

Др. А. Стрэттон

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА

Перевод

М.С.РАБИНОВИЧА

и

В.М.ХАРИТОНОВА

Под редакцией

проф. С.М.РЫТОВА

ОГИЗ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА 1948 ЛЕНИНГРАД

А Н Н О Т А Ц И Я

Книга содержит полное и систематическое изложение современной макроскопической теории электричества. Главное внимание уделено быстро-переменным электромагнитным полям, в особенности — теории излучения и распространения радиоволн. Книга является настольным руководством для научного работника и инженера, соприкасающихся в своей работе с вопросами электромагнетизма.

Редактор В. А. Угаров.

Техн. редактор С. Н. Ахламов.

Подписано к печати 10/XI 1947 г. 33,75 печ. л. 53,64 уч.-изд. л. 63 530 тип. зн. в печ. л. А 09920.
Тираж 8 000 экз. Цена книги 32 руб. Переплёт 2 руб. Заказ № 593.

4-я типография им. Евг. Соколовой треста «Полиграфкнига» ОГИЗа
при Совете Министров СССР. Ленинград, Измайловский пр., 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

От редактора	9
Предисловие	11

ГЛАВА I

УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ

Уравнения Максвелла	15
1.1. Векторы поля	15
1.2. Заряды и токи	16
1.3. Дивергенция векторов поля	19
1.4. Интегральная форма уравнений поля	20
Макроскопические свойства материи	22
1.5. Абсолютные проницаемости ϵ и μ	22
1.6. Электрическая и магнитная поляризации	24
1.7. Проводящая среда	26
Единицы и размерности	28
1.8. MKS-система или система Джорджи	28
Электромагнитные потенциалы	33
1.9. Векторный и скалярный потенциалы	33
1.10. Однородная проводящая среда	36
1.11. Вектор Герца или поляризационный потенциал	37
1.12. Комплексные векторы поля и потенциалы	40
Граничные условия	42
1.13. Разрывы непрерывности векторов поля	42
Координатные системы	45
1.14. Основные и взаимные координатные векторы	45
1.15. Дифференциальные операторы	50
1.16. Ортогональные системы	53
1.17. Уравнения поля в обобщённых ортогональных координатах	55
1.18. Свойства некоторых простейших систем	55
Тензоры поля	62
1.19. Ортогональные преобразования и их инварианты	62
1.20. Элементы тензорного анализа	66
1.21. Пространственно-временная симметрия уравнений поля	70
1.22. Преобразование Лоренца	74
1.23. Преобразование векторов поля к движущейся системе координат	77

ГЛАВА II

СИЛЫ И ЭНЕРГИЯ

Напряжения и деформации в упругой среде	82
2.1. Тензор упругих напряжений	82
2.2. Анализ деформаций	86
2.3. Упругая энергия и соотношение между напряжениями и деформациями	90
Электромагнитные силы, действующие на заряды и токи	93
2.4. Определение векторов E и B	93
2.5. Тензор электромагнитных напряжений в свободном пространстве	94
2.6. Импульс электромагнитного поля	99

Электростатическая энергия	100
2.7. Электростатическая энергия как функция плотности зарядов	100
2.8. Электростатическая энергия как функция напряжённости поля	103
2.9. Теорема векторного поля	106
2.10. Энергия диэлектрического тела в электростатическом поле	107
2.11. Теорема Томсона	109
2.12. Теорема Ирншоу	110
2.13. Теорема об энергии незаряженного проводника	111
Магнитостатическая энергия	112
2.14. Магнитная энергия стационарных токов	112
2.15. Магнитная энергия как функция напряжённости поля	117
2.16. Ферромагнитные материалы	118
2.17. Энергия магнитного тела в магнитостатическом поле	119
2.18. Потенциальная энергия постоянных магнитов	121
Поток энергии	123
2.19. Теорема Пойнтинга	123
2.20. Комплексный вектор Пойнтинга	126
Силы, действующие на диэлектрик в электростатическом поле	128
2.21. Объёмные силы в жидких средах	128
2.22. Объёмные силы в твёрдых телах	130
2.23. Тензор напряжений	136
2.24. Поверхности разрыва	137
2.25. Электрострикция	139
2.26. Силы, действующие на тело, погружённое в жидкость	140
Силы в статическом магнитном поле	142
2.27. Неферромагнитные вещества	142
2.28. Ферромагнитные вещества	144
Силы в электромагнитном поле	145
2.29. Силы, действующие на тело, погружённое в жидкость	145

ГЛАВА III

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Общие свойства электростатического поля	148
3.1. Уравнения для поля и потенциала	148
3.2. Граничные условия	151
Определение поля по заданному распределению зарядов	152
3.3. Теорема Грина	152
3.4. Интегрирование уравнения Пуассона	153
3.5. Поведение в бесконечности	155
3.6. Кулоново поле	156
3.7. Сходимость интегралов	157
Разложение потенциала по сферическим функциям	158
3.8. Аксиальные распределения зарядов	158
3.9. Диполь	160
3.10. Осевые мультиполи	162
3.11. Произвольные распределения зарядов	163
3.12. Общая теория мультиполей	164
Диэлектрическая поляризация	167
3.13. Интерпретация векторов $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}$	167
Разрывы непрерывности интегралов, встречающихся в теории потенциала	169
3.14. Объёмное распределение зарядов и дипольного момента	169
3.15. Простой заряженный слой	171
3.16. Двойной заряженный слой	172
3.17. Интерпретация теоремы Грина	175
3.18. Метод изображений	176

Краевые задачи	177
3.19. Формулировка электростатических задач	177
3.20. Однозначность решения	178
3.21. Решение уравнения Лапласа	179
Задача о шаре	183
3.22. Проводящий шар в поле точечного заряда	183
3.23. Диэлектрический шар в поле точечного заряда	185
3.24. Шар в параллельном поле	186
Задача об эллипсоиде	188
3.25. Свободные заряды на проводящем эллипсоиде	188
3.26. Проводящий эллипсоид в параллельном поле	190
3.27. Диэлектрический эллипсоид в параллельном поле	191
3.28. Определение E и D с помощью полостей	194
3.29. Вращающие моменты, действующие на эллипсоид	195
Задачи	197

ГЛАВА IV

МАГНИТОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Общие свойства магнитостатического поля	204
4.1. Уравнения поля и векторный потенциал	204
4.2. Скалярный потенциал	205
4.3. Исследование Пуассона	206
Расчёт поля данного распределения токов	208
4.4. Закон Био и Савара	208
4.5. Разложение векторного потенциала	211
4.6. Магнитный диполь	213
4.7. Магнитные листки	214
Отступление по поводу единиц и размерностей	215
4.8. Основные системы	215
4.9. Закон Кулона для магнитных зарядов	217
Магнитная поляризация	218
4.10. Эквивалентное распределение токов	218
4.11. Поле намагниченного стержня и шара	219
Разрывы непрерывности векторов A и B	220
4.12. Поверхностное распределение токов	220
4.13. Поверхностное распределение магнитного момента	222
Интегрирование уравнения $\text{rot rot } A = \mu J$	224
4.14. Векторный аналог теоремы Грина	224
4.15. Применение к векторному потенциалу	225
Краевые задачи	228
4.16. Формулировка задачи магнитостатики	228
4.17. Однозначность решения	230
Задача об эллипсоиде	230
4.18. Поле однородно намагниченного эллипсоида	230
4.19. Эллипсоид из магнетика в параллельном поле	231
Цилиндр в параллельном поле	231
4.20. Подсчёт поля	231
4.21. Силы, действующие на цилиндр	234
Задачи	235

ГЛАВА V

ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Распространение плоских волн	240
5.1. Уравнения одномерного поля	240
5.2. Плоские волны, гармонические во времени	243
5.3. Плоские волны, гармонические в пространстве	248

5.4. Поляризация	248
5.5. Поток энергии	250
5.6. Импеданс	251
Общие решения одномерного волнового уравнения	253
5.7. Элементы гармонического анализа (теорема Фурье)	253
5.8. Общее решение одномерного волнового уравнения в непоглощающей среде	260
5.9. Поглощающая среда; заданное распределение во времени	264
5.10. Поглощающая среда; заданное распределение в пространстве	268
5.11. Дискуссия численного примера	270
5.12. Элементарная теория преобразования Лапласа	275
5.13. Применение преобразования Лапласа к уравнениям Максвелла	283
Дисперсия	285
5.14. Дисперсия в диэлектриках	285
5.15. Дисперсия в металлах	289
5.16. Распространение в ионизированной атмосфере (ионосфере)	290
Скорости распространения	293
5.17. Групповая скорость	293
5.18. Волновой фронт и скорость сигнала	296
Задачи	301

ГЛАВА VI

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

Уравнения цилиндрического поля	309
6.1. Представление посредством векторов Герца	309
6.2. Скалярный и векторный потенциалы	311
6.3. Импедансы гармонических цилиндрических полей	313
Волновые функции кругового цилиндра	314
6.4. Элементарные волны	314
6.5. Свойства функций $Z_p(\rho)$	315
6.6. Поле круговых цилиндрических волновых функций	317
Интегральные представления волновых функций	319
6.7. Построение из плоских волн	319
6.8. Интегральные представления функций $Z_n(\rho)$	321
6.9. Интегралы Фурье-Бесселя	325
6.10. Представление плоской волны	327
Теорема сложения для круговых цилиндрических волн	328
6.11.	328
Волновые функции эллиптического цилиндра	330
6.12. Элементарные волны	330
6.13. Интегральные представления	334
6.14. Разложение плоских и круговых волн	338
Задачи	340

ГЛАВА VII

СФЕРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

Векторное волновое уравнение	345
7.1. Фундаментальная система решений	345
7.2. Применение к цилиндрическим координатам	348
Скалярное волновое уравнение в сферических координатах	352
7.3. Элементарные сферические волны	352
7.4. Свойства радиальных функций	356
7.5. Теорема сложения для полиномов Лежандра	358
7.6. Разложение плоской волны	359
7.7. Интегральные представления	360
7.8. Интеграл Фурье-Бесселя	362
7.9. Разложение цилиндрической волновой функции	363
7.10. Теорема сложения для функции $z_0(kR)$	364

Векторное волновое уравнение в сферических координатах	365
7.11. Сферические векторные волновые функции	365
7.12. Интегральные представления	367
7.13. Ортогональность	368
7.14. Разложение плоской векторной волны	369
Задачи	371

ГЛАВА VIII

ИЗЛУЧЕНИЕ

Неоднородное скалярное волновое уравнение	374
8.1. Метод интегрирования Кирхгофа	374
8.2. Запаздывающие потенциалы	378
8.3. Запаздывающий вектор Герца	379
Разложение на мультиполи	380
8.4. Определение моментов	380
8.5. Электрический диполь	383
8.6. Магнитный диполь	386
Теория излучения систем линейных антенн	387
8.7. Поле излучения одиночного линейного осциллятора	387
8.8. Излучение от бегущих волн	392
8.9. Гашение противоположных фаз	393
8.10. Направленные устройства	395
8.11. Точный расчёт поля линейного осциллятора	400
8.12. Определение сопротивления излучения по методу вычисления э. д. с.	403
Принцип Гюйгенса-Кирхгофа	405
8.13. Скалярная волновая функция	405
8.14. Непосредственное интегрирование уравнений поля	409
8.15. Разрывы поверхностного распределения	412
Четырёхмерная формулировка задачи об излучении	415
8.16. Интегрирование волнового уравнения	415
8.17. Поле движущегося точечного заряда	417
Задачи	420

ГЛАВА IX

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

Общие теоремы	426
9.1. Граничные условия	426
9.2. Единственность решения	429
9.3. Электродинамическое подобие	430
Отражение и преломление на плоской поверхности	432
9.4. Законы Снелля	432
9.5. Формулы Френеля	433
9.6. Диэлектрические среды	435
9.7. Полное отражение	438
9.8. Преломление в проводящей среде	441
9.9. Отражение от проводящей поверхности	444
Плоские слои	449
9.10. Коэффициент отражения и коэффициент прозрачности	449
9.11. Применение к диэлектрическим средам	451
9.12. Поглощающие слои	452
Поверхностные волны	453
9.13. Комплексный угол падения	453
9.14. Скин-эффект	457
Распространение вдоль круглого цилиндра	460
9.15. Собственные виды волн	460
9.16. Проводник, помещённый в диэлектрик	463
9.17. Дальнейшее рассмотрение основной волны	467
9.18. Волны в полых трубах	471

ОГЛАВЛЕНИЕ

Коаксиальные линии	478
9.19. Постоянная распространения	478
9.20. Бесконечная проводимость	480
9.21. Конечная проводимость	483
Колебания сферы	486
9.22. Собственные колебания	486
9.23. Колебания проводящей сферы	489
9.24. Колебания в сферической полости	490
Дифракция плоской волны на сфере	493
9.25. Разложение дифрагированного поля	493
9.26. Полное излучение	497
9.27. Предельные случаи	499
Влияние земли на распространение радиоволн	501
9.28. Решение Зоммерфельда	501
9.29. Решение Вейля	506
9.30. Решение Ван дер Поля	510
9.31. Приближённые выражения интегралов	511
Задачи	516
Приложение I	526
А. Числовые значения основных констант	526
Б. Размерности электромагнитных величин	527
С. Таблицы перехода	527
Приложение II	529
Формулы векторного анализа	529
Приложение III	530
Проводимости различных материалов	530
Относительные диэлектрические постоянные диэлектриков	531
Приложение IV	532
Присоединённые функции Лежандра	532
Именной указатель	533
Предметный указатель	535

ОТ РЕДАКТОРА

В своём предисловии автор сам с полной ясностью разъясняет задачу, которую он себе ставил. «Теория электромагнетизма» Дж. А. Стрэттона, конечно, не является учебником. Эта книга непригодна для первого ознакомления с теорией электромагнитного поля и не предназначена для этого. Уравнения Максвелла выступают здесь не как результат длительного восхождения от частного к общему, от эмпирических законов к теории, а как мощный рабочий инструмент. Они появляются поэтому не на предпоследней странице (после чего следует обычно вывод формул Френеля и этим дело заканчивается), а на самых первых. Вся книга учит затем с ними работать. В этом заключается всё её значение и интерес. С этой целью в ней собраны в большом количестве и необходимые вспомогательные средства (элементы тензорного анализа и теории упругости, сведения по специальным функциям, гармоническому анализу, преобразованию Лапласа и т. п.).

Потребность в такого рода дедуктивном и обстоятельном изложении чисто макроскопической теории поля назрела уже давно, и в этом отношении перевод книги Стрэттона отвечает на запросы, возникшие у многих. Для каждого, кто так или иначе соприкасается в своей научной или инженерной работе с вопросами электромагнетизма, эта книга будет настольной. И не только в силу своей полноты и систематичности, но и в силу своей направленности в сторону наиболее актуальных современных задач, связанных главным образом с быстропеременными полями.

Конечно, книга небезупречна. Я не буду касаться отдельных замеченных неточностей или мелких ошибок, которые либо снабжены примечаниями, либо просто исправлены. Основных недостатков можно указать два. Во-первых, полное незнание автором советской научной литературы и, во-вторых, то, что в некоторых вопросах книга уже успела устареть. Сказанное относится в особенности к теории антенн и к распространению электромагнитных волн над земной поверхностью. Советская теоретическая мысль заняла здесь ведущие позиции, но автору неизвестно, повидимому, даже то, что уже было сделано у нас ко времени выхода его книги (1941 г.). Основные из сделанных мною примечаний имеют в виду исправление именно этих недостатков. Я не выходил, однако, за пределы того материала, который содержится в книге. Так, например, я не сослался на прекрасные работы Г. А. Гринберга о применении интегральных уравнений в электростатике, поскольку метод интегральных уравнений в книге Стрэттона вообще не затрагивается.

В заключение сделаю несколько замечаний, касающихся терминологии, обозначений и единиц. В некоторых отношениях изложение Стрэттона стремится быть ультрасовременным. Все дифференциальные операции он записывает только с помощью оператора Гамильтона (набла), а векторное умножение обозначает косым крестом. Это приводит, конечно, к большому единообразию, но, на мой взгляд, к ещё большему однообразию. В пере-

воде сохранены принятые у нас и для большинства привычные обозначения grad, div, rot и квадратные скобки для векторного произведения.

Термин «проницаемость» в применении не только к ϵ , но и к μ , вероятно, не вызовет никаких недоразумений, несмотря на привычку, называть ϵ диэлектрической *постоянной* даже тогда, когда она зависит от координат. Я рискнул также отказаться от укоренившихся у нас анахронизмов, расходящихся с тем, что принято во всех языках мира. Мне кажется, что пора говорить просто о полном отражении (total reflection) и двойном преломлении (double refraction) вместо полного *внутреннего* отражения и двойного *лучепреломления*. *Всякое* отражение является «внутренним» (т. е. возвращением волны в ту среду, из которой падает первичная волна), а в теории двойного преломления речь идёт в первую очередь не о лучах (вектор Пойнтинга), а о волновой нормали.

В несколько особом положении находится вопрос о единицах. В нашей теоретической литературе широко принята абсолютная гауссова система электромагнитных единиц. Сторонников этой системы Стрэттон объявляет консерваторами («тори»). Сам он последовательно придерживается системы MKS (система Джорджи), в которой вакуум наделяется проницаемостями $\epsilon = 8,854 \cdot 10^{-12}$ фарад/метр и $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7}$ генри/метр. Нельзя отказать в убедительности аргументам автора в пользу этой системы, оперирующей с *практическими* единицами (кулон, вольт, ампер, ом и т. д.). Её применение подчёркивает направленность всего изложения в сторону приложений и именно поэтому я не счёл возможным ломать большую часть текста, переделывая всё на абсолютные гауссовы единицы. Подобная переделка хотя и придала бы многим формулам более привычный вид, но в корне разошлась бы с замыслом автора и нарушила стиль книги.

Перевод выполнен В. Харитоновым (I—IV, VIII—IX главы) и М. Рабиновичем (V—VII главы).

