}{3} a^4 \cos^4 t dt = a^4 \frac{\pi}{4}.$$

Следующая фундаментальная теорема о замене переменных существенно упрощает вычисление таких интегралов, как (5.24) (см. пример 5.8 ниже).

Формула замены переменных в двойных интегралах

... это работает для любой другой формулы $\iint Z dx dy$, так как она может быть преобразована в $\iint Z(VR - ST) dt du$ теми же самыми подстановками
 ... (Эйлер 1769b)

Интегрирование с помощью подстановки (формула (II.4.14))

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx = \int_a^b f(g(u)) g'(u) du$$

— важный инструмент для вычисления интегралов. Если $g : [a, b] \rightarrow [c, d]$ — взаимно однозначное (и непрерывно дифференцируемое) отображение, то эта формула может быть переписана как

$$\int_c^d f(x) dx = \int_a^b f(g(u)) |g'(u)| du,$$

где абсолютная величина корректирует знак в случае, когда $g'(u) < 0$ (и, следовательно, $g(b) < g(a)$). Следующая теорема является аналогом этого для случая двойных интегралов.

(5.7) Теорема (Эйлер 1769b, *Opera*, vol. XVII, p. 303 (для $n = 2$); Лагранж 1773, *Oeuvres*, vol. 3, p. 624 (для $n = 3$); Якоби 1841, *Werke*, vol. 3, p. 436 (для любых n)).

Пусть функция $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна, а функция $g : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ (где $U \subset \mathbb{R}^2$ — открытое множество) непрерывно дифференцируема. Предположим, что

- i) $A = g(B)$, причем $A, B \subset \mathbb{R}^2$ компактны и $\partial A, \partial B$ — множества меры нуль;
- ii) g — инъекция на $B \setminus N$, где N — множество меры нуль.

Тогда

$$(5.25) \quad \iint_A f(x, y) d(x, y) = \iint_B f(g(u, v)) |\det g'(u, v)| d(u, v).$$

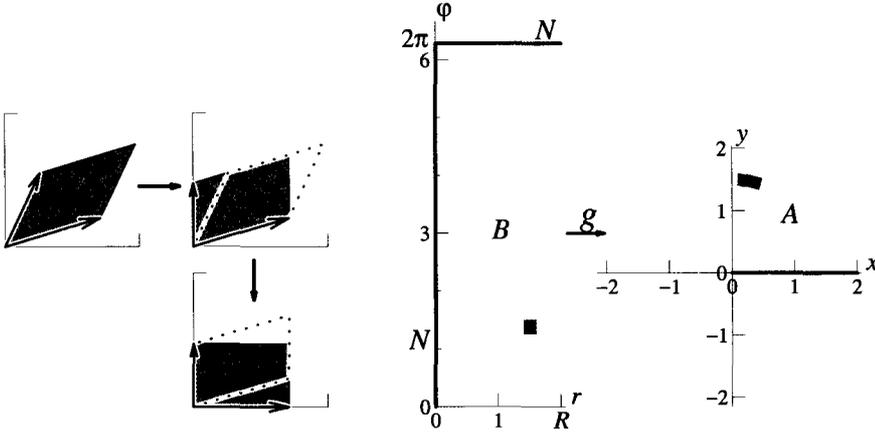


Рис. 5.8a. Площадь параллелограмма.

Рис. 5.8b. Полярные координаты.

Полярные координаты. Одним из наиболее важных приложений теоремы 5.7 является случай, когда

$$(5.26) \quad g(r, \varphi) = (x, y), \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

(полярные координаты, см. разд. I.5) и когда $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Для $B = [0, R] \times [0, 2\pi]$ предположение (i) из теоремы 5.7 выполняется. Функция g из (5.26) не является инъекцией на B ($g(r, 0) = g(r, 2\pi)$ для всех r и $g(0, \varphi) = (0, 0)$ для всех φ). Однако, если мы удалим из B множество меры нуль $N = (\{0\} \times [0, 2\pi]) \cup ([0, R] \times \{2\pi\})$ (см. рис. 5.8b), функция g становится инъективной на $B \setminus N$. Так как

$$\det g'(r, \varphi) = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} = r,$$

из теоремы 5.7 и равенства (5.11) следует, что

$$(5.27) \quad \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} f(x, y) d(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^R f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

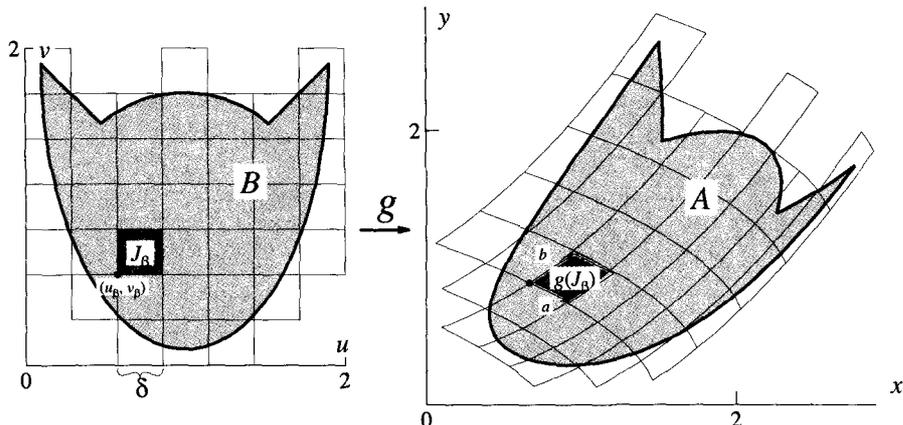


Рис. 5.9. Преобразование сетки.

Доказательство теоремы 5.7

Основная идея. Покроем B сеткой из замкнутых квадратов J_β со стороной длины δ (см. левый рис. 5.9), определим множество $\mathcal{B} = \{\beta \mid J_\beta \cap B \neq \emptyset\}$, и пусть (u_β, v_β) координаты левой нижней вершины квадрата J_β . Мы предполагаем, что δ достаточно мало, так что все J_β ($\beta \in \mathcal{B}$) лежат в U . Образ $g(J_\beta)$ множества J_β является приблизительно параллелограммом со сторонами (рис. 5.9, правая картинка)

$$(5.28) \quad a = \frac{\partial g}{\partial u}(u_\beta, v_\beta) \delta, \quad b = \frac{\partial g}{\partial v}(u_\beta, v_\beta) \delta$$

(см. пример 3.2). Далее, из элементарной геометрии известно, что площадь этого параллелограмма равна определителю ²

$$(5.29) \quad \text{площадь параллелограмма} = |\det(a \ b)| = \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \right| = |a_1 b_2 - a_2 b_1|,$$

и, имея в виду неравенство (5.9), мы получаем, что

$$\begin{aligned} \iint_A f(x, y) d(x, y) &\approx \sum_{\beta \in \mathcal{B}} f(g(u_\beta, v_\beta)) \cdot (\text{площадь } g(J_\beta)) \\ &\approx \sum_{\beta \in \mathcal{B}} f(g(u_\beta, v_\beta)) |\det g'(u_\beta, v_\beta)| \mu(J_\beta) \\ &\approx \iint_B f(g(u, v)) |\det g'(u, v)| d(u, v). \end{aligned}$$

Эти выкладки показывают, что равенство (5.25), по-видимому, имеет место.

² Оба выражения в (5.29) являются

i) инвариантными относительно преобразования $b \mapsto b + \lambda a$ (принцип Кавальери),
ii) и равными для прямоугольников со сторонами, параллельными осям, для таких прямоугольников матрицы диагональны, см. рис. 5.8а.

Более подробно об этом см. Стрэнг (1976, p. 164).

Строгие оценки. Подынтегральные выражения в равенстве (5.25) непрерывны на A и B соответственно. Так как A и B — компактные множества, то эти функции ограничены. Кроме того, ∂A и ∂B — множества меры нуль, так что из (5.18) следует, что оба интеграла в (5.25) существуют. Далее мы расширим область определения f на всё \mathbb{R}^2 , положив $f(x, y) = 0$ вне A .

Чтобы описать точный смысл левого интеграла в (5.25), кроме описанного выше разбиения B мы введем разбиение A на квадраты I_α , определим множество $\mathcal{A} = \{\alpha \mid I_\alpha \cap A \neq \emptyset\}$ и выберем точки $(x_\alpha, y_\alpha) \in I_\alpha \cap A$ (“рыбы глаза” на рис. 5.10). Равенство (5.25) будет доказано, если показать, что разность сумм Римана для обоих интегралов

$$(5.30) \quad \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} f(x_\alpha, y_\alpha) \mu(I_\alpha) - \sum_{\beta \in B} f(g(u_\beta, v_\beta)) |\det g'(u_\beta, v_\beta)| \mu(J_\beta)$$

может быть сделана меньше любого заданного $\varepsilon > 0$ (см. теорему 5.2 и формулу (5.9)). Оказывается, что длина стороны у квадратов I_α должна быть много меньше, чем δ (длины стороны у J_β). Мы возьмем ее $\leq \varepsilon \cdot \delta$.

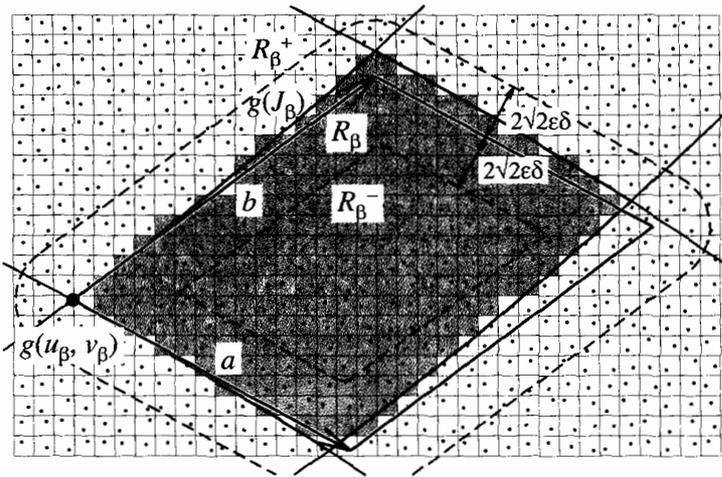


Рис. 5.10. Квадраты I_α , для которых α принадлежат \mathcal{P}_β .

Разложение множества \mathcal{A} . Левая сумма в (5.30) содержит гораздо больше членов, чем правая. Чтобы сравнивать соответствующие члены в этой разности, представим множество \mathcal{A} как

$$\mathcal{A} = \bigcup_{\beta \in B} \mathcal{P}_\beta \quad (\text{объединение непересекающихся множеств}),$$

причем

$$(5.31a) \quad (x_\alpha, y_\alpha) \in g(J_\beta) \text{ если } \alpha \in \mathcal{P}_\beta,$$

$$(5.31b) \quad \alpha \in \mathcal{P}_\beta \text{ если } I_\alpha \subset g(J_\beta) \text{ и } J_\beta \subset B \setminus N$$

(см. рис. 5.10). Поскольку $(x_\alpha, y_\alpha) \in A = g(B) \subset \bigcup_{\beta \in \mathcal{B}} g(J_\beta)$, всегда можно для заданного $\alpha \in \mathcal{A}$ найти такое β , которое удовлетворяло бы условию (5.31a). Чтобы иметь возможность удовлетворить условию (5.31b), надо показать, что существует не более одного $\beta \in \mathcal{B}$ такого, что $J_\beta \subset B \setminus N$, причем $I_\alpha \subset g(J_\beta)$. Предположим, что $I_\alpha \subset g(J_\beta) \cap g(J_{\beta'})$ для некоторых $\beta \neq \beta'$. Так как функция g инъективна на $B \setminus N$, мы имеем $g(J_\beta) \cap g(J_{\beta'}) \subset g(J_\beta \cap J_{\beta'})$, так что и $I_\alpha \subset g(J_\beta \cap J_{\beta'})$. Но $J_\beta \cap J_{\beta'}$ является либо пустым множеством, либо одной точкой, либо сегментом некоторой линии, и поэтому $g(J_\beta \cap J_{\beta'})$ — множество меры нуль согласно лемме 5.3. Следовательно, при $\beta \neq \beta'$ включение $I_\alpha \subset g(J_\beta \cap J_{\beta'})$ невозможно.

Теперь множества \mathcal{P}_β определены, и мы, воспользовавшись тем, что $\sum_{\alpha \in \mathcal{A}} = \sum_{\beta \in \mathcal{B}} \sum_{\alpha \in \mathcal{P}_\beta}$, запишем выражение (5.30) в виде $\sum_{\beta \in \mathcal{B}} D_\beta$, где

$$(5.32) \quad D_\beta = \sum_{\alpha \in \mathcal{P}_\beta} f(x_\alpha, y_\alpha) \mu(I_\alpha) - f(g(u_\beta, v_\beta)) \left| \det g'(u_\beta, v_\beta) \right| \mu(J_\beta),$$

и займемся оценкой этих членов. Рассмотрим пока только так называемые “внутренние” J_β , т. е. предположим, что $J_\beta \subset B \setminus N$. Запишем D_β в виде

$$(5.33a) \quad D_\beta = \sum_{\alpha \in \mathcal{P}_\beta} \left(f(x_\alpha, y_\alpha) - f(g(u_\beta, v_\beta)) \right) \mu(I_\alpha)$$

$$(5.33b) \quad + f(g(u_\beta, v_\beta)) \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{P}_\beta} \mu(I_\alpha) - \left| \det g'(u_\beta, v_\beta) \right| \mu(J_\beta) \right)$$

и оценим оба выражения отдельно.

Оценка (5.33a). Так как $g(u, v)$ непрерывно дифференцируема, $g'(u, v)$ ограничена на компактном множестве B (теорема 2.3), т. е.

$$(5.34) \quad \|g'(u, v)\| \leq M_1 \quad \text{для } (u, v) \in B.$$

Отсюда по теореме о среднем значении 3.7 следует, что

$$\|(x_\alpha, y_\alpha)^T - g(u_\beta, v_\beta)\| \leq M_1 \cdot \delta \cdot \sqrt{2} \quad \text{для } \alpha \in \mathcal{P}_\beta$$

(действительно, точка (x_α, y_α) лежит в $g(J_\beta)$, а элементы J_β отстоят от (u_β, v_β) на расстояние, не большее чем $\delta \cdot \sqrt{2}$). Тогда из равномерной непрерывности f на A (f непрерывна на компактном множестве A) следует, что $|f(x_\alpha, y_\alpha) - f(g(u_\beta, v_\beta))| < \varepsilon$ для достаточно малых δ (напомним, что $g(J_\beta) \subset A$, ибо J_β — “внутренние”). Поэтому

$$(5.35) \quad \left| \sum_{\alpha \in \mathcal{P}_\beta} \left(f(x_\alpha, y_\alpha) - f(g(u_\beta, v_\beta)) \right) \mu(I_\alpha) \right| \leq \varepsilon \sum_{\alpha \in \mathcal{P}_\beta} \mu(I_\alpha).$$

Оценка (5.33b). Теперь надо более внимательно рассмотреть вопрос, насколько точно множество $g(J_\beta)$ можно приблизить параллелограммом, натянутым на векторы a и b из формулы (5.28). Это последнее множество обозначим через

$$R_\beta = \left\{ g(u_\beta, v_\beta) + \frac{\partial g}{\partial u}(u_\beta, v_\beta) s + \frac{\partial g}{\partial v}(u_\beta, v_\beta) t \mid s \in [0, \delta], t \in [0, \delta] \right\}.$$

Вычислим расстояние между соответствующими точками $g(u_\beta + s, v_\beta + t)$ в $g(J_\beta)$ и $g(u_\beta, v_\beta) + \frac{\partial g}{\partial u}(u_\beta, v_\beta) s + \frac{\partial g}{\partial v}(u_\beta, v_\beta) t$ в R_β следующим образом. Формула (III.6.16), записанная для $F(\tau) = g(u_\beta + \tau s, v_\beta + \tau t)$, означает, что

$$g(u_\beta + s, v_\beta + t) - g(u_\beta, v_\beta) = \int_0^1 g'(u_\beta + \tau s, v_\beta + \tau t) \cdot \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} d\tau.$$

Вычитая $\frac{\partial g}{\partial u}(u_\beta, v_\beta) \cdot s + \frac{\partial g}{\partial v}(u_\beta, v_\beta) \cdot t$ из обеих частей этого равенства, получим

$$\begin{aligned} & \left\| g(u_\beta + s, v_\beta + t) - \left(g(u_\beta, v_\beta) + \frac{\partial g}{\partial u}(u_\beta, v_\beta) s + \frac{\partial g}{\partial v}(u_\beta, v_\beta) t \right) \right\| \\ &= \left\| \int_0^1 (g'(u_\beta + \tau s, v_\beta + \tau t) - g'(u_\beta, v_\beta)) \cdot \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} d\tau \right\| \leq \sqrt{2}\varepsilon\delta \end{aligned}$$

при $0 \leq s, t \leq \delta$. Последняя оценка следует из равномерной непрерывности g' на компактном множестве B (напомним, что J_β — “внутреннее”).

Теперь включим R_β между двумя множествами:

$$R_\beta^- \subset R_\beta \subset R_\beta^+,$$

где (см. рис. 5.10)

$$R_\beta^+ = \{ \text{множество точек с расстояниями} \leq 2\sqrt{2}\varepsilon\delta \text{ от ближайшей точки в } R_\beta \}$$

$$R_\beta^- = \{ \text{множество точек в } R_\beta \text{ с расстояниями} \geq 2\sqrt{2}\varepsilon\delta \text{ от границы} \}.$$

Так как расстояние $2\sqrt{2}\varepsilon\delta$, выбранное в этих определениях, вдвое больше величины $\sqrt{2}\varepsilon\delta$, которая, с одной стороны, является максимальным расстоянием между соответственными точками в $g(J_\beta)$ и R_β , а с другой — максимальным диаметром квадратов I_α , между множествами R_β^- и R_β^+ в силу (5.31a) и (5.31b) включено также объединение I_α для $\alpha \in \mathcal{P}_\beta$ (см. опять рис. 5.10):

$$R_\beta^- \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{P}_\beta} I_\alpha \subset R_\beta^+.$$

Поскольку $R_\beta^+ \setminus R_\beta^-$ является “кольцом” длины $\leq 4M_1\delta$ (см. (5.34)) и “толщины” $\leq 4\sqrt{2}\varepsilon\delta$, указанные включения приводят к следующей оценке:

$$\left| \sum_{\alpha \in \mathcal{P}_\beta} \mu(I_\alpha) - \mu(R_\beta) \right| \leq \mu(R_\beta^+ \setminus R_\beta^-) \leq (4M_1\delta)(4\sqrt{2}\varepsilon\delta).$$

Следовательно, мы получили, что

$$(5.36) \quad \left| f(g(u_\beta, v_\beta)) \left(\sum_{\alpha \in \mathcal{P}_\beta} \mu(I_\alpha) - |\det g'(u_\beta, v_\beta)| \mu(J_\beta) \right) \right| \leq C\varepsilon\delta^2 = C\varepsilon\mu(J_\beta),$$

где $C = M \cdot 4M_1 \cdot 4\sqrt{2}$.

Финал. Если $J_\beta \not\subset B \setminus N$ (так что J_β пересекает множество меры нуль $\partial B \cup N$), мы оценим D_β из (5.32) так: $|D_\beta| \leq M_2\mu(J_\beta)$, где M_2 — константа, зависящая от

ограничений на f и g' . Если δ достаточно мало, то из (5.15) следует, что сумма этих $|D_\beta|$ будет $\leq M_2\varepsilon$. Для остальных же J_β мы используем (5.35) и (5.36) совместно с (5.33) и получим оценку

$$|D_\beta| \leq \varepsilon \sum_{\alpha \in \mathcal{P}_\beta} \mu(I_\alpha) + C\varepsilon\mu(J_\beta).$$

В итоге разность (5.30) римановых сумм, т. е. $\sum_{\beta \in \mathcal{B}} D_\beta$, является сколь угодно малой ($\leq \text{Const} \cdot \varepsilon$). \square

(5.8) Пример. Пусть $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ — круг радиуса R . Его площадь может быть вычислена как

$$\iint_A 1 \cdot d(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^R r \, dr \, d\varphi = \frac{R^2}{2} \cdot 2\pi = R^2\pi.$$

Момент инерции в случае вращения вокруг диаметра равен

$$\iint_A y^2 \, d(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \sin^2 \varphi \cdot r \, dr \, d\varphi = \frac{R^4\pi}{4}.$$

Момент инерции в случае вращения относительно оси, проходящей через центр и перпендикулярной плоскости круга, равен

$$\iint_A (x^2 + y^2) \, d(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \cdot r \, dr \, d\varphi = \frac{R^4\pi}{2}.$$

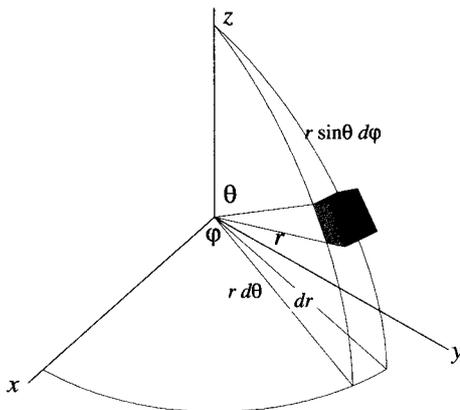


Рис. 5.11. Сферические координаты.

Сферические координаты. Перенос результатов этого раздела на случаи большего числа измерений возможен без особых затруднений. Приведем интересное приложение формулы (5.25) в трехмерном случае.