С. М. Рытов

ПРЕДИСЛОВИЕ

Образец, каким около 70 лет тому назад явился максвелловский «Трактат по электричеству и магнетизму» оказывал неизменно до наших дней преобладающее влияние почти на каждый последующий английский или американский учебник. «Трактат» был написан с намерением дать связное изложение всей совокупности известных электрических и магнитных явлений с единой фарадеевской точки зрения. Таким образом «Трактат» содержал немного или, вернее, совсем не содержал упоминаний о гипотезах, выдвинутых ранее на континенте Риманом, Вебером, Кирхгофом, Гельмгольцем и другими. Отнюдь не является очевидным, что полное забвение этих более старых теорий было благоприятным для последующего развития физики. В той мере, в какой замыслом «Трактата» было распространение идей Фарадея, цель несомненно была достигнута, но изложение собственного вклада автора оказалось менее успешным. Сплошь и рядом теории и учения, принадлежащие самому Максвеллу — концепция токов смещения, тождество света и электромагнитных колебаний — изложены там едва ли более полно и, возможно даже, менее привлекательно по форме, чем в первоначальных статьях. Весь первый том и большая часть второго отведены стационарному состоянию. Фактически из всей 1000 страниц только десяток посвящён общим уравнениям электромагнитного поля, восемнадцать — распространению плоских волн и электромагнитной теории света, и ещё страниц двадцать — магнитооптике. С тех дней английских и американских авторов почти в той же степени привлекали математическая законченность теории потенциала и практическая ценность теории электрических цепей. Только оригинальный и одинокий гений Хивисайда преуспел в преодолении этого течения.

За дальнейшими исследованиями, касающимися основного содержания уравнений Максвелла, необходимо вновь вернуться на континент. Работы Герца, Пуанкаре, Лоренца, Абрагама и Зоммерфельда, совместно с их сотрудниками и последователями, привели к более глубокому пониманию физических явлений и к грандиозному промышленному развитию.

В этой книге делается попытка дать изложение теории переменного электромагнитного поля и теории распространения волн, более соответствующее предъявляемым ныне требованиям. Некоторое внимание уделено стационарному состоянию, но лишь с целью введения основных понятий при простых условиях и всегда с учётом дальнейшего приложения их в общем случае. Читатель должен владеть основными знаниями по электричеству и магнетизму,

которые могут быть почерпнуты из элементарных руководств, основанных на экспериментальных законах Кулона, Ампера и Фарадея, и из последующих переходных курсов, в которых рассматриваются более общие свойства электрических цепей, термоионные и электронные устройства, элементы электромагнитных машин и которые заканчиваются формулировкой уравнений Максвелла. Данная книга начинается с этого пункта. В первой главе устанавливаются общие уравнения, которым подчинены поля и потенциалы. В ней приведён обзор теории единиц, справочный материал по системам криволинейных координат и элементы тензорного анализа; она заканчивается формулировкой уравнений поля в пространственно-временном континууме. Вторая глава также является общей по своему характеру, и многое из неё может быть при первом чтении опущено. Здесь читатель найдёт обсуждение основных свойств поля, которые могут быть выведены безотносительно к какой-либо конкретной координатной системе. Анализ размерностей уравнений Максвелла приводит к основным определениям векторов E и B , а исследование энергетических соотношений даёт выражения для механических сил, действующих на элементы заряда, тока и нейтральной материи. Таким путём устанавливается прямая связь между наблюдаемыми силами и векторами, которые используются для описания структуры поля.

В III и IV главах рассматриваются стационарные поля, как частные случаи уравнений переменного поля. Вопрос о распространении волн впервые поднимается в V главе, которая посвящена однородным плоским волнам. Методам гармонического анализа уделено особое внимание и несколько более детально рассмотрена проблема дисперсии. Главы VI и VII рассматривают распространение цилиндрической и сферической волн в неограниченном пространстве. Там же имеется необходимое количество вспомогательного материала по беселевым и сферическим функциям и даны векторные решения волнового уравнения. Соотношение между полем и его источниками, общая теория излучения и основные черты теории дифракции Кирхгофа-Гюйгенса рассмотрены в главе VIII.

Наконец, в главе IX мы исследуем влияние плоской, цилиндрической и сферической поверхностей на распространение электромагнитных полей. Фактически эта глава иллюстрирует приложение развитой ранее общей теории к вопросам, имеющим практический интерес. Читатель найдёт здесь наиболее важные законы физической оптики, основы теории распространения волн вдоль цилиндрических проводников, рассмотрение колебаний внутри полостей и очерк теории распространения волн вдоль земной поверхности.

К сожалению, численные решения специальных задач не могли быть даны чаще и более детально. Недостаток места в книге, охватывающей столь обширную область, сделал это невыполнимым. Основная цель книги — основательное изложение электромагнитной теории; примеры были выбраны поэтому лишь для иллюстрации основных теоретических положений. Мы не пытались исчерпывающим образом рассмотреть антенные устройства, характеристики передающих линий и аналогичные вопросы, важные для инженеров. Автор надеется, что настоящая книга обеспечит основные знания, необходимые для

критической оценки оригинальных статей по специальным вопросам и удовлетворит нужды тех, кто неохотно принимает инженерные формулы без знания их происхождения и границ их применимости.

За каждой главой, за исключением двух первых, следует некоторое количество задач. Только применение теории к конкретным примерам является удовлетворительным путём для её изучения. Задачи были выбраны с учётом этого обстоятельства, но вместе с тем они охватывают многие вопросы, которые пришлось исключить из основного текста. Это в особенности относится к последним главам. В большинстве случаев приведены ответы или соответствующие ссылки.

Эта книга касается исключительно макроскопических явлений. Весьма соблазнительно распространить рассмотрение на ту плодотворную область, которую Френкель назвал «квазимикроскопическим состоянием», заняться многими прекрасными результатами классической электронной теории материи. Однако в свете современного развития каждый, кто попытался бы осуществить подобную программу, был бы вскоре остановлен сомнениями. Хотя многие законы классической электродинамики непосредственно приложимы к субмикроскопической области, но мы не имеем исходного пункта для отбора. Автор твёрдо убеждён в том, что переход должен осуществляться от квантовой электродинамики к классической теории, а не в обратном направлении. В какой бы форме ни были окончательно приняты уравнения квантовой электродинамики, их статистическое усреднение по большому числу атомов должно приводить к уравнениям Максвелла.

Мы пользуемся исключительно системой единиц MKS (метр-килограмм-секунда). Среди многих физиков до сих пор ещё сохранилось убеждение, что эта система навязывается им агрессивной группой инженеров. Возможно, что это так, хотя первым, кому пришла идея использовать эту систему, был сам Максвелл. Во всяком случае, система MKS вполне хороша, легко усваивается и позволяет избежать бесконечной путаницы в практических приложениях. В настоящий момент, повидимому, нет сомнения в том, что в ближайшем будущем она сделается общепринятой. На странице 217 предлагается помощь тем консерваторам (tories) среди нас, которые придерживаются гауссовой системы.

В противоположность позиции, занятой в отношении системы MKS, у автора отсутствуют сколько-нибудь серьёзные доводы в пользу рациональных единиц. Рациональные единицы применяются потому, что за исходный пункт взяты уравнения Максвелла, а не закон Кулона, а исходный пункт нам кажется разумным сделать настолько простым, насколько это возможно. В результате этого выбора все уравнения, касающиеся энергии и распространения волн, свободны от фактора 4π . Соотношения же указанного рода практически более важны, нежели те, которые выражают потенциалы и векторы поля через их источники.

Ещё одним пунктом, вызывающим некоторые возражения, является употребление временного фактора в виде $e^{-i\omega t}$ вместо $e^{+i\omega t}$. Это было сделано потому, что временный фактор всегда исключается, а для волны, распростра-

нящейся в положительном направлении, несколько удобно удерживать положительный экспонент e^{+ikR} . Чтобы привести какую-либо формулу к виду, принятому инженерами, достаточно всюду заменить $-i$ на $+i$.

Для материала своей книги автор использовал очень много источников и многим обязан своим коллегам как по физическому, так и по электротехническому отделению Массачузетского Технологического института. Особую благодарность автор выражает профессору М. Ф. Гарднеру, чьи советы в отношении практического вида теории преобразования Лапласа явились неоценимыми, и д-ру С. Сильверу, который с большим вниманием прочёл часть рукописи. В заключение автор пользуется случаем выразить свою сердечную благодарность Катрин Н. Стрэттон за неизменную поддержку во время подготовки рукописи и неутомимую помощь при корректуре.

Джулиус Адамс Стрэттон

Кембридж, Массачузетс
Январь, 1941.

ГЛАВА I

УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ

Всё необъятное количество экспериментальных фактов, накопившихся в течение прошлого века, приводит нас к твёрдой уверенности в том, что макроскопические электромагнитные явления описываются уравнениями Максвелла. К серьёзным доводам в пользу этого взгляда могут быть отнесены кулоново определение закона сил взаимодействия между зарядами, исследования Ампера по взаимодействию элементов тока и наблюдения Фарадея над переменными полями. Для начинающих обычно рекомендуется исторический подход, поскольку он является самым простым и доставляет наиболее быстрое удовлетворение. В этой книге мы предполагаем, однако, что читатель уже закончил подобного рода предварительное ознакомление, и что он уже обладает знанием экспериментальных фактов и их теоретической интерпретации. Согласно точке зрения, принятой в этой книге, электромагнитная теория есть теория уравнений Максвелла. В соответствии с этим, мы с самого начала постулируем эти уравнения и в дальнейшем изложении выводим из них структуру и свойства поля, наряду с его связью с источниками. Один единичный эксперимент не доказывает теорию; действительная проверка наших исходных предположений осуществляется в постоянном и неизменном согласии выводов с наблюдениями.

В первой главе мы займёмся не очень увлекательным делом формулирования основных уравнений и приготовлениями для наших исследований.

УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

1. 1. Векторы поля. Под электромагнитным полем мы будем понимать совокупность четырёх векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$. Эти векторы предполагаются конечными во всём поле и во всех обыкновенных точках непрерывными функциями положения и времени, обладающими непрерывными производными. Разрывы непрерывности векторов поля или их производных могут встречаться на поверхностях, отмечающих резкое изменение физических свойств среды. В соответствии с традиционной терминологией, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ называются напряжённостями соответственно электрического и магнитного полей, $\mathbf{D}$ называется электрической, а $\mathbf{B}$ — магнитной индукцией. В конечном счёте, векторы поля должны определяться посредством таких экспериментов, которые позволяют их измерить. До того, как подобного рода эксперименты будут указаны, нет никаких оснований считать один из векторов поля более основным, нежели другой; поэтому слово напряжённость мы будем применять для обозначения любого из четырёх векторов поля в какой-либо точке пространства и в какой-либо момент времени.

Источниками электромагнитного поля являются электрические заряды и токи. Поскольку нас интересуют только макроскопические эффекты, постольку можно принять, что распределения токов и зарядов являются

непрерывными, а не дискретными, и определяются как функции точки и времени посредством плотности заряда ρ и вектора плотности тока $\mathbf{J}$.

Мы постулируем, что в любой обыкновенной (не особой) точке пространства векторы поля подчинены уравнениям Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}. \quad (2)$$

Под обыкновенной точкой мы будем подразумевать такую точку, в окрестности которой физические свойства среды непрерывны. Выше было отмечено, что переход векторов поля и их производных через поверхности, ограничивающие материальные тела, может быть разрывным; такого рода поверхности должны быть поэтому исключены из рассмотрения до тех пор, пока мы не будем в состоянии исследовать характер подобных разрывов.

1. 2. Заряды и токи. Хотя корпускулярная природа электричества твердо установлена, размеры элементарного кванта заряда слишком малы, чтобы в макроскопической теории надо было учитывать эти элементарные заряды как существующие раздельно. Граница, отделяющая область явлений большого масштаба от микроскопических, очевидно, условна. Для уверенности в правильности макроскопического подхода рассматриваемый макроскопический элемент объема должен содержать громадное число атомов; однако само по себе это условие не является достаточным критерием, поскольку многие кристаллы, включая металлы, часто обнаруживают микроскопически «зернистую» или «мозаичную» структуру; подобные случаи будут исключены из нашего рассмотрения. По всей вероятности, мы не допустим ошибки, если предположим, что одна десятая миллиметра есть наименьший допустимый предел для элемента длины. Однако имеется много экспериментов, — как, например, рассеяние света частицами диаметром на более 10^{-3} мм, — которые показывают, что макроскопическая теория может быть продолжена и за указанный предел. Тем не менее, мы уже вторгаемся здесь в область, принадлежащую квантовой теории, которая и должна в конечном счете определить законность наших положений в микроскопической области.

Предположим, что заряд, содержащийся в элементе объема Δv , есть Δq . Плотность заряда в какой-либо точке внутри Δv будет определяться соотношением:

$$\Delta q = \rho \Delta v. \quad (3)$$

Таким образом, под плотностью заряда в некоторой точке мы подразумеваем средний заряд на единицу объема в окрестности этой точки. В строгом смысле, соотношение (3) не определяет непрерывной функции положения, поскольку Δv не может стремиться к нулю неограниченно. Тем не менее, мы примем, что ρ может быть представлено функцией координат и времени, которая в обыкновенных точках непрерывна и обладает непрерывными производными. Значение полного заряда, получаемое интегрированием этой функции по макроскопическому объему, в крайнем случае будет отличаться от истинной величины содержащегося в нём заряда на микроскопическую величину.

Всякое упорядоченное движение зарядов образует ток. Распределение токов характеризуется векторным полем, которое определяет в каждой точке не только величину тока, но и его направление. Как и при изучении движения жидкости, удобно представлять себе линии тока, т. е. линии, проведенные через распределение тока и касательные в каждой точке к на-

правлению тока. Рассмотрим поверхность, ортогональную к системе линий тока. *Плотность тока* в какой-либо точке этой поверхности определится тогда как вектор $\mathbf{J}$, направленный вдоль линии тока, проходящей через эту точку, и равный по величине заряду, который проходит через единичную площадку в окрестности этой точки за единицу времени. С другой стороны, ток I сквозь *любую* поверхность S равен заряду, проходящему через эту поверхность в единицу времени. Если $\mathbf{n}$ единичный вектор нормали к элементу Δa поверхности S , то мы имеем:

$$\Delta I = \mathbf{J} \mathbf{n} \Delta a. \quad (4)$$

Поскольку Δa — макроскопический элемент площади, то уравнение (4) не определяет плотность тока как непрерывную функцию положения математически строго; но опять-таки мы можем представить распределение тока подобной функцией без допущения заметной ошибки. Полный ток через поверхность S будет тогда:

$$I = \int_S \mathbf{J} \mathbf{n} da. \quad (5)$$

Так как электрический заряд может быть как положительным, так и отрицательным, то необходимо условиться, какой ток считать положительным. Если поток через элемент площади состоит из положительных зарядов, вектор скорости которых образует с положительным направлением нормали $\mathbf{n}$ угол, меньший 90° , то говорят, что ток положителен. Если угол больше 90° , то ток отрицателен. Аналогично, если угол меньше 90° , но заряды отрицательны, то ток через элемент отрицателен. В случае металлических проводников носителями электрического заряда являются отрицательные электроны, и поэтому направление вектора плотности тока противоположно направлению движения электронов.

Предположим теперь, что поверхность S в уравнении (5) замкнутая. В дальнейшем мы будем считать, как это обычно принято, что *положительная нормаль к замкнутой поверхности направлена наружу*. Из определения тока, как потока заряда через поверхность, следует, что поверхностный интеграл нормальной компоненты $\mathbf{J}$ по поверхности S должен быть мерой убыли заряда из области, расположенной внутри поверхности S . У нас нет экспериментальных фактов, указывающих на возможность возникновения или исчезновения зарядов в макроскопических количествах при обычных условиях. Мы можем поэтому написать:

$$\oint_S \mathbf{J} \mathbf{n} da = - \frac{d}{dt} \int_V \rho dv \quad (6)$$

(где V — объём, охватываемый поверхностью S), в качестве уравнения, выражающего *закон сохранения заряда*. Поток зарядов через какую-либо поверхность может возникнуть двумя путями. Либо поверхность S может быть фиксирована в пространстве, а плотность ρ может быть некоторой функцией времени, равно как и координат, либо же плотность заряда постоянна во времени, тогда как поверхность S движется каким-либо определённым образом. В последнем случае правый интеграл в уравнении (6) является функцией времени благодаря тому, что меняются со временем пределы интегрирования. Если, однако, поверхность фиксирована и интеграл сходится, то мы можем ввести $\frac{d}{dt}$ как частную производную под знак интеграла:

$$\oint_S \mathbf{J} \mathbf{n} da = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv. \quad (7)$$

Нам представится много случаев для применения теоремы векторного анализа о дивергенции¹⁾. Пусть $A(x, y, z)$ будет какая-либо векторная функция точки, непрерывная вместе со своими первыми производными во всем объеме V и на граничной поверхности S . Поверхность S регулярна, а в остальном произвольна²⁾. Тогда можно показать, что

$$\oint_S A_n da = \int_V \operatorname{div} A dv. \quad (8)$$

Существенно то, что это соотношение может быть с удобством использовано как определение дивергенции. Для того чтобы получить значение $\operatorname{div} A$ в точке P внутри объема V , мы допустим, что поверхность S сжимается около точки P . Когда объем V станет достаточно малым, интеграл в правой части может быть заменён на $V \operatorname{div} A$, и мы получим:

$$\operatorname{div} A = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S A_n da. \quad (9)$$

Таким образом дивергенция вектора в какой-либо точке интерпретируется как интеграл его нормальной компоненты по бесконечно-малой поверхности, охватывающей эту точку, делённый на ограниченный этой поверхностью объем. Поток вектора через замкнутую поверхность является мерой силы источников, находящихся внутри этой поверхности; следовательно, дивергенция определяет силу источников в данной точке. Поскольку поверхность S сжимается около точки P , значение A в любой точке поверхности S может быть выражено аналитически через значения A и его производных в P , что делает возможным вычисление интеграла в уравнении (9). В случае прямоугольных координат это вычисление приводит к следующему выражению:

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (10)$$

Применяя эту теорему к уравнению (7), преобразуем поверхностный интеграл в объёмный:

$$\int_V \left(\operatorname{div} J + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dv = 0. \quad (11)$$

Подинтегральное выражение в (11) является непрерывной функцией координат и, следовательно, должна существовать достаточно малая область, в пределах которой оно не меняет знака. Так как интеграл (11) исчезает для произвольного объема V , то подинтегральное выражение должно обращаться в нуль тождественно. Дифференциальное уравнение

$$\operatorname{div} J + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (12)$$

¹⁾ Теорема Гаусса. Прим. ред.

²⁾ Регулярный элемент дуги представляется в параметрической форме уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, причём в интервале $a \leq t \leq b$ x , y , z есть непрерывные однозначные функции t с непрерывными производными всех порядков, если только не установлены иные ограничения. Регулярная кривая состоит из конечного числа подобных дуг, соединённых конец к концу, но так, что кривая сама себя не пересекает. Таким образом регулярная кривая не имеет двойных точек и является кусочно дифференцируемой. Элемент регулярной поверхности есть участок поверхности, проекция которого на выбранную соответствующим образом плоскость является внутренней областью замкнутой регулярной кривой. Отсюда следует, что он сам себя не пересекает. См. Kellogg, Foundations of Potential Theory, стр. 97, Springer, 1929.