Введем сферические координаты $g(r, \varphi, \theta) = (x, y, z)$, определяемые соотношениями

$$(5.37) \quad x = r \cos \varphi \sin \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta$$

(рис. 5.11). Они весьма удобны для вычисления тройных интегралов по сфере $A = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$. Для $B = [0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ и $N = \partial B$ все предположения теоремы 5.7 удовлетворяются. Вычисляя матрицу Якоби для g ,

$$g'(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta & -r \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -r \sin \theta \end{pmatrix},$$

получим для нее детерминант, равный $\det g'(r, \varphi, \theta) = r^2 \sin \theta$, откуда (Лагранж 1773)

$$(5.38) \quad \iiint_A f(x, y, z) d(x, y, z) = \iiint_B \tilde{f}(r, \varphi, \theta) r^2 \sin \theta d(r, \varphi, \theta),$$

где $\tilde{f}(r, \varphi, \theta) = f(r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta)$. Глядя на рис 5.11, мы можем лучше понять эту формулу “directement sans aucun calcul” (прямо, без всяких вычислений, — *фр.*) как сказал Лагранж.

Объем сферы получим, полагая $f(x, y, z) = 1$:

$$\iiint_A 1 \cdot d(x, y, z) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta = \frac{4R^3\pi}{3}.$$

Момент инерции относительно оси, проходящей через начало координат, равен

$$\iiint_A (x^2 + y^2) d(x, y, z) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \sin^2 \theta \cdot r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta = \frac{8R^5\pi}{15}.$$

Интегралы по неограниченной области

В некоторых случаях приходится вычислять интегралы по неограниченной области. Так же, как в разд. III.8 (несобственные интегралы), это может быть сделано переходом к пределу. Проиллюстрируем это утверждение некоторыми интересными примерами.

Интеграл Гаусса. Мы хотим вычислить интеграл $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$. Идея заключается в возведении I в квадрат и преобразовании в двойной интеграл:

$$(5.39) \quad I^2 = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_0^R e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^R e^{-y^2} dy \right) = \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{A_R} e^{-x^2 - y^2} d(x, y),$$

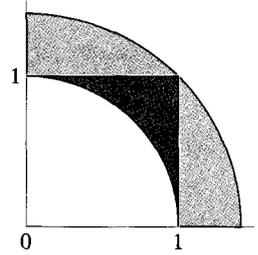
где $A_R = [0, R] \times [0, R]$. Вид функции в двойном интеграле подсказывает перейти к полярным координатам. Полагая $D_R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\}$, получим

$$(5.40) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{D_R} e^{-x^2 - y^2} d(x, y) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \int_0^R e^{-r^2} r dr d\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Здесь дополнительное “ r ”, возникающее из формулы (5.27), оказалось весьма кстати: оно позволяет взять внутренний интеграл с помощью простой подстановки. Вопрос в том, равны ли пределы в (5.39) и (5.40). Если $f(x, y) \geq 0$ (как в нашем случае), то мы имеем

$$\iint_{D_R} f(x, y) d(x, y) \leq \iint_{A_R} f(x, y) d(x, y) \leq \iint_{D_{\sqrt{2}R}} f(x, y) d(x, y)$$

как следствие вложения $D_R \subset A_R \subset D_{\sqrt{2}R}$ (см. маленький рисунок справа). Таким образом, существование $\lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{D_R} f(x, y) d(x, y)$ влечет существование $\lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{A_R} f(x, y) d(x, y)$, и оба предела равны. Соответственно $I = \sqrt{\pi}/2$. Существует также интересная связь с гамма-функцией:



$$(5.41) \quad \sqrt{\pi} = 2I = 2 \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^\infty e^{-t} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \Gamma(1/2)$$

(см. определение III.8.10).

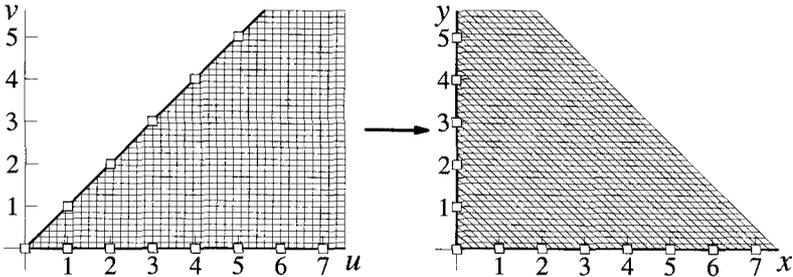


Рис. 5.12. Исследование преобразования (5.43).

Формула произведения для гамма-функции. Из определения III.8.10, имеем

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx, \quad \Gamma(\beta) = \int_0^\infty e^{-y} y^{\beta-1} dy,$$

так что (см. Якоби 1834, *Werke*, vol. VI, p. 62)

$$(5.42) \quad \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{A_R} e^{-x-y} x^{\alpha-1} y^{\beta-1} d(x, y),$$

где, как и выше, $A_R = [0, R] \times [0, R]$. На этот раз мы используем преобразование

$$(5.43) \quad \begin{aligned} x + y &= u, \\ y &= v, \end{aligned} \quad \text{т. е.} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g(u, v) = \begin{pmatrix} u - v \\ v \end{pmatrix}$$

(см. рис. 5.12), для матрицы Якоби которого $\det g'(u, v) = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$. Если положить теперь $B_R = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq R\}$, мы найдем, что

$$(5.44) \quad \begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{B_R} e^{-x-y} x^{\alpha-1} y^{\beta-1} d(x, y) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-u} \left(\int_0^u (u-v)^{\alpha-1} v^{\beta-1} dv \right) du \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-u} u^{\alpha+\beta-1} du \cdot \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\beta-1} dt, \end{aligned}$$

где мы использовали подстановку $v = u \cdot t$ ($0 \leq t \leq 1$). Рассуждение, аналогичное использованному для интеграла Гаусса, гарантирует равенство пределов (5.42) и (5.44). В (5.44) фигурирует так называемая *бета-функция*:

$$(5.45) \quad B(\alpha, \beta) := \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1} t^{\beta-1} dt,$$

и мы получили формулу

$$(5.46) \quad B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)},$$

которая обобщает равенство (II.4.34) на произвольные показатели степени.

Контрпример. Функция $f(x, y) = (x-y)/(x+y)^3$ непрерывна на $A = [1, \infty) \times [1, \infty)$. Тем не менее, имеет место следующий результат:

$$(5.47) \quad \underbrace{\int_1^\infty \int_1^\infty \frac{x-y}{(x+y)^3} dx dy}_{+1/2} \neq \underbrace{\int_1^\infty \int_1^\infty \frac{x-y}{(x+y)^3} dy dx}_{-1/2}$$

(см. также упр. 5.3), нарушающий равенства (5.11) и (5.12). Это возможно только для неограниченной области A и функции f , которая меняет знак на A .

Упражнения

5.1 Пусть $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ограниченная функция, предположим, что все ее римановы суммы сходятся к фиксированному значению α , если $\max_i (x_i - x_{i-1}) \rightarrow 0$.

Докажите, что $g(x)$ интегрируема (по Риману) и $\int_a^b g(x) dx = \alpha$.

5.2 На $I := [0, \pi] \times [0, 1]$ определим функцию $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ как

$$f(x, y) = \begin{cases} \cos x & \text{при } y \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Какой из интегралов

$$\int_0^1 \left(\int_0^\pi f(x, y) dx \right) dy \quad \text{и} \quad \int_0^\pi \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx$$

существует? Является ли функция $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируемой?

5.3 Покажите, что

$$\underbrace{\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx dy}_{-1/2} \neq \underbrace{\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy dx}_{+1/2}$$

(см. рис. 5.13). Противоречит ли это соотношение равенствам (5.11) и (5.12)?

Указание. Используйте равенство $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-x}{(x+y)^2} \right) = \frac{x-y}{(x+y)^3}$.

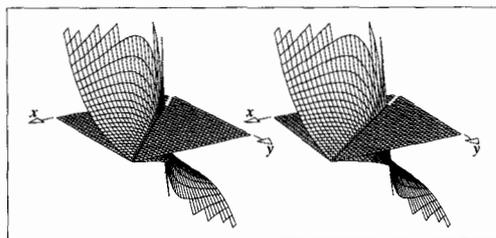


Рис. 5.13. Функция $\frac{x-y}{(x+y)^3}$ с не коммутирующими повторными интегралами (стереограмма).

5.4 Попробуйте вычислить

$$I = \int_0^\pi \left(\int_0^R \frac{-2 \cos \varphi + 2r}{1 - 2r \cos \varphi + r^2} dr \right) d\varphi, \quad 0 < R < 1.$$

Существует лучший способ вычисления этого интеграла, в котором полезна формула

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{a + b \cos \varphi} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} \quad a > |b|$$

(см. аналогичный пример после формулы (II.5.21)).

Результат: $I = 0$; см. также упр. III.5.4.

5.5 Докажите, что кривая фон Коха на рис. 5.6, несмотря на бесконечную длину, является множеством меры нуль.

Указание. Возьмите расстояние между двумя конечными точками равным 1. Рассматривая верхнюю кривую рис. 5.6, можно видеть, что она содержится в прямоугольнике со сторонами 1 и $1/3$. Следующая кривая содержится в объединении четырех прямоугольников со сторонами $1/3$ и $1/9$, и т. д.

5.6 Покажите, что “треугольник Серпиньского” (рис. 1.9) является множеством меры нуль в \mathbb{R}^2 .

5.7 Множество $\varphi([0, 1])$, где

$$\varphi(t) = \left(\begin{array}{c} t \\ \sqrt{t} \end{array} \right),$$

является множеством меры нуль вопреки тому, что функция φ не удовлетворяет условию

$$\|\varphi(t) - \varphi(s)\| \leq M|t - s| \quad \text{для всех } t, s \in [0, 1].$$

5.8 Вычислите площадь поверхности, заключенной внутри петли декартова листа (4.29). Испытайте два способа: а) полярные координаты; б) замену переменных

$$u = x + y, \quad v = x - y.$$

5.9 Вычислите площадь поверхности, заключенной внутри петель лемнискаты

$$(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0.$$

Попробуйте два способа: а) полярные координаты; б) повторные интегралы.

5.10 Пусть

$$B_n(r) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq r^2\}$$

— шар радиуса r в \mathbb{R}^n . Покажите, что его объем равен

$$T_n(r) = \int_{B_n(r)} d(x_1, \dots, x_n) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} r^n}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}.$$

Указание. Воспользуйтесь методом индукции по $n \geq 1$. Вам будет полезна формула, выведенная выше для бета-функции.

5.11 Вычислите объем симплекса

$$A_n(c) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_i \geq 0 \text{ и } x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq c\}.$$

Ответ: $c^n/n!$.

5.12 Вычислите

$$\iiint_T xyz(1 - x - y - z) dx dy dz,$$

где T — тетраэдр, определяемый условиями

$$T = \{(x, y, z); x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}.$$

Используйте подстановку

$$x + y + z = u, \quad y + z = u + v, \quad z = uvw.$$

Ответ: $1/7!$.

5.13 Пусть $A_R = [0, R] \times [0, R]$ и $D_R = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Рассмотрите пределы

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{A_R} \sin(x^2 + y^2) d(x, y) \quad \text{и} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{D_R} \sin(x^2 + y^2) d(x, y).$$

Докажите, что первый предел существует, а второй не существует.

Указание. Используя формулу $\sin(x^2 + y^2) = \sin x^2 \cos y^2 + \cos x^2 \sin y^2$ в первом интеграле, докажите, что $\int_0^R \sin x^2 dx$ сходится к пределу при $R \rightarrow \infty$. Для второго интеграла используйте полярные координаты.

5.14 Докажите, что

$$(5.48) \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Затем, выведите из этих соотношений формулу (II.6.9).

Указание. Подстановка $x = u\sqrt{z}$ (z — положительный параметр) в равенство (5.41) дает

$$(5.49) \quad \frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-zu^2} du.$$

Умножьте это равенство на e^{iz} и проинтегрируйте от $A > 0$ до B , измените порядок интегрирования в повторных интегралах и рассмотрите пределы $B \rightarrow \infty$ и $A \rightarrow 0$. Обоснуйте все шаги.

Замечание. При использовании более глубоких результатов комплексного анализа это упражнение становится совсем легким.

Приложение. Цитаты на языках оригиналов

- стр. 1: ... da der Lehrer einsichtig genug war den ungewöhnlichen Schüler (Jacobi) gewähren zu lassen und es zu gestatten, daß dieser sich mit Eulers *Introductio* beschäftigte, während die übrigen Schüler mühsam ...
(Dirichlet 1852, Gedächtnisrede auf Jacobi, in Jacobi's *Werke*, vol. I, p. 4)
- стр. 2: Tant que l'Algèbre et la Géométrie ont été séparées, leurs progrès ont été lents et leurs usages bornés; mais lorsque ces deux sciences se sont réunies, elles se sont prêtées des forces mutuelles et ont marché ensemble d'un pas rapide vers la perfection. C'est à Descartes qu'on doit l'application de l'Algèbre à la Géométrie, application qui est devenue la clef des plus grandes découvertes dans toutes les branches des Mathématiques.
(Lagrange 1795, *Oeuvres*, vol. 7, p. 271)
Diophante peut être regardé comme l'inventeur de l'Algèbre; ...
(Lagrange 1795, *Oeuvres*, vol. 7, p. 219)
- стр. 4: Tartalea exposa sa solution en mauvais vers italiens ...
(Lagrange 1795, *Oeuvres*, vol. 7, p. 22)
... trovato la sua regola generale, ma per al presente la voglio tacere per piu rispetti.
(Tartaglia 1530, see M. Cantor 1891, vol. II, p. 485)
- стр. 6: Le Logistique Numerique est celui qui est exhibé & traité par les nombres, le Specifique par especes ou formes des choses: comme par les lettres de l'Alphabet.
(Viète 1600, *Algebra nova*, French ed. 1630)
- стр. 8: Ou ie vous prie de remarquer en passant, que le scrupule, que faisoient les anciens d'vser des termes de l'Arithmetique en la Geometrie, qui ne pouoit proceder, que de ce qu'ils ne voyoient pas assés clairement leur rapport, causoit beaucoup d'obscurité, & d'embaras, en la façon dont ils s'expliquoient. (Descartes 1637)
- стр. 18: Quoy que cette proposition ait vne infinité de cas, i'en donneray vne demonstration bien courte, en supposant 2 lemmes.
Le 1. qui est evident de soy-mesme, que cette proportion se rencontre dans la seconde base; car il est bien visible que φ est à σ comme 1, à 1.
Le 2. que si cette proportion se trouue dans vne base quelconque, elle se trouuera necessairement dans la base suivante.
(Pascal 1654, one of the first induction proofs)
- стр. 29: Der Begriff des Logarithmus wird von den Schülern im allgemeinen nur sehr schwer verstanden.
(van der Waerden 1957, p. 1)
- стр. 34: Mense Septembri 1668, *Mercator* Logarithmotechniam edidit suam, quae specimen hujus Methodi (i.e., Serierum Infinitarum) in unica tantum Figura, nempe, Quadratura Hyperbolæ continet.
(Letter of Collins, Julii 26, 1672)
- стр. 43: Die Gleichungen ... haben ... ein ehrwürdiges Alter. Schon Ptolemäus leitet ...
(L. Vietoris 1949, *J. reine ang. Math.*, vol. 186, p. 1)
- стр. 52: ... vous ne laisserez pas d'avoir trouvé une propriété du cercle tres remarquable, ce qui sera celebre a jamais parmi les geometres.
(Letter of Huygens to Leibniz, Nov. 7, 1674)
- стр. 57: Au reste tant les vraies racines que les fausses ne sont pas tousiours reelles; mais quelquefois seulement imaginaires; c'est a dire qu'on peut bien tousiours en imaginer autant que iay dit en chasque Equation; mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité, qui corresponde a celles qu'on imagine.
(Descartes 1637, p. 380)
- стр. 58: ... quomodo quantitates exponentiales imaginariae ad sinus et cosinus arcuum realium reducantur.
(Euler 1748, *Introductio*, §138)
- стр. 62: ... et ie voy déjà la route de trouver la somme de cette rangée $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$ etc.
(Joh. Bernoulli, May 22, 1691, letter to his brother)

- стр. 68: La Théorie des fractions continues est une des plus utiles de l'Arithmétique ... comme elle manque dans les principaux Ouvrages d'Arithmétique et d'Algèbre, elle doit être peu connue des géomètres ... je serai satisfait si je puis contribuer à la leur rendre un peu plus familière. (Lagrange 1793, *Oeuvres*, vol. 7, p. 6-7)
- стр. 70: Die Veranlassung aber, diese Formeln zu suchen, gab mir des Herrn Eulers Analysis infinitorum, wo der Ausdruck ... in Form eines Beyspieles vorkömmt. (Lambert 1770a)
- стр. 76: Ich kann mit einigem Grunde zweifeln, ob gegenwärtige Abhandlung von denjenigen werde gelesen, oder auch verstanden werden die den meisten Antheil davon nehmen sollten, ich meyne von denen, die Zeit und Mühe aufwenden, die Quadratur des Circuls zu suchen. Es wird sicher genug immer solche geben ... die von der Geometrie wenig verstehen ... (Lambert 1770a)
- стр. 80: L'étenduë de ce calcul est immense: il convient aux Courbes mécaniques, comme aux géométriques; les signes radicaux luy sont indifferens, & même souvent commodes; il s'étend à tant d'indéterminées qu'on voudra; la comparaison des infiniment petits de tous les genres luy est également facile. Et de là naissent une infinité de découvertes surprenantes par rapport aux Tangentes tant courbes que droites, aux questions *De maximis & minimis*, aux points d'inflexion & de rebroussement des courbes, aux Développées, aux Caustiques par réflexion ou par réfraction, &c. comme on le verra dans cet ouvrage. (Marquis de L'Hospital 1696, *Analyse des infiniment petits*)
- стр. 81: Et j'ose dire que c'est cecy le problême le plus utile, & le plus general non seulement que ie sçache, mais mesme que i'aye iamais désiré de sçavoir en Geometrie ... (Descartes 1637, p. 342)
- Quel mépris pour les non-Anglois! Nous les avons trouvé ces methodes, sans aucun secours des Anglois. (Joh. Bernoulli 1735, *Opera*, vol. IV, p. 170)
- Ce que tu me rapportes à propos de Bernard Niewentijt n'est que quincaille. Qui pourrait s'empêcher de rire devant les ratiocinations si ridicules qu'il bâtit sur notre calcul, comme s'il était aveugle à ses avantages. (Letter of Joh. Bernoulli, quoted from Parmentier 1989, p. 316).
- Nous appellerons la fonction fx , *fonction primitive*, par rapport aux fonctions $f'x$, $f''x$, &c. qui en dérivent, et nous appellerons celles-ci, *fonctions dérivées*, par rapport à celle-là. (Lagrange 1797)
- стр. 92: Je desire seulement qu'il sache que nos questions *de maximis et minimis* et *de tangentibus linearum curvarum* sont parfaites depuis huit ou dix ans et que plusieurs personnes qui les ont vues depuis cinq ou six ans le peuvent témoigner. (Letter from Fermat to Descartes, June 1638, *Oeuvres*, tome 2, p. 154-162)
- стр. 98: Mon Frère, Professeur à Bâle, a pris de là occasion de rechercher plusieurs courbes que la Nature nous met tous les jours devant les yeux ... (Joh. Bernoulli 1692)
- Je suis tres persuadé qu'il n'y a gueres de geometre au monde qui vous puisse être comparé. (de L'Hospital 1695, letter to Joh. Bernoulli)
- стр. 118: La quantité cy dessus

$$\frac{ppads}{qqss - ppa}$$

se reduit immediatement, sans autre changement, à deux fractions logarithmiques, en la partageant ainsi

$$\frac{ppads}{qqss - ppa} = \frac{\frac{1}{2}pds}{qs - pa} - \frac{\frac{1}{2}pds}{qs + pa} \dots$$

(Annex to a letter of Joh. Bernoulli, 1699, see *Briefwechsel*, vol. 1, p. 212)

Problema 3: Si X denotet functionum quacunque rationalem fractam ipsius x , methodum describere, cuius ope formulae Xdx integrale investigari conveniat.

(Euler 1768, *Opera Omnia*, vol. XI, p. 28)

- стр. 126: ... weil die Analysten nach allen Versuchen endlich geschlossen haben, daß man die Hoffnung aufgeben müsse, elliptische Bögen durch algebraische Formeln, Logarithmen und Circulbögen auszudrücken. (J.H. Lambert 1772, *Opera*, vol. I, p. 312)

Bien que le problème (des quadratures) ait une durée de deux cents ans à peu près, bien qu'il était l'objet de nombreuses recherches de plusieurs géomètres: Newton, Cotes, Gauss, Jacobi, Hermite, Tchébychef, Christoffel, Heine, Radeau [sic], A. Markov, T. Stitjes [sic], C. Possé, C. Andréév, N. Sonin et d'autres, il ne peut être considéré, cependant, comme suffisamment épuisé. (Steklov 1918)

On s'assurera aisément par notre méthode que l'intégrale $\int \frac{e^x dx}{x}$, dont les Géomètres se sont beaucoup occupés, est impossible sous forme finie ...

(Liouville 1835, p. 113)

стр. 135: Claudius Perraltus Medicus Parisinus insignis, tum & Mechanicis atque Architectonicis studiis egregius, & Vitruvii editione notus, idemque in Regia scientiarum Societate Gallica, dum viveret, non postremus, mihi & aliis ante me multis proposuit hoc problema, cujus nondum sibi occurrisse solutionem ingenue fatebatur ... (Leibniz 1693)

стр. 136: Mais pour juger mieux de l'excellence de vostre Algorithme j'attens avec impatience de voir les choses que vous aurez trouvées touchant la ligne de la corde ou chaîne pendante, que Mr. Bernouilly vous a proposé à trouver, dont je luy scay bon gré, parce que cette ligne renferme des propriétés singulieres et remarquables. Je l'avois considérée autre fois dans ma jeunesse, n'ayant que 15 ans, et j'avois démontré au P. Mersenne, que ce n'estoit pas une Parabole ... (Letter of Huygens to Leibniz, Oct. 9, 1690)

Les efforts de mon frere furent sans succès, pour moi, je fus plus heureux, car je trouvai l'adresse ... Il est vrai que cela me couta des meditations qui me derobèrent le repos d'une nuit entiere ... (Joh. Bernoulli, see *Briefwechsel*, vol. 1, p. 98)

стр. 137: Datis in plano verticali duobus punctis *A* et *B* assignare mobili *M*, viam *AMB* per quam gravitate sua descendens et moveri incipiens a puncto *A*, brevissimo tempore perveniat ad alterum punctum *B*. (Joh. Bernoulli 1696)

Ce problème me paroist des plus curieux et des plus jolis que l'on ait encore proposé, et je serois bien aise de m'y appliquer, mais pour cela il seroit necessaire que vous me l'envoyassiez réduit à la mathematique pure, car le phisique m'embarasse ... (de L'Hospital, letter to Joh. Bernoulli, June 15, 1696)

стр. 140: En vérité rien n'est plus ingenieux que la solution que vous donnez de l'égalité de Mr. votre frere; & cette solution est si simple qu'on est surpris que ce problème ait paru si difficile: c'est là ce qu'on appelle une élégante solution. (P. Varignon, letter to Joh. Bernoulli "6 Aoust 1697")

Per liberare la premessa formula dalle seconde differenze, ... , chiamo *p* la sunnormale *BF*. (Riccati 1712)

стр. 144: ... es ist ganz unmöglich, heute noch eine Zeile von d'Alembert hinunterzuwürgen, während man die meisten Eulerschen Sachen noch mit Entzücken liest. (Jacobi, see Spiess 1929, p. 139)

стр. 154: Ich habe immer wieder beobachtet, daß Mathematiker und Physiker mit abgeschlossenem Examen über theoretische Ergebnisse sehr gut, aber über die einfachsten Näherungsverfahren nicht Bescheid wußten. (L. Collatz 1951, *Num. Beh. Diffgl.*, Springer-Verlag)

PROBLEMA 85: Proposita aequatione differentiali quacunque eius integrale completum vero proxime assignare. (Euler 1768, §650)

стр. 156: PROBLEMA 86: Methodum praecedentem aequationes differentiales proxime integrandi magis perficere, ut minus a veritate aberret. (Euler 1768, §656)

стр. 160: Der König nennt mich 'meinen Professor', und ich bin der glücklichste Mensch auf der Welt! (Euler is proud to serve Frederick II in Berlin)

J'ai ici un gros cyclope de géomètre ... il ne reste plus qu'un oeil à notre homme, et une courbe nouvelle, qu'il calcule à présent, pourrait le rendre aveugle tout à fait. (Frederick II, see Spiess 1929, p. 165-166.)

стр. 170: ... et je ne répons pas que je fasse encore de la géométrie dans dix ans d'ici. Il me semble aussi que la mine est presque déjà trop profonde et ... il faudra tôt ou tard l'abandonner. La physique et la chimie offrent maintenant des richesses plus

brillantes et d'une exploitation plus facile ...

(Lagrange, Sept. 21, 1781, Letter to d'Alembert, *Oeuvres*, vol. 13, p. 368)

стр. 172: On dit qu'une grandeur est la *limite* d'une autre grandeur, quand la seconde peut approcher de la première plus près que d'une grandeur donnée, si petite qu'on la puisse supposer, ...

(D'Alembert 1765, *Encyclopédie*, tome neuvieme, à Neufchastel)

Lorsqu'une quantité variable converge vers une limite fixe, il est souvent utile d'indiquer cette limite par une notation particulière, c'est ce que nous ferons, en plaçant l'abréviation

lim

devant la quantité variable dont il s'agit ... (Cauchy 1821, *Cours d'Analyse*)

стр. 177: ... Je mehr ich ueber die Principien der Functionentheorie nachdenke — und ich thue dies unablässig —, um so fester wird meine Ueberzeugung, dass diese auf dem Fundamente algebraischer Wahrheiten aufgebaut werden muss ...

(Weierstrass 1875, *Werke*, vol. 2, p. 235)

Bitte vergiß alles, was Du auf der Schule gelernt hast; denn Du hast es nicht gelernt. ... indem meine Töchter bekanntlich schon mehrere Semester studieren (Chemie), schon auf der Schule Differential- und Integralrechnung gelernt zu haben glauben und heute noch nicht wissen, warum $x \cdot y = y \cdot x$ ist. (Landau 1930)

$\sqrt{3}$ ist also nur ein Zeichen für eine Zahl, welche erst noch gefunden werden soll, nicht aber deren Definition. Letztere wird jedoch in meiner Weise, etwa durch

(1.7, 1.73, 1.732, ...)

befriedigend gegeben.

(G. Cantor 1889)

... Definition der irrationalen Zahlen, bei welcher Vorstellungen der Geometrie ... oft verwirrend eingewirkt haben. ... Ich stelle mich bei der Definition auf den rein formalen Standpunkt, indem ich gewisse greifbare Zeichen Zahlen nenne, so dass die Existenz dieser Zahlen also nicht in Frage steht. (Heine 1872)

Für mich war damals das Gefühl der Unbefriedigung ein so überwältigendes, dass ich den festen Entschluss fasste, so lange nachzudenken, bis ich eine rein arithmetische und völlig strenge Begründung der Principien der Infinitesimalanalysis gefunden haben würde. ... Dies gelang mir am 24. November 1858, ... aber zu einer eigentlichen Publication konnte ich mich nicht recht entschliessen, weil erstens die Darstellung nicht ganz leicht, und weil ausserdem die Sache so wenig fruchtbar ist. (Dedekind 1872)

Die Analysis zu einem blossen Zeichenspiele herabwürdigend ...

(Du Bois-Reymond 1882, *Allgemeine Functionentheorie*, Tübingen)

стр. 180: ... jusqu'à présent on a regardé ces propositions comme des axiomes.

(Méray 1869, see Dugac 1978, p. 82)

стр. 184: Une chose étonnante, je trouve, c'est que Monsieur Weierstrass et Monsieur Kronecker peuvent trouver tant d'auditeurs — entre 15 et 20 — pour des cours si difficiles et si élevés. (letter of Mittag-Leffler 1875, see Dugac 1978, p. 68)

стр. 188: Je consacrerai toutes mes forces à répandre de la lumière sur l'immense obscurité qui règne aujourd'hui dans l'Analyse. Elle est tellement dépourvue de tout plan et de tout système, qu'on s'étonne seulement qu'il y ait tant de gens qui s'y livrent — et ce qui pis est, elle manque absolument de rigueur.

(Abel 1826, *Oeuvres*, vol. 2, p. 263)

Cauchy est fou, et avec lui il n'y a pas moyen de s'entendre, bien que pour le moment il soit celui qui sait comment les mathématiques doivent être traitées. Ce qu'il fait est excellent, mais très brouillé ... (Abel 1826, *Oeuvres*, vol. 2, p. 259)

стр. 202: On appelle ici *Fonction* d'une grandeur variable, une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable & de constantes.

(Joh. Bernoulli 1718, *Opera*, vol. 2, p. 241)

Quocirca, si $f\left(\frac{x}{a} + c\right)$ denotet functionem quamcunque ...

(Euler 1734, *Opera*, vol. XXII, p. 59)

Entspricht nun jedem x ein einziges, endliches y , ... so heisst y eine ... Function von x für dieses Intervall. ... Diese Definition schreibt den einzelnen Theilen der Curve kein gemeinsames Gesetz vor; man kann sich dieselbe aus den verschiedenartigsten Theilen zusammengesetzt oder ganz gesetzlos gezeichnet denken.

(Dirichlet 1837)

стр. 204: ... $f(x)$ sera fonction *continue*, si ... la valeur numérique de la différence

$$f(x + \alpha) - f(x)$$

décroit indéfiniment avec celle de α ... (Cauchy 1821, *Cours d'Analyse*, p. 43)

Wir nennen dabei eine Grösse y eine stetige Function von x , wenn man nach Annahme einer Grösse ε die Existenz von δ beweisen kann, sodass zu jedem Wert zwischen $x_0 - \delta \dots x_0 + \delta$ der zugehörige Wert von y zwischen $y_0 - \varepsilon \dots y_0 + \varepsilon$ liegt.

(Weierstrass 1874)

стр. 206: Ce théorème est connu depuis longtemps ...

(Lagrange 1807, *Oeuvres*, vol. 8, p. 19, see also p. 133)

In seinem Satze, dem zufolge eine *stetige* Funktion einer reellen Veränderlichen ihre obere und untere *Grenze* stets wirklich erreicht, d. h. ein Maximum und Minimum notwendig besitzt, schuf WEIERSTRASS ein Hilfsmittel, dass heute kein Mathematiker bei feineren analytischen oder arithmetischen Untersuchungen entbehren kann.

(Hilbert 1897, *Gesammelte Abh.*, vol. 3, p. 333)

стр. 209: Der Begriff des *Grenzwertes* einer *Funktion* ist wohl zuerst von *Weierstrass* mit genügender Schärfe definiert worden.

(Pringsheim 1899, *Encyclopädie der Math. Wiss.*, Band II.1, p. 13)

стр. 213: Dans l'ouvrage de M. Cauchy on trouve le théorème suivant: "Lorsque les différens termes de la série $u_0 + u_1 + u_2 + \dots$ sont des fonctions ... continues, ... la somme s de la série est aussi ... fonction continue de x ." Mais il me semble que ce théorème admet des exceptions. Par exemple la série

$$\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x \dots$$

est discontinue pour toute valeur $(2m + 1)\pi$ de x , ...

(Abel 1826, *Oeuvres*, vol. 1, p. 224-225)

стр. 217: Es scheint aber noch nicht bemerkt zu sein, dass ... diese Continuität in jedem einzelnen Punkte ... nicht diejenige Continuität ist ... die man *gleichmässige Continuität* nennen kann, weil sie sich gleichmässig über alle Punkte und alle Richtungen erstreckt.

(Heine 1870, p. 361)

Den allgemeinen Gang des Beweises einiger Sätze im §. 3 nach den Principien des Herrn *Weierstrass* kenne ich durch mündliche Mittheilungen von ihm selbst, von Herrn *Schwarz* und *Cantor*, so dass ...

(Heine 1872, p. 182)

стр. 221: Also zuerst: Was hat man unter $\int_a^b f(x) dx$ zu verstehen?

(Riemann 1854, *Werke*, p. 239)

L'illustre géomètre [Riemann] ... généralise, par une de ces vues qui n'appartiennent qu'aux esprits de premier ordre, la notion de l'intégrale définie, ...

(Darboux 1875)

стр. 224: Ich fühle indessen, dass die Art, wie das Criterium der Integrirbarkeit formulirt wurde, etwas zu wünschen übrig lässt.

(Du Bois-Reymond 1875, p. 259)

стр. 230: Bis in die neueste Zeit glaubte man, es sei das Integral einer convergenten Reihe ... gleich der Summe aus den Integralen der einzelnen Glieder, und erst Herr *Weierstrass* hat bemerkt ...

(Heine 1870, *Ueber trig. Reihen*, J. f. Math., vol. 70, p. 353)

стр. 232: Da diese Functionen noch nirgends betrachtet sind, wird es gut sein, von einem bestimmten Beispiele auszugehen.

(Riemann 1854, *Werke*, p. 228)

- стр. 235: ... la rigueur, dont je m'étais fait une loi dans mon *Cours d'analyse*, ...
(Cauchy 1829, *Leçons*)
Die vollständige Veränderung $f(x+h) - f(x)$... lässt sich im allgemeinen in zwei Teile zerlegen ...
(Weierstrass 1861)
- стр. 240: Voir la belle démonstration de ce théorème, donnée par M. O. Bonnet, dans le *Traité de Calcul différentiel et intégral* de M. Serret, t. I, p. 17. (Darboux 1875, p. 111)
- стр. 242: ... tout à fait au-dessus de la vaine gloire, que la plupart des Sçavans recherchent avec tant d'avidité ...
(Fontenelle's opinion concerning Guillaume-François-Antoine de L'hospital, Marquis de Sainte-Mesme et du Montellier, Comte d'Antremonts, Seigneur d'Ouques, 1661-1704)
Au reste je reconnois devoir beaucoup aux lumieres de Mrs Bernoulli, sur tout à celles du jeune presentement Professeur à Groningue. Je me suis servi sans façon de leurs découvertes ...
(de L'Hospital 1696)
- стр. 245: Où est-il démontré qu'on obtient la différentielle d'une série infinie en prenant la différentielle de chaque terme? (Abel, Janv. 16, 1826, *Oeuvres*, vol. 2, p. 258)
- стр. 252: ... et de juger de la valeur du reste de la série. Ce problème, l'un des plus importants de la théorie des séries, n'a pas encore été résolu ...
(Lagrange 1797, *Oeuvres*, vol. 9, p. 42-43, 71)
... la formule de TAYLOR, cette formule ne pouvant plus être admise comme générale ...
(Cauchy 1823, *Résumé*, p. 1)
- стр. 253: ... mais celui qui me fait le plus de plaisir c'est un mémoire ... sur la simple série
$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2} x^2 + \dots$$

J'ose dire que c'est la première démonstration rigoureuse de la formule binôme ...
(Abel, letter to Holmboe 1826, *Oeuvres*, vol. 2, p. 261)
- стр. 263: Bis auf die neueste Zeit hat man allgemein angenommen, dass eine ... kontinuierliche Function ... auch stets eine erste Ableitung habe, deren Werth nur an einzelnen Stellen unbestimmt oder unendlich gross werden könne. Selbst in den Schriften von Gauss, Cauchy, Dirichlet findet sich meines Wissens keine Ausserung, aus der unzweifelhaft hervor ginge, dass diese Mathematiker, welche in ihrer Wissenschaft die strengste Kritik überall zu üben gewohnt waren, anderer Ansicht gewesen seien.
(Weierstrass 1872)
Il y a cent ans, une pareille fonction eut été regardée comme un outrage au sens commun.
(Poincaré 1899, *L'oeuvre math. de Weierstrass*, Acta Math., vol. 22, p. 5)
- стр. 266: Telle est la proposition fondamentale qui a été établie par Weierstrass.
(Borel 1905, p. 50)
- стр. 273: Es mag auffallend erscheinen, dass diese so einfache Idee, welche im Grunde genommen in weiter nichts besteht, als dass eine Vielfachsumme verschiedener Grössen (als welche hiernach die extensive Grösse erscheint) als selbstständige Grösse behandelt wird, in der That zu einer neuen Wissenschaft sich entfalten soll; ...
(Grassmann 1862, *Ausdehnungslehre*, p. 5)
... il est très utile d'introduire la considération des nombres complexes, ou nombres formés avec plusieurs unités, ...
(Peano 1888a, *Math. Ann.*, vol. 32, p. 450)
- стр. 278: Unter einer "Menge" verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die "Elemente" von M genannt werden) zu einem Ganzen.
(G. Cantor 1895, *Werke*, p. 282)
Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können.
(Hilbert, *Math. Ann.*, vol. 95, p. 170)
- стр. 283: Nous avons déjà signalé et nous reconnaitrons dans tout le cours de ce Livre l'importance des ensembles compacts. Tous ceux qui ont eu à s'occuper d'Analyse générale ont vu qu'il était impossible de s'en passer.
(Fréchet 1928, *Espaces abstraits*, p. 66)

- стр. 287: ... ist die Schwierigkeit, welche nach dem Urtheile aller Mathematiker ... das Studium jenes Werkes wegen seiner ... mehr philosophischen als mathematischen Form dem Leser bereitet ... Jene Schwierigkeit nun zu beheben, war daher eine wesentliche Aufgabe für mich, wenn ich wollte, dass das Buch nicht nur von mir, sondern auch von anderen gelesen und verstanden werde.
(Grassmann 1862, "Professor am Gymnasium zu Stettin")
- стр. 291: Eine stetige Kurve kann Flächenstücke enthalten: das ist eine der merkwürdigsten Tatsachen der Mengenlehre, deren Entdeckung wir G. Peano verdanken.
(Hausdorff 1914, p. 369)
- стр. 300: Wir Deutsche gebrauchen statt dessen nach Jacobi's Vorgange für partielle Ableitungen das runde ∂ .
(Weierstrass 1874)
- стр. 302: ... daß Weierstraß' unmittelbarer Unterricht die Spontanität der Hörer zu sehr unterdrückte und in der Tat nur für den voll verständlich war, der schon anderweitig mit dem Stoff sich vertraut gemacht hatte. Die größeren Werke sind von Ausländern geschrieben ... Wohl das erste stammt von meinem Freunde *Stolz* (Innsbruck): "Vorlesungen über allgemeine Arithmetik"
(F. Klein 1926, *Entwicklung der Math.*, p. 291)
- стр. 316: Or il est facile de voir que les différentielles de cette espèce conservent les mêmes valeurs quand on intervertit l'ordre suivant lequel les différentiations relatives aux diverses variables doivent être effectuées.
(Cauchy 1823, *Résumé*, p. 76)
- стр. 330: On sait que l'évaluation ou même la réduction des intégrales multiples présente généralement de très grandes difficultés ...
(Dirichlet 1839, *Werke*, vol. I, p. 377)
- стр. 336: Cette méthode consiste simplement à multiplier l'expression qu'il s'agit d'intégrer par un facteur dont la valeur est égale à l'unité dans l'étendue que les intégrations doivent embrasser, et qui s'évanouit en dehors de cette étendue.
(Dirichlet 1839, *Werke*, vol. I, p. 377)
- стр. 338: ... locum habet pro quacunq[ue] alia formula $\iint Z dx dy$, quippe quae per easdem substitutiones transformatur in hac $\iint Z(VR - ST) dt du$... (Euler 1769b)

Библиография

References

Курсивом в квадратных скобках после ссылки указаны разделы, в которых цитируется данная работа.

Абель (N.H. Abel 1826):

Recherches sur la série $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$, Oeuvres 1, p. 219-250; German transl. *Journal reine u. angew. Math.* (Crelle), 1 (1826), p. 311-339. [III.2], [III.4], [III.7]

Абель (N.H. Abel 1881):

Oeuvres complètes, ed. by L. Sylow ad S. Lie, 2 volumes, Christiania, MDCCCLXXXI. [III.2], [III.4], [III.6]

Або (A. Aaboe 1954):

Al-Kashi's iteration method for the determination of sin 1°, Scripta math. 20 (1954), p. 24-29. [I.4]

Або (A. Aaboe 1964):

Episodes from the early history of mathematics, Random House, New Math. Library, Yale Univ. 1964. [I.4]

Адамар (J. Hadamard 1892):

Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor, J. de Math. (4), 8 (1892), p. 101-186. [III.7]

Архимед (Archimedes, ~ 240 В.С.):

On the measurement of the circle, (Αρχιμήδης, Κύκλου μέτρησις), many editions, in particular: J.L. Heiberg, Leipzig 1880; T.L. Heath, *The works of Archimedes*, Cambridge University Press, 1897. [Имеется перевод: Архимед. Сочинения. — М.: Физматгиз, 1962. — Измерение круга, с. 266-271.] [I.4], [I.6]

Барроу (I. Barrow 1860):

The mathematical works, Ed. W. Whewell, xx+320 pp. + 220 Figs. Cambridge 1860, reprinted G. Olms Verlag, 1973. [I.2]

Бернулли Иоганн (Joh. Bernoulli 1691):

Solutio problematis funicularii, exhibita a Joh. Bernoulli, Basil. Med. Cand., Acta Eruditorum 10, MDCXCVI, p. 274-276; Opera I, p. 48-51. [II.7]

Бернулли Иоганн (Joh. Bernoulli 1691/92):

Die Differentialrechnung von Johann Bernoulli, Nach der in der Basler Universitätsbibliothek befindlichen Handschrift übersetzt von Paul Schafheitlin, Akademische Verlagsgesellschaft Leipzig, 1924. [II.1], [II.2], [III.6]

Бернулли Иоганн (Joh. Bernoulli 1691/92b):

Lectiones Mathematicæ, de methodo integralium, aliisque, conscriptæ in usum Ill. Marchionis Hospitalii, published 1742 in Opera 3, p. 385-558. [II.3]

Бернулли Иоганн (Joh. Bernoulli 1692):

Solutio curvæ causticæ per vulgarem geometriam Cartesianam; aliæque, Acta Erud. Lips. 11 (1692), p. 30; Opera I, p. 52-59. [II.3]

Бернулли Иоганн (Joh. Bernoulli 1694):

Modus generalis construendi æquationes differentiales primi gradus, Acta Erud. Lips. 13 (1694), p. 435; Opera I, p. 123-125. [II.9]

Бернулли Иоганн (Joh. Bernoulli 1694b):

Effectiois omnium quadraturam & rectificationum curvarum per seriem quandam generalissimam, Acta Erud. Lips. 13 (1694); "Additamentum" to the paper Joh. Bernoulli (1694). [II.4]

Бернулли Иоганн (Joh. Bernoulli 1696):

Problema novum ad cuius solutionem Mathematici invitantur, Acta Eruditorum 15, MDCXCVI, p. 264-269. Opera I, p. 155-161. [Имеется перевод: Бернулли И. Избранные сочинения по механике. — М.-Л.: ГТТИ, 1937. — Новая задача, к разрешению которой приглашаются математики, с. 19-20.] [II.7]