выражает закон сохранения заряда в окрестности какой-либо точки. По аналогии с подобным соотношением в гидродинамике, уравнение (12) часто называют *уравнением непрерывности*.

Если в каждой точке определённого объёма плотность заряда постоянна во времени, то ток, входящий в объём через ограничивающую его поверхность, должен быть всё время равен току, выходящему наружу. Для ограничивающей объём поверхности мы имеем тогда:

$$\oint_S \mathbf{J} n \, da = 0, \quad (13)$$

а для любой точки внутри:

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0. \quad (14)$$

Движение, характеризуемое векторными или скалярными величинами, не зависящими от времени, называется постоянным или стационарным. Таким образом, стационарное течение электричества определяется вектором $\mathbf{J}$, который в каждой точке области постоянен по величине и направлению. Из того, что дивергенция такого распределения тока всюду равна нулю, следует, что в стационарном состоянии все линии или нити тока замкнуты сами на себя. Поле вектора $\mathbf{J}$ является соленоидальным.

1.3. Дивергенция векторов поля. Два дальнейших условия, которым удовлетворяют векторы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{D}$, можно вывести непосредственно из уравнений Максвелла, заметив, что дивергенция ротора любого вектора тождественно равна нулю. Взяв дивергенцию уравнения (1), мы получаем:

$$\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (15)$$

Перестановка операторов div и $\frac{\partial}{\partial t}$ допустима потому, что, по предположению, в обыкновенной точке поля вектор $\mathbf{B}$ непрерывен со всеми своими производными. Из (15) следует, что в любой точке поля дивергенция $\mathbf{B}$ постоянна. Если поле когда-либо в прошлом отсутствовало, то эта постоянная должна быть равна нулю, и так как разумно предположить, что первоначальное возникновение поля произошло не бесконечно давно, то мы заключаем, что

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (16)$$

откуда следует, что поле вектора $\mathbf{B}$ соленоидально.

Подобным же образом дивергенция уравнения (2) приводит к уравнению

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad (17)$$

или, в силу (12),

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \mathbf{D} - \rho) = 0. \quad (18)$$

Опять-таки, если мы допустим, что в какой-либо период времени в прошлом или в будущем поле может исчезать, то необходимо

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho. \quad (19)$$

Следовательно, заряды, распределённые с плотностью ρ , являются источниками вектора $\mathbf{D}$.

Уравнения с дивергенциями (16) и (19) часто включаются в систему уравнений Максвелла. Необходимо отметить, однако, что если принять закон сохранения заряда, то эти соотношения не являются независимыми.

1.4. Интегральная форма уравнений поля. Свойства электромагнитного поля, которые были охарактеризованы дифференциальными уравнениями (1), (2), (16) и (19), могут быть также выражены эквивалентной системой интегральных соотношений. Для получения этой эквивалентной системы мы применим вторую основную теорему векторного анализа.

Согласно теореме Стокса, циркуляция вектора, взятая по любому замкнутому контуру, может быть преобразована в интеграл по поверхности, опирающейся на этот контур. Контур C должен быть либо регулярным, либо разложимым на конечное число регулярных дуг; с другой стороны, предполагается, что произвольная поверхность S , опирающаяся на контур C , является двусторонней и может быть разбита на конечное число регулярных элементов. Положительная сторона поверхности S сопоставлена с положительным направлением обхода по контуру C путём обычного условия: для наблюдателя, движущегося по контуру C в положительном направлении, положительная сторона поверхности S должна находиться с левой стороны. Тогда, если $A(x, y, z)$ — векторная функция точки, непрерывная вместе со своими производными во всех точках S и C , то можно показать, что

$$\oint_C A ds = \int_S \text{rot} A n da, \quad (20)$$

где ds — элемент длины вдоль C , а n — единичный вектор нормали к положительной стороне элемента площади da . Это преобразование можно рассматривать так же, как уравнение, определяющее ротор. Для определения значения $\text{rot} A$ в точке P на поверхности S мы предположим, что контур C стягивается около точки P , пока опирающаяся на него поверхность S не сведётся к бесконечно малому элементу плоскости, нормаль к которой определяется направлением n . Интеграл с правой стороны равен $\text{rot} A n S$ плюс бесконечно малые более высокого порядка; следовательно, проекция вектора $\text{rot} A$ на направление нормали будет

$$\text{rot} A n = \lim_{C \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_C A ds. \quad (21)$$

Ротор вектора в какой-либо точке интерпретируется, таким образом, как циркуляция вектора по охватывающему эту точку бесконечно малому контуру на поверхности, отнесённая к единице выделяемой контуром площади. Так как вектор A , по предположению, является аналитическим в окрестности точки P ; то его значение в любой точке на C может быть выражено через значения A и его производных в точке P , так что вычисление интеграла в (21) по бесконечно малому контуру может быть действительно проведено. В частности, если элемент S ориентирован параллельно координатной плоскости y, z , то для x -компоненты ротора получается

$$(\text{rot} A)_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}. \quad (22)$$

Поступая подобным же образом с y и z компонентами, мы получаем:

$$\begin{aligned} \text{rot} A &= i \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + j \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + k \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = \\ &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (23)$$

Проинтегрируем теперь нормальную компоненту вектора $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ по произвольной регулярной поверхности S , опирающейся на контур C . Из (1) и (20) следует, что

$$\oint_C \mathbf{E} ds + \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \mathbf{n} da = 0. \quad (24)$$

Если контур C фиксирован, то оператор $\frac{\partial}{\partial t}$ можно вынести из-под знака интеграла:

$$\oint_C \mathbf{E} ds = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \mathbf{n} da. \quad (25)$$

По определению, величина

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \mathbf{n} da \quad (26)$$

является магнитным потоком, или, точнее, потоком вектора $\mathbf{B}$ через поверхность S . Согласно уравнению (25), циркуляция вектора $\mathbf{E}$ по любой замкнутой регулярной кривой равна скорости уменьшения во времени магнитного потока через любую поверхность, опирающуюся на эту кривую. Соотношение между направлением обхода контура и положительной нормалью к поверхности, опирающейся на этот контур, иллюстрирует рис. 1. Положительное направление обхода контура C выбирается произвольно, и поток Φ получается тогда положительным или отрицательным, в зависимости от направления линий вектора $\mathbf{B}$ по отношению к нормали. Скорость изменения Φ в свою очередь положительна или отрицательна, в зависимости от того, уменьшается или увеличивается положительный поток.

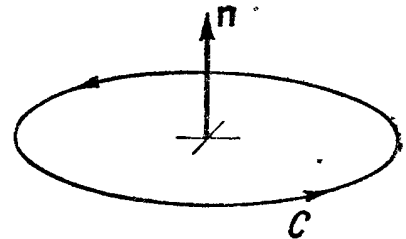


Рис. 1. Связь между положительным направлением нормали $\mathbf{n}$ к площадке и направлением обхода контура C , ограничивающего эту площадку.

Напомним, что применение теоремы Стокса к уравнению (1) законно только в том случае, если вектор $\mathbf{E}$ и его производные непрерывны во всех точках поверхности S и контура C . Поскольку разрывы непрерывности обоих векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ встречаются при переходе через поверхности, отмечающие резкие изменения физических свойств среды, то может возникнуть вопрос о том, в какой мере уравнение (25) выражает общий закон электромагнитного поля. Предположим, например, что контур охватывает замкнутый сердечник трансформатора, или проходит через него. Для того чтобы обойти эту трудность, можно представить себе, что на поверхности любого помещенного в поле материального тела физические свойства меняются хотя и очень быстро, но *непрерывно*, в тонком поверхностном слое, от значений с внутренней стороны граничной поверхности, до значений с внешней её стороны. Таким путём мы исключаем из поля все разрывы непрерывности, и уравнение (25) может быть применено к любому замкнутому контуру.

Опыты Фарадея показали, что соотношение (25) выполняется независимо от причины изменения потока. Частная производная предполагает переменную плотность потока, пронизывающего фиксированный контур. Однако полный поток может меняться также благодаря деформации контура. Для того чтобы это учесть, закон Фарадея обычно пишут в форме:

$$\oint_C \mathbf{E} ds = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \mathbf{n} da. \quad (27)$$

Можно показать, что уравнение (27) действительно является следствием дифференциальных уравнений поля, однако доказательство должно быть основано на электродинамике движущихся тел, которой мы коснёмся в разделе 1.22.

Таким же точно путём уравнение (2) может быть заменено интегральным соотношением:

$$\oint_C \mathbf{H} ds = I + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{Dn} da, \quad (28)$$

где I — полный ток, охватываемый контуром, как определено уравнением (5). В стационарном состоянии интеграл справа равен нулю, и ток проводимости I через любую регулярную поверхность равен циркуляции вектора $\mathbf{H}$ по контуру, на который она опирается. Если, однако, поле переменное, то с вектором $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ связано точно такое же поле $\mathbf{H}$, какое было бы вызвано токами, распределёнными с плотностью

$$\mathbf{J}' = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (29)$$

Этой величине Максвелл дал название «тока смещения» — термин, которым мы будем пользоваться от случая к случаю; пока мы не возьмём на себя ответственности за какую-либо конкретную интерпретацию вектора $\mathbf{D}$.

Два оставшихся уравнения поля (16) и (19) могут быть выражены в эквивалентной интегральной форме с помощью теоремы о дивергенции. Мы получаем соотношение

$$\oint_S \mathbf{Bn} da = 0, \quad (30)$$

означающее, что полный поток вектора $\mathbf{B}$ через любую замкнутую регулярную поверхность равен нулю, и соотношение

$$\oint_S \mathbf{Dn} da = \int_V \rho dv = q, \quad (31)$$

что означает то, что поток вектора $\mathbf{D}$ через замкнутую поверхность равен полному заряду q , содержащемуся внутри неё. Кружок на знаке интеграла используется для того, чтобы подчеркнуть, что контур или поверхность замкнуты.

МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАТЕРИИ

1.5. Абсолютные проницаемости ϵ и μ . Единственное предположение, которое было до сих пор сделано, состоит в том, что электромагнитное поле может быть охарактеризовано четырьмя векторами $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$, которые в обыкновенных точках удовлетворяют уравнениям Максвелла, и что распределение токов, порождающее это поле, обеспечивает сохранение заряда. Между пятью векторами $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{J}$ имеются только два независимых соотношения (уравнения (1) и (2) предыдущего раздела) и поэтому мы должны наложить дальнейшие условия, если хотим сделать систему полной.

Начнём с предположения, что в любой данной точке поля, как в свободном пространстве, так и внутри материи, вектор $\mathbf{D}$ может быть представлен как функция $\mathbf{E}$, а вектор $\mathbf{H}$ как функция $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{B}). \quad (1)$$

Характер этих функциональных соотношений должен определяться исключительно физическими свойствами среды в непосредственной окрестности рассматриваемой точки. Наиболее часты следующие простые случаи.

1. В свободном пространстве $\mathbf{D}$ отличается от $\mathbf{E}$ только постоянным множителем, как и $\mathbf{H}$ от $\mathbf{B}$. Следуя традиции, мы будем писать:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}. \quad (2)$$

Числовые значения и размерности констант ϵ_0 и μ_0 будут зависеть от принятой системы единиц. Лишь в одной из многих, совершенно произвольных систем, $\mathbf{D}$ в свободном пространстве сводится к $\mathbf{E}$, а $\mathbf{H}$ к $\mathbf{B}$.

2. Если физические свойства тела в окрестности любой внутренней точки одинаковы по всем направлениям, то говорят, что тело *изотропно*. В каждой точке изотропной среды $\mathbf{D}$ параллельно $\mathbf{E}$, а $\mathbf{H}$ параллельно $\mathbf{B}$. Более того, почти во всех разрешимых задачах электромагнитной теории соотношения между векторами являются *линейными*. Для случая изотропной среды, принимая линейные зависимости, мы положим поэтому

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}. \quad (3)$$

Множители ϵ и μ называются абсолютными диэлектрической и магнитной проницаемостями среды. Безразмерные отношения

$$\chi_e = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}, \quad \chi_m = \frac{\mu}{\mu_0} \quad (4)$$

не зависят от выбора единиц и их мы будем называть относительными диэлектрической и магнитной проницаемостями ¹⁾. Свойства *однородной* среды постоянны от точки к точке, и в этом случае принято называть χ_e диэлектрической постоянной, а χ_m проницаемостью. Однако в общем случае, диэлектрическую и магнитную проницаемости надо рассматривать как скалярные функции точки, которые и характеризуют электромагнитные свойства материи.

3. Свойства *анизотропной* среды различны по разным направлениям в данной точке. В этом случае векторы $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$ параллельны только вдоль определённых выделенных осей. Если можно предполагать, что соотношения всё ещё линейны, как это бывает в большинстве случаев, то мы можем выразить каждую прямоугольную компоненту $\mathbf{D}$ в виде линейной функции трёх компонент $\mathbf{E}$:

$$\left. \begin{aligned} D_x &= \epsilon_{11}E_x + \epsilon_{12}E_y + \epsilon_{13}E_z, \\ D_y &= \epsilon_{21}E_x + \epsilon_{22}E_y + \epsilon_{23}E_z, \\ D_z &= \epsilon_{31}E_x + \epsilon_{32}E_y + \epsilon_{33}E_z; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

коэффициенты ϵ_{ik} этого линейного преобразования являются компонентами симметричного тензора. Аналогичное соотношение может быть установлено и между векторами $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$, но случаи подобной линейной анизотропии редки в задачах, которые могут быть названы макроскопическими по существу.

¹⁾ Автор пользуется терминами *inductive capacities* для ϵ и μ и *specific inductive capacities* для χ_e и χ_m . Первые названы при переводе абсолютными проницаемостями, а вторые — относительными. Отклонение от обычной терминологии допущено только в отношении χ_e , которую у нас принято называть диэлектрической постоянной даже при наличии зависимости от координат. *Прим. ред.*

Нигде различие между микроскопической и макроскопической точками зрения не проявляется острее, чем в интерпретации параметров ϵ и μ или их тензорных эквивалентов. Микроскопическая теория должна вывести физические свойства материи из её атомной структуры. Она должна давать возможность вычислять, не только среднее поле, превалирующее внутри тела, но также и его локальные значения в окрестности отдельных атомов. Она должна сказать нам, как будет деформироваться атом под влиянием этого местного поля, и как совокупный эффект этих атомных деформаций может быть в целом представлен с помощью таких параметров, как ϵ и μ .

С этой точки зрения мы занимаемся только описанием. Наше знание материи является, если воспользоваться громким словом, чисто феноменологическим. Каждое вещество характеризуется в отношении электромагнитных свойств с помощью минимального числа параметров. Зависимость параметров ϵ и μ от таких физических переменных, как плотность, температура и частота, устанавливается экспериментально. Данные, получаемые из подобных измерений, проливают свет на характер внутренней структуры материи, но эта внутренняя структура нас здесь не интересует.

1.6. Электрическая и магнитная поляризации. Для описания электромагнитного состояния элемента материи оказывается удобным ввести два дополнительных вектора. Мы *определим* векторы электрической и магнитной поляризации посредством уравнений:

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{M} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{H}. \quad (6)$$

Таким образом, векторы поляризации связаны только с материей и исчезают в случае пустого пространства. С помощью этих соотношений мы теперь исключим векторы $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ из уравнений поля. В результате получаем систему:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mu_0 \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{M} \right), \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0; \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho - \operatorname{div} \mathbf{P}), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

которую мы можем интерпретировать следующим образом: *присутствие в электромагнитном поле твёрдых материальных тел может быть полностью учтено с помощью эквивалентного распределения зарядов с плотностью $-\operatorname{div} \mathbf{P}$ и эквивалентного распределения токов с плотностью $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{M}$.*

В изотропной среде векторы поляризации параллельны соответствующим векторам поля и, за исключением ферромагнитных тел, пропорциональны им. Электрическая и магнитная восприимчивости χ_e и χ_m определяются соотношениями:

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}; \quad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}. \quad (8)$$

Рассуждая логически, магнитную поляризацию $\mathbf{M}$ следовало бы положить пропорциональной $\mathbf{B}$. Однако традиция связывает $\mathbf{M}$ с $\mathbf{H}$ и, чтобы избежать путаницы в вопросе, не имеющем большого значения, мы присоединяемся к этой условности. Восприимчивости χ_e и χ_m , определенные соотношениями (8), представляют собой безразмерные отношения, числовые значения которых не зависят от употребляемой системы единиц. В своё время будет показано, что $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ являются силовыми векторами, и в этом смысле основными.

$\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ — производные векторы, связанные с состоянием материи. Вектор поляризации $\mathbf{P}$ имеет размерность $\mathbf{D}$, но не $\mathbf{E}$, в то время как $\mathbf{M}$ и $\mathbf{H}$ имеют одну и ту же размерность. Из (3), (6) и (8) непосредственно следует, что восприимчивости связаны с диэлектрической и магнитной проницаемостями следующими уравнениями:

$$\chi_e = \epsilon - 1, \quad \chi_m = \mu - 1. \quad (9)$$

В анизотропной среде восприимчивости выражаются компонентами тензора.

Частью нашей задачи в последующих главах будет установление экспериментов, с помощью которых можно точно измерить восприимчивость среды. Подобные измерения показывают, что электрическая восприимчивость всегда положительна. В газах она порядка 0,0006 (воздух), но в жидкостях может достигать значений порядка 80 (вода). На внутреннее различие в природе векторов $\mathbf{P}$ и $\mathbf{M}$ указывает тот факт, что магнитная восприимчивость χ_m может быть как положительна, так и отрицательна. Вещества, характеризующиеся положительной восприимчивостью, называются *парамагнитными*, в то время как вещества, магнитная восприимчивость которых отрицательна, называются *диамагнитными*. Металлы ферромагнитной группы, включая железо, кобальт, никель и их сплавы, составляют особый класс веществ с очень большой положительной восприимчивостью, численное значение которой может быть порядка многих тысяч. Ввиду нелинейности соотношения между $\mathbf{M}$ и $\mathbf{H}$, свойственной этим материалам, восприимчивость χ_m должна быть теперь интерпретирована как тангенс угла наклона касательной к кривой $\mathbf{M} - \mathbf{H}$ в точке, соответствующей данному значению $\mathbf{H}$. Чтобы включить и такие случаи, определение восприимчивости обобщается следующим образом:

$$\chi_m = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{H}}. \quad (10)$$

Восприимчивости всех неферромагнитных материалов, как парамагнитных, так и диамагнитных, настолько малы, что ими можно пренебрегать в большинстве практических случаев.