- Бернулли Иоганн (Joh. Bernoulli 1697):
Principia calculi exponentialium, seu percurrentium, Acta Erud. Lips. **16** (1697), p. 125; *Opera I*, p. 179-187; see also *Opera III*, p. 376. [I.3], [II.6]
- Бернулли Иоганн (Joh. Bernoulli 1697b):
De Conoidibus et Sphaeroidibus quaedam. Solutio analytica Aequationis in Actis A. 1695, pag. 553 propositae (A Fratre Jac. Bernoullio), Acta Eruditorum **16**, MDCXCVII, p. 113-118. *Opera I*, p. 174-179. [II.7]
- Бернулли Иоганн (Joh. Bernoulli 1697c):
Solutioque Problematis a se in Actis 1696, p. 269, propositi, de invenienda Linea Brachystochrona, Acta Eruditorum **16**, MDCXCVII, p. 206; *Opera I*, p. 187-193. [Имеется перевод: Бернулли И. Избранные сочинения по механике. — М.-Л.: ГТТИ, 1937. — Решение задачи, предложенной мною в “АСТА” за 1696 г., с. 269, о нахождении “брахистохронной линии”, с. 26-39.] [II.7]
- Бернулли Иоганн (Joh. Bernoulli 1702):
Section d'un problème concernant le calcul intégral, avec quelques abrégés par rapport à ce calcul, Histoire de l'Acad. Royale des Sciences à Paris, Année MDCCII, Mémoire, p. 289-297; (1697), p. 125. *Opera I*, p. 393-400. [II.5]
- Бернулли Иоганн (Joh. Bernoulli 1742):
Opera Omnia, 4 volumes, Lausannæ & Genevæ 1742; facsimile reprint (Curavit J. E. Hofmann) 1968, Georg Olms Verlag Hildesheim. [III.3]
- Бернулли Иоганн (Joh. Bernoulli 1955, 1988):
Der Briefwechsel von Johann Bernoulli, 2 volumes, Birkhäuser Verlag Basel. [II.3], [II.5], [II.7]
- Бернулли Якоб (Jac. Bernoulli 1689):
Positiones arithmeticae de seriebus infinitas, earumque summa finita, Basileae, 1689, *Opera I*, p. 375-402. [I.2]
- Бернулли Якоб (Jac. Bernoulli 1690):
Analysis problematis ante hac propositi, de inventione lineæ descensus a corpore gravi percurrente uniformiter, sic ut temporibus æqualibus æquales altitudines emetiatur: & alterius cujusdam Problematis Propositio, Acta Eruditorum **9**, MDCLXXX, p. 217-219. [II.4], [II.7]
- Бернулли Якоб (Jac. Bernoulli 1694):
Constructio curvæ accessus & recessus æquabilis, ope rectificationis curvæ cujusdam algebraicæ, Acta Eruditorum **13** (1694), p. 336-338, *Opera 2* p. 608-612. [IV.3]
- Бернулли Якоб (Jac. Bernoulli 1702):
Section indéfinie des arcs circulaires, en telle raison qu'on voudra; Avec la manière d'en déduire les Sinus, &c., Hist. Acad. Sciences de Paris (1702), p. 281; *Opera*, p. 921. [I.4]
- Бернулли Якоб (Jac. Bernoulli 1705):
Ars conjectandi, opus posthumum, published posthumously Basileæ MDCCXIII; *Werke 3*, p. 107-286, Basel, 1975. [Имеется перевод: Бернулли Я. Искусство предположений, ч. 1-3. — Берлин: NG, 2006; Бернулли Я. О законе больших чисел. — М.: Наука, Физматлит, 1986.] [I.1]
- Бернулли Якоб (Jac. Bernoulli 1744):
Opera, 2 volumes, VIII+48+1139 pp., Ed. G. Cramer, Genevæ 1744.
- Блантон (J. D. Blanton 1988):
Introduction to analysis of the infinite, English translation of Euler (1748), Springer-Verlag New York, 1988. [I.1]
- Больцано (B. Bolzano 1817):
Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege, Prag 1817; Ostwald's Klassiker #153, 1905 (see also Stolz 1881). [III.0], [III.3]
- Борель (E. Borel 1895):
Sur quelques points de la théorie des fonctions, Thèse, parue aux Ann. Ecole normale sup. 3e série, **12** (1895), p. 9-55; *Oeuvres 1*, p. 239-285. The “Theorem of Heine-Borel” is in a “Note” at the end of the thesis. Paris, 1905. [IV.1]
- Борель (E. Borel 1905):
Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes, rédigées par M. Fréchet, Gauthier-Villars, Paris 1905. [III.9]
- Бриггс (H. Briggs 1624):
Arithmetica Logarithmica, Londini, Excudebat Gulielmus Iones, 1624. [I.2], [I.3]

- Бук (R. C. Buck 1980):
Sherlock Holmes in Babylon, Am. Math. Monthly **87**, Nr. 5 (1980), p. 335-345. [II.5]
- Буняковский (V. Buniakowsky 1859):
Sur quelques inégalités concernant les intégrales ordinaires et les intégrales aux différences finies, Mémoires de l'Acad. de St-Petersbourg (VII), 1 (1859), Nr. 9. [III.5]
- Бюрги (J. Bürgi 1620):
Arithmetische und geometrische Progress-Tabulen, Prag, 1620. [I.3]
- Валлис (J. Wallis 1655):
Arithmetica infinitorum, sive nova methodus inquirendi in curvilinearum quadraturam, aliisque difficiliora matheseos problemata, Anno 1655 typis edita; *Opera mathematica I* (1695), p. 355-478; reprinted Georg Olms Verlag, 1972. [I.5], [I.6]
- Ваннер (G. Wanner 1988):
Les équations différentielles ont 350 ans, L'Enseignement Mathématique **34** (1988), p. 365-385. [II.7]
- Варден, ван дер (B. L. van der Waerden 1954):
Science awakening I, Egyptian, Babylonian, and Greek Mathematics, Kluwer Acad. Publ. Dordrecht, The Netherlands; English editions 1961, 1969, 1975, 1988. [Имеется перевод: ван дер Варден Б. Л. Пробуждающаяся наука: Математика Древнего Египта, Вавилона и Греции. — М.: URSS (КомКнига), 2006.] [I.2]
- Варден, ван дер (B. L. van der Waerden 1957):
Über die Einführung des Logarithmus im Schulunterricht, Elemente der Math. **12** (1957), p. 1-8. [I.3]
- Вейерштрасс (K. Weierstrass 1841):
Zur Theorie der Potenzreihen, manuscript 1841, published 1894 in *Werke* **1**, p. 67-74. [III.4]
- Вейерштрасс (K. Weierstrass 1861):
Differential Rechnung, Vorlesung an dem Königlichen Gewerbeinstitut, manuscript 1861, typewritten by H. A. Schwarz, Math. Bibl. Humboldt Universität Berlin. [III.3], [III.4], [III.6], [III.7]
- Вейерштрасс (K. Weierstrass 1872):
Über continuirliche Functionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen, Königl. Akad. der Wiss. Berlin, *Werke* **2**, p. 71-74. [III.3], [III.9]
- Вейерштрасс (K. Weierstrass 1874):
Theorie der analytischen Functionen, Vorlesung an der Univ. Berlin 1874, manuscript (ausgearbeitet von G. Valentin), Math. Bibl. Humboldt Universität Berlin. [III.1], [III.3], [IV.3]
- Вейерштрасс (K. Weierstrass 1885):
Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen reeller Argumente, Königl. Akad. der Wiss. Berlin, *Werke* **3**, p. 1-37. [III.9]
- Вейерштрасс (K. Weierstrass 1894-1927):
Mathematische Werke, 7 volumes, Berlin and Leipzig, 1894-1927. [III.1]
- Виет (F. Viète 1591):
In artem analyticam isagoge, Tours 1591, *Opera*, Ed. Franciscus van Schooten, 1646, p. 1-12. [I.1]
- Виет (F. Viète 1591a):
De aequationem recognitione et emendatione, publ. posth. 1615, *Opera*, Ed. Franciscus van Schooten, 1646, p. 84-158. [I.1], [I.5]
- Виет (F. Viète 1593):
Ad angulares sectiones theorematum КΑΘΟΛΙΚΩΤΕΡΑ, publ. posthumously 1615, *Opera*, Ed. Franciscus van Schooten, 1646, p. 287-304. [I.1], [I.2]
- Виет (F. Viète 1600):
Algebra nova, French transl. with commentaries: *Introduction en l'art analytique ou nouvelle Algebra*, oeuvre dans lequel sont veus les plus miraculeux effects des sciences Mathematiques, pour l'inuention & solution, tant des Problemes, que Theoremes, 1630. [I.1]
- Виртингер (W. Wirtinger 1902):
Einige Anwendungen der Euler-Maclaurin'schen Summenformel, insbesondere auf eine Aufgabe von Abel, Acta Mathematica **26** (1902), p. 255-271. [II.10]

- Галилей (G. Galilei 1638):
Discorsi e dimonstrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze, attenenti alla mecanica & i movimenti locali, del Signor Galileo Galilei Linceo, Filosofo e matematico primario del Serenissimo Grand Duca di Toscana, in Leida M.D.C.XXXVIII. [Имеется перевод: Галилей Г. Избранные труды, т. 2. — М.: Наука, 1964. — Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению, с. 109–403.] [II.1], [II.7]
- Галлей (E. Halley 1694):
A new, exact, and easy method, of finding the roots of any equations generally, and that without any previous reduction, by Edm. Halley, Savilian Professor of Geometry, Philosophical Transactions, Nr. 210, A.D. 1694; republished as appendix to Newton's Universal Arithmetick, MDCCXXVIII, p. 258. [II.2]
- Гамильтон (W.R. Hamilton 1853):
Lectures on quaternions, published 1853, extended publ. Elements of quaternions 1866, German translation, 1882. [Имеется перевод: Гамильтон У. Избранные труды. Оптика. Динамика. Кватернионы. — М.: Наука, 1994. — Лекции о кватернионах, с. 392–438.] [IV.0], [IV.3]
- Гаусс (C.F. Gauss 1799):
Demonstratio nova theorematum omnium functionum algebraicarum rationally integrabilium unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse, Helmsstadii MDCCCLXXXIX, Werke, 3, p. 1-31. [I.5], [III.0]
- Гаусс (C.F. Gauss 1812):
Disquisitiones generales circa seriem infinitam

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + \text{etc,}$$
Werke, 3, p.123-162. [III.0]
- Гаусс (C.F. Gauss 1863–1929):
Werke, ed. Königl. Ges. de Wiss. Göttingen, 12 volumes, reprinted Georg Olms Verlag, 1973. [I.4]
- Гейне (E. Heine 1870):
Ueber trigonometrische Reihen, J. Reine und Angew. Math. (Crelle) 71 (1870), p. 353-365. [III.4], [III.5]
- Гейне (E. Heine 1872):
Die Elemente der Funktionenlehre, J. Reine und Angew. Math. (Crelle) 74 (1872), p. 172-188. [III.1], [III.4], [IV.1], [IV.2]
- Гёльдер (O. Hölder 1889):
Ueber einen Mittelwertsatz, Gött. Nachr. 1889, p. 38-47. [IV.4]
- Гессе (O. Hesse 1857):
Ueber die Kriterien des Maximums und Minimums der einfachen Integrale, J. Reine und Angew. Math. (Crelle) 54 (1857), p. 227-273. [IV.4]
- Гиббс (J.W. Gibbs 1907):
Vector analysis, a text-book for the use of students of mathematics and physics founded upon the lectures of J.W. Gibbs by E.B. Wilson. New York 1907, 436 pp. [IV.3]
- Гильберт (D. Hilbert 1891):
Ueber die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück, Math. Annalen 38 (1891), p. 459-460. [III.9], [IV.2]
- Гильберт (D. Hilbert 1932–1935):
Gesammelte Abhandlungen, first edition Springer-Verlag, Berlin, 1932–1935, reprint ed Chelsea, 1965, second edition Springer-Verlag, 1970. [III.3]
- Голдстейн (H.H. Goldstine 1977):
A history of numerical analysis from the 16th through the 19th century, Springer-Verlag New York, 1977, 348 pp. [I.1], [II.6]
- Градштейн и Рыжик (I.S. Gradshteyn & I.M. Ryzhik 1980):
Table of Integrals, Series, and Products, 1156 pp., Academic Press; first English translation 1965; [Имеется оригинал: И.С. Градштейн и И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, изд. 5-е, стереотип. — М.: Наука, 1971.] [II.4]
- Грассман (H.G. Grassmann 1844, 1862):
Die lineare Ausdehnungslehre, 1844, reprinted 1894 by Teubner, Leipzig ("mit dem

- Bildnis Graßmanns in Holzschnitt"); revised edition *Die Ausdehnungslehre*, 1862, reprinted Teubner, 1896. [IV.0], [IV.1], [IV.2]
- Грёбнер и Хофрейтер (W. Gröbner & N. Hofreiter 1949):
Integraltafel, erster Teil: unbestimmte Integrale, 166 pp., Springer-Verlag, Wien und Innsbruck, 1949. [II.4]
- Грегори (J. Gregory 1668):
Exercitationes geometricae. Appendicula ad veram circuli et hyperbolae quadraturam, London, 1668. [I.3]
- Гурвиц (A. Hurwitz 1962, 1963):
Mathematische Werke, ed. Abtlg. Math. Phys. ETH Zürich, 2 volumes, Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart, 1962, 1963. [I.6]
- Гюйгенс (C. Huyghens 1673):
(Christiani Hugonii Zulichemii) *Horologium oscillatorium, sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae*, Paris, 1673. [II.1], [II.3], [II.7]
- Даламбер (J. le Rond d'Alembert 1748):
Suite des recherches sur le calcul intégral, quatrième partie: Méthodes pour intégrer quelques équations différentielles, Hist. Acad. Berlin, tome IV, p. 275-291. [II.8], [IV.0]
- Даламбер (J. le Rond d'Alembert 1754):
Calcul différentiel, article under "D" of the famous *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, mis en ordre et publié par M. Diderot & par M. D'Alembert*, tome quatrième, p. 985, à Paris, MDCCLIV. [II.1]
- Даламбер (J. le Rond d'Alembert (1765):
Limite, article under "L" of the *Encyclopédie*, tome neuvieme, p. 542, à Neufchastel, MDCCLXV. [III.1]
- Дарбу (G. Darboux 1875):
Mémoire sur les fonctions discontinues, Annales. École norm. sup. Sér. 2, 4 (1875), p. 57-112. [III.4], [III.5], [III.6]
- Дедекин (R. Dedekind 1872):
Stetigkeit und irrationale Zahlen, first edition 1872, fourth edition 1912, English translation *Continuity and irrational numbers in Essays on the theory of numbers*, Dover, 1963; *Werke* 3, p. 314-343. [Имеется перевод: Дедекин Р. Непрерывность и иррациональные числа, изд. 4-е, испр. — Одесса: Mathesis, 1923.] [III.1]
- Декарт (R. Descartes 1637):
La Geometrie, Appendix to the *Discours de la methode*, Paris 1637, English translation, with a facsimile of the first edition, D. E. Smith & M. L. Latham, The Oper Court Publishing Comp., 1925, reprinted 1954 by Dover. [Имеется перевод: Декарт Р. Геометрия: с приложением избранных работ П. Ферма и переписки Декарта. — М.-Л.: ОНТИ, 1938. Декарт Р. Рассуждение о методе. С приложением: Диоптрика, Метеоры, Геометрия. — Л.: Изд-во АН СССР, 1953.] [I.1], [I.2], [I.5], [II.1], [IV.3]
- Дженокки и Пеано (A. Genocchi & G. Peano 1884):
Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale, "pubblicato con aggiunte dal Dr. Giuseppe Peano" Torino, 1884; German edition (G. Bohlmann & A. Schepp), 1899. [Имеется перевод: Дженокки А. Дифференциальное исчисление и начала интегрального исчисления. — Петербург: Akademia, 1922.] [IV.3]
- Джервер (J. Gerver 1970):
The differentiability of the Riemann function at certain rational multiples of π , Amer. J. of Math. 92 (1970), p. 33-55. [III.9]
- Джонс У. (W. Jones 1706):
Synopsis palmariorum matheseos: or, New introduction to the mathematics: containing principles of arithmetic & geometry, demonstrated, in a short and easie method ..., London, 1706. [I.4]
- Дини (U. Dini 1878):
Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali, Pisa, 1878, german translation by Lüroth and Schepp, Teubner Leipzig, 1892. [III.5], [III.9]
- Дирихле (G. L. Dirichlet 1837):
Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen, Rep. der Physik, 1837; also: Ostwald's Klassiker Nr. 116, Leipzig, 1900; *Werke* 1, p. 133-160. [III.3]

- Дирихле (G.L. Dirichlet 1837b):
Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enthält, Abh. der Königl. Preussischen Acad. der Wiss. Berlin, 1837, Werke 1, p. 313-342. [Имеется перевод: Дирихле Л. Лекции по теории чисел. — М.: Изд-во ЛКИ, 2007. — Доказательство теоремы, что всякая бесконечная арифметическая прогрессия, первый член и разность которой суть целые числа, не имеющие общего множителя, содержит бесконечно много простых чисел, с. 296-309.] [III.2]
- Дирихле (G.L. Dirichlet 1839):
Über eine neue Methode zur Bestimmung vielfacher Integrale, Ber. über die Verh. der Königl. Preussischen Acad. der Wiss. Berlin, 1839, p. 18-25; Werke 1, p. 381-390. [IV.5]
- Дюбуа-Реймон (P. Du Bois-Reymond 1875):
Ueber eine veränderte Form der Bedingung für die Integrirbarkeit der Functionen, Journal reine u. angew. Math. (Crelle), 79 (1875), p. 259-262. [III.5]
- Дюга (P. Dugac 1978):
Sur les fondements de l'analyse, Thèse, Paris 1978; see also *Fondements de l'analyse*, Chapter VI of *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900* sous la direction de Jean Dieudonné, Hermann éditeurs, Paris, 1978. [III.1]
- Дюрер (A. Dürer 1525):
Underweysung der messung, mit dem zirckel un richtscheyt, in Linien ebenen unnd gantzen corporen, durch Albrecht Dürer zu samen getzogē, und zu nutz allē kunstlieb habenden mit zu gehörigen figuren, in truck gebracht, im jar. M.D.XXV. Facsimile reprint Verlag Dr. Alfons Uhl, Nördlingen, 1983. [I.4], [II.3]
- Евклид (Euclid, (~ 300 B.C.):
The elements, (ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ, ΣΤΟΙΧΕΙΑ); many translations and editions, first mathematical book ever printed (Venice 1482); the today's definite text is due to J.L. Heiberg 1883-1888; English translation with commentaries: Sir Thomas L. Heath 1908 and 1925; reprinted 1956 by Dover Publications in three volumes. [Имеется перевод: Евклид. Начала, кн. 1-6, 7-10, 11-15, т. 1-3. — М.-Л.: Гостехиздат, 1948-1950.] [I.1], [I.4], [I.6], [III.1]
- Жордан К. (C. Jordan 1882):
Cours d'analyse de l'Ecole ploytechnique, Paris, 1882-1887 (3 volumes). [IV.1]
- Зейдель, фон (L. Seidel (Philipp Ludwig von) 1848):
Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuirliche Functionen darstellen, Denkschriften der Münchener Akademie, Jahrgang 1848. [III.4]
- Кантор (G. Cantor 1870):
Beweis, dass für jeden Werth von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Function $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form darstellen lässt, Journal reine u. angew. Math. (Crelle), 72 (1870), p. 139-142; см., в частности, сноску на с. 141. *Gesammelte Abhandlungen*, p. 80-83. [III.3]
- Кантор (G. Cantor 1872):
Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, Math. Annalen 5 (1872), p. 123-132. *Gesammelte Abhandlungen*, p. 92-102. [Имеется перевод: Кантор Г. Труды по теории множеств. — М.: Наука, 1985. — Обобщение одной теоремы из теории тригонометрических рядов, с. 9-18.] [III.1]
- Кантор (G. Cantor 1878):
Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre, Journal reine u. angew. Math. (Crelle), 84 (1878), p. 242-258. *Gesammelte Abhandlungen*, p. 119-133. [Имеется перевод: Кантор Г. Труды по теории множеств. — М.: Наука, 1985. — К учению о многообразиях, с. 22-35.] [IV.2]
- Кантор (G. Cantor 1880):
Fernere Bemerkung über trigonometrische Reihen, Math. Annalen 16 (1880), p. 267-269. *Gesammelte Abhandlungen*, p. 104-106. [III.4]
- Кантор (G. Cantor 1883):
Ueber unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten, N 5, Math. Annalen 21 (1883), p. 545-591. *Gesammelte Abhandlungen*, p. 165-209. [Имеется перевод: Кантор Г. Труды по теории множеств. — М.: Наука, 1985. — Основы общего учения о многообразиях. Математически-философский опыт учения о бесконечном,