Поскольку до сих пор предполагалось, что существует функциональная связь между векторами $\mathbf{P}$ или $\mathbf{M}$ и приложенным полем, постольку их следовало бы называть *индуцированными* поляризациями. Однако при определенных условиях с ферромагнитным телом может быть связано поле и в отсутствие какого-либо внешнего возбуждения. В этих случаях говорят, что тело находится в состоянии постоянного намагничивания. Мы будем придерживаться нашего первоначального предположения, что поле как внутри, так и вне магнита полностью определяется векторами $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$. Но теперь во внутренних точках эти векторы разнятся на *заданный* вектор $\mathbf{M}_0$, который может быть назван плотностью намагничивания, и который не связан никакой функциональной зависимостью с $\mathbf{H}$. Наоборот, намагничивание $\mathbf{M}_0$ должно быть интерпретировано как источник поля. Если внешнее поле накладывается на поле постоянного магнита, интенсивность намагничивания должна будет увеличиться благодаря индуцированной поляризации $\mathbf{M}$. В любой внутренней точке мы будем иметь, следовательно:

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M} + \mathbf{M}_0). \quad (11)$$

Об индуцированной поляризации мы можем пока сказать лишь то, что она является функцией результирующего поля $\mathbf{H}$ в той же точке. Соотношение между результирующим полем внутри тела и интенсивностью приложенного поля, возбуждаемого внешними источниками, зависит не только от намагничивания $\mathbf{M}_0$, но также и от формы тела. Нам представится случай для более тщательного изучения этого вопроса в главе IV.

1.7. Проводящая среда. Теперь необходимо добавить к уравнениям Максвелла третье и последнее эмпирическое соотношение — соотношение между плотностью тока и полем. Мы предположим, что в любой точке жидкости или твёрдого тела плотность тока является функцией поля E :

$$J = J(E). \quad (12)$$

Распределение токов в ионизированной газообразной среде может зависеть и от интенсивности магнитного поля. Но так как электромагнитные явления в газовом разряде определяются множеством других факторов, не учтённых в настоящей теории, то подобные случаи мы исключим из дальнейшего рассмотрения¹⁾.

В высшей степени широком диапазоне условий как в случае твёрдых тел, так и в случае слабо ионизированных растворов, соотношение (12) оказывается линейным:

$$J = \sigma E. \quad (13)$$

Множитель σ называется *проводимостью* среды. Разграничение между хорошими и плохими проводниками — или изоляторами — относительно и произвольно. Все вещества в некоторой степени обладают проводимостью, но область наблюдаемых значений σ необычайно велика. Проводимость меди, например, в 10^7 раз больше, чем проводимость такого «хорошего» проводника, как морская вода, и в 10^{19} раз больше, чем обыкновенного стекла. В приложении III можно найти таблицу проводимостей наиболее типичных материалов.

Уравнение (13) является просто законом Ома. Представим себе, например, стационарное распределение тока во всём объёме какой-либо проводящей среды. В силу соленоидального характера потока, это распределение может быть представлено замкнутыми линиями тока. Если a и b — две точки на какой-либо определённой линии тока и ds — элемент её длины, то мы имеем:

$$\int_a^b E ds = \int_a^b \frac{J}{\sigma} ds. \quad (14)$$

Пучок смежных линий тока, проходящих через замкнутую кривую, составляет нить, или трубку тока. Так как поток соленоидален, то сила тока I через любое поперечное сечение нити тока одна и та же. Пусть S будет площадь поперечного сечения нити тока, проведённого нормально к направлению потока. Площадь S не должна быть обязательно бесконечно малой, но предполагается, что она настолько мала, что плотность тока всюду на ней постоянна. Тогда $SJds = Ids$ и

$$\int_a^b E ds = I \int_a^b \frac{1}{\sigma S} ds. \quad (15)$$

Множитель

$$R = \int_a^b \frac{1}{\sigma S} ds \quad (16)$$

равен сопротивлению нити между точками a и b . Сопротивление вытянутого однородного проводника постоянного поперечного сечения S и длины l

¹⁾ Хотя и справедливо, что распределение токов в жидкости или твёрдом теле может быть изменено наложением магнитного поля, но величина этого эффекта, так называемого эффекта Холла, настолько мала, что им можно пренебречь без допущения заметной ошибки.

будет:

$$R = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{S}, \quad (17)$$

формула, которая строго справедлива только в случае стационарных токов.

В области с проводимостью, не равной нулю, не может быть постоянного распределения свободных зарядов. Эта чрезвычайно важная теорема легко может быть доказана, если среда однородна и такова, что соотношения между D и E и J и E линейны. По уравнению непрерывности:

$$\operatorname{div} J + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div} \sigma E + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (18)$$

С другой стороны, в однородной среде

$$\operatorname{div} E = \frac{1}{\epsilon} \rho, \quad (19)$$

что, совместно с (18), даёт

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon} \rho = 0. \quad (20)$$

Откуда, плотность заряда в момент времени t будет:

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t}, \quad (21)$$

где константа интегриации ρ_0 равна плотности заряда в момент $t=0$. Заряд, распределённый первоначально по всему проводнику, в каждой точке убывает со временем экспоненциально, причём по закону, совершенно не зависящему от приложенного поля. Если первоначально плотность зарядов была равна нулю, то она будет оставаться равной нулю и в будущем.

Промежуток времени

$$\tau = \frac{\epsilon}{\sigma}, \quad (22)$$

необходимый для того, чтобы заряд в какой-либо точке уменьшился до $1/e$ от своей первоначальной величины, называется *временем релаксации*. Во всех, даже плохих, проводниках τ необычайно мало. Так, в морской воде время релаксации порядка $2 \cdot 10^{-10}$ сек.; даже в таком плохом проводнике, как дистиллированная вода, оно не более чем 10^{-6} сек. В лучших изоляторах, как, например, плавленый кварц, оно может, тем не менее, принимать значения, превосходящие 10^6 сек. — иллюстрация необычайно широкого диапазона возможных значений параметра σ .

Предположим, что в момент $t=0$ заряд сконцентрирован внутри небольшой сферической области, находящейся где-либо внутри проводящего тела. Во всякой другой точке проводника плотность заряда равна нулю. Заряд внутри сферы начинает теперь экспоненциально исчезать, но, согласно (21), нигде *внутри* проводника заряд появиться вновь не может. Куда же он девается? Поскольку заряд сохраняется, уменьшение заряда внутри сферической поверхности должно сопровождаться потоком электричества наружу, или током. Заряд не может накапливаться ни в одной внутренней точке; следовательно, поток должен быть соленоидальным. Заряд будет задерживаться, однако, на наружной поверхности проводника и здесь-то мы и найдём тот заряд, который исчез из центральной сферы. Этот поверхностный заряд появляется в точности в тот момент, когда внутренний заряд начинает исчезать, поскольку полный заряд является постоянным.

ЕДИНИЦЫ И РАЗМЕРНОСТИ

1.8. MKS-система или система Джорджи. До сих пор электромагнитное поле являлось у нас всего лишь совокупностью векторов, подчиняющихся постулированной системе дифференциальных уравнений. Для того чтобы следовать дальше, мы должны установить физические размерности этих векторов и условиться относительно единиц, которыми они измеряются.

В обычном смысле «абсолютная» система единиц есть такая система, в которой любая величина может быть измерена или выражена через три основные величины — массу, длину и время. Но в электромагнитной теории имеется существенный произвол в отношении размерностей, который вносят множители ϵ_0 и μ_0 , связывающие соответственно D с E и H с B в пустом пространстве. Пока ещё не придумано опыта, с помощью которого можно было бы присвоить размерность либо ϵ_0 , либо μ_0 , как неким независимым физическим сущностям. С другой стороны, из уравнений поля непосредственно следует, что величина

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (1)$$

должна иметь размерность скорости и любой выбор ϵ_0 и μ_0 должен подчиняться этому ограничению. Величина этой скорости не может быть подсчитана *a priori*, но может быть определена с помощью подходящего опыта. Значение, полученное по методу Роза и Дорсей в Бюро стандартов и исправленное Кэртисом ¹⁾ в 1929 г., составляет:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2,99790 \cdot 10^8 \text{ м/сек} \quad (2)$$

или, для всех практических целей:

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/сек.} \quad (3)$$

В течение всей ранней истории электромагнитной теории во всех научных исследованиях пользовались абсолютной *электромагнитной системой* единиц. В этой системе сантиметр принимался за единицу длины, грамм за единицу массы, секунда за единицу времени, а в качестве четвёртой единицы избирался множитель μ_0 , произвольно принимавшийся равным единице и считавшийся безразмерным. Размерность ϵ_0 однозначно определяется тогда из соотношения (1) и можно показать, что единицы и размерности всякой другой величины, вводимой в теорию, могут быть выражены через сантиметры, граммы, секунды и μ_0 . К несчастью, эта абсолютная система оказалась не в состоянии удовлетворить нуждам практики. Единицы сопротивления и электродвижущей силы были, например, слишком малы. Для устранения этого дефекта была принята *практическая система* единиц. Каждая единица практической системы имеет размерность соответствующей электромагнитной единицы и отличается от неё по величине на степень десяти, которая, по крайней мере в случае напряжения и сопротивления, совершенно произвольна. Практические единицы имеют большое преимущество благодаря их удобной величине и поэтому они теперь повсеместно используются для технических измерений и вычислений. Поскольку они определены как произвольные кратные абсолютных единиц, они не составляют абсолютной системы. В настоящее время величины массы, длины и

¹⁾ Rosa and Dorsey, A New Determination of the Ratio of the Electrostatic Unit of Electricity, *Bur. Standarts, Bull.* 3, 433 (1907). Curtis, *Bur. Standarts. J. Research.* 3, 63 (1929).

времени являются фундаментальными исключительно потому, что физически нашли удобным возвести их в этот ранг. То обстоятельство, что должны существовать и другие фундаментальные величины, очевидно из того факта, что все электромагнитные единицы не могут быть выражены только через эти три. Ограничение применения термина «абсолютная» только к системам, основанным на массе, длине и времени, является поэтому совершенно необоснованным; от подобной системы можно требовать только того, чтобы она была внутренне последовательна, и чтобы любая величина определялась через минимальное количество основных независимых единиц. Антипатия физиков прошлого к практической системе электрических единиц основывалась не на какой-нибудь твёрдой уверенности в святости массы, длины и времени, а скорее на отсутствии внутренней последовательности в этой системе.

К счастью, было найдено наиболее удовлетворительное решение этой трудности. В 1901 г. Джорджи¹⁾, разрабатывая идею, первоначально высказанную ещё Максвеллом, обратил внимание на тот факт, что практическая система может быть превращена в абсолютную путём соответствующего выбора основных единиц. Действительно, необходимо только выбрать за единицу длины интернациональный *метр*, за единицу массы *килограмм*, за единицу времени *секунду*, а за четвертую единицу — любую электрическую величину, принадлежащую к практической системе, как, например, кулон, ампер или ом. Тогда из уравнений поля можно вывести единицу и размерность любой электромагнитной величины, выраженную через эти четыре основные единицы. Более того, производные величины будут относиться друг к другу точно так же, как и в практической системе, и могут быть поэтому выражены через практические единицы. В частности, было найдено, что параметр μ_0 должен иметь значение $4\pi \cdot 10^{-7}$, а значение ϵ_0 может быть подсчитано тогда из уравнения (1). Наоборот, с таким же успехом можно *принять* это значение μ_0 за четвертую основную единицу, и затем вывести весь ряд практических единиц из уравнений поля.

На пленарной сессии Международной электротехнической комиссии (М. Э. К.) в июне 1935 г. единогласно была принята система MKS, предложенная Джорджи. Один вопрос необходимо, однако, ещё разрешить. По поводу четвертой основной единицы никакого официального соглашения пока не достигнуто. Сам Джорджи рекомендовал ввести в качестве основной величины *ом*, стандарт которого установлен как сопротивление определённого столба ртути при определённых условиях давления и температуры. Если $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ выбрано в качестве четвертой единицы и принято безразмерным, то все производные величины могут быть выражены только через массу, длину и время, причём размерность каждой из них будет тождественна с размерностью соответствующей величины в абсолютной электромагнитной системе и системы будут различаться только численными значениями единиц. Это предположение приводит, однако, к дробным показателям в выражениях размерности многих величин, в прямом соответствии с нашим произволом в выборе массы, длины и времени в качестве единственных основных единиц. В абсолютной электромагнитной системе размерность заряда, например, есть $\text{грамм}^{1/2} \cdot \text{сантиметр}^{1/2}$, — иррациональность, которая едва ли может иметь физический смысл. Эти дробные показатели совер-

¹⁾ Giorgi, Unità Razionali di Elettromagnetismo, *Atti dell' A. E. I.* (1901). Исторический обзор развития практической системы, включающий отчёт о мероприятиях, предпринятых в 1935 г. на совещании Международной электротехнической комиссии и обширную библиографию, дан Кеннелли, *J. Inst. Elec. Engrs.* 78. 235—245 (1936). См. также Glazebrook, The MKS System of Electrical Units. *J. Inst. Elec. Engrs.* 78, 245—247.

шенно исключаются, если мы выберем в качестве четвертой единицы кулон; по этой причине, в разное время заряд выдвигался в качестве основной величины, совершенно независимо от вопроса о численном значении этой величины¹⁾. В этой книге мы будем придерживаться исключительно системы метр — килограмм — секунда — кулон. Если в будущем М. Э. К. изберёт в качестве основной другую электрическую величину, то это никак не повлияет на величину наших единиц или на форму уравнений²⁾.

Чтобы показать, что предложенные единицы образуют внутренне последовательную систему, рассмотрим нижеследующие примеры. Единица тока в системе MKS — абсолютный ампер, а единица сопротивления — абсолютный ом. Эти величины таковы, что работа, расходуемая каждую секунду током силою в 1 ампер, проходящим по сопротивлению в 1 ом, будет 1 джоуль (абсолютный). Если R — сопротивление участка проводника, по которому проходит постоянный ток силою в I ампер, то работа, рассеиваемая в виде тепла, в t секунд будет:

$$W = I^2 R t \text{ джоулей.} \quad (4)$$

Возникающее тепло может быть измерено с помощью калориметра, и таким образом можно определить количество электрической энергии, приходящееся на единицу количества тепла. Желательно, чтобы джоуль, определённый уравнением (4), был идентичен с джоулем, определённым как единица механической работы, т. е. чтобы и в электрическом, и в механическом случае имело место соотношение:

$$1 \text{ джоуль} = 0,2389 \text{ грамм-калорий (средних).} \quad (5)$$

Теперь, на основании уравнения непрерывности (6) (стр. 18) мы *определим* ампер как силу тока, который переносит через какую-либо поверхность 1 кулон в 1 секунду. Тогда ом будет *производной* единицей, величина и размерность которой определяются уравнением (4):

$$1 \text{ ом} = 1 \frac{\text{ватт}}{\text{ампер}^2} = 1 \frac{\text{килограмм метр}^2}{\text{кулон}^2 \text{ секунда}}, \quad (6)$$

так как 1 ватт равен 1 джоуль/сек. Удельное сопротивление среды определяется как сопротивление, измеренное между параллельными гранями единичного куба. Обратная величина есть проводимость. Размерность σ следует из уравнения (17), стр. 27:

$$1 \text{ единица проводимости} = \frac{1}{\text{ом метр}} = 1 \frac{\text{кулон}^2 \text{ секунда}}{\text{килограмм метр}^3}. \quad (7)$$

В Соединённых Штатах обратный ом, обычно называется «мо», но название, официально принятое М.Э.К. для обратного ома — *сименс*. Таким образом, единицей проводимости является 1 сименс/метр.

Вольт будет определяться просто как ватт/ампер, или

$$1 \text{ вольт} = 1 \frac{\text{ватт}}{\text{ампер}} = 1 \frac{\text{килограмм метр}^2}{\text{кулон секунда}^2}. \quad (8)$$

¹⁾ См. дискуссию у Wallot, *Elektrotechnische Zeitschrift*, № 44—46 (1922), а также: Sommerfeld, Ueber die Elektromagnetischen Einheiten, 157—165 и Zeeman Verhandelingen, Martinus Nijhoff, The Hague, 1935; *Physik. Z.* 36, 814—820 (1935).

²⁾ Пока не было принято никаких постановлений по вопросу о рационализации единиц и, повидимому, мнения разделяются поровну за и против. Если основывать теорию на уравнениях Максвелла, то определённо представляется выгодным опустить множитель 4π , который стоит перед плотностями заряда и тока в нерационализованной системе. В этой книге мы будем пользоваться рациональной системой единиц.

Так как единица плотности тока 1 ампер/метр², то из соотношения $J = cE$ мы получаем:

$$1 \text{ единица } E = 1 \frac{\text{ватт}}{\text{ампер метр}} = 1 \frac{\text{вольт}}{\text{метр}} = 1 \frac{\text{килограмм метр}}{\text{кулон секунда}^2}. \quad (9)$$

Следовательно, энергия, выделяемая в единице объёма током плотности J будет JE ватт/метр³. Мы видим, далее, что произведение заряда на напряжённость электрического поля E имеет размерность силы. Поместим заряд в 1 кулон в электрическое поле напряжённостью 1 вольт/метр. Тогда

$$1 \text{ кулон} \times 1 \frac{\text{вольт}}{\text{метр}} = 1 \frac{\text{джоуль}}{\text{метр}} = 1 \frac{\text{килограмм метр}}{\text{секунда}^2}. \quad (10)$$

Единица силы в системе MKS называется *ньютоном* и эквивалентна 1 джоулю/метр или 10^5 дин.

Поток вектора B будет измеряться в *веберах*:

$$\Phi = \int_S B_n da \text{ вебер}, \quad (11)$$

а напряжённость поля B или плотность потока может быть выражена, следовательно, в веберах на квадратный метр. Согласно (25), стр. 21

$$\oint_C E ds = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (12)$$

Линейный интеграл $\int_a^b E ds$ измеряется в вольтах и называется, обычно, электродвижущей силой (сокращённо э.д.с.) между точками a и b , хотя его значение в случае нестационарных полей зависит от пути интегрирования. Э.д.с., индуцированная в замкнутом контуре C , равна, следовательно, скорости уменьшения потока, пронизывающего этот контур, так что между соответствующими единицами имеет место соотношение:

$$1 \text{ вольт} = 1 \frac{\text{вебер}}{\text{секунда}} \quad (13)$$

или

$$1 \text{ вебер} = 1 \frac{\text{джоуль}}{\text{ампер}} = 1 \frac{\text{килограмм метр}^2}{\text{кулон секунда}}. \quad (14)$$

Существенно отметить, что произведение тока на магнитный поток есть энергия. Заметим также, что произведение B на скорость имеет размерность вольт/метр и является, следовательно, величиной того же рода, что и E :

$$1 \text{ единица } B = 1 \frac{\text{вебер}}{\text{метр}^2} = 1 \frac{\text{килограмм}}{\text{кулон секунда}}, \quad (15)$$

$$1 \text{ единица } |B| \cdot |v| = 1 \frac{\text{вебер}}{\text{метр}^2} \times 1 \frac{\text{метр}}{\text{секунда}} = 1 \frac{\text{вольт}}{\text{метр}} = 1 \text{ единица } E. \quad (16)$$

Выведенные выше единицы образуют абсолютную систему в том смысле, что любая из них выражается через четыре основные величины — массу, длину, время и заряд. То, что эта система идентична с совокупностью практических единиц, может быть выяснено заменой:

$$1 \text{ килограмм} = 10^3 \text{ граммов}; \quad 1 \text{ метр} = 10^2 \text{ сантиметров};$$

$$1 \text{ кулон} = \frac{1}{10} \text{ абс. кулона}. \quad (17)$$

Легко видеть, что численные множители, которые тогда появятся в каждом соотношении, будут теми же, которые выражают соотношение между практическими и абсолютными электромагнитными единицами. Например, из (6):

$$1 \text{ ом} = 1 \frac{\text{килограмм метр}^2}{\text{кулон}^2 \text{ секунда}} = \frac{10^3 \text{ грамм } 10^4 \text{ сантиметр}^2}{10^2 \text{ абс. кулон}^2 \text{ секунда}} = 10^9 \text{ абс. ом} \quad (18)$$

и, опять-таки из (8):

$$1 \text{ вольт} = 1 \frac{\text{килограмм метр}^2}{\text{кулон секунда}} = \frac{10^3 \text{ грамм } 10^4 \text{ сантиметр}^2}{10^{-1} \text{ абс. кулон секунда}^2} = 10^8 \text{ абс. вольт.} \quad (19)$$

Наш ряд единиц должен быть завершён определением единиц и размерностей векторов $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$. Так как $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}$, то необходимо и достаточно, чтобы ϵ_0 и μ_0 были определены так, чтобы удовлетворялось уравнение (2) и чтобы достигалось необходимое соотношение между практическими и абсолютными единицами. Мы будем обозначать массу, длину, время и заряд буквами M , L , T и Q , соответственно, и используем знак $[A]$ для обозначения «размерности A ». Тогда из уравнения (31), стр. 22

$$\oint_S \mathbf{D} n da = q \text{ кулонов} \quad (20)$$

и, следовательно:

$$[\mathbf{D}] = \frac{\text{кулон}}{\text{метр}^2} = \frac{Q}{L^2}, \quad (21)$$

$$[\epsilon_0] = \left[\frac{\mathbf{D}}{\epsilon_e \cdot \mathbf{E}} \right] = \frac{\text{кулон}}{\text{вольт метр}} = \frac{Q^2 T^2}{ML^3}. \quad (22)$$

Фарада, производная единица ёмкости, определяется как ёмкость проводника, потенциал которого повышается на 1 вольт при сообщении ему заряда в 1 кулон. Она равна, другими словами, 1 кулон/вольт. Параметр ϵ_0 в системе MKS имеет размерность, и может быть измерен в *фарадах на метр*.

По аналогии с э. д. с., линейный интеграл $\int_a^b \mathbf{H} ds$, взятый вдоль определённого пути, обычно называется магнитодвижущей силой (сокращённо м.д.с.). В случае стационарного магнитного поля:

$$\oint_C \mathbf{H} ds = I \text{ ампер}, \quad (23)$$

где I — ток, определяемый потоком зарядов через любую поверхность, опирающуюся на замкнутый контур C . Если поле переменное, то I должно включать и ток смещения, как в (28), стр. 22. Согласно (23), магнитодвижущая сила имеет размерность тока. На практике, однако, ток часто проходит по виткам катушки или обмотки, которые охватываются контуром C . Если имеем n таких витков, несущих ток I , то полный ток, пронизывающий контур C , будет и nI ампер-витков, через которые обычно и выражают магнитодвижущую силу, хотя в отношении размерности n является просто числом.

$$[\text{м. д. с.}] = \text{ампер-витки}, \quad (24)$$

откуда

$$[\mathbf{H}] = \frac{\text{ампер-витки}}{\text{метр}} = \frac{Q}{LT}. \quad (25)$$

Отсюда видно, что размерность $\mathbf{D}$ и размерность $\mathbf{H}$, делённая на скорость, совпадают. Для параметра μ_0 находим:

$$[\mu_0] = \left[\frac{\mathbf{B}}{\kappa_m \mathbf{H}} \right] = \frac{\text{вольт секунда}}{\text{ампер метр}} = \frac{ML}{Q^2}. \quad (26)$$

Как и в случае ϵ_0 , удобно выражать μ_0 посредством производной единицы, в данном случае *генри*, определяемом как 1 вольт секунда/ампер (генри — это такая индуктивность, при которой изменение тока со скоростью в 1 ампер/секунду индуцирует э.д.с. в 1 вольт). Параметр μ_0 может, следовательно, измеряться в *генри на метр*.

Из (22) и (26) следует теперь, что

$$\left[\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \right] = \frac{L^2}{T^2} \quad (27)$$

и что наша система согласуется, таким образом, в отношении размерностей с уравнением (2). Поскольку известно, что в рациональной абсолютной CGSM-системе μ_0 численно равно 4π , постольку уравнение (26) устанавливает также и значение μ_0 в системе MKS:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot \frac{\text{грамм сантиметр}}{\text{абс. кулон}^2} = 4\pi \cdot \frac{10^{-3} \text{ килограмм } 10^{-2} \text{ метр}}{10^2 \text{ кулон}^2} \quad (28)$$

или

$$\mu_0 = 4\pi \cdot \frac{\text{килограмм метр}}{\text{кулон}^2} = 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{генри}}{\text{метр}}. \quad (29)$$

Соответствующее значение ϵ_0 определяется тогда из

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}} = 2,998 \cdot 10^8 \frac{\text{метр}}{\text{секунда}} \quad (2)$$

и мы получаем:

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{кулон}^2 \text{ секунда}^2}{\text{килограмм метр}^2} = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{фарад}}{\text{метр}}. \quad (30)$$

Часто бывает полезно знать обратные числовые значения этих множителей:

$$\frac{1}{\mu_0} = 0,7958 \cdot 10^6 \frac{\text{метр}}{\text{генри}}; \quad \frac{1}{\epsilon_0} = 0,1129 \cdot 10^{12} \frac{\text{метр}}{\text{фарада}}, \quad (31)$$

а также величины

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376,6 \text{ ом}; \quad \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} = 2,655 \cdot 10^{-3} \text{ сименс}, \quad (32)$$

часто встречающиеся при исследовании распространения волн.

В приложении I можно найти сводку единиц и размерностей электромагнитных величин, выраженных через массу, длину, время и заряд.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

1.9. Векторный и скалярный потенциалы. Исследование электромагнитного поля часто упрощается введением вспомогательных функций, называемых потенциалами. В каждой обыкновенной точке пространства векторы поля удовлетворяют системе уравнений

$$\text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (\text{I}) \quad \text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (\text{III})$$

$$\text{rot } \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}, \quad (\text{II}) \quad \text{div } \mathbf{D} = \rho. \quad (\text{IV})$$

Согласно (III), вектор $\mathbf{B}$ соленоидален. Следовательно, его можно представить как ротор другого вектора $\mathbf{A}_0$:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}_0. \quad (1)$$

Однако A_0 определяется уравнением (1) неоднозначно, поскольку B равен также ротору вектора A :

$$B = \text{rot } A, \quad (2)$$

где

$$A = A_0 - \text{grad } \psi, \quad (3)$$

а ψ — произвольная скалярная функция точки.

Если теперь в (I) заменить B через (1) или (2), то мы получим соответственно:

$$\text{rot} \left(E + \frac{\partial A_0}{\partial t} \right) = 0; \quad \text{rot} \left(E + \frac{\partial A}{\partial t} \right) = 0. \quad (4)$$

Таким образом поля векторов $E + \frac{\partial A_0}{\partial t}$ и $E + \frac{\partial A}{\partial t}$ являются безвихревыми и равны градиентам двух скалярных функций φ и φ_0 :

$$E = -\text{grad } \varphi_0 - \frac{\partial A_0}{\partial t}, \quad (5)$$

$$E = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (6)$$

Очевидно, функции φ и φ_0 удовлетворяют соотношению

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (7)$$

Функции A являются *векторными потенциалами*, а φ являются *скалярными потенциалами* поля. A_0 и φ_0 составляют лишь одну пару потенциалов, из которых поле может быть получено посредством (1) и (5). По (3) и (7) может быть построено бесконечное количество потенциалов, определяющих то же самое поле.

Предположим, что среда однородна, изотропна, и что ϵ и μ не зависят от напряжённости поля:

$$D = \epsilon E, \quad B = \mu H. \quad (8)$$

Переходя к потенциалам, имеем:

$$D = -\epsilon \left(\text{grad } \varphi + \frac{\partial A}{\partial t} \right), \quad H = \frac{1}{\mu} \text{rot } A, \quad (9)$$

что, после подстановки в (II) и (IV), даёт:

$$\text{rot rot } A + \mu \epsilon \text{grad } \frac{\partial \psi}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \mu J, \quad (10)$$

$$\Delta \varphi + \text{div } \frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon} \rho. \quad (11)$$

Все частные решения (10) и (11), удовлетворяющие одним и тем же граничным условиям, дают одно и то же электромагнитное поле. Они различаются между собой произвольной функцией ψ . Наложим теперь на A и φ дополнительное условие:

$$\text{div } A + \mu \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (12)$$

для выполнения которого необходимо только, чтобы ψ удовлетворяло уравнению:

$$\Delta \psi - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \text{div } A_0 + \mu \epsilon \frac{\partial \varphi_0}{\partial t}, \quad (13)$$

где φ_0 и A_0 — какие-либо частные решения уравнений (10) и (11). Потенциалы φ и A теперь однозначно определены и являются решениями уравнений:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} A - \operatorname{grad} \operatorname{div} A + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \mu J, \quad (14)$$

$$\Delta \varphi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon} \rho. \quad (15)$$

Уравнение (14) приводится к тому же виду, что и (15), с помощью векторного тождества:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} A = \operatorname{grad} \operatorname{div} A - \Delta A. \quad (16)$$

Последний член в (16) есть оператор Лапласа, действующий на *прямоугольные* компоненты A .

Окончательно (14) приобретает вид:

$$\Delta A - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu J. \quad (17)$$

Распространение оператора Δ на криволинейные системы будет рассмотрено в разделе 1.16, стр. 53 и 54.

Соотношения (2) и (6) для векторов B и E ни в коем случае не являются общими. К ним может быть прибавлено любое частное решение *однородных* уравнений:

$$\operatorname{rot} E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0, \quad (Ia) \quad \operatorname{div} B = 0, \quad (IIa)$$

$$\operatorname{rot} H - \frac{\partial D}{\partial t} = 0, \quad (IIa) \quad \operatorname{div} D = 0. \quad (IVa)$$

Из симметрии этой системы сразу же видно, что она может быть тождественно удовлетворена, если положить

$$D = -\operatorname{rot} A^*, \quad H = -\operatorname{grad} \varphi^* - \frac{\partial A^*}{\partial t}, \quad (18)$$

откуда мы получаем:

$$E = -\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{rot} A^*, \quad B = -\mu \left(\operatorname{grad} \varphi^* + \frac{\partial A^*}{\partial t} \right). \quad (19)$$

Новые потенциалы подчиняются следующим условиям:

$$\left. \begin{aligned} \Delta A^* - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 A^*}{\partial t^2} &= 0, \\ \Delta \varphi^* - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial t^2} &= 0, \\ \operatorname{div} A^* + \mu \varepsilon \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Общее решение неоднородной системы (I—IV) будет, следовательно:

$$B = \operatorname{rot} A - \mu \frac{\partial A^*}{\partial t} - \mu \operatorname{grad} \varphi^*, \quad (21)$$

$$E = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{rot} A^*, \quad (22)$$

при условии, что μ и ε постоянны.

Функции φ^* и A^* являются потенциалами источников, которые находятся вне рассматриваемой области. Обычно φ^* и A^* полагаются равными

нулю, а потенциалы всех зарядов как удалённых, так и находящихся в рассматриваемой области, представляются с помощью φ и A .

В каждой точке, где заряд и плотность тока равны нулю, возможным полем будет поле, определяемое потенциалами $\varphi_0 = 0$ и $A_0 = 0$. В этом случае функция ψ представляет собою любое решение однородного уравнения (см. 13):

$$\Delta\psi - \mu\epsilon \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0. \quad (23)$$

Поскольку в этой же точке скалярный потенциал φ удовлетворяет тому же уравнению, ψ может быть выбрано так, чтобы φ исчезло. В этом случае, поле может быть найдено с помощью одного лишь векторного потенциала:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (24)$$

$$\Delta \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0, \quad \text{div } \mathbf{A} = 0. \quad (25)$$

Что касается единиц и размерностей этих новых величин, то отметим прежде всего, что $\mathbf{E}$ измеряется в вольтах/метр и, следовательно, скалярный потенциал φ должен измеряться в вольтах. Если q заряд, измеренный в кулонах, то, следовательно, $q\varphi$ представляет собой энергию, выраженную в джоулях. Из соотношения $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ ясно, что векторный потенциал $\mathbf{A}$ может выражаться в веберах/метр, но с равным успехом в вольт-секундах/метр или джоулях/ампер. Следовательно, произведение тока на векторный потенциал представляет собой энергию. Для размерности $\mathbf{A}^*$ находим, что она равна кулону/метр, в то время как φ измеряется в ампер-витках.

1.10. Однородная проводящая среда. Ввиду малости времени релаксации можно предположить, что внутри проводника плотность свободных зарядов всегда равна нулю. Уравнения поля для однородной изотропной среды сводятся тогда к системе:

$$\text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (\text{Ib}) \quad \text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (\text{IIIb})$$

$$\text{rot } \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \sigma \mathbf{E} = 0, \quad (\text{IIb}) \quad \text{div } \mathbf{D} = 0. \quad (\text{IVb})$$

Мы вольны теперь выражать через векторный потенциал либо $\mathbf{B}$, либо $\mathbf{D}$. В первом случае мы имеем:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (26)$$

Если векторный и скалярный потенциалы подчинены соотношению

$$\text{div } \mathbf{A} + \mu\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu\sigma\varphi = 0, \quad (27)$$

то возможное электромагнитное поле может быть построено из любой пары решений уравнений:

$$\Delta \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0, \quad (28)$$

$$\Delta \varphi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (29)$$

Как и в предшествующем параграфе, мы замечаем, что векторы поля инвариантны по отношению к замене потенциалов при соблюдении условий

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}_0 - \text{grad } \psi, \quad (30)$$

где φ_0 , A_0 — потенциалы возможного поля, а ψ — произвольная скалярная функция. Для того чтобы A и φ удовлетворяли (27), необходимо только, чтобы ψ подчинялось дополнительному условию:

$$\Delta\psi - \mu\varepsilon \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial\psi}{\partial t} = \operatorname{div} A_0 + \mu\varepsilon \frac{\partial\varphi_0}{\partial t} + \mu\sigma\varphi_0. \quad (31)$$

К частному решению уравнения (31) мы можем добавить любое решение однородного уравнения

$$\Delta\psi - \mu\varepsilon \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial\psi}{\partial t} = 0. \quad (32)$$

Часто бывает удобно выбрать ψ таким образом, чтобы скалярный потенциал равнялся нулю. Поле внутри проводника будет определяться тогда только вектором A :

$$B = \operatorname{rot} A, \quad E = -\frac{\partial A}{\partial t}, \quad (33)$$

$$\Delta A - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial A}{\partial t} = 0; \quad \operatorname{div} A = 0. \quad (34)$$

Поле может также быть выражено и через потенциалы φ^* и A^* :

$$D = -\operatorname{rot} A^*, \quad H = -\operatorname{grad} \varphi^* - \frac{\partial A^*}{\partial t} - \frac{\sigma}{\varepsilon} A^*. \quad (35)$$

Если φ^* и A^* удовлетворяют (28) и (29), то они necessarily связаны соотношением:

$$\operatorname{div} A^* + \mu\varepsilon \frac{\partial\varphi^*}{\partial t} = 0. \quad (36)$$

Поле, определённое уравнениями (35), инвариантно ко всем преобразованиям потенциалов типа

$$\varphi^* = \varphi_0^* + \frac{\partial\psi^*}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \psi^*; \quad A^* = A_0^* - \operatorname{grad} \psi^*, \quad (37)$$

где, как и ранее, φ_0^* и A_0^* являются потенциалами любого возможного электромагнитного поля. Для выполнения соотношения (36) необходимо только выбрать ψ^* так, чтобы удовлетворить соотношению

$$\Delta\psi^* - \mu\varepsilon \frac{\partial^2\psi^*}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial\psi^*}{\partial t} = \operatorname{div} A_0^* + \mu\varepsilon \frac{\partial\varphi_0^*}{\partial t}. \quad (38)$$

Наконец, соответствующим выбором ψ^* скалярный потенциал φ^* может быть сделан равным нулю:

$$D = -\operatorname{rot} A^*, \quad H = -\frac{\partial A^*}{\partial t} - \frac{\sigma}{\varepsilon} A^*, \quad (39)$$

$$\Delta A^* - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 A^*}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial A^*}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} A^* = 0. \quad (40)$$

1.11. Вектор Герца или поляризационный потенциал. Мы видели, что интегрирование уравнений Максвелла может быть сведено к нахождению векторного и скалярного потенциалов, которые в однородной среде удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению. Герц показал¹⁾, что при обычных условиях имеется возможность определить электромагнитное поле с помощью только одной векторной функции.

¹⁾ Hertz. *Ann. Physik*, 36, 1 (1888). Общее решение дано Righi. *Bologna Mem.* (5), 9, 1 (1901) и *Il Nuovo Cimento*, (5) 2, 2 (1901).