- с. 63–106.] [IV.1]
- Кантор (G. Cantor 1884):
Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten, N 6, *Math. Annalen* **23** (1884), p. 453–488. (“Fortsetzung folgt”); *Gesammelte Abhandlungen*, p. 210–246. [Имеется перевод: Кантор Г. Труды по теории множеств. — М.: Наука, 1985. — О бесконечных линейных точечных многообразиях, с. 106–141.] [IV.1]
- Кантор (G. Cantor 1889):
Bemerkung mit Bezug auf den Aufsatz: Zur Weierstraß - Cantorschen Theorie der Irrationalzahlen, *Math. Annalen* **33** (1889), p. 476, *Gesammelte Abhandlungen*, p. 114. [III.1]
- Кантор (G. Cantor 1932):
Gesammelte Abhandlungen, ed. E. Zermelo, Springer-Verlag, Berlin, 1932. [Имеется перевод: Кантор Г. Труды по теории множеств. — М.: Наука, 1985.] [IV.1]
- Кантор (M. Cantor 1880–1908):
Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, vol. I 1880, vol. II 1891, vol. III 1898, vol. IV 1908; many later editions and printings, Teubner Verlag, Leipzig. [I.1], [I.4]
- Каратеодори (C. Carathéodory 1950):
Funktionentheorie, Erster Band, Verlag Birkhäuser Basel, 1950, 288 pp. [III.6]
- Кардано (H. Cardano 1545):
Ars magna de rebus algebraicis, Nürnberg, 1545. [I.1], [I.2], [I.5]
- Каунцнер (W. Kaunzner 1980):
Über Regiomontanus als Mathematiker, p. 125–145 in: *Regiomontanus-Studien*, hrsg. G. Hamann, Österr. Akad. der Wiss., Wien, 1980. [I.4]
- Кеплер (J. Kepler 1615):
Nova stereometria solidorum vinariorum, in primis Austriaci, figuræ omnium aptissimæ, Authore Ioanne Keplero, imp. Cæs. Matthiæ I. ejusq; fidd. Ordd. Austriæ supra Anasum Mathematico, Lincii, Anno M.DC.XV. [Имеется перевод: Кеплер И. Новая стереометрия винных бочек. — М.-Л.: Гостехиздат, 1935.] [II.4]
- Клайн (M. Kline 1972):
Mathematical thought from ancient to modern times, New York, Oxford Univ. Press, 1238 pp. [I.2], [I.3], [I.5], [II.6], [III.7], [IV.0]
- Клейн (F. Klein 1908):
Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, third edition 1924, Grundlehren, Band XIV, Springer-Verlag Berlin; Engl. transl. Dover. [Имеется перевод: Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. Лекции, читанные в Геттингенском университете, т. 1 (изд. 4-е), т. 2 (изд. 2-е). — М.: Наука, 1987.] [II.1], [II.2], [III.6]
- Клейн (F. Klein 1926, 1927):
Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, 2 volumes, Springer-Verlag Berlin 1926, 1927, reprinted in one volume Chelsea New York 1967, Springer-Verlag 1979. [Имеется перевод: Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии, т. 1. — М.: Наука, 1989. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии, т. 2. — М.-Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2003.] [IV.3]
- Кнопш (K. Knopp 1922):
Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Grundlagen, Bd. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1922, second ed. 1924, third ed. 1931, fourth ed. 1947. [III.2]
- Кнут (D.E. Knuth 1962):
Euler's constant to 1271 places, *Math. of Comput.* **16** (1962), p. 275–281. [II.10]
- Кох, фон (H. von Koch 1906):
Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes, *Acta Mathematica* **30**, (1906), p. 145–174. [III.9], [IV.5]
- Коши (A.L. Cauchy 1821):
Cours d'analyse algébrique, Oeuvres série 2, vol. III. [Имеется перевод: Коши А.Л. Алгебраический анализ. — Лейпциг, 1864.] [II.4], [III.1], [III.2], [III.3], [III.4], [III.5], [III.6], [III.7], [IV.2]
- Коши (A.L. Cauchy 1823):
Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal, Oeuvres série 2, vol. IV, p. 1–261. [Имеется перевод: Коши А.Л. Краткое изложение уроков о дифференциальном и интегральном исчислении. — СПб: Императорская Академия Наук, 1831.] [II.1], [III.5], [III.7], [IV.4]

- Коши (A.L. Cauchy 1824):
Résumé des Leçons données à l'École Royale Polytechnique. Suite du Calcul Infinitésimal; published: *Equations différentielles ordinaires*, Ed. Chr. Gilain, Johnson, 1981. [II.3], [II.9]
- Коши (A.L. Cauchy 1829):
Leçons sur le calcul différentiel, Oeuvres série 2, vol. IV, p. 265-572. [III.6], [IV.4]
- Кун (S. Kuhn 1991):
The derivative à la Carathéodory, *Math. Monthly* **98**, Nr. 1 (1991), p. 40-44. [III.6]
- Лагранж (J.L. de Lagrange 1759):
Recherches sur la méthode de maximis et minimis, Misc. Taurinensia, Torino 1 (1759), *Oeuvres* I, p. 3-20. [II.2], [IV.4]
- Лагранж (J.L. de Lagrange 1773):
Sur l'attraction des sphéroïdes elliptiques, *Nouv. Mém. Acad. royale Berlin* année 1773, *Oeuvres* **3**, p. 619-649. [IV.5]
- Лагранж (J.L. de Lagrange 1775):
Recherche sur les Suites Récurrentes, *Nouveaux Mém. de l'Acad. royale des Sciences et Belles-Lettres*, Berlin. *Oeuvres* **4**, p. 159. [II.8]
- Лагранж (J.L. de Lagrange 1788):
Mécanique analytique, Par M. de la Grange, Paris, MDCC.LXXXVIII, *Oeuvres* **11** and **12**. [Имеется перевод: Лагранж Ж. Аналитическая механика, т. 1 (изд. 2-е), т. 2. — М.-Л.: Гостехиздат, 1950.] [II.8], [III.0], [IV.4]
- Лагранж (J.L. de Lagrange 1797, 1813):
Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissans, de limites ou de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique de quantités finies, A Paris, de l'imprimerie de la république, Prairial an V (1797), deuxième édition: Gauthier-Villars, 1813. [II.1], [III.0], [III.6], [III.7]
- Лагранж (J.L. de Lagrange 1867-1882):
Oeuvres, 14 volumes, ed. by J.-A. Serret et G. Darboux, Paris 1867-1882, reprinted 1973, Georg Olms Verlag Hildesheim. [I.1], [III.7]
- Ламберт (J.H. Lambert 1768):
Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes circulaires et logarithmiques, *Mém. Acad. sc. Berlin* **17** (1768), p. 265-322, *Opera* II, p. 112-159. [I.6]
- Ламберт (J.H. Lambert 1770a):
Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rectification des Circuls suchen, Berlin 1770, *Opera* I, p. 194-212. [Имеется перевод: Архимед, Гюйгенс, Лежандр, Ламберт. О квадратуре круга. — М.: УРСС, 2003. — Ламберт И.Г. Предварительные сведения для ищущих квадратуру и спрямление круга, с. 121-143.] [I.6]
- Ламберт (J.H. Lambert 1770b):
Observations trigonométriques, *Mém. Acad. sc. Berlin* **24** (1770), p. 327-357, *Opera* II, p. 245-269. [I.4]
- Ламберт (J.H. Lambert 1770c):
Algebraische Formeln für die Sinus von drey zu drey Graden, Berlin, 1770, *Opera* I, p. 189-193. [I.4]
- Ламберт (J.H. Lambert 1946, 1948):
Opera Mathematica, 2 volumes, Orell Füssli Verlag Zürich.
- Ландау (E. Landau 1908):
Über die Approximation einer stetigen Funktion durch eine ganze rationale Funktion, *Rendiconti di Palermo* **25** (1908), p. 337-346; *Collected Works* **3**, p. 402-410. [III.9]
- Ландау (E. Landau 1930):
Grundlagen der Analysis, Akad. Verlagsges. Leipzig (1930), 134 pp. American editions with translated prefaces 1945, 1947, Chelsea Pub. Comp. [Имеется перевод: Ландау Э. Основы анализа. — М.: ИЛ, 1947.] [III.1]
- Лаплас (P.-S. de Laplace 1812):
Théorie analytique des probabilités, Paris, 1812, second edition 1814, third edition 1820. [Имеется перевод введения к последним изданиям: Лаплас П.С. Опыт философии теории вероятностей. Популярное изложение основ теории вероятностей и ее приложений. — М.: 1908.] [II.6]

- Лежандр (А.-М. Legendre 1794):
Éléments de géométrie, first edition 1794, fourth edition 1806, many later editions. [Имеется перевод: Лежандр А.М. Основания геометрии и тригонометрии. — СПб: 1837.] [I.6]
- Лейбниц (G.W. Leibniz¹ 1682):
De vera proportione circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus expressa, Acta Eruditorum 1, 1682, p. 41-46. [I.4], [III.2]
- Лейбниц (G.W. Leibniz 1684):
Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quæ nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, & singulare pro illis calculi genus, Acta Eruditorum 3, 1684, p. 467. [Имеется перевод: Избранные отрывки из математических сочинений Лейбница. Успехи матем. наук, 1948, т. 3, вып. 1. — Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которого не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого род исчислений, с. 166-173.] [I.2], [II.1], [II.2]
- Лейбниц (G.W. Leibniz 1686):
De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum, Acta Eruditorum 5, June 1686, p. 292-300. [Имеется перевод: Избранные отрывки из математических сочинений Лейбница. Успехи матем. наук, 1948, т. 3, вып. 1. — О глубокой геометрии и анализе неделимых, а также бесконечных, с. 175-177.] [II.4]
- Лейбниц (G.W. Leibniz 1689):
De linea isochrona in qua grave sine acceleratione descendit et de controversia cum DN. Abbate D. C., Acta Eruditorum 8, 1689, p. 195. [II.7]
- Лейбниц (G.W. Leibniz 1691):
Quadratura arithmetica communis sectionum conicarum quæ centrum habet, indeque ducta trigonometria canonica ad quantamcumque in numeris exactis exactitudinem a tabularum necessitate liberata, cum usu speciali ad lineam rhomborum nauticam, aptatumque illi planisphaerium, Acta Eruditorum 10, April 1691, p. 178-182. [I.4]
- Лейбниц (G.W. Leibniz 1691b):
De linea in quam flexile se pondere proprio curvat, ejusque usu insigni adinveniendas quotcumque medias proportionales & logarithmos, Acta Eruditorum 10, 1691, p. 277-281 and 435-439. [II.7]
- Лейбниц (G.W. Leibniz 1693):
Supplementum geometriæ dimensionis, seu generalissima omnium tetragonismorum effectio per motum: similiterque multiplex constructio linea ex data tangentium conditione, Acta Eruditorum 12, 1693, p. 385-392. [II.7]
- Лейбниц (G.W. Leibniz 1694a):
Nova calculi differentialis applicatio et usus ad multiplicem linearum constructionem ex data tangentium conditione, Acta Eruditorum 13, July 1694. [Имеется перевод: Избранные отрывки из математических сочинений Лейбница. Успехи матем. наук, 1948, т. 3, вып. 1. — Новое приложение и употребление дифференциального исчисления к многообразному построению линий по данному свойству касательных, с. 186-187.] [II.3], [IV.0]
- Лейбниц (G.W. Leibniz 1694b):
Constructio propria problematis de curva isochrona paracentrica, ubi et generaliora quaedam de natura et calculo differentiali osculorum, et de constructione linearum transcendentium, una maxime geometrica, altera mechanica quidem, sed generalissima. Accessit modus reddendi inventiones transcendentium linearum universales, ut quævis casum comprehendant, et transeant per punctum datum, Acta Eruditorum 13, August 1694. [II.6]
- Лейбниц (G.W. Leibniz 1702):
Specimen novum analyseos pro scientia infinita circa summas et quadraturas, Acta Eruditorum 21, May 1702. [Имеется перевод: Избранные отрывки из математических сочинений Лейбница. Успехи матем. наук, 1948, т. 3, вып. 1. — Новый пример анализа для науки о бесконечном, относящийся к суммам и квадратурам, с. 182-184.] [II.5]

¹ Лейбниц обычно подписывал свои работы на латинском языке G. G. L. (Gothofredo Gulielmo Leibnitio).

- Лейбниц (G.W. Leibniz 1710):
Symbolismus memorabilis calculi algebraici et infinitesimalis in comparatione potentiarum et differentiarum, et de lege homogeneorum transcendentali, Miscellanea Berolinensia ad incrementum scientiarum, 1710. [II.2]
- Лемер (D.H. Lehmer 1940):
On the maxima and minima of Bernoulli polynomials, Amer. Math. Monthly **47** (1940), p. 533-538. [II.10]
- Лерх (M. Lerch 1888):
Über die Nichtdifferentiirbarkeit gewisser Functionen, J. Reine und Angew. Math. (Crelle) **103** (1888), p. 126-138. [III.7]
- Лиувилль (J. Liouville 1835):
Mémoire sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendentes, J. Reine und Angew. Math. (Crelle) **13** (1835), p. 93-118. [II.6]
- Лиувилль (J. Liouville 1841):
Remarques nouvelles sur l'équation de Riccati, J. de Math. pures et appl. (Liouville) **6** (1841), p. 1-13. [II.9]
- Лохс (G. Lochs 1963):
Die ersten 968 Kettenbruchnenner von π , Monatsh. f. Math. **67** (1963) p. 311-316. [I.6]
- Лопиталь, де (G. de L'Hospital 1696):
Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes, A Paris, de l'Imprimerie Royale. M.DC.XCVI. [Имеется перевод: Лопиталь Г.Ф. де. Анализ бесконечно малых. — М.-Л.: ГТТИ, 1935.] [II.1], [III.6]
- Люрот (J. Lüroth 1873):
Bemerkung über gleichmässige Stetigkeit, Math. Ann. **6** (1873) p. 319-320. [III.4]
- Маклорен (C. Maclaurin 1742):
A treatise of fluxions, in two books, Edinburgh, MDCCXLII. [II.1], [II.2], [II.10], [III.8]
- Мейnardус (G. Meinardus 1964):
Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung, Springer Tracts in Nat. Phil., 180 pp., Springer, 1964, English transl., Springer, 1967. [III.9]
- Мере (Ch. Méray 1872):
Nouveau précis d'analyse infinitésimale, Paris, 1872. [III.1]
- Меркатор (N. Mercator (= Kaufmann) 1668):
Logarithmo-technica; sive methodus construendi logarithmos nova, accurata, et facilis; ..., written 1667, published London, 1668. [I.3]
- Мертенс (F. Mertens 1875):
Ueber die Multiplicationsregel für zwei unendliche Reihen, J. Reine und Angew. Math. (Crelle) **79** (1875), p. 182-184. [III.2]
- Миел (G. Miel 1983):
Of calculations past and present: the Archimedean algorithm, Amer. Math. Monthly **90** (1983), p. 17-35. [I.4]
- Муавр, де (A. de Moivre 1730):
Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis, Londini, 1730. [I.4]
- Непер (J. Napier 1614):
Mirifici logarithmorum canonis descriptio, Edinburgi, 1614. [I.3]
- Непер (J. Napier 1619):
Mirifici logarithmorum canonis constructio, Edinburgi 1619, Engl. translation: *The construction of the wonderful canon of logarithms*, by William Rae MacDonald, 1888. [I.3]
- Нотари (V. Notari 1924):
L'equazione di quarto grado, Periodico di Matematiche, Ser. 4, vol. 4 (Bologna 1924), p. 327-334. [I.1]
- Ньютон (I. Newton 1665):
Annotations from Wallis, manuscript of 1665, published in *The mathematical papers of Isaac Newton* 1, Cambridge University Press, 1967. [Имеется перевод: Ньютон И. Математические работы. — М.-Л.: ОНТИ, 1937. — Извлечение из двух писем Ньютона к Дж. Валлису, с. 256-264.] [I.2], [II.2]

- Ньютон (I. Newton 1669):
De analysi per æquationes numero terminorum infinitas, manuscript of 1669, published in Newton (1711) by W. Jones, p. 1-21; *Works* 2, p. 165-173. [Имеется перевод: Ньютон И. Математические работы. — М.-Л.: ОНТИ, 1937. — Анализ с помощью уравнений с бесконечным числом членов, с. 3-24.] [I.3], [I.4]
- Ньютон (I. Newton 1671):
Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum, manuscript of 1671, published "translated from the author's Latin original not yet made publick, London 1736"; *Opuscula mathematica*, vol. I; French transl. "par M. de Buffon, Paris MDCCXL"; facsimile reprint Ed. Albert Blanchard, Paris, 1966. [Имеется перевод: Ньютон И. Математические работы. — М.-Л.: ОНТИ, 1937. — Метод флюксий и бесконечных рядов, с. 25-166.] [I.2], [I.3], [I.4], [II.1], [II.2], [II.3], [II.6]
- Ньютон (I. Newton 1676):
Methodus differentialis, manuscript mentioned in a letter of Oct. 1676 to Oldenburg, published in Newton (1711) by W. Jones, p. 93-101. [Имеется перевод: Ньютон И. Математические работы. — М.-Л.: ОНТИ, 1937. — Метод разностей, с. 210-217.] [I.1]
- Ньютон (I. Newton 1686):
Philosophiæ naturalis principia mathematica, Autore IS. NEWTON, Londini, 1686, second edition 1713, third edition 1726, English transl. 1803, French transl. "par feue Madame la Marquise du Chastellet" à Paris, 1756. [Имеется перевод: Ньютон И. Математические начала натуральной философии. — М.: Наука, 1989.] [II.1]
- Ньютон (I. Newton 1711):
Analysis per quantitatum series, fluxiones, ac differentias, published by W. Jones, London 1711. [I.4]
- Ньютон (I. Newton (1736): см. Ньютон (1671).
- Пармантье (M. Parmentier 1989):
G. W. Leibniz, la naissance du calcul différentiel, 26 articles des Acta Eruditorum, Mathesis, Paris, Librairie Philosophique J. Vrin, 1989. [II.1]
- Паскаль (B. Pascal 1654):
Traité du triangle arithmétique, avec quelques autres petits traitez sur la mesme matiere, written 1654, published posthumously, Paris, 1665. [I.2]
- Паскуале, ди (L. di Pasquale 1957):
Le equazioni di terzo grado nei "Questi et inventioni diverse" di Nicolò Tartaglia, *Periodico di Matematiche*, Ser. 4, vol. 35 (Bologna 1957), p. 79-93. [I.1]
- Пеано (G. Peano 1884):
"Annotazioni" al trattato di calcolo del 1884, (see Genocchi & Peano 1884), *Opere scelte* I, p. 47-73. [IV.2], [IV.4]
- Пеано (G. Peano 1888):
Calcolo geometrico, secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann, Torino 1888; German edition: *Die Grundzuege des geometrischen Calculs*, Teubner Leipzig, 1891; see also: *Math. Annalen* 32 (1888), p. 451. [IV.0]
- Пеано (G. Peano 1888a):
Intégration par séries des équations différentielles linéaires, *Math. Annalen* 32 (1888), p. 450-456. [IV.1], [IV.2]
- Пеано (G. Peano 1890):
Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane, *Math. Annalen* 36 (1890), p. 157-160. [IV.2]
- Пеано (G. Peano 1890b):
Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires, *Math. Annalen* 37 (1890), p. 182-228. [IV.1]
- Пеано (G. Peano 1957-1959):
Opere scelte, 3 volumes, Edizioni Cremonese, Roma 1957-1959. [IV.4]
- Перрон (O. Perron 1913):
Die Lehre von den Kettenbrüchen, Teubner Leipzig und Berlin, 520 pp., many later editions. [I.6]
- Пикар (E. Picard 1890):
Traité d'Analyse, tome I, Gauthier-Villars, Paris 1890, 2ème édition 1901. [III.9]
- Прингсгейм (A. Pringsheim 1893):
Zur Theorie der Taylor'schen Reihe und der analytischen Functionen mit beschränktem Existenzbereich, *Math. Annalen* 42 (1893), p. 153-184. [III.7]

- Прингсгейм (A. Pringsheim 1899):
Grundlagen der allgemeinen Funktionenlehre, in: *Encyclopädie der math. Wiss.* **П.1.1**, (1899), p. 1-53. [III.3], [III.4]
- Птолемей (Cl. Ptolemy ~ 150):
μεγάλη σύνταξις (= *Great Collection = Almagest = Αλμειγίστη*), latin translation G. Peurbach & Regiomontanus (*Epitoma almagesti per Magistrum Georgium de Peurbach et eius Discipulum Magistrum Jo. de Königsberg ...*), completed 1462, printed 1496. [Имеется перевод: Птолемей Клавдий. Альмагест или математическое сочинение в тринадцати книгах. — М.: Наука. Физматлит, 1998.] [I.4]
- Рам, де (G. de Rham 1957):
Sur un exemple de fonction continue sans dérivée, *L'Enseignement Mathématique* **3**, (1957), p. 71-72; *Oeuvres*, p. 714-715. [III.9]
- Региомонтан (J. Regiomontanus = Johannes Müller from Königsberg 1464):
De triangulis omnimodis libri quinque, written 1464, printed 1533. [I.4]
- Риккати (J. Riccati 1712):
Soluzione generale del Problema inverso intorno à raggi osculatori, ..., determinar la curva, a cui convenga una tal'espressione, *Giornale de' Letterati d'Italia*, **11** (1712), p. 204-220. [II.7]
- Риман (B. Riemann 1854):
Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe, *Habilitation thesis*, Göttingen, 1854, *Werke*, p. 227-271. [Имеется перевод: Риман Б. Сочинения. — М.-Л.: Гостехиздат, 1948. — О возможности представления функции посредством тригонометрического ряда, с. 225-261.] [III.2], [III.5]
- Ричерт (N. Richert 1992):
Strang's strange figures, *Amer. Math. Monthly* **99**, Nr. 2, p. 101-107. [I.4]
- Роберт из Честера (Robert of Chester 1145):
Liber algebre et almucabolaе de questionibus arithmetiсis et geometricis, first latin translation of Al-Khowārizmī's *Al-jabr*, new critical edition: B.B. Hughes, Steiner Verlag Wiesbaden, Stuttgart, 1989. [I.1]
- Розен (F. Rosen 1831):
The Algebra of Mohammed ben Musa, Edited and translated by Frederic Rosen, London 1831, reprinted Georg Olms Verlag, 1986. [I.1]
- Роль (M. Rolle 1690):
Traité d'Algebre, ou principes généraux pour résoudre les questions de Mathematique, *Livre second*, Chap. VI, p. 124f. (1690). [III.6]
- Серпиньский (W. Sierpiński 1915):
Sur une courbe dont tout point est un point de ramification, published in *Prace Mat.-Fiz.* **27** (1916), p. 77-86; French summary: *C.R.* **160** (1915), p. 302-305; French transl. *Oeuvres choisies*, vol. II, p. 99-106. [IV.1]
- Серпиньский (W. Sierpiński 1916):
Sur une courbe cantorienne qui contient une image biunivoque et continue de toute courbe donnée, French summary: *C.R.* **162** (1916), p. 629-632. French transl. *Oeuvres choisies*, vol. II, p. 107-119. [Имеется оригинал: Серпиньский В.К. О кривой, содержащей в себе образ всякой кривой. Математический сборник, 1916, т. 30, вып. 2, с. 267-287. — М.: Изд. Моск. матем. общ-ва.] [IV.1]
- Серре (J.A. Serret 1868):
Cours de calcul différentiel et intégral, Paris, 1868 (see in particular p.17-19), German transl. Teubner, 1884. [Имеется перевод: Серре И.А. Курс дифференциального и интегрального исчисления. — СПб: Типография Товарищества М.О. Вольф, 1903.] [III.6], [IV.4]
- Симпсон (T. Simpson 1743):
Math. dissertations on a variety of physical and analytical subjects ..., London, 1743. [II.6]
- Стеклов (V. Steklov 1918):
Remarques sur les quadratures, *Bull. de l'Acad. des Sciences de Russie* (6), vol. 12, (1918), p. 99-118 (Петроград, Изв. Акад. наук, серия 6, 1918, т. 12, с. 99-118). [II.6]
- Стирлинг (J. Stirling 1730):
Methodus differentialis: sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum, Londini, MDCCXXX. [II.10]

- Стройк (D.J. Struik 1969):
A source book in mathematics 1200-1800, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1969. [Имеется перевод: Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики, изд. 5-е, испр. — М.: Наука, Физматлит, 1990.] [II.1], [II.2], [III.2]
- Стрэнг (G. Strang 1976):
Linear algebra and its applications, Academic Press, New York, 1976, 374 pp. [Имеется перевод: Стрэнг Г. Линейная алгебра и ее применения. — М.: Мир, 1980.] [IV.5]
- Стрэнг (G. Strang 1991):
Calculus, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, Mass., 1991. [I.4]
- Такаги (T. Takagi 1903):
A simple example of the continuous function without derivative, Tokio math. soc. 1 (1903), p. 176-177. [III.9]
- Тейлор (B. Taylor 1715):
Methodus incrementorum directa & inversa, Auctore Brook Taylor, LL.D. & Regiæ Societatis Secretario, Londini, MDCCXV. [II.2]
- Толл (D. Tall 1982):
The blancmange function, continuous everywhere but differentiable nowhere, Math. Gazette 66, Nr. 435 (1982), p. 11-22. [III.9]
- Уэстфол (R.S. Westfall 1980):
Never at rest; a biography of Isaac Newton, Cambridge Univ. Press, 908 pp. [I.4]
- Фельман (E.A. Fellmann 1983):
Leonhard Euler, ein Essay über Leben und Werk, in: *Leonhard Euler 1707-1783*, Gedenkband des Kantons Basel-Stadt, Birkhäuser Verlag Basel, 1983. [II.10]
- Ферма (P. Fermat 1636):
De Aequationum localium transmutatione et emendatione ad multimodam curvilinearum inter se vel cum rectilineis comparationem, cui annectitur proportionis geometricae in quadrandis infinitis parabolis et hyperbolis usus, *Oeuvres*, vol. 1, p. 255-288; french transl. *Oeuvres*, vol. 3, p. 216. [I.3]
- Ферма (P. Fermat 1638):
Methodus ad disquirendam maximam et minimam, *Oeuvres* vol. 1, p. 133-179; french translation *Oeuvres*, vol. 3, p. 121-156. [Имеется перевод: Декарт Р. Геометрия: с приложением избранных работ П. Ферма и переписки Декарта. — М.-Л.: ОНТИ, 1938. — Ферма П. Метод отыскания наибольших и наименьших значений, с. 154-157.] [II.2]
- Ферма (P. Fermat 1891, 1894, 1896):
Oeuvres, 3 volumes, Gauthier-Villars Paris.
- Ферхюльст (P.F. Verhulst 1845):
Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population, *Nouv. Mem. Acad. Roy. Bruxelles*, 18 (1845), p. 3-38. [II.7]
- Фонсене, де (D. de Foncenex 1759):
Reflexions sur les quantités imaginaires, *Miscellanea Phil.-Math. Soc. Taurinensis*, 1 Torino, 1759, p. 113-146. [I.4]
- Френель (A. Fresnel 1818):
Mémoire sur la diffraction de la lumière, *Mém. Acad. sc.* 5, Paris, 1818, p. 339. [II.6]
- Френель (A. Fresnel 1818):
Mémoire sur la diffraction de la lumière, *Mém. Acad. sc.* 5, Paris, 1818, p. 339. [II.6]
- Фреше (M. Fréchet 1906):
Sur quelques points du calcul fonctionnel, *Palermo Rend.* 22, p. 1-74, Thèse Paris, 1906. [IV.1], [IV.3]
- Фурье (J.B.J. Fourier 1822):
La théorie analytique de la chaleur, Paris, 1822; a manuscript of 1807 entitled *Sur la propagation de la chaleur* was not published due to objections of Lagrange. [II.4]
- Хайрер, Нёрсетт, Ваннер (E. Hairer, S.P. Nørsett, G. Wanner 1993):
Solving ordinary differential equations I. Nonstiff problems, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1987, Second edition 1993, 528 pp. [Имеется перевод: Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. — М.: Мир, 1990.] [II.9]
- Халмош (P.R. Halmos 1958):
Finite-dimensional vector spaces, Second edition, Van Nostrand, 1958, Springer

- УТМ, 1974, 200 pp. [Имеется перевод: Халмош П. Конечномерные векторные пространства. — М.: Физматгиз, 1963.] [IV.4]
- Хаусдорф (F. Hausdorff 1914):
Grundzüge der Mengenlehre, dem Schöpfer der Mengenlehre HERRN GEORG CANTOR in dankbarer Verehrung gewidmet, Leipzig, 1914; English translation: Chelsea, 1957. [Имеется перевод: Хаусдорф Ф. Теория множеств, изд. 2-е, испр. — М.: УРСС, 2004.] [IV.1], [IV.2]
- Хаяси (T. Hayashi. 1902):
The values of π used by the Japanese mathematicians of the 17th and 18th centuries, Bibliotheca mathematica, ser. 3, **3** (1902), p. 273-275. [I.6]
- Хорезми, аль- (Al-Khowârizmî 830):
Al-jabr w'al muqâbala, see: Robert of Chester (1145) and F. Rosen (1831). [Имеется перевод: Хорезми Мухаммад аль-. Математические трактаты. — Ташкент: Наука, 1964. — Об исчислении алгебры и альмукабалы, с. 25–93.] [I.1]
- Цейлен, ван (L. van Ceulen 1596, 1616):
Van de Circkel, daarin geleert wird te vinden de naeste proportie des Circkels diameter tegen synen Omloop, Delft. [I.4]
- Шварц (H.A. Schwarz 1873):
Ueber ein vollständiges System von einander unabhängiger Voraussetzungen zum Beweise des Satzes $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right)$, Verhandlungen der Schweizerischen Naturf. Ges. (1873), p. 259-270; *Werke* **2**, p. 275-284. [IV.4]
- Шварц (H.A. Schwarz 1885):
Ueber ein die Flächen kleinsten Flächeninhaltes betreffendes Problem der Variationsrechnung, Acta soc. scient. Fenn. **15** (1885), p. 315-362; *Werke* **1**, p. 223-269. [III.5]
- Шенкс и Ренч (D. Shanks & J.W. Wrench Jr. 1962):
Calculation of π to 100000 decimals, Math. Comp. **16** (1962), p. 76-99. [I.4]
- Шпицс (O. Spiess 1929):
Leonhard Euler, Ein Beitrag zur Geistesgeschichte des XVIII. Jahrhunderts, Verlag von Huber, Frauenfeld, Leipzig, 1929. [II.8], [II.10]
- Штифель (M. Stifel 1544):
Arithmetica integra, Nürnberg, 1544. [I.2], [I.3]
- Штольц (O. Stolz 1879):
Ueber die Grenzwerte der Quotienten, Math. Ann. **14** (1879), p. 231-240.
- Штольц (O. Stolz 1881):
B. Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung, Math. Ann. **18** (1881), p. 255-279. [III.1]
- Штольц (O. Stolz 1886):
Die gleichmässige Convergenz von Functionen mehrerer Veränderlichen zu den dadurch sich ergebenden Grenzwerten, dass einige derselben constanten Werthen sich nähern, Math. Ann. **26** (1886), p. 83-96. [IV.5]
- Штольц (O. Stolz 1887):
Bemerkungen zur Theorie der Functionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen, Innsbrucker Berichte; see also O. Stolz, *Grundzüge der Differential- und Integralrechnung*, Teubner Leipzig, 1893. [IV.3]
- Эйлер (L. Euler 1734):
Additamentum ad dissertationem de infinitis curvis eiusdem generis, Comm. acad. scient. Petrop. **7** (1734/5), 1740, p. 184-200; *Opera* **22**, p. 57-75. [III.3]
- Эйлер (L. Euler 1736):
Methodus universalis series summamdi ulterius promota, Comm. acad. scient. Petrop., vol. **8**, p. 147-158; *Opera Omnia*, vol. XXIV, p. 124-137. [II.10]
- Эйлер (L. Euler 1736b):
Mechanica, sive motus scientia analytice exposita: instar supplementi ad commentar, Acad. scient. Petrop. 1736; *Opera Omnia*, Ser. 2, vol. I-II. [I.2] [III.0]
- Эйлер (L. Euler 1737):
De variis modis circuli quadraturam numeris proxime exprimendi, Comm. acad. scient. Petrop. **9** (1737), p. 222-236; *Opera* **14**, p. 245-259. [I.4]
- Эйлер (L. Euler 1737b):
De fractionibus continuis dissertatio, Comm. acad. sc. Petrop. **9** (1737), p. 98-137; *Opera* **14**, p. 187-215. [Имеется перевод: Эйлер Л. Введение в анализ бесконеч-

- ных, т. 1 (изд. 2-е). — М.: Физматгиз, 1961. — О непрерывных дробях, с. 269–286.] [I.6]
- Эйлер (L. Euler 1740):
De summis serierum reciprocarum, Comm. ac. sc. Petrop. 7 (1734/5), 1740, p. 123-134; *Opera* 14, p. 73-86. [I.5]
- Эйлер (L. Euler 1743):
De summis serierum reciprocarum ex potestatibus numerorum naturalium ortarum dissertatio altera in qua eadem summationes ex fonte maxime diverso derivantur, Miscellanea Berolinensia 7 (1743), p. 172-192; *Opera* 14, p. 138-155. [I.5]
- Эйлер (L. Euler 1743b):
De integratione aequationum differentialium altiorum graduum, Miscellanea Berolinensia, vol. 7, p. 193-242; *Opera Omnia*, vol. XXII, p. 108-149. See also: Letter from Euler to Joh. Bernoulli, 15. Sept. 1739. [II.8]
- Эйлер (L. Euler 1744):
Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti, Lausannae & Genevae, *Opera Omnia* (intr. by Sarathéodory), vol. XXIV, p. 1-308. [Имеется перевод: Эйлер Л. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойством максимума или минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле. — М.: ГТТИ, 1934] [III.0]
- Эйлер (L. Euler 1748):
Introductio in analysin infinitorum, Tomus primus, Lausannae MDCCXLVIII, *Opera* 8. French transl. 1785, 1796; German transl. 1788, 1885 (reprinted Springer 1983); English transl. Blanton (1988). [Имеется перевод: Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных, т. 1-2. — М.: Физматгиз, 1961.] [I.0], [I.2], [I.3], [I.4], [I.5], [I.6], [III.0], [III.3]
- Эйлер (L. Euler 1750):
Animadversiones in rectificationem ellipsis, Opuscula varii argumenti 2 (1750), p. 121-166; *Opera* 20, p. 21-55. [II.6]
- Эйлер (L. Euler 1750b):
Methodus aequationes differentiales altiorum graduum integrandi ulterius promota, Novi Comment. acad. scient. Petrop., vol. 3, p. 3-35; *Opera Omnia*, vol. XXII, p. 181-213. [II.8]
- Эйлер (L. Euler 1751):
De la controverse entre Mrs. Leibniz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires, Mém. ac. sc. Berlin 5 (1751), p. 139-179; *Opera* 17, p. 195-232. [I.5]
- Эйлер (L. Euler 1755):
Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum, Imp. Acad. Imper. Scient. Petropolitanae, *Opera* 10. [Имеется перевод: Эйлер Л. Дифференциальное исчисление. — М.-Л.: Гостехиздат, 1949.] [I.2], [I.5], [II.1], [II.2], [II.10], [III.0], [III.8], [IV.4]
- Эйлер (L. Euler 1755b):
Principes généraux du mouvement des fluides, Mém. ac. sc. Berlin 11 (1755), p. 274-315; *Opera Ser. II*, 12, p. 54-91. [Имеется перевод: Эйлер Л. Общие законы движения жидкостей. Известия РАН. Механика жидкости и газа. 1999, 6, с. 26-54.] [III.0]
- Эйлер (L. Euler 1768):
Institutiones Calculi Integralis, Volumen Primum, *Opera* 11. [Имеется перевод: Эйлер Л. Интегральное исчисление, т. 1. — М.: Гостехиздат, 1956.] [II.4], [III.5], [II.9], [III.0], [III.7]
- Эйлер (L. Euler 1769):
Institutiones Calculi Integralis, Volumen Secundum, *Opera* 12. [Имеется перевод: Эйлер Л. Интегральное исчисление, т. 2. — М.: Гостехиздат, 1957.] [II.8], [III.0]
- Эйлер (L. Euler 1769b):
De formulis integralibus duplicatis, Novi comm. acad. scient. Petrop. 14 (1769): I, 1770, p. 72-103; *Opera* 17, p. 289-315. [IV.5]
- Эйлер (L. Euler 1770):
Vollständige Anleitung zur Algebra, von Hrn. L. Euler, St. Petersburg. gedruckt bey der Kays. Acad. der Wissenschaften, 1770; *Opera* 1. [I.1], [III.0]

- Эйлер (L. Euler 1911-):
Opera Omnia, more than 80 volumes in 4 series, series I contains the mathematical works, Teubner Leipzig und Berlin, later Füssli, Zürich. [I.1], [III.0], [III.8]
- Эрмит (Ch. Hermite 1873):
Cours d'Analyse de l'École Polytechnique, Paris, Gauthier-Villars, 1873; *Oeuvres* **3**, p. 35-54. [Имеется перевод: Эрмит Ш. Курс анализа. — Л.-М.: ОНТИ, 1936.] [II.5]
- Якоби (C.G.J. Jacobi 1827):
De singulari quadam duplicis integralis transformatione, *J. Reine und Angew. Math. (Crelle)* **2** (1827), p. 234-242; *Werke* **3**, p. 57-66. [II.3]
- Якоби (C.G.J. Jacobi 1834):
De usu legitimo formulae summatoriae Maclaurinianaе, *J. Reine und Angew. Math. (Crelle)* **12** (1834), p. 263-272; *Werke* **6**, p. 64-75. [II.10]
- Якоби (C.G.J. Jacobi 1841):
De determinantibus functionalibus, *J. Reine und Ang. Math. (Crelle)* **22** (1841), p. 319-359; *Werke* **3**, p. 393-438. [IV.3], [IV.5]
- Якоби (C.G.J. Jacobi 1881-1891):
Gesammelte Werke, 8 volumes, ed. by C.W. Borchardt, Berlin, 1881-1891, new edition Chelsea New York, 1969. [I.1], [IV.5]

Указатель обозначений

\circ	
\overline{A}	множество внутренних точек A 285
\overline{A}	замыкание A 285
$a_0 + a_1 + a_2 + \dots$	бесконечный ряд 188
(a, b)	открытый интервал 202
$[a, b]$	замкнутый интервал (отрезок) 202
$a + ib$	комплексное число 57
$\arccos x$	функция арккосинус 49
$\arcsin x$	функция арксинус 49
$\operatorname{arctg} x$	функция арктангенс 49
$\operatorname{arch} x$	функция, обратная гиперболическому косинусу 56
$\operatorname{arsh} x$	функция, обратная гиперболическому синусу 56
$B(\alpha, \beta)$	бета-функция 347
$B_\varepsilon(a)$	круг (или шар) радиуса ε с центром a 278
B_k	число Бернулли 161
$B_k(x)$	полином Бернулли 163
$\cos x$	функция косинус 41
$\operatorname{ch} x$	функция гиперболический косинус 56
$\operatorname{ctg} x$	функция котангенс 41
D	разбиение интервала 221
\det	определитель 340
dx, dy	бесконечно малые величины 82
$d(x, y)$	расстояние между x и y 273
dy/dx	производная от y 82
e	число Эйлера 26
e^x	показательная функция 27
$\exp x$	показательная функция 27
$f(U)$	образ множества U 294
$f^{-1}(V)$	прообраз множества V 294
$f'(x)$	производная функции $f(x)$ 84
$f''(x)$	вторая производная от $f(x)$ 91
$f^{(k)}(x)$	k -я производная от $f(x)$ 94
$\operatorname{grad} f$	градиент f 305
$\inf X$	наибольшая нижняя граница (точная нижняя грань) 184
$\mathcal{L}(y)$	дифференциальный оператор 144
$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$	предел последовательности 173
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	предел функции 209
$\liminf_{n \rightarrow \infty} s_n$	наименьшая точка накопления, или нижний предел 185
$\limsup_{n \rightarrow \infty} s_n$	наибольшая точка накопления, или верхний предел 185
$\ln x$	натуральный логарифм (<i>logarithmus naturalis</i>) 35
$\log_a x$	логарифм по основанию a 30
$n!$	факториал n 20
$\binom{n}{j}$	биномиальные коэффициенты 20
\mathbb{Q}	множество рациональных чисел 178

\mathbb{R}^n	множество всех n -мерных векторов	273
$ s $	абсолютная величина действительного числа	180
$s(D)$	нижняя сумма Дарбу	222
$S(D)$	верхняя сумма Дарбу	222
$\sin x$	функция синус	41
$\operatorname{sh} x$	функция синус гиперболический	56
$\{s_n\}$	(бесконечная) последовательность	172
$\sup X$	наименьшая верхняя граница (точная верхняя грань)	182
$\operatorname{tg} x$	функция тангенс	41
$\operatorname{th} x$	функция гиперболический тангенс	78
$x \in A$	x является элементом множества A	204
(x_1, \dots, x_n)	вектор (n -мерный)	273
y'	производная y	84
y''	вторая производная y	91
$\Delta y_0, \Delta^2 y_0, \dots$	конечные разности	12
$\varphi_n(x)$	последовательность Дирака	266
$\Phi(x)$	интеграл ошибок	133
γ	постоянная Эйлера	168
$\Gamma(\alpha)$	гамма-функция Эйлера	261
κ	кривизна	102
$\mu(I)$	мера прямоугольника I	330
π	длина единичной полуокружности	40
ρ	радиус сходимости	248
∂A	граница множества A	336
$\partial f / \partial x_1$	частная производная	300
∇f	градиент f (набла)	305
$\ A\ _2$	норма матрицы	294
$\ z\ _1$	ℓ_1 -норма z	275
$\ z\ _2$	евклидова норма z	274
$\ z\ _p$	ℓ_p -норма z	275
$\ z\ _\infty$	максимум-норма z	275
$\sum_{i=0}^{\infty} a_i, \sum_{i \geq 0} a_i$	бесконечный ряд	188
$\int f(x) dx$	первообразная $f(x)$ или неопределенный интеграл	108
$\int_a^b f(x) dx$	интеграл $f(x)$	108
$\int_I f(x, y) d(x, y)$	двойной интеграл	331
$A \subset B$	A является подмножеством B	278
$A \cap B$	пересечение множеств A и B	278
$A \cup B$	объединение множеств A и B	278
$A \setminus B$	разность множеств	278
$\complement A$	дополнение множества A	278
\forall	квантор "для всех"	172
\exists	квантор "существует"	172
$<, \leq$	отношение порядка	179

Алфавитный указатель

- Абель Н.Х.** (Abel, N.H.) 126, 171, 188, 199, 213, 245, 355, 358
Абеля теорема (Abel's theorem) 250 и д.
Або А. (Aaboe, A.) 47, 358
Абсолютная величина (absolute value) 172, 180
— — комплексного числа ($\sim\sim$ of complex \sim) 59
— сходимость (\sim convergence) 192
Адамар Ж. (Hadamard, J.) 61, 250, 358
Алгебра (Algebra) 2
“Алгебра Нова” (Algebra Nova) 6 и д.
Александрия (Alexandria) 2
“Аль-джебр ва-л-мукабала” (Al-jabr w'al muqâbala) 2
Аль-Каласади (Alkalsâdi) 22
Аль-Кашш (Al-Kâshî) 48
“Альмагест” (Almagest) 40
Аль-Хорезми — см. *Хорезми*
Ампер А.-М. (Ampère, A.-M.) 263
Антисимметричность (antisymmetry) 179
Аполлоний (Apollonius) 2, 8
Архимед (Archimedes) 2, 33, 49, 52, 73, 107, 358
Арган (Argand) 58
Аргумент комплексного числа (argument of complex number) 59
Ареафункции (area functions) 56
Арима Й. (Arima, Y.) 73
Аристотель (Aristotle) 2
Арифметическая прогрессия (arithmetic progression) 34, 172
Арнольд В.И. (Arnold, V.I.) 60 и д.
“Арс Мадна” 4 и д., 57
Асимптотические разложения интегралов (asymptotic expansions of integrals) 130 и д.
Баллистические кривые (ballistic curves) 101
Барроу (Barrow) 28, 51, 358
Беркли, епископ (Berkeley (Bishop)) 83, 91
Бернулли Даниил (Bernoulli, Daniel) 134
Бернулли Иоганн (Bernoulli, Johann) 38, 60, 62 и д., 81 и д., 89, 91, 93, 97 и д., 104, 106, 116, 118 и д., 125, 132, 134 и д., 140, 142 и д., 145, 154, 163, 168, 202, 243, 351 и д., 355, 358 и д.
Бернулли Якоб (Bernoulli, Jacob) 28, 46, 82, 107, 133 и д. 140, 162, 314, 359
Бернулли многочлены (Bernoulli's polynomials) 163
— числа (\sim numbers) 14, 47, 161 и д.
Бесконечная последовательность (infinite sequence) 172
Бесконечный ряд (\sim series) 188, 245
Бета-функция (beta function) 347
Биективная функция (bijective \sim) 208
Билинейное отображение (bilinear mapping) 321
Биномальная теорема (binomial theorem) 18 и д., 23 и д., 253
Биномиальный коэффициент (\sim coefficient) 20
Бисекция (bisection) 182
“Бланманже” функция (blancmange function) 264 и д.
Блантон Дж.Д. (Blanton, J.D.) 1, 359
Бодлеевская библиотека (Bodleian Library) 2
Больцано Б. (Bolzano, B.) 84, 170, 182, 204, 206, 213, 359
Бомбелли (Bombelli) 17, 69
Бонне О. (Bonnet, O.) 240
Борель Э. (Borel, E.) 265 и д., 283, 357, 359
Брахистохрона (brachistochrone) 137 и д., 142
Брахмагупта (Brahmagupta) 40
Бриггс Г. (Briggs, H.) 22, 29 и д., 38, 359
Брунcker, лорд (Lord Brouncker) 69, 75
Бук Р.К. (Buck, R.C.) 123, 360
Буныковский В. (Bunyakovski, V.) 229, 360
Бюрги Й. (Bürgi, J.) 29, 360
Вавилон (Babylon) 22, 28, 40, 123
Валлис Дж. (Wallis, J.) 23, 66, 68 и д., 72, 79, 360
Валлиса произведение (Wallis's product) 65 и д., 167, 233 и д.