Ограничимся здесь областью изотропной среды, внутри которой нет ни токов проводимости, ни свободных зарядов. Уравнения поля сводятся тогда к однородной системе (Ia) — (IVa). По причинам, которые станут сейчас ясными, мы предположим, что векторный потенциал $\mathbf{A}$ пропорционален производной по времени от вектора $\mathbf{\Pi}$:

$$\mathbf{A} = \mu\epsilon \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t}. \quad (41)$$

Следовательно,

$$\mathbf{B} = \mu\epsilon \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t}; \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}}{\partial t^2}, \quad (42)$$

и когда это выражение для $\mathbf{E}$ мы в свою очередь внесём в (IIa), то найдём, что:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{\Pi} + \operatorname{grad} \varphi + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}}{\partial t^2} \right) = 0. \quad (43)$$

Напомним, что в точках, где нет зарядов, скалярная функция φ должна лишь удовлетворять уравнению (23), а в остальном является совершенно произвольной. В данном случае мы выберем её так:

$$\varphi = -\operatorname{div} \mathbf{\Pi}. \quad (44)$$

Интегрируя (43) по времени, мы получаем:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{\Pi} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{\Pi} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}}{\partial t^2} = \text{const}. \quad (45)$$

Значение константы не влияет на определение поля и мы можем поэтому положить её равной нулю. Уравнение (IVa) тоже удовлетворено, так как дивергенция ротора тождественно равна нулю. Следовательно, мы можем утверждать, что *любое решение векторного уравнения*

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{\Pi} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{\Pi} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}}{\partial t^2} = 0 \quad (46)$$

определяет некоторое электромагнитное поле посредством выражений:

$$\mathbf{B} = \mu\epsilon \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t}; \quad \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{\Pi} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}}{\partial t^2}. \quad (47)$$

Условие (23), которому должно удовлетворять φ , выполняется в силу (46). Уравнение (46) может быть переписано в виде:

$$\Delta \mathbf{\Pi} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}}{\partial t^2} = 0 \quad (48)$$

при условии, что оператор Δ предполагается действующим на *прямоугольные* компоненты $\mathbf{\Pi}$.

Так как в пространстве, свободном от зарядов, вектор $\mathbf{D}$ соленоидален, как и $\mathbf{B}$, то может быть построено другое решение вида:

$$\mathbf{A}^* = \mu\epsilon \frac{\partial \mathbf{\Pi}^*}{\partial t}, \quad \varphi^* = -\operatorname{div} \mathbf{\Pi}^*, \quad (49)$$

$$\mathbf{D} = -\mu\epsilon \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{\Pi}^*}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{\Pi}^* - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}^*}{\partial t^2}, \quad (50)$$

где $\mathbf{\Pi}^*$ — любое из решений (46) или (48).

Из полученных результатов мы заключаем, что в области, в которой ϵ и μ постоянны, а ρ и $\mathbf{J}$ равны нулю, электромагнитное поле может быть

разложено на два составляющих поля — одно, выводимое из вектора Π и другое из вектора Π^* . Источники этих полей находятся вне рассматриваемой области. Для того чтобы установить физический смысл векторов Герца, необходимо теперь связать эти векторы с их источниками; иными словами, мы должны найти *неоднородные* уравнения, из которых может быть выведено уравнение (48).

Выразим вектор D через E и электрическую поляризацию P . Согласно (6), стр. 24, $D = \epsilon_0 E + P$. Следовательно, вместо (IIa) и (IVa) мы должны теперь написать:

$$\text{rot } H = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial t}, \quad \text{div } E = -\frac{1}{\epsilon_0} \text{div } P. \quad (51)$$

Легко убедиться, что эти два уравнения, так же как и (Ia) и (IIIa) попрежнему, удовлетворяются тождественно выражениями (47), при том только условии, что ϵ заменено на ϵ_0 и что теперь Π является любым решением уравнения

$$\Delta \Pi - \mu \epsilon_0 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} P. \quad (52)$$

Источником вектора Π и электромагнитного поля, получаемого из него, является *распределение электрической поляризации* P . В дальнейшем мы дадим интерпретацию вектора P как электрического дипольного момента единицы объёма среды. Поскольку Π связано с распределением электрических диполей, то часто говорят, что определяемое им частичное поле есть поле *электрического типа*, а сам вектор Π может быть назван электрическим поляризационным потенциалом.

Таким же точно путём можно показать, что поле, связанное с Π^* , создаётся распределением магнитной поляризации. Согласно (6), стр. 24, вектор B связан с H соотношением $B = \mu_0 (H + M)$, которое, будучи подставлено в (Ia) (IIIa), даёт:

$$\text{rot } E + \mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial M}{\partial t}; \quad \text{div } H = -\text{div } M. \quad (53)$$

Эти уравнения, так же как и (IIa) и (IVa), удовлетворятся тождественно выражениями (50), если мы заменим μ на μ_0 и потребуем, чтобы Π^* было решением уравнения

$$\Delta \Pi^* - \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial t^2} = -M. \quad (54)$$

Мы покажем позднее, что поляризация M может быть интерпретирована как плотность распределения магнитного момента. Таким образом, можно представить себе, что частичное поле, определяемое из Π^* , создаётся магнитными диполями и может быть названо полем *магнитного типа*.

Электрическая поляризация P может индуцироваться в диэлектрике полем E , но может также определяться совершенно иными факторами. В практических приложениях теории интересуются обычно только независимой от поля частью P_0 , которая, как будет показано, представляет собой электрический момент дипольных осцилляторов, возбуждаемых внешними источниками энергии. То же справедливо и в отношении магнитной поляризации. Чтобы отразить это положение, мы будем писать уравнение (6), стр. 24, в изменённом виде:

$$D = \epsilon E + P_0, \quad H = \frac{1}{\mu} B - M_0. \quad (55)$$

где P_0 и M_0 заданы независимо от E и H , и где индуцированная поляризация среды снова включена в параметры ϵ и μ . Следовательно, электромагнитное поле, вызванное заданным распределением P_0 и M_0 , определяется выражениями

$$E = \text{grad div } \mathbf{\Pi} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}}{\partial t^2} - \mu \text{rot} \frac{\partial \mathbf{\Pi}^*}{\partial t}, \quad (56)$$

$$H = \epsilon \text{rot} \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t} + \text{grad div } \mathbf{\Pi}^* - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}^*}{\partial t^2}, \quad (57)$$

где $\mathbf{\Pi}$ и $\mathbf{\Pi}^*$ являются решениями уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \mathbf{\Pi} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\epsilon} P_0, \\ \Delta \mathbf{\Pi}^* - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}^*}{\partial t^2} &= -M_0. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

В силу второго из уравнений (58) и тождества (16), мы можем написать (57) также в виде:

$$H = \epsilon \text{rot} \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t} + \text{rot rot } \mathbf{\Pi}^* - M_0. \quad (59)$$

Так как $B = \text{rot } A$, то из последнего соотношения очевидно, что векторный потенциал A может быть получен из векторов Герца следующим образом:

$$A = \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t} + \mu \text{rot } \mathbf{\Pi}^* - \text{grad } \psi, \quad (60)$$

где ψ — произвольная скалярная функция. Соответствующий потенциал φ будет

$$\varphi = -\text{div } \mathbf{\Pi} + \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (61)$$

причём ψ подчинено только тому условию, что оно удовлетворяет уравнению

$$\Delta \psi - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (62)$$

Обобщение этих уравнений на однородную проводящую среду может быть сделано без труда. Читатель может убедиться прямой подстановкой, что системе (I—IV) в среде, свободной от заданных поляризаций P_0 и M_0 , удовлетворяют выражения

$$E = \text{rot rot } \mathbf{\Pi} - \mu \text{rot} \frac{\partial \mathbf{\Pi}^*}{\partial t}, \quad (63)$$

$$H = \text{rot} \left(\epsilon \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t} + \sigma \mathbf{\Pi} \right) + \text{rot rot } \mathbf{\Pi}^*, \quad (64)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{rot rot } \mathbf{\Pi} - \text{grad div } \mathbf{\Pi} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial t} &= 0, \\ \text{rot rot } \mathbf{\Pi}^* - \text{grad div } \mathbf{\Pi}^* + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}^*}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{\Pi}^*}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

1.12. Комплексные векторы поля и потенциалы. Зильберштейн, Бейтман и другие показали, что уравнения, которым удовлетворяют векторы поля и потенциалы, могут быть приведены к весьма компактной форме путём построения комплексного вектора, действительная и мнимая части которого состояются из векторов, определяющих магнитное и электрическое поля¹⁾.

¹⁾ Silberstein, *Ann. Phys.* 22, 24, 1907. Также *Phil. Mag* (6), 23, 790 (1912). Bateman, *Electrical and Optical Wave Motion*, гл. I, Cambridge University Press.

Операция эта не имеет наглядного физического истолкования, но часто упрощает исследование.

Рассмотрим опять однородную изотропную среду, в которой $D = \epsilon E$, $B = \mu H$. Если мы определим теперь комплексный вектор поля Q как

$$Q = B + i\sqrt{\epsilon\mu} E, \quad (66)$$

то уравнения Максвелла (I) — (IV) приведутся к виду:

$$\operatorname{rot} Q + i\sqrt{\epsilon\mu} \frac{\partial Q}{\partial t} = \mu J, \quad \operatorname{div} Q = i\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \rho. \quad (67)$$

Векторная операция $\operatorname{rot} Q$ может быть исключена из (67), если взять ротор от обеих частей. С помощью тождества (16) мы получаем уравнение

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} Q - \Delta Q + i\sqrt{\epsilon\mu} \operatorname{rot} \frac{\partial Q}{\partial t} = \mu \operatorname{rot} J, \quad (68)$$

которое, после подстановки значений ротора и дивергенции Q из уравнений (67), приводится к виду:

$$\Delta Q - \epsilon\mu \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = -\mu (\operatorname{rot} J - i\sqrt{\epsilon\mu} \frac{\partial J}{\partial t} - i\frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \operatorname{grad} \rho). \quad (69)$$

Если разделить в последнем уравнении действительную и мнимую части, то мы получим уравнения, которым удовлетворяют векторы E и H порознь:

$$\Delta H - \epsilon\mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = -\operatorname{rot} J, \quad (70)$$

$$\Delta E - \epsilon\mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial J}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon} \operatorname{grad} \rho. \quad (71)$$

Далее, определим Q через комплексные скалярный и векторный потенциалы L и Φ уравнением

$$Q = \operatorname{rot} L - i\sqrt{\epsilon\mu} \frac{\partial L}{\partial t} - i\sqrt{\epsilon\mu} \operatorname{grad} \Phi, \quad (72)$$

где L и Φ подчинены условию

$$\operatorname{div} L + \epsilon\mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \quad (73)$$

Легко убедиться, что (72) является интегралом (67) при условии, что комплексные потенциалы удовлетворяют уравнениям:

$$\Delta L - \epsilon\mu \frac{\partial^2 L}{\partial t^2} = -\mu J, \quad (74)$$

$$\Delta \Phi - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon} \rho. \quad (75)$$

Если написать действительные и мнимые части этих потенциалов в виде:

$$L = A - i\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} A^*, \quad \Phi = \varphi - i\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \varphi^* \quad (76)$$

и подставить в (72), то после разделения действительной и мнимой частей мы вновь получим общие уравнения для векторов поля, определённых уравнениями (21) и (22).

Если в рассматриваемой области свободные заряды и токи всюду равны нулю, то уравнения (67) принимают вид:

$$\operatorname{rot} Q + i\sqrt{\epsilon\mu} \frac{\partial Q}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} Q = 0. \quad (77)$$

Электромагнитное поле может быть выражено теперь через единый комплексный вектор Герца Γ :

$$\mathbf{Q} = \mu \varepsilon \operatorname{rot} \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + i \sqrt{\mu \varepsilon} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \Gamma, \quad (78)$$

где Γ — любое из решений уравнения

$$\Delta \Gamma - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2} = 0. \quad (79)$$

И, наконец, если определить Γ как

$$\Gamma = \Pi - i \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \Pi^*, \quad (80)$$

то после подстановки в (78) и разделения мнимой и действительной частей, мы снова получим в точности выражения (47) и (50) для электрического и магнитного векторов поля.

Если среда является проводящей, то уравнения поля перестают быть симметричными и описанный метод оказывается непригодным. Трудность может быть преодолена в случае поля, изменяющегося гармонически. Время входит в этом случае явно, как множитель вида $e^{\pm i\omega t}$. После дифференцирования по времени, система (I) — (IV) может сделана симметричной введением комплексной диэлектрической проницаемости $\varepsilon' = \varepsilon \pm i \frac{\sigma}{\omega}$.

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

1.13. Разрывы непрерывности векторов поля. Уравнения поля были постулированы только для обыкновенных точек пространства, т. е. для точек, в окрестности которых физические свойства среды меняются непрерывно. Но при переходе через поверхность, отделяющую какое-либо тело или среду от другого, происходят резкие изменения параметров ε , μ , σ . В макроскопическом масштабе подобные изменения могут обычно рассматриваться как разрывы непрерывности и, следовательно, можно ожидать, что и сами векторы поля испытывают здесь соответствующие скачки.

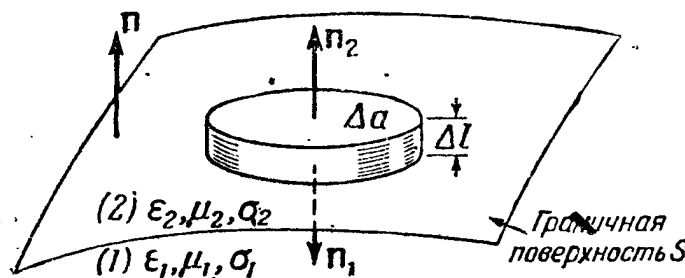


Рис. 2а. К граничным условиям для нормальных компонент.

Предположим сначала, что поверхность S , отделяющая среду (1) от среды (2), заменена очень тонким переходным слоем, внутри которого параметры ε , μ , σ меняются очень быстро, но непрерывно от их значений около S

в среде (1) до их значений около S в среде (2). Внутри этого слоя, как и в средах (1) и (2), векторы поля и их первые производные являются непрерывными ограниченными функциями точки и времени. Построим теперь перпендикулярно слою маленький цилиндр, как показано на рис. 2а. Образующие цилиндра нормальны к поверхности S , а его основания лежат на поверхностях слоя, так что они отстоят друг от друга как раз на толщину слоя Δl . Обратимся сначала к полю вектора $\mathbf{B}$, для которого мы имеем

$$\oint \mathbf{B} n da = 0, \quad (1)$$

где интегрирование распространено на боковую поверхность и основания цилиндра. Если основание цилиндра, площадь которого Δa , сделано достаточно малым, то можно считать, что $\mathbf{B}$ имеет постоянное значение на каждом из оснований. Пренебрегая бесконечно малыми более высокого порядка, мы можем приближённо записать соотношение (1) в виде:

$$(\mathbf{B}\mathbf{n}_1 + \mathbf{B}\mathbf{n}_2)\Delta a + \text{доля боковой поверхности} = 0. \quad (2)$$

Часть поверхностного интеграла, соответствующая боковой поверхности прямо пропорциональна толщине слоя Δl . Пусть теперь переходный слой сжимается в поверхность S . В пределе, при $\Delta l \rightarrow 0$ основания цилиндра расположатся как раз по обе стороны S , а часть, связанная с боковой поверхностью, станет исчезающе малой. Обозначим значение $\mathbf{B}$ в точке на S в среде (1) через $\mathbf{B}_1$, а соответствующее значение $\mathbf{B}$ в той же точке поверхности S , но на другой её стороне, в среде (2), через $\mathbf{B}_2$. Кроме того, положительную нормаль к поверхности S мы обозначим единичным вектором $\mathbf{n}$, проведённым от (1) к (2). В соответствии с этим условием, среда (1) находится с отрицательной стороны поверхности S , а среда (2) — с положительной, и $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}$. Следовательно, при $\Delta l \rightarrow 0$, $\Delta a \rightarrow 0$,

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1)\mathbf{n} = 0; \quad (3)$$

следовательно, при переходе через какую-либо поверхность разрыва непрерывности среды, нормальная компонента вектора $\mathbf{B}$ остаётся непрерывной. Уравнение (3) является прямым следствием условия $\text{div } \mathbf{B} = 0$ и иногда называется поверхностной дивергенцией.

С вектором $\mathbf{D}$ можно поступить подобным же образом, но в этом случае поверхностный интеграл нормальной компоненты по замкнутой поверхности равен полному заряду, содержащемуся внутри неё:

$$\oint \mathbf{D}\mathbf{n} da = q. \quad (4)$$

Этот заряд распределён в поверхностном слое с плотностью ρ . При сближении оснований цилиндра полный заряд q остаётся неизменным, поскольку он сохраняется:

$$q = \rho \Delta l \Delta a. \quad (5)$$

В пределе, при $\Delta l \rightarrow 0$ объёмная плотность ρ становится бесконечной. В этом случае произведение $\rho \Delta l$ удобно заменить *поверхностной плотностью* ω , определённой как заряд единицы площади.

Изменение нормальной компоненты вектора $\mathbf{D}$ при переходе через какую-либо поверхность S даётся теперь выражением.

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1)\mathbf{n} = \omega. \quad (6)$$

Наличие на поверхности S зарядов вызывает скачок нормальной компоненты вектора $\mathbf{D}$; величина её скачка равна поверхностной плотности заряда, измеренной в кулонах на квадратный метр.

(1) $\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1$

Рис. 2б. К граничным условиям для тангенциальных компонент.

Обращаясь теперь к поведению тангенциальных компонент, мы заменим цилиндр рисунка 2а прямоугольным путём, проведённым как показано на рисунке 2б. Стороны прямоугольника длиной Δs лежат по обе стороны переходного слоя, а длина отрезков, проходящих сквозь слой, равна его толщине Δl . Этот прямоугольник образует контур C_0 , вдоль которого

$$\oint_{C_0} \mathbf{E} ds + \int_{S_0} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \mathbf{n}_0 da = 0, \quad (7)$$

где S_0 — площадь прямоугольника, а $\mathbf{n}_0$ — её положительная нормаль. Положительное направление этой нормали определяется, как на рисунке 1, стр. 21, направлением обхода контура C_0 . Пусть τ_1 и τ_2 будут, как показано на рисунке (2b), единичные векторы в направлении обхода контура, вдоль нижней и верхней его частей. Пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка, можно аппроксимировать соотношение (7) выражением:

$$(\mathbf{E}\tau_1 + \mathbf{E}\tau_2)\Delta s + \text{доля концевых отрезков} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \mathbf{n}_0 \Delta s \Delta l. \quad (8)$$

По мере того, как слой сжимается в поверхность S , доля, вносимая концевыми отрезками и пропорциональная Δl , становится исчезающе малой. Если $\mathbf{n}$ опять будет обозначать положительную нормаль к поверхности S , проведённую от среды (1) к среде (2), то единичный касательный вектор τ можно определить соотношением:

$$\tau = [\mathbf{n}_0, \mathbf{n}]. \quad (9)$$

Так как

$$[\mathbf{n}_0, \mathbf{n}] \mathbf{E} = \mathbf{n}_0 [\mathbf{n}, \mathbf{E}], \quad (10)$$

то в пределе, при $\Delta l \rightarrow 0$, $\Delta s \rightarrow 0$ мы имеем

$$\mathbf{n}_0 \left\{ [\mathbf{n}, \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1] + \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Delta l \right) \right\} = 0. \quad (11)$$

Ориентация прямоугольника, а следовательно, и $\mathbf{n}_0$, совершенно произвольна, откуда следует, что скобка в (11) должна равняться нулю, т. е.