- Ван-дер-Поли Б.* (Van der Pol, B.) 159
Ваннер Г. (Wanner, G.) 134, 155, 360, 370
Варден, ван дер (Waerden, van der) 21 и д., 29, 351, 360
 Вариация постоянных (variation of constants) 150 и д.
Вейерштрасс К. (Weierstrass, K.) 84, 126, 171, 177, 184, 203 и д., 206 и д., 213, 215 и д., 218, 230, 235, 253, 263 и д., 278, 300, 302, 309, 354 и д., 360
Вейерштрасса аппроксимационная теорема (Weierstrass's approximation theorem) 265 и д.
 — критерий (\sim criterion) 216 и д.
Вейль Андре (Weil, André) 1
 Вектор (vector) 272 и д.
 Векторное пространство (\sim space) 273
 Верхний интеграл (upper integral) 223
Виет Ф. (Viète, F.) 6 и д., 10, 21, 52, 63, 67, 351, 360
Викторис Л. (Victoris, L.) 43, 351
Виртингер В. (Wirtinger, W.) 163, 360
 Внутренность множества (interior of a set) 285
 Возрастающая функция (increasing function) 91, 184, 208
 Вычисление логарифмов (computation of logarithms)
 — —, *Бриггс* ($\sim\sim$, Briggs) 31 и д.
 — —, *Грегори* ($\sim\sim$, Gregory) 36 и д.
 — —, *Ньютон* ($\sim\sim$, Newton) 39
Галллей Г. (Galilei, G.) 81, 134, 136 и д., 202, 361
Галлей Э. (Halley, E.) 52, 96, 361
Гамильтон У.Р. (Hamilton, W.R.) 272, 305, 361
 Гамма-функция (gamma function) 261 и д., 346
Гандель Г.Ф. (Handel, G.F.) 60
 Гармонический ряд (harmonic series) 167, 191
Гаусс К.Ф. (Gauss, C.F.) 54, 58 и д., 79, 170, 206, 263, 361
Гаусса интеграл (Gaussian integral) 345 и д.
Гейне Э. (Heine, E.) 79, 171, 177, 217, 219, 230, 283 и д., 290, 354 и д., 361
Гёльдер О. (Hölder, O.) 361
Гёльдера неравенство (Hölder's inequality) 275, 327
 Генеалогическое дерево фундаментальной теоремы (genealogical tree of fundamental theorem) 242
 Геометрическая последовательность (geometric sequence) 34, 172, 174
 — прогрессия, геометрический ряд (geometric series) 21, 33, 188 и д.
 Геометрия (geometry) 8
Герхард Кремона (Gerhard Cremona) 2
Гессе О. (Hesse, O.) 361
Гессиан, матрица (Hessian matrix) 325
Гиббс Дж.У. (Gibbs, J.W.) 305, 361
Гильберт Д. (Hilbert, D.) 206, 264, 278, 291, 355, 357, 361
 Гиперболические логарифмы (hyperbolic logarithms) 30
 — функции (\sim functions) 56
Гиппарх (Hipparchus) 40
Гиппий (Hippasus) 44
 Главные ветви (principal branches) 49
Голдстейн Г.Г. (Goldstine, H.H.) 10, 361
 Градиент (gradient) 305 и д.
Градштейн И.С. (Gradshteyn, I.S.) 109, 361
 Граница наибольшая нижняя (greatest lower bound) 184
 — наименьшая верхняя (least upper \sim) 182
Грассман Г. (Grassmann, H.) 271 и д., 287, 357, 361 и д.
Грёбнер В. (Gröbner, W.) 109, 362
Грегори Дж. (Gregory, J.) 37 и д., 49, 62, 107, 362
Грегори из Сент-Винсента (Gregory of St. Vincent) 35, 107
Григорий XIII, папа (Gregory (Pope G. XIII)) 78
Гурвиц А. (Hurwitz, A.) 69, 362
Гюйгенс Х. (Huyghens, C.) 52, 81, 104, 134, 136, 142, 351, 353, 362
Даламбер Ж. Лерон (Alembert, J. le Rond d') 83, 144, 170, 172, 271, 354, 362
Дарбу Г. (Darboux, G.) 221, 221 и д., 224 и д., 240, 356, 362
 — суммы (\sim sums) 221, 331
 Двойной интеграл (double integral) 330 и д., 338
 — ряд (\sim series) 195 и д.
Дебон (Debeaune, F.) 24
Дедекинд Р. (Dedekind, R.) 177, 210, 278, 354, 362
 Действительная часть (real part) 57
 Действительные числа (\sim numbers) 177 и д.
 — —, сложение и умножение ($\sim\sim$, addition and multiplication) 179
 — —, упорядочение ($\sim\sim$, order) 179
Декарт Р. (Descartes, R.) 1, 16, 57, 81, 202, 309, 324, 351, 362

- Декарта* геометрия (\sim geometry) 8 и д., 25, 38
Декартов лист (folium cartesii) 315, 324
Декартово произведение (Cartesian product) 195
Де Моргана правила (de Morgan rules) 282
 Детерминант (determinant) 340
Дженочки А. (Genocchi, A.) 309, 362
Джервер Ж. (Gerver, J.) 264, 362
Джонс У. (Jones, W.) 40, 51, 53, 362
Дини У. (Dini, U.) 233, 264, 362
Диоклес (Diocles) 90
Диофант (Diophantus) 2
Дирака последовательность (Dirac sequence) 266, 270
Дирхле Г.Л. (Dirichlet, G.L.) 1, 193, 202 и д., 218, 224, 230, 263, 330, 336, 351, 355 и д., 362 и д.
 Дифференциальное уравнение обыкновенное — см. Обыкновенное дифференциальное уравнение
 — второго порядка (second-order differential equation) 140 и д., 158
 Дифференциальный оператор (differential operator) 144, 146
 Дифференцирование логарифма (differentiation of logarithm) 86
 — обратной функции ($\sim\sim$ inverse function) 85, 238
 — показательной функции ($\sim\sim$ exponential) 86
 — произведения (product \sim) 84
 — ряда (series \sim) 27, 200, 217, 245
 — тригонометрической функции ($\sim\sim$ trigonometric functions) 86
 — частного (quotients \sim) 85
 Дифференцирования правила (\sim rules) 84 и д., 237 и д.
 Дифференцируемая функция (differentiable function) 235 и д.
 — нескольких переменных ($\sim\sim$ of several variables) 300 и д.
 Длина дуги (arc length) 111
 —, параметрическое представление ($\sim\sim$, parametric representation) 117
 Дробь непрерывная (continued fraction) 68 и д.
 — подходящая (convergent of $\sim\sim$) 71
 — элементарная (partial fraction) 119
Дюбуа-Реймон П. (Du Bois-Reymond, P.) 177, 221, 224 и д., 331, 354 и д., 363
Дюга П. (Dugas, P.) 181, 184, 354, 363
Дюрер А. (Dürer, A.) 42, 98, 363
Евклид (Euclid) 2, 8, 44, 182, 363
Евклида алгоритм (Euclidean algorithm) 68
Евклидова норма (\sim norm) 274
Жордан К. (Jordan, C.) 275, 363
 Задача (problem)
 — *Дебона* (\sim of Debeaune) 24
 — интерполяции (interpolation \sim) 10, 20
 — *Паппа* (\sim by Pappus) 8 и д.
 Замкнутое множество (closed set) 279
 Замыкание множества (closure of a set) 285
 Звено непрерывной дроби (partial quotient) 70
Зейдель Л. (Seidel, L.) 214, 363
 Золотое правило (golden rule) 30
 — сечение (\sim mean) 44, 69, 72
 Измельчение разбиения (refinement of a division) 222
Изохрона Лейбница (isochrone of Leibniz) 134 и д.
Изохронный маятник (isochronous pendulum) 141
 Индукция, метод доказательства (induction proof) 18, 351
 Интеграл (integral)
 — верхний (upper \sim) 223
 — *Гаусса* (Gaussian \sim) 345 и д.
 — двойной (double \sim) 330 и д., 338
 — зависящий от параметров (\sim with parameters) 297, 311 и д.
 — кратный (multiple \sim) 330 и д.
 — неопределенный (indefinite \sim) 108
 — несобственный (improper \sim) 257, 345
 — нижний (lower \sim) 223
 —, определение (\sim , definition) 221 и д.
 — повторный (iterated \sim) 332 и д., 337, 347 и д.
 — эллиптический (elliptic \sim) 126, 130 и д., 141
 Интегральное исчисление (integral calculus) 107 и д.
 Интегрирование (integration)
 — бесконечного ряда (\sim of infinite series) 230
 — по частям (\sim by parts) 114
 — приближенное (approximate \sim) 126 и д.
 — с помощью асимптотического разложения (\sim by asymptotic expansion) 131 и д.
 — — — подстановки (\sim by substitution) 112, 123 и д.
 — — — ряда (\sim by series) 126 и д.

- степенного ряда (\sim of power series) 251
- рациональных функций (\sim rational functions) 118
- тригонометрических функций (\sim trigonometric functions) 123 и д.
- численное (numerical \sim) 128 и д.
- Интегрируемая функция (integrable function) 223, 226 и д., 331, 336
- Интервал (interval) 202, 279
 - замкнутый (closed \sim) 202, 279
- Интерполяция (interpolation) 10 и д., 20
 - логарифмов (\sim of logarithms) 31 и д.
 - многочлена (\sim polynomial) 10 и д., 20
- Инфимум (infimum) 184
- Инъективное отображение (injective mapping) 208

- Кавальери В.* (Cavalieri, В.) 33
- Кантор Г.* (Cantor, G.) 171, 177, 206, 215 и д., 278 и д., 291, 354, 357, 363 и д.
- Кантор М.* (Cantor, M.) 4, 49, 351, 364
- Кантора множество* (Cantor set) 280, 282
- Каратеодори К.* (Carathéodory, С.) 236, 238, 303, 364
- Кардано Дж.* (Cardano, G.) 4 и д., 18, 57, 67, 364
- Касательная (tangent) 82 и д.
 - плоскость (\sim plane) 300
- Кассини овалы* (Cassinian ovals) 314
- Катеноида* (catenary) 136 и д.
- Каунцнер В.* (Kaunzner, W.) 48, 364
- Каустика (caustic) 99 и д.
- Кеплер И.* (Kepler, J.) 49 и д., 81, 107, 110, 364
- Клайн М.* (Kline, M.) 23, 35, 58, 61, 248, 271, 364
- Клейн Ф.* (Klein, F.) 84, 94, 240, 302, 357, 364
- Клиз Дж. и Ч. Бут* (Cleese, J. & С. Booth) 40
- Кнопн К.* (Knopp, К.) 188, 364
- Кнут Д.* (Knuth, D.) 168, 364
- Колеблящая струна (vibrating string) 272
- Коллатц Л.* (Collatz, L.) 154, 353
- Коллинз* (Collins) 35, 51, 351
- Компактное множество (compact set) 283
- Комплексная плоскость (complex plane) 57 и д.
- Комплексное число (\sim number) 57
- Комплексные операции (\sim operations) 58
- Конхоида *Никомеда* (conchoid of Nicomedes) 88
- Корень (root) 3, 21
 - из комплексного числа (\sim of complex number) 60
 - из единицы (\sim of unity) 63
 - квадратный (square \sim) 21
 - —, $\sqrt{2}$ 21 и д., 28, 69, 72, 177
 - —, $\sqrt{3}$ 177
 - кратный (multiple root) 146
- Косинус (cosine function) 41 и д., 59, 62
 - , ряд (\sim series) 46
 - гиперболический (hyperbolic \sim) 56
- Котангенс (cotangent function) 41
- Кох Г., фон* (Koch, H. von) 264, 335, 348, 364
- Коши О.Л.* (Cauchy, A.L.) 84, 105, 116, 131, 158, 163, 170 и д., 176 и д., 188 и д., 194, 197 и д., 204, 213, 221 и д., 229 и д., 235, 242, 249, 252, 255, 263, 289, 316, 319, 354 и д., 364 и д.
 - критерий сходимости (Cauchy's criterion for convergence) 176, 210, 215
 - последовательность (Cauchy sequence) 176, 181, 277
 - произведение рядов (\sim product of series) 197 и д., 200 и д.
 - уравнение (Cauchy's equation) 145, 152 и д.
- Коши—Шварца неравенство* (Cauchy-Schwarz inequality) 229, 274
- Кратные корни (multiple roots) 146
- Кривая Пеано—Гильберта* (curve of Peano-Hilbert) 291 и д., 335
 - *фон Коха* (von Koch's \sim) 335, 348
- Кривизна (curvature) 101 и д.
- Кривизны окружность (circle of \sim) 101 и д.
 - центр (center of \sim) 101
- Критерий корня (root test) 194
 - *Лейбница* (Leibniz's criterion) 189, 258
 - частных (ratio test) 194
- Круг (disc) 278 и д.
- Кун С.* (Kuhn, S.) 238, 365

- Лагранж Ж.Л.* (Lagrange, J.L. de) 2, 4, 68, 83, 92, 150, 170, 206, 218, 240, 252, 254, 256, 308, 318, 323, 325, 338, 345, 351 и д., 355 и д., 365
- Лагранжа множитель* (\sim multiplier) 325 и д.
- Ламберт И.Г.* (Lambert, J.H.) 44, 55, 69 и д., 76 и д., 79, 126, 352 и д., 365
- Ландау Э.* (Landau, E.) 177 и д., 266, 354, 365
- Ланьи Ф., де* (Lagny, F. de) 40, 53
- Лаплас П.С.* (Laplace, P.S.) 131, 133, 365
- Лебег А.* (Lebesgue, H.) 221, 230, 266

- Лежандр А.М.* (Legendre, A.M.) 70, 77, 79, 126, 366
Лейбниц Г.В. (Leibniz, G.W.) 46, 49 и д., 52 и д., 60, 75, 80, 82 и д., 89 и д., 93, 97 и д., 107 и д., 110, 119, 133 и д., 188 и д., 202, 271, 307, 309, 351, 353, 366 и д.
Лемер Д.Г. (Lehmer, D.H.) 165, 169, 367
 Лемниската (lemniscate) 314
Леонардо да Винчи (Leonardo da Vinci) 141
Леонардо Пизанский (Leonardo da Pisa) 2, 73
Лерх М. (Lerch, M.) 256, 266, 367
 Линейное дифференциальное уравнение (linear differential equation) 144
 — — — с постоянными коэффициентами (~~~ with constant coefficients) 145 и д.
 — — —, вариация постоянных (~~~, variation of constants) 150 и д.
 Линейное отображение (~ mapping) 293 и д.
 Линия уровня (level curve) 306
Лиувилль Ж. (Liouville, J.) 126, 154, 353, 367
 Логарифм (logarithm) 29 и д., 78, 95
 — *Бриггса* (Briggs's ~) 30 и д.
 —, вычисление (computation of ~) 31 и д.
 — гиперболический (hyperbolic ~) 30
 —, дифференцирование (~, differentiation) 86
 — комплексный (complex ~) 61
 — натуральный (natural ~) 30, 35 и д.
 — *Непера* (Napierian ~) 30
 —, $\ln 2$ 36 и д., 38 и д., 75, 190, 192, 252
 Логистический рост (logistic growth) 143
Лохс Г. (Lochs, G.) 69, 367
Лопиталь, де, маркиз (L'Hospital, Marquis de) 80, 82 и д., 98, 106, 137, 242, 352 и д., 356, 367
Лопиталь правила (L'Hospital's rules) 242 и д.
Люрот И. (Lüroth, J.) 219, 367
 Мажорирование ряда (majorizing of a series) 191 и д.
Маккин Дж. (Machin, J.) 52 и д., 62
Маклорен К. (Maclaurin, C.) 6, 83, 95, 160, 259, 367
 Максимум (maximum) 92 и д., 206 и д., 289, 306, 323 и д.
 — условный (conditional ~) 325 и д.
 Максимум-норма (~ norm) 275
 Матрица (matrix) 293
 Маятник (pendulum) 141 и д., 157 и д., 307
 — изохронный (isochronous ~) 142
Мейнардус Г. (Meinardus, G.) 266, 367
Мере Ш. (Méray, Ch.) 171, 177, 180, 354, 367
Меркатор Н. (Mercator, N.) 35 и д., 51, 126, 351, 367
Мерседес (Mercedes) 60
Мертенс Ф. (Mertens, F.) 199, 201, 367
Метиус А. (Metius, A.) 52, 73
 Метод рядов Тейлора для дифференциальных уравнений (Taylor series method for differential equations) 156 и д.
Миел Г. (Miel, G.) 54, 367
 Минимум (minimum) 92 и д., 306, 323 и д.
 — условный (conditional ~) 325 и д.
 Минорирование ряда (minorizing of a series) 191 и д.
 Минута (minute) 40
Миттаг-Леффлер Г. (Mittag-Leffler, G.) 184, 266, 355
 Мнимая часть (imaginary part) 57
 Множество (set)
 — замкнутое (closed ~) 279
 — компактное (compact ~) 283
 — меры нуль (null ~) 33 и д.
 — открытое (open ~) 278
 Момент инерции (moment of inertia) 338, 344
 Монотонная последовательность (monotone sequence) 182
 — функция (monotone function) 208
Муавр А., де (Moivre, A. de) 44, 62, 367
 Набла (nabla operator) 305
 Наибольшая нижняя граница (greatest lower bound) 184
 Наименьшая верхняя граница (least upper bound) 182
 Наискорейший спуск (steepest descent) 306
 Наклон линии (slope of line) 81 и д.
 Невозрастающая функция (nonincreasing function) 208
Непер Дж. (Napier, J.) 29, 367
 Непрерывная дробь (continued fraction) 68 и д.
 — —, иррациональность (~~, irrationality) 68, 76
 — — как бесконечный ряд (~~ as infinite series) 73 и д.
 — — регулярная (regular ~) 70, 74
 — —, сходимость (convergence of ~) 190
 — функция (~ function) 204
 — — нескольких переменных (~~ of several variables) 287 и д.
 Неравенство (inequality)

- *Бернулли* (Bernoulli's \sim) 28
- *Гёльдера* (Hölder's \sim) 275, 327
- для интегралов (\sim of integrals) 228 и д.
- *Коши—Шварца* (Cauchy-Schwarz \sim) 229, 274
- треугольника (triangle \sim) 180, 185, 251, 274, 285, 327
- Нёрсетт С.П.* (Nørsett, S.P.) 155, 370
- Неубывающая функция (nondecreasing function) 208
- Неявное дифференцирование (implicit differentiation) 89, 311
- уравнение (\sim equation) 88
- Нивентейт В.* (Niventijt, B.) 83
- Никомед* (Nicomedes) 88
- Норма (norm) 274 и д.
- *евклидова* (Euclidean \sim) 274
- ℓ_p (ℓ_p -norm) 275
- матрицы (matrix \sim) 293 и д.
- Ньютон И.* (Newton, I.) 16, 17, 39, 46, 51, 54 и д., 81 и д., 91, 101 и д., 107 и д., 111, 126, 130, 188, 202, 367 и д.
- Ньютона* биномиальная теорема (Newton's binomial theorem) 23 и д.
- вычисление логарифмов (\sim computation of logarithms) 39
- интерполяция (\sim interpolation) 10 и д.
- метод решения уравнений (\sim method for equations) 96
- тождества (\sim identities) 66
- Ньютона—Котеса* методы (Newton-Cotes methods) 130