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1] = -\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Delta l \right). \quad (12)$$

Векторы поля и их производные, по предположению, ограничены; следовательно, правая часть в (12) обращается в нуль вместе с Δl :

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1] = 0. \quad (13)$$

При переходе через поверхность разрыва тангенциальная компонента вектора $\mathbf{E}$ остаётся непрерывной.

Поведение вектора $\mathbf{H}$ на границе можно вывести сразу же из (12) и уравнения поля

$$\oint_{C_0} \mathbf{H} ds - \int_{S_0} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \mathbf{n}_0 da = \int_{S_0} \mathbf{J} n_0 da. \quad (14)$$

Мы имеем, таким образом:

$$[\mathbf{n}, \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1] = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \right) \Delta l. \quad (15)$$

Первый член справа в (15) при $\Delta l \rightarrow 0$ исчезает, потому что $\mathbf{D}$ и её производные ограничены. Если плотность тока $\mathbf{J}$ конечна, то второй член тоже исчезает. Может случиться, однако, что по мере того, как стороны прямоугольника сближаются, ток $I = \mathbf{J} n_0 \Delta s \Delta l$ сквозь прямоугольник сжимается в бесконечно тонкий слой на поверхности S . Такой поверхностный ток удобно представлять поверхностной плотностью $\mathbf{K}$, определённой как предел произведения $\mathbf{J} \Delta l$ при $\Delta l \rightarrow 0$ и $\mathbf{J} \rightarrow \infty$. Тогда

$$[\mathbf{n}, \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1] = \mathbf{K}. \quad (16)$$

Если проводимости соприкасающихся сред конечны, то поверхностный ток невозможен, поскольку $\mathbf{E}$ ограничено и, следовательно, произведение $\sigma \mathbf{E} \Delta l$ исчезает вместе с Δl . В этом случае, который и является обычным

$$[\mathbf{n}, \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1] = 0 \quad (\text{при конечной проводимости}). \quad (17)$$

Нередко, однако, бывает необходимо положить проводимость тела бесконечной с целью упрощения анализа его поля. В этом случае граничное условие следует применять в виде (16), а не (17).

Суммируя вышеизложенное, мы можем теперь пополнить уравнения поля четырьмя условиями, определяющими изменение векторов поля при переходе из одной среды в другую через разделяющую их поверхность разрыва непрерывности:

$$\left. \begin{aligned} n(B_2 - B_1) &= 0, \quad [n, H_2 - H_1] = K, \\ [n, E_2 - E_1] &= 0, \quad n(D_2 - D_1) = \omega. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Из них сразу же следуют условия для изменения нормальных компонент E и H :

$$n\left(H_2 - \frac{\mu_1}{\mu_2} H_1\right) = 0 \quad n\left(E_2 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_1\right) = \frac{\omega}{\varepsilon_2}. \quad (19)$$

Аналогично, тангенциальные компоненты D и B должны удовлетворять условиям

$$\left[n, D_2 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} D_1\right] = 0; \quad \left[n, B_2 - \frac{\mu_2}{\mu_1} B_1\right] = \mu_2 K. \quad (20)$$

КООРДИНАТНЫЕ СИСТЕМЫ

1.14. Основные и взаимные координатные векторы. Одно из принципиальных преимуществ векторного исчисления заключается в том, что уравнения, определяющие свойства, общие всем электромагнитным полям, могут быть сформулированы безотносительно к какой-либо конкретной системе координат. Однако для того, чтобы установить характерные черты, которые отличают данное поле от других возможных полей, приходится, к несчастью, разлагать каждое векторное уравнение в подходящей системе координат на эквивалентную систему скалярных уравнений.

Пусть в заданной области

$$u^1 = f_1(x, y, z), \quad u^2 = f_2(x, y, z), \quad u^3 = f_3(x, y, z) \quad (1)$$

являются тремя независимыми, непрерывными, однозначными функциями прямоугольных координат x, y, z . Эти уравнения могут быть разрешены относительно x, y, z и дают тогда

$$x = \varphi_1(u^1, u^2, u^3), \quad y = \varphi_2(u^1, u^2, u^3), \quad z = \varphi_3(u^1, u^2, u^3) \quad (2)$$

три функции, которые тоже независимы, непрерывны и при определённых ограничениях однозначны. В общем случае функции φ_i , равно как и f_i , непрерывно дифференцируемы, но в некоторых отдельных точках это свойство может и нарушаться. Поэтому в дальнейшем, при применении общих формул следует соблюдать осторожность.

Посредством уравнения (1) с каждой точкой $P(x, y, z)$ в рассматриваемой области связаны три значения u^1, u^2, u^3 ; обратно (в пределах, зависящих от границ области), каждой тройке u^1, u^2, u^3 соответствует определённая точка. Функции u^1, u^2, u^3 называются *обобщёнными*, или *криволинейными координатами*. Через каждую точку P проходят три поверхности:

$$u^1 = \text{const.}, \quad u^2 = \text{const.}, \quad u^3 = \text{const.}, \quad (3)$$

называемые координатными поверхностями. На каждой координатной поверхности одна из координат постоянна, а две другие меняются. Поверхность обозначается координатой, которая остаётся постоянной. Две поверхности пересекаются по кривой, называемой координатной кривой, вдоль которой две координаты постоянны, а одна меняется. Координатная кривая обозначается меняющейся координатой.

Пусть $\mathbf{r}$ обозначает вектор, проведённый из произвольного начала отсчёта к переменной точке $P(x, y, z)$. Эта точка, а следовательно, и определяющий её положение вектор $\mathbf{r}$, могут рассматриваться как функции криволинейных координат u^1, u^2, u^3 :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2, u^3). \quad (4)$$

Бесконечно малое изменение вектора $\mathbf{r}$, обусловленное малыми перемещениями вдоль координатных кривых, выражается в виде:

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2} du^2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^3} du^3. \quad (5)$$

Если теперь переместиться на единицу длины вдоль кривой u^1 , то изменение $\mathbf{r}$ будет направлено по касательной к этой кривой и равно $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1}$. Векторы

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1}, \quad \mathbf{a}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2}, \quad \mathbf{a}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^3} \quad (6)$$

называются *координатными векторами*, связанными с точкой P . Они составляют базисную систему отсчёта для всех других векторов, связанных с этой точкой:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{a}_1 du^1 + \mathbf{a}_2 du^2 + \mathbf{a}_3 du^3. \quad (7)$$

Следует подчеркнуть, что *координатные векторы не обязательно имеют единичную длину* и что их размерности зависят от характера криволинейных координат.

Три базисных вектора $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ определяют параллелепипед, объём которого равен

$$V = \mathbf{a}_1 [\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3] = \mathbf{a}_2 [\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1] = \mathbf{a}_3 [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]. \quad (8)$$

Тройка векторов, определённых соотношениями

$$\mathbf{a}^1 = \frac{1}{V} [\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3], \quad \mathbf{a}^2 = \frac{1}{V} [\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1], \quad \mathbf{a}^3 = \frac{1}{V} [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2], \quad (9)$$

перпендикулярна соответственно к плоскостям, определяемым парами $(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$, $(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1)$, $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$. Образую всевозможные скалярные произведения типа $\mathbf{a}^i \mathbf{a}_j$, легко убедиться, что они удовлетворяют условию:

$$\mathbf{a}^i \mathbf{a}_j = \delta_{ij}, \quad (10)$$

где δ_{ij} — обычно используемый символ, равный единице при $i=j$ и нулю при $i \neq j$. Координатные векторы могут быть выражены через систему векторов $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3$ с помощью идентичных по форме соотношений:

$$\mathbf{a}_1 = \frac{1}{V} [\mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3]; \quad \mathbf{a}_2 = \frac{1}{V} [\mathbf{a}^3, \mathbf{a}^1]; \quad \mathbf{a}_3 = \frac{1}{V} [\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2]. \quad (11)$$

О двух совокупностях некомпланарных векторов, связанных соотношениями (8)–(11), говорят, что они образуют *взаимные системы*. Три вектора $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3$ называются *взаимными координатными векторами* и могут служить базисной системой наравне с координатными векторами.

Если в качестве базисной системы используются взаимные координатные векторы, то дифференциал $d\mathbf{r}$ напишется в виде:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{a}^1 du_1 + \mathbf{a}^2 du_2 + \mathbf{a}^3 du_3. \quad (12)$$

Дифференциалы du_1, du_2, du_3 являются, очевидно, компонентами $d\mathbf{r}$ в направлениях, определяемых новыми базисными векторами. Величины u_1, u_2, u_3 являются функциями координат u^1, u^2, u^3 , но дифференциалы du_1, du_2, du_3

не являются обязательно полными. Наоборот, они связаны с дифференциалами координат системой линейных уравнений, которые в общем случае неинтегрируемы. Таким образом, приравнивая (7) и (12), мы получаем

$$dr = \sum_{i=1}^3 a_i du^i = \sum_{j=1}^3 a^j du_j. \quad (13)$$

Путём скалярного умножения (13) по очереди на a^i и на a_j , мы находим благодаря (10):

$$du_j = \sum_{i=1}^3 a_j a_i du^i; \quad du^i = \sum_{j=1}^3 a^i a^j du_j. \quad (14)$$

Принято записывать скалярные произведения основных и взаимных векторов с помощью символов:

$$g_{ij} = a_i a_j = g_{ji}, \quad (15)$$

$$g^{ij} = a^i a^j = g^{ji}. \quad (16)$$

Тогда компоненты dr в главной и взаимной базисных системах будут связаны соотношениями:

$$du_j = \sum_{i=1}^3 g_{ji} du^i, \quad du^i = \sum_{j=1}^3 g^{ij} du_j. \quad (17)$$

Данный вектор F в точке P может быть разложен на компоненты как по отношению к основной базисной системе a_1, a_2, a_3 , так и по отношению к взаимной системе a^1, a^2, a^3 :

$$F = \sum_{i=1}^3 f^i a_i = \sum_{j=1}^3 f_j a^j. \quad (18)$$

Очевидно, компоненты F в основной системе связаны с его компонентами во взаимной системе соотношениями:

$$f_j = \sum_{i=1}^3 g_{ji} f^i, \quad f^i = \sum_{j=1}^3 g^{ij} f_j, \quad (19)$$

а ввиду ортогональности базисных векторов a_j по отношению к векторам взаимной тройки a^i , выражаемой уравнениями (10), мы можем написать также:

$$f^i = F a^i, \quad f_j = F a_j. \quad (20)$$

Отсюда следует, что (18) эквивалентно

$$F = \sum_{i=1}^3 (F a^i) a_i = \sum_{j=1}^3 (F a_j) a^j. \quad (21)$$

Величины f^i называются *контравариантными* компонентами вектора F , в то время, как f_j называются *ковариантными* компонентами F . Маленькая буква для обозначения этих компонент была использована для того, чтобы не путать их с компонентами F_1, F_2, F_3 вектора F по отношению к базисной системе векторов, совпадающих с a_i , но имеющих *единичную* длину. Выше было отмечено, что длина и размерность координатных векторов зависят от характера криволинейных координат. Соответствующая система *единичных* векторов, которые, так же как и координатные векторы a_i , каса-

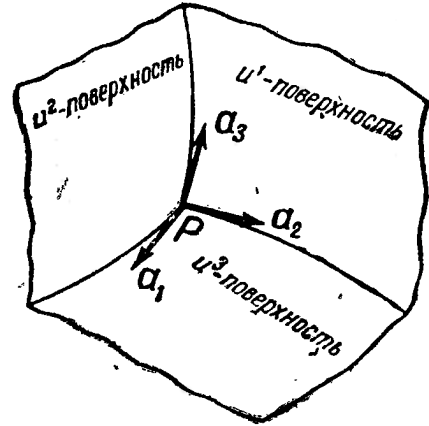


Рис. 3. Базисные векторы криволинейной системы координат.

тельны к кривым u^i , определяется соотношениями:

$$i_1 = \frac{a_1}{\sqrt{a_1 \cdot a_1}} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} a_1, \quad i_2 = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} a_2, \quad i_3 = \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} a_3, \quad (22)$$

и следовательно,

$$F = F_1 i_1 + F_2 i_2 + F_3 i_3, \quad (23)$$

где

$$F_i = \sqrt{g_{ii}} f^i. \quad (24)$$

Величины F_i имеют ту же размерность, что и сам вектор F .

Вектор dr представляет собой бесконечно малое смещение из точки $P(u^1, u^2, u^3)$ в соседнюю точку с координатами $u^1 + du^1, u^2 + du^2, u^3 + du^3$. Величину этого смещения (она является элементом длины) мы обозначим через ds . Тогда:

$$ds^2 = dr dr = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_i a_j du^i du^j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a^i a^j du_i du_j, \quad (25)$$

или в обозначениях (15) и (16)

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^3 g_{ij} du^i du^j = \sum_{i,j=1}^3 g^{ij} du_i du_j. \quad (26)$$

g_{ij} и g^{ij} входят здесь как коэффициенты двух дифференциальных квадратичных форм, выражающих длину линейного элемента в пространстве обобщённых координат u^i , или в пространстве взаимных им координат u_i . Обычно их называют метрическими коэффициентами.

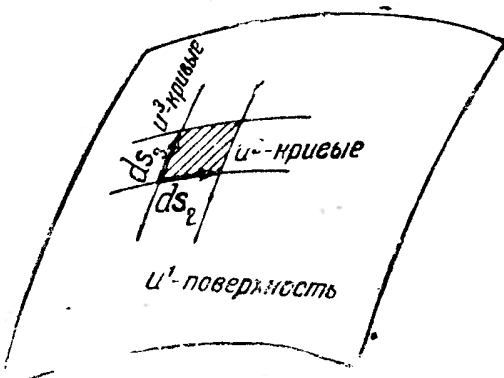


Рис. 4. Элемент площади на поверхности u^1 .

Относительно просто получить теперь выражения для элементов дуги, поверхности и объёма в криволинейной системе координат. Пусть ds_1 будет бесконечно малое смещение в точке $P(u^1, u^2, u^3)$ вдоль кривой u^1 :

$$ds_1 = a_1 du^1, \quad ds_1 = |ds_1| = \sqrt{g_{11}} du^1. \quad (27)$$

Аналогично, для элементов длины вдоль кривых u^2 и u^3 имеем:

$$ds_2 = \sqrt{g_{22}} du^2, \quad ds_3 = \sqrt{g_{33}} du^3. \quad (28)$$

Рассмотрим далее бесконечно малый параллелограмм на поверхности u^1 , ограниченный пересечением кривых u^2 и u^3 , как показано на рис. 4. По величине площадь такого элемента равна

$$da_1 = |[ds_2, ds_1]| = |[a_2, a_3]| du^2 du^3 = \sqrt{[a_2, a_3][a_2, a_3]} du^2 du^3. \quad (29)$$

Согласно хорошо известному векторному тождеству ¹⁾

$$[a, b][c, d] = (ac)(bd) - (ad)(bc), \quad (30)$$

где a, b, c и d — любые четыре вектора, получаем:

$$[a_2, a_3][a_2, a_3] = (a_2 a_2)(a_3 a_3) - (a_2 a_3)(a_3 a_2) = g_{22} g_{33} - g_{23}^2. \quad (31)$$

¹⁾ Так называемое тождество Лапласа. Прим. ред.

Для площади элемента на поверхности u^1 мы имеем, следовательно,

$$da_1 = \sqrt{g_{22}g_{33} - g_{23}^2} du^2 du^3 \quad (32)$$

и аналогично для элементов на поверхностях u^2 и u^3 :

$$\left. \begin{aligned} da_2 &= \sqrt{g_{33}g_{11} - g_{31}^2} du^3 du^1, \\ da_3 &= \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} du^1 du^2. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Наконец, элемент объема, ограниченный координатными поверхностями, напишется как

$$dv = ds_1 [ds_2, ds_3] = a_1 [a_2, a_3] du^1 du^2 du^3. \quad (34)$$

Если теперь мы положим в (21) $F = [a_2, a_3]$, то получим:

$$[a_2, a_3] = (a^1 [a_2, a_3]) a_1 + (a^2 [a_2, a_3]) a_2 + (a^3 [a_2, a_3]) a_3 \quad (35)$$

или, заменяя a^i их значениями из (8) и (9):

$$a_1 [a_2, a_3] = \frac{a_1}{a_1 [a_2, a_3]} \{ ([a_2, a_3] [a_2, a_3]) a_1 + ([a_3, a_1] [a_2, a_3]) a_2 + ([a_1, a_2] [a_2, a_3]) a_3 \}. \quad (36)$$

Величины в скобках могут быть разложены с помощью (30) и члены могут быть сгруппированы так:

$$\begin{aligned} (a_1 [a_2, a_3])^2 &= a_1 a_1 \{ (a_2 a_2) (a_3 a_3) - (a_2 a_3) (a_3 a_2) \} + \\ &+ a_1 a_2 \{ (a_2 a_3) (a_3 a_1) - (a_2 a_1) (a_3 a_3) \} + \\ &+ a_1 a_3 \{ (a_2 a_1) (a_3 a_2) - (a_2 a_2) (a_3 a_1) \}. \end{aligned} \quad (37)$$

Наконец, скалярные произведения в (37) заменяются соответствующими g_{ij} и мы получаем выражение для элемента объема:

$$dv = \sqrt{g} du^1 du^2 du^3, \quad (38)$$

в котором:

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}. \quad (39)$$

Соответствующие выражения для элементов длины, площади и объема во взаимной базисной системе могут быть получены заменой g_{ij} на g^{ij} , но в последующем они нам не понадобятся.

Очевидно, коэффициенты g_{ij} достаточны для полной характеристики геометрических свойств пространства по отношению к какой-либо криволинейной системе координат; поэтому для нас важно знать, как эти коэффициенты могут быть найдены. Для единообразия мы будем обозначать прямоугольные координаты x, y, z точки P соответственно буквами x^1, x^2, x^3 . Тогда:

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2. \quad (40)$$

В этой, самой простой из всех систем, метрические коэффициенты равны:

$$g_{ij} = \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases} \quad (41)$$

Из ортогональности координатных плоскостей и из определения (9) очевидно, что основные и взаимные координатные векторы здесь совпадают, имеют единичную длину и являются базисными векторами. Обычно их обозначают буквами i, j, k .