- Образ множества (direct image of a set) 294 и д.
- Обратное отображение множества (inverse image of a set) 294 и д.
- Обратные тригонометрические функции (inverse trigonometric functions) 49 и д.
- — —, дифференцирование ($\sim\sim$, differentiation) 87
- Общий член бесконечной последовательности (general term of infinite sequence) 172
- Объем (volume)
 - как интеграл (\sim by integration) 110
 - шара (\sim of ball) 349
- Обыкновенное дифференциальное уравнение (ordinary differential equation) 134
 - — — *Бернулли* (Bernoulli's $\sim\sim$) 140
 - — —, вариация постоянных ($\sim\sim$, variation of constants) 150 и д.
 - — — второго порядка ($\sim\sim$ of second order) 140 и д., 158
 - — — линейное неоднородное (linear inhomogeneous $\sim\sim$) 139, 144 и д., 148 и д.
 - — — линейное однородное (linear homogeneous $\sim\sim$) 139, 144 и д.
 - — —, разделение переменных ($\sim\sim$, separation of variables) 139
 - — —, ряд *Тейлора* ($\sim\sim$, Taylor series) 156 и д.
 - — — с постоянными коэффициентами ($\sim\sim$ with constant coefficients) 145 и д.
 - — —, численное интегрирование ($\sim\sim$, numerical integration) 154 и д.
- Огибающая (envelope) 98 и д.
- Ограниченная последовательность (bounded sequence) 174, 277
- Окрестность (neighborhood) 278 и д.
- Омар Хайям* (Omar Alkhaijâmâ) 18
- Определитель (determinant) 340
- Орем Н.* (Oresme, N.) 191
- Основная формула интегрального исчисления 241
- Остаточный член формулы *Тейлора* (remainder of Taylor's formula) 116, 319, 321 и д.
- — — *Эйлера—Маклорена* (\sim of Euler-Maclaurin \sim) 163 и д.
- Открытое множество (open set) 278
- покрытие (\sim covering) 283
- Открытый интервал (\sim interval) 202, 279
- Отношение порядка (order relation) 179
- Отображение (mapping)
 - билинейное (bilinear \sim) 321
 - линейное (linear \sim) 293
 - полилинейное (multilinear \sim) 321
- Отрицание (negation) 180
- Отрицательно определенный (negative definite) 325
- Отрицательные показатели (\sim exponents) 17, 20

- Панн* (Pappus) 8
- Параметрическое представление (parametric representation) 88 и д.
- — кривизны ($\sim\sim$ of curvature) 103
- Пармантье М.* (Parmentier, M.) 81, 352, 368
- Паскаль Б.* (Pascal, B.) 12, 18 и д., 351, 368
- Паскаля* треугольник (Pascal's triangle) 18, 45
- Паскуале Л., ди* (Pasquale, L. di) 4, 368
- Пеано Дж.* (Peano, G.) 272 и д., 275, 289, 291 и д., 293, 309, 316, 328 и д., 357, 362, 368
- Пеано* кривая (Peano's curve) 298

- Первообразная (primitive) 107 и д., 239
 Перестановка суммирования ряда и предельного перехода (exchange of series and limits) 199 и д.
 — членов ряда (rearrangement of a series) 192 и д.
 Периметр эллипса (perimeter of ellipse) 127
 Периферия (periphery) 40
Перро К. (Perrault, C.) 135
Перрон О. (Perron, O.) 79, 368
 Петергоф (Peterhof) 101
 Пи, число (π) 40 и д., 52 и д., 59, 68 и д., 72, 75 и д., 190
Пикар Э. (Picard, E.) 266, 368
Пифагор (Pythagoras) 111, 123
Платон (Plato) 2
 Площадь (area)
 — как интеграл (\sim by integration) 109 и д.
 — — функция (\sim as function) 56
 — под гиперболой (\sim of hyperbola) 35 и д.
 — — полиномиальной функцией (\sim of polynomial functions) 33 и д.
 Подпоследовательность (subsequence) 184
 Подходящая дробь (convergent of continued fraction) 71
Поурбах Г. (Peurbach, G.) 369
 Показательная функция (exponential function) 24 и д., 39, 59, 78, 117
 — — комплексная (complex \sim) 60
 Полином (polynomial) 10
 —, интерполяция (interpolation of \sim) 10 и д., 94
 Полное упорядочение (total order) 179
 Положительно определенный (positive definite) 325
 Полярные координаты (polar coordinates) 59, 339
 Последовательность (sequence) 172
 — векторов (vector \sim) 275
 — монотонная (monotone \sim) 182
 — ограниченная (bounded \sim) 174, 277
 — функций (\sim of functions) 213
 Поточечная сходимость (pointwise convergence) 213
 Предел (limit)
 — верхний (\sim superior) 185, 187
 — левый, правый (left-sided, right-sided \sim) 210
 — нижний (\sim inferior) 185, 187
 — последовательности (\sim of sequence) 172
 — — функций ($\sim\sim\sim$ of functions) 213
 — функции (\sim of function) 209
 Представительный (representative) 178
Прингсгейм А. (Pringsheim, A.) 209, 211, 220, 256, 355, 368 и д.
 Проекция (projection) 299
 Производная (derivative) 81
 —, см. также Дифференцирование
 — бесконечного ряда (\sim of infinite series) 245
 — вторая (second \sim) 91
 — параболы (\sim of parabola) 82
 — по направлению (directional \sim) 304
 — степенного ряда (\sim of power series) 245
 — частная (partial \sim) 99, 300
 — — высшего порядка (higher $\sim\sim$) 316 и д.
 Производящая функция (generating function) 162
Птолемей (Ptolemy) 2, 40, 43, 47 и д., 55, 351, 369
Птолемей лемма (Ptolemy's lemma) 55
Пуанкаре А. (Poincaré, H.) 263, 356
 Пятиугольник (pentagon) 44
 Работа в силовом поле (work in force field) 110
 Равномерная непрерывность (uniform continuity) 217 и д., 290
 — сходимость (\sim convergence) 215, 291
 Радиан (radian) 40
 Радиус кривизны (radius of curvature) 102
 — сходимости ($\sim\sim$ convergence) 248 и д.
 Разбиение интервала (division of interval) 221
 Разделение переменных (separation of variables) 139
 Разностная схема (difference scheme) 12
Рам Г., де (Rham, G. de) 264, 369
 Расстояние (distance) 273
Региомонтан (Regiomontanus) 2, 41, 43, 47, 54, 369
 Резонанс (resonance) 150
 Рекуррентное соотношение (recurrence relation) 115
Ренч Дж. У., мл. (Wrench, J.W. Jr.) 54, 371
 Рефлексивность (reflexivity) 178 и д.
Риккати Я. (Riccati, J.) 140, 353, 369
 — уравнение (Riccati's equation) 154
Риман Б. (Riemann, B.) 193, 203, 221, 232, 263, 356, 369
Римана интеграл (\sim integral) 221 и д., 330
 — суммы (\sim sums) 226
Ричерт Н. (Richert, N.) 42, 369
Роберваль (Roberval) 33

- Роберт из Честера (Robert of Chester)
 2 и д., 369
 Розен Ф. (Rosen, F.) 2, 4, 369
 Роль М. (Rolle, M.) 83, 240, 369
 Ромен А., ван (Roomen, A. van) 52
 Рыжик И.М. (Ryzhik, I.M.) 109, 361
 Ряд (series) 188 и д.
 — гармонический (harmonic \sim) 167, 191
 — геометрический (geometric \sim) 21, 33, 188 и д.
 — Грегори для \ln (\sim for \ln , Gregory) 37
 — для арксинуса ($\sim\sim$ arcsin) 51, 256
 — для арктангенса ($\sim\sim$ arctan) 49 и д., 249
 — для косинуса ($\sim\sim$ cosine) 46
 — для показательной функции ($\sim\sim$ exponential function) 27, 200, 217
 — для синуса ($\sim\sim$ sine) 46
 — для тангенса ($\sim\sim$ tangent) 46 и д., 169
 — Меркатора для \ln (\sim \ln , Mercator) 35, 252
 — степенной (power series) 248
 — Тейлора (Taylor \sim) 94 и д.
 Сараса А.А., де (Sarasa, A.A. de) 35
 Секунда (second) 40
 Серпинский В. (Sierpiński, W.) 281, 369
 Серпинского ковер (Sierpiński's carpet) 281, 335
 — треугольник (\sim triangle) 281, 286, 335, 348
 Серре Ж.А. (Serret, J.A.) 240, 328 и д., 369
 Симметрия (symmetry) 178
 Симпсон Т. (Simpson, T.) 129, 369
 Симпсона метод (Simpson's method) 129 и д.
 Синус гиперболический (hyperbolic sine) 56
 —, ряд (series for \sim) 46
 —, функция (\sim function) 41 и д., 59, 62
 —, $\sin 1^\circ$ 48 и д.
 Скалярное произведение (scalar product) 274
 Сложная функция (composite function) 87
 Снеллиус В. (Snellius, W.) 52, 94
 Солнечный фонтан (Sun Fountain) 101
 Стационарная точка (stationary point) 91, 323
 Стеклов В. (Steklov, V.) 126, 353, 369
 Степенной ряд (power series) 248
 Стереogramмы (stereograms) 288, 301, 305, 313, 320, 348
 Стирлинг Дж. (Stirling, J.) 165, 369
 Стирлинга формула (Stirling's formula) 165
 Строго монотонная функция (strictly monotone function) 208
 Стройк Д.Я. (Struik, D.J.) 4, 91, 191, 370
 Стрэнг Дж. (Strang, G.) 42, 340, 370
 Сумма n^q (sum of n^q) 13 и д., 16, 160
 — обратных степеней (\sim of reciprocal powers) 62, 67, 160, 191, 259
 — частичная (partial \sim) 188
 Суммирование по частям (partial summation) 251, 255
 Суперпозиции принцип (superposition principle) 148
 Супремум (supremum) 182
 Сферические координаты (spherical coordinates) 344
 Сходимость (convergence)
 — абсолютная (absolute \sim) 192
 — — интегралов (\sim of integrals) 257 и д.
 — покомпонентная (componentwise \sim) 276
 — последовательности (\sim of sequence) 172
 — — векторов ($\sim\sim$ vector sequence) 275 и д.
 — поточечная (pointwise \sim) 213
 — равномерная (uniform \sim) 215, 291
 — ряда (\sim of a series) 188
 — степенного ряда ($\sim\sim$ power series) 248 и д.
 Сципионе даль Ферро (Scipione dal Ferro) 4
 Сюръективная функция (surjective function) 208
 Такаги Т. (Takagi, T.) 264, 370
 Тангенс гиперболический, th (tanh) 69, 78
 —, непрерывная дробь (tangent, continued fraction) 70
 —, ряд (series for \sim) 46 и д.
 —, функция (\sim function) 41 и д., 62, 73, 77
 Тарталья Н. (Tartaglia, N.) 4, 351
 Тейлор В. (Taylor, B.) 91, 116, 370
 Тейлора многочлен (Taylor polynomial) 95
 — ряд (\sim series) 94 и д., 160, 252 и д.
 — — для двух переменных ($\sim\sim$ for two variables) 319 и д.
 — — n переменных ($\sim\sim\sim n$ variables) 320 и д.
 — —, остаточный член (remainder of $\sim\sim$) 116, 319, 321 и д.
 Теорема (theorem)
 — Абеля (Abel's \sim) 250 и д.
 — биномиальная (binomial \sim) 18 и д., 23 и д., 253

- *Больцано* (\sim of Bolzano) 206
- *Больцано—Вейерштрасса* (Bolzano-Weierstrass \sim) 184, 277, 283, 286
- *Вейерштрасса* аппроксимационная (Weierstrass's approximation \sim) 265
- *Гейне—Бореля* (\sim of Heine-Borel) 283, 286
- *Дюбуа-Реймона и Дарбу* ($\sim\sim$ Du Bois-Reymond and Darboux) 224, 332
- *Лагранжа* (\sim of Lagrange) 240
- максимума (\sim of maximum) 206 и д., 289
- о неявной функции (implicit function \sim) 309 и д.
- промежуточном значении (intermediate value \sim) 206
- среднем значении (mean value \sim) 229 и д., 308 и д.
- *Ролля* (\sim of Rolle) 240
- сложения (addition theorem)
- для арктангенсов ($\sim\sim$ for arctan) 53
- — гиперболических функций ($\sim\sim$ for hyperbolic functions) 56
- — синусов и косинусов ($\sim\sim$ for sine and cosine) 43
- — тангенсов ($\sim\sim$ for tangent) 43
- Толл Д.* (Tall, D.) 264, 370
- Торричелли Э.* (Torricelli E.) 101
- Точка накопления (accumulation point)
- множества (\sim of set) 209
- последовательности (\sim of sequence) 184
- перегиба (inflection point) 91
- Трактриса (tractrix) 135 и д.
- Транзитивность (transitivity) 178 и д.
- Трапеции правило (trapezoidal rule) 129
- Тригонометрические функции (trigonometric functions) 40 и д.
- Трисекция угла (trisection of an angle) 6
- Угол** (angle) 40
- Уравнение (equation)
 - биквадратное (quartic \sim) 6, 14
 - квадратное (quadratic \sim) 2 и д., 7
 - Коши (Cauchy's \sim) 145, 152 и д.
 - кубическое (cubic \sim) 4 и д., 7, 48, 67, 96
 - *Лапласа* (Laplace \sim) 328
 - пятой степени (\sim of fifth degree) 6
 - *Риккати* (Riccati's \sim) 154
 - характеристическое (characteristic \sim) 145
- Условный минимум (conditional minimum) 325 и д.
- Уэстфол* (Westfall) 51, 370
- Факториал** (factorial) 20
- Фельман Э.А.* (Fellmann, E.A.) 168, 370
- Феодор Киренейский* (Theodorus of Cyrene) 169
- Ферма П.* (Fermat, P.) 25, 34 и д., 50, 81, 92 и д., 107, 135, 352, 370
- принципа (Fermat's principle) 93, 138
- Феррари Л.* (Ferrari, L.) 6, 14
- Верхульст П.Ф.* (Verhulst, P.F.) 143, 370
- Фибоначчи* (Fibonacci) 2, 73
- Фонсене Д.* (Foncenex, D.) 55, 370
- Формула подстановки (substitution formula) 112, 123 и д.
- преобразования для двойных интегралов (transformation \sim for double integrals) 338
- *Стирлинга* (Stirling's \sim) 165
- суммирования *Эйлера—Маклорена* (Euler-Maclaurin summation \sim) 130, 160 и д.
- *Эйлера* (Euler's \sim) 58 и д.
- Формулы *де Муавра* (de Moivre's formulas) 44 и д.
- Френель А.* (Fresnel A.) 370
- Френеля* интегралы (Fresnel's integrals) 127 и д., 131 и д., 262
- Фреше М.* (Fréchet, M.) 275, 283, 302, 357, 370
- Фридрих II*, король (Frederick II) 160, 354
- Фундаментальная теорема дифференциального исчисления (fundamental theorem of differential calculus) 109, 239, 241
- Функция** (function)
 - “бланманже” (blancmange \sim) 264 и д.
 - возрастающая (increasing \sim) 91, 184, 208
 - выпуклая (convex \sim) 91
 - гиперболическая (hyperbolic \sim) 56
 - дифференцируемая (differentiable \sim) 235 и д., 300 и д.
 - интегрируемая (integrable \sim) 223, 226 и д., 331, 336
 - логарифмическая (logarithmic \sim) 29 и д.
 - монотонная (monotone \sim) 208
 - невозрастающая (nonincreasing \sim) 208
 - непрерывная (continuous \sim) 204, 287
 - —, нигде не дифференцируемая (continuous, nowhere differentiable \sim) 263 и д.
 - нескольких переменных (\sim of several variables) 287
 - неубывающая (nondecreasing \sim) 208
 - обратная (inverse \sim) 208

- — тригонометрическая (inverse trigonometric \sim) 49 и д.
 — однородная (homogeneous \sim) 314
 —, определение (definition of \sim) 202
 — ошибок обратная (inverse error \sim) 159
 — показательная (exponential \sim) 17, 24 и д.
 — полиномиальная (polynomial \sim) 10
 — сложная (composite \sim) 87
 — тригонометрическая (trigonometric \sim) 40 и д.
 — убывающая (decreasing \sim) 91, 208
Фурье Ж.В.Ж. (Fourier, J.V.J.) 108, 370
- Хайгер Э.* (Haiser, E.) 155, 370
Халмос П.Р. (Halmos, P.R.) 325, 370 и д.
 Характеристическое уравнение (characteristic equation) 145
Харриот, сэр Томас (Harriot, Sir Thomas) 10
Хаусдорф Ф. (Hausdorff, F.) 278, 281, 294 и д., 357, 371
Хаяси Т. (Hayashi, T.) 73, 371
Хокинг Ст.У. (Hawking, St.W.) 81
 Хорда (функция) (chord function) 40 и д.
 — 1° (chord 1°) 48
Хорезми, Мухаммед бен Муса аль-Хорезми (Mohammed ben Musa Al-Khowârizmî) 2 и д., 7, 371
Хофрейтер Н. (Hofreiter, N.) 109, 362
- Цейлен Лудольф, ван* (Ceulen, L. van) 52, 371
 Центр кривизны (center of curvature) 101
 — масс (\sim of mass) 111
 — тяжести (\sim of gravity) 337
 Цепная дробь — см. Непрерывная дробь
 — линия — см. Катеноида
 Цепное правило (chain rule) 87, 239, 306
 Циклоида (cycloid) 104, 138, 142
 Циссоида *Диоклеса* (cissoid of Diocles) 90
- Частичная сумма (partial sum) 188
 Частная производная (\sim derivative) 99, 300
Чезаро суммирование (Cesàro summation) 187
 Чертова лестница (devil's staircase) 246 и д.
 Численное интегрирование (numerical integration) 128 и д.
 — — дифференциальных уравнений (\sim of differential equations) 154 и д.
 Число (number)
 — действительное (real \sim) 177 и д.
 — комплексное (complex \sim) 57
- *Эйлера* (Euler's \sim) 25, 38
Чу Ши Ки (Tshu shi Kih) 18
- Шар** (ball) 278 и д., 349
Шварц Г.А. (Schwarz, H.A.) 229, 316, 327, 371
Шенкс Д. (Shanks, D.) 54, 371
Шпиесс О. (Spiess, O.) 144, 160, 353, 371
Штифель М. (Stifel, M.) 17, 29, 371
Штольц О. (Stolz, O.) 182, 302, 333, 357, 371
- Эвольвента** (involute) 104
Эволюта (evolute) 103
Эйлер Л. (Euler, L.) 39, 46, 53, 57 и д., 60 и д., 72, 79, 83, 92, 97, 118 и д., 123 и д., 127, 144 и д., 154 и д., 160, 162 и д., 170, 202, 206, 249, 316, 318, 338, 351 и д., 355, 357, 371 и д.
Эйлера биквадратное уравнение (Euler's quartic equation) 6, 14
 — быстрый метод (\sim quick method) 148
 — гамма-функция (\sim gamma function) 261 и д., 346
 — золотое правило (\sim golden rule) 30
 — *Introductio* 1, 17, 24, 25, 27, 29, 39, 40, 44, 46, 58, 63 и д., 66 и д., 75, 78
 — ломаная (Euler's polygon) 155
 — метод для дифференциальных уравнений (\sim method for differential equations) 154 и д.
 — показательная функция (\sim exponential function) 17, 24 и д.
 — постоянная (\sim constant) 167 и д.
 — произведение для синуса (\sim product for sine) 62 и д.
 — формула (\sim formula) 58 и д.
 — число (\sim number) 25, 30, 38, 59, 69, 72
Эйлера—Маклорена формула суммирования (Euler-Maclaurin summation formula) 130, 160 и д.
 Эквивалентности классы (equivalence classes) 178
 — отношение (\sim relation) 178
 Эквивалентные нормы (equivalent norms) 275, 285, 289
 Экспонента (exponential) 17 и д.
 Элементарная дробь (partial fraction) 119
 Эллиптический интеграл (elliptic integral) 126, 130 и д., 141
Эрмит Ш. (Hermite, Ch.) 119, 373
- Якоби К.Г.Я.* (Jacobi, C.G.J.) 99, 126, 144, 163, 300, 338, 346, 351, 353, 373
Якобиан (Jacobian) 301

Научное издание

Эрнст Хайрер, Герхард Ваннер

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ В СВЕТЕ ЕГО ИСТОРИИ

Ведущий редактор А.В. Тыглиян

Компьютерный набор Г.П. Чуркиной

Художник обложки Ф.И. Садилов

Издательство "Научный мир"

Тел./факс (007) (495) 291-28-47. E-mail: naumir@benran.ru

Internet: [http:// bookish.iring.ru](http://bookish.iring.ru)

Подписано к печати 30.04.08. Формат 70x100 ¹/₁₆.
Печать офсетная. Печ. л. 24,5. Усл. печ. л. 31,85
Тираж 800 экз. Заказ 50

Издание отпечатано с готовых диапозитивов в типографии ООО "Галлея-Принт"
Москва, 5-я Кабельная, 26



Герхард Ваннер

Родился в 1942 г. в Зеефельде (Тироль, Австрия). Профессор отделения математики Женевского университета (Швейцария). Председатель 7-й секции Швейцарской академии естественных наук. Экс-президент Швейцарского математического общества.



Эрнст Хайрер

Родился в 1949 г. в Австрии. Окончил университет в Иннсбруке (Австрия) и преподавал там в 1973–80 гг. В 1980–85 гг. — профессор Гейдельбергского университета (Германия). С 1985 г. — профессор отделения математики Женевского университета (Швейцария).

Помимо многочисленных статей в научных журналах всемирную известность этим авторам принесли написанные ими книги "Математический анализ в свете его истории", "Решение обыкновенных дифференциальных уравнений", том I: "Нежесткие задачи" (в соавторстве с С.П. Нёрсеттом), том II: "Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи", и "Геометрическое численное интегрирование" (в соавторстве с К. Любихом). Эти книги выдержали несколько изданий на английском языке в издательстве Шпрингер и переведены на русский, японский и ряд европейских языков.