Предположим теперь, что прямоугольные координаты функционально связаны с криволинейными координатами уравнениями, подобными уравнениям (2):

$$x^1 = x^1(u^1, u^2, u^3), \quad x^2 = x^2(u^1, u^2, u^3), \quad x^3 = x^3(u^1, u^2, u^3). \quad (42)$$

Дифференциалы прямоугольных координат являются линейными функциями дифференциалов обобщенных координат, как это видно в результате дифференцирования уравнений (42):

$$\left. \begin{aligned} dx^1 &= \frac{\partial x^1}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial x^1}{\partial u^2} du^2 + \frac{\partial x^1}{\partial u^3} du^3, \\ dx^2 &= \frac{\partial x^2}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial x^2}{\partial u^2} du^2 + \frac{\partial x^2}{\partial u^3} du^3, \\ dx^3 &= \frac{\partial x^3}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial x^3}{\partial u^2} du^2 + \frac{\partial x^3}{\partial u^3} du^3. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Согласно (26) и (40)

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g_{ij} du^i du^j = \sum_{k=1}^3 (dx^k)^2, \quad (44)$$

откуда, после возведения в квадрат дифференциалов в (43) и приравнивания коэффициентов при одинаковых членах, мы получаем:

$$g_{ij} = \frac{\partial x^1}{\partial u^i} \frac{\partial x^1}{\partial u^j} + \frac{\partial x^2}{\partial u^i} \frac{\partial x^2}{\partial u^j} + \frac{\partial x^3}{\partial u^i} \frac{\partial x^3}{\partial u^j}. \quad (45)$$

1.15. Дифференциальные операторы. Градиентом скалярной функции $\varphi(u^1, u^2, u^3)$ называется вектор, определяемый по величине и направлению быстротой наибольшего изменения φ по отношению к координатам. Изменение φ при смещении $d\mathbf{r}$ будет, следовательно:

$$d\varphi = \text{grad } \varphi \, d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \varphi}{\partial u^i} du^i. \quad (46)$$

du^i являются контравариантными компонентами вектора смещения $d\mathbf{r}$ и поэтому, согласно (20),

$$du^i = a^i d\mathbf{r}. \quad (47)$$

Эти значения du^i , будучи подставлены в (46), приводят к равенству

$$\left(\text{grad } \varphi - \sum_{i=1}^3 a^i \frac{\partial \varphi}{\partial u^i} \right) d\mathbf{r} = 0, \quad (48)$$

и, поскольку смещение $d\mathbf{r}$ произвольно, мы находим для градиента скалярной функции в любой системе криволинейных координат:

$$\text{grad } \varphi = \sum_{i=1}^3 a^i \frac{\partial \varphi}{\partial u^i}. \quad (49)$$

В этом выражении базисная система образуется взаимными координатными векторами, но они могут быть заменены основными координатными векто-

рами посредством преобразования

$$a^i = \sum_{j=1}^3 g^{ij} a_j. \quad (50)$$

Дивергенцию векторной функции $F(u^1, u^2, u^3)$ в точке P проще всего вывести из её определения в уравнении (9), стр. 18, как предела поверхностного интеграла нормальной компоненты вектора F по замкнутой поверхности на единицу заключённого внутри неё объёма. Рассмотрим те две грани элемента объёма, изображённого на рис. 5, которые лежат на поверхностях u^2 .левой грани соответствует значение u^2 , а правой $u^2 + du^2$. Площадь грани на поверхности u^2 определяется выражением $[a_1, a_3] du^1 du^3$, где порядок векторов такой, что нормаль направлена наружу, т. е. влево. Общая доля, вносимая этими двумя гранями в значение потока, направленного наружу, будет поэтому

$$F[a_3, a_1] du^1 du^3|_{u^2+du^2} + F[a_1, a_3] du^1 du^3|_{u^2}, \quad (51)$$

где индексы при вертикальных прямых означают, что соответствующие выражения должны быть взяты соответственно при $u^2 + du^2$ и при u^2 . При достаточно малых значениях du^2 (51) может быть аппроксимировано линейным членом ряда Тейлора:

$$\frac{\partial}{\partial u^2} \{F[a_3, a_1] du^1 du^2 du^3\}, \quad (52)$$

где $[a_1, a_3]$ заменено на $-[a_3, a_1]$. С помощью (21), (20) и (37) мы получаем далее:

$$F[a_3, a_1] = F \cdot a^2(a_2[a_3, a_1]) = f^2 \sqrt{g}; \quad (53)$$

таким образом доля этих двух граней в поверхностном интеграле будет:

$$\frac{\partial}{\partial u^2} (f^2 \sqrt{g}) du^1 du^2 du^3. \quad (54)$$

Аналогичные слагаемые даются и двумя остальными парами граней. Поскольку интеграл должен быть отнесён к единице объёма, мы делим его на $dv = \sqrt{g} du^1 du^2 du^3$ и переходим к пределу при $du^1 \rightarrow 0; du^2 \rightarrow 0; du^3 \rightarrow 0$, благодаря чему действительно исчезают все члены ряда Тейлора, кроме линейных. Дивергенция вектора F в криволинейной системе координат равна, следовательно,

$$\operatorname{div} F = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial u^i} (f^i \sqrt{g}). \quad (55)$$

Таким же способом мы найдем и ротор вектора F , подсчитывая линейный интеграл от F по бесконечно малому замкнутому пути. Согласно уравнению (21), стр. 20, компонента ротора в направлении, определяемом единичной нормалью n , есть

$$(\operatorname{rot} F)n = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_{\sigma} F ds. \quad (56)$$

Возьмём линейный интеграл F по контуру прямоугольного элемента площади, расположенного на поверхности u^1 , как показано на рис. 6. Стороны

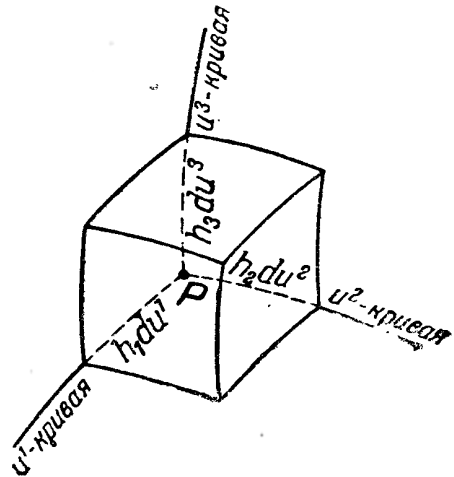


Рис. 5. Элемент объёма в криволинейной системе координат.

прямоугольника равны $a_2 du^2$ и $a_3 du^3$. Направление обхода должно быть таково, чтобы положительная нормаль совпадала с положительным направлением кривой u^1 . Слагаемые от сторон, параллельных кривым u^3 , будут

$$F a_3 du^3 |_{u^2+du^2} - F a_3 du^3 |_{u^2},$$

а от низа и верха, параллельных кривым u^2 , мы получаем:

$$-F a_2 du^2 |_{u^3+du^3} + F a_2 du^2 |_{u^3}.$$

Аппроксимируя эти разности линейными членами ряда Тэйлора, мы получаем для линейного интеграла значение:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial u^2} (F a_3) - \frac{\partial}{\partial u^3} (F a_2) \right\} du^2 du^3. \quad (57)$$

Рис. 6. К вычислению ротора в криволинейных координатах.

Эта величина должна быть теперь разделена на площадь прямоугольника, т.е. на $\sqrt{[a_2, a_3] [a_2, a_3]} du^2 du^3$; что касается единичной нормали n , то, как мы отмечали, взаимный вектор a^1 , но не основной вектор a_1 , всегда нормален к поверхности u^1 .

Вектор нормали должен быть единичным, следовательно:

$$n = \frac{a^1}{\sqrt{a^1 a^1}}. \quad (58)$$

Эти значения, будучи подставлены в (56), дают

$$(\text{rot } F) \frac{a^1}{\sqrt{a^1 a^1}} = \frac{1}{\sqrt{[a_2, a_3] [a_2, a_3]}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u^2} (F a_3) - \frac{\partial}{\partial u^3} (F a_2) \right\}. \quad (59)$$

Согласно (9) и (37),

$$[a_2, a_3] = (a_1 [a_2, a_3]) a^1 = \sqrt{g} a^1, \quad (60)$$

благодаря чему (59) приводится к виду:

$$(\text{rot } F) a^1 = \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u^2} (F a_3) - \frac{\partial}{\partial u^3} (F a_2) \right\}. \quad (61)$$

Две остальные компоненты $\text{rot } F$ получаются из (61) перестановкой индексов. Таким образом, согласно (21):

$$\text{rot } F = \sum_{i=1}^3 (\text{rot } F a^i) a_i. \quad (62)$$

Вспомня, что $F a_i$ является ковариантной компонентой f_i , мы получаем из (61) для ротора вектора в системе обобщённых координат выражение

$$\text{rot } F = \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \left(\frac{\partial f_3}{\partial u^2} - \frac{\partial f_2}{\partial u^3} \right) a_1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial u^3} - \frac{\partial f_3}{\partial u^1} \right) a_2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial u^1} - \frac{\partial f_1}{\partial u^2} \right) a_3 \right\}. \quad (63)$$

Рассмотрим, наконец, операцию $\Delta \varphi$, под которой мы должны понимать $\text{div grad } \varphi$. Нам необходимо только положить в (55) $F = \text{grad } \varphi$. Контравариантные компоненты градиента будут:

$$f^i = F a^i = \sum_{j=1}^3 a^i a^j \frac{\partial \varphi}{\partial u^j} = \sum_{j=1}^3 g^{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial u^j}. \quad (64)$$

Следовательно,

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta \varphi = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial u^i} \left(g^{ij} \sqrt{g} \frac{\partial \varphi}{\partial u^j} \right). \quad (65)$$

1.16. Ортогональные системы. Единственное ограничение, которое было пока наложено на базисные векторы, это требование их некомпланарности. Однако в большинстве случаев оказывается, что в приложениях с успехом могут быть использованы только ортогональные системы, для которых выведенные выше формулы существенно упрощаются. Косоугольные системы также могут иметь большое практическое значение, но, к несчастью, они приводят к дифференциальным уравнениям в частных производных, которых современный анализ разрешить не может.

Координатные векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ ортогональной системы по определению взаимно перпендикулярны, откуда следует, что $\mathbf{a}^i$ параллелен $\mathbf{a}_i$ и обратен ему по величине:

$$\mathbf{a}^i = \frac{1}{\mathbf{a}_i \mathbf{a}_i} \mathbf{a}_i = \frac{1}{g_{ii}} \mathbf{a}_i. \quad (66)$$

Далее,

$$\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_1 = 0, \quad (67)$$

откуда $g_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Обычно в случае ортогональных систем принято вводить сокращённые обозначения¹⁾:

$$h_1 = \sqrt{g_{11}}, \quad h_2 = \sqrt{g_{22}}, \quad h_3 = \sqrt{g_{33}}, \quad (68)$$

$$g^{ii} = \frac{1}{g_{ii}} = \frac{1}{h_i^2}. \quad (69)$$

Величины h_i могут быть подсчитаны по формуле

$$h_i^2 = \left(\frac{\partial x^1}{\partial u^i} \right)^2 + \left(\frac{\partial x^2}{\partial u^i} \right)^2 + \left(\frac{\partial x^3}{\partial u^i} \right)^2, \quad (70)$$

хотя обычно их значения очевидны из геометрии системы. Элементарная ячейка, ограниченная координатными поверхностями, является теперь параллелепипедом, рёбра которого равны

$$ds_1 = h_1 du^1, \quad ds_2 = h_2 du^2, \quad ds_3 = h_3 du^3, \quad (71)$$

а объём

$$dv = h_1 h_2 h_3 du^1 du^2 du^3. \quad (72)$$

Все недиагональные члены в детерминанте g исчезают и поэтому

$$\sqrt{g} = h_1 h_2 h_3. \quad (73)$$

Различие между контравариантными и ковариантными компонентами вектора по отношению к основной или взаимной базисной системе существенно для понимания инвариантных свойств дифференциальных операторов и скалярных и векторных произведений. Однако в фиксированной системе отсчёта это различие в большинстве случаев можно игнорировать. В этом случае удобно выражать вектор $\mathbf{F}$ через его компоненты или проекции F_1, F_2, F_3 в ортогональной базисной системе *единичных* векторов $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$. Согласно (22) и (66), имеем:

$$\mathbf{a}_i = h_i \mathbf{i}_i, \quad \mathbf{a}^i = \frac{1}{h_i} \mathbf{i}_i. \quad (74)$$

¹⁾ Эти величины называют коэффициентами Ламэ. Прим. ред.

Контравариантные и ковариантные компоненты F , выраженные через компоненты F_i , будут

$$f^i = \frac{1}{h_i} F_i, \quad f_i = h_i F_i. \quad (75)$$

Кроме того,

$$F = F_1 \mathbf{i}_1 + F_2 \mathbf{i}_2 + F_3 \mathbf{i}_3, \quad (76)$$

$$\mathbf{i}_j \mathbf{i}_k = \delta_{jk}. \quad (77)$$

Градиент, дивергенция, ротор и лапласиан в ортогональной криволинейной системе координат могут быть написаны непосредственно на основании результатов предыдущего раздела.

Из (49) мы имеем для градиента:

$$\text{grad } \varphi = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{h_j} \frac{\partial \varphi}{\partial u^j} \mathbf{i}_j. \quad (78)$$

Согласно (55), дивергенция вектора F будет:

$$\text{div } F = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u^1} (h_2 h_3 F_1) + \frac{\partial}{\partial u^2} (h_3 h_1 F_2) + \frac{\partial}{\partial u^3} (h_1 h_2 F_3) \right]. \quad (79)$$

По уравнению (63), для ротора F имеем:

$$\begin{aligned} \text{rot } F = & \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u^2} (h_3 F_3) - \frac{\partial}{\partial u^3} (h_2 F_2) \right] \mathbf{i}_1 + \\ & + \frac{1}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial}{\partial u^3} (h_1 F_1) - \frac{\partial}{\partial u^1} (h_3 F_3) \right] \mathbf{i}_2 + \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial u^1} (h_2 F_2) - \frac{\partial}{\partial u^2} (h_1 F_1) \right] \mathbf{i}_3. \end{aligned} \quad (80)$$

Можно заметить, что (80) представляет собой разложение детерминанта:

$$\text{rot } F = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{i}_1 & h_2 \mathbf{i}_2 & h_3 \mathbf{i}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u^1} & \frac{\partial}{\partial u^2} & \frac{\partial}{\partial u^3} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{vmatrix}. \quad (81)$$

Наконец, лапласиан инвариантного скаляра φ будет:

$$\Delta \varphi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u^1} \right) + \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial u^2} \right) + \frac{\partial}{\partial u^3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial u^3} \right) \right]. \quad (82)$$

Под инвариантным скаляром подразумевается величина, подобная температуре или энергии, которая инвариантна при вращении координатной системы. Числа, которыми измеряются компоненты F_i вектора F тоже являются скалярами, но при преобразовании базисных векторов они трансформируются и не являются поэтому инвариантными скалярами.

При исследовании поля мы часто встречаем операцию

$$\text{rot rot } F = \text{grad div } F - \Delta F. \quad (83)$$

До сих пор мы не придали никакого смысла ΔF . В прямоугольной декартовой системе координат x^1, x^2, x^3 ясно, что этот оператор эквивалентен

$$\Delta F = \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{\partial^2 F_j}{\partial (x^1)^2} + \frac{\partial^2 F_j}{\partial (x^2)^2} + \frac{\partial^2 F_j}{\partial (x^3)^2} \right\} \mathbf{i}_j, \quad (84)$$

т. е. лапласиану, действующему на прямоугольные компоненты F . В обобщённых координатах $\text{rot rot } F$ представляется детерминантом.

$$\text{rot rot } F = \begin{vmatrix} \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial u^1} \mathbf{i}_1 & \frac{1}{h_3 h_1} \frac{\partial}{\partial u^2} \mathbf{i}_2 & \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial u^3} \mathbf{i}_3 \\ \frac{h_1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u^3} (h_3 F_3) - \frac{\partial}{\partial u^2} (h_2 F_2) \right] & \frac{h_1}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial}{\partial u^3} (h_1 F_1) - \frac{\partial}{\partial u^1} (h_3 F_3) \right] & \frac{h_3}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial u^1} (h_2 F_2) - \frac{\partial}{\partial u^2} (h_1 F_1) \right] \end{vmatrix}. \quad (85)$$

Вектор ΔF можно получить, вычитая (85) из развёрнутого выражения для $\text{grad div } F$. Полученный результат будет отличаться от того, который получается при непосредственном применении оператора Лапласа к криволинейным компонентам F .

1.17. Уравнения поля в обобщённых ортогональных координатах. Во всякой ортогональной системе криволинейных координат, характеризующейся коэффициентами h_1, h_2, h_3 , уравнения Максвелла могут быть разложены в систему восьми дифференциальных уравнений в частных производных для скалярных компонент векторов поля:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u^2} (h_3 E_3) - \frac{\partial}{\partial u^3} (h_2 E_2) \right] + \frac{\partial B_1}{\partial t} &= 0, \\ \frac{1}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial}{\partial u^3} (h_1 E_1) - \frac{\partial}{\partial u^1} (h_3 E_3) \right] + \frac{\partial B_2}{\partial t} &= 0, \\ \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial u^1} (h_2 E_2) - \frac{\partial}{\partial u^2} (h_1 E_1) \right] + \frac{\partial B_3}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u^2} (h_3 H_3) - \frac{\partial}{\partial u^3} (h_2 H_2) \right] - \frac{\partial D_1}{\partial t} &= J_1, \\ \frac{1}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial}{\partial u^3} (h_1 H_1) - \frac{\partial}{\partial u^1} (h_3 H_3) \right] - \frac{\partial D_2}{\partial t} &= J_2, \\ \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial u^1} (h_2 H_2) - \frac{\partial}{\partial u^2} (h_1 H_1) \right] - \frac{\partial D_3}{\partial t} &= J_3. \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

$$\frac{\partial}{\partial u^1} (h_2 h_3 B_1) + \frac{\partial}{\partial u^2} (h_3 h_1 B_2) + \frac{\partial}{\partial u^3} (h_1 h_2 B_3) = 0. \quad (III)$$

$$\frac{\partial}{\partial u^1} (h_2 h_3 D_1) + \frac{\partial}{\partial u^2} (h_3 h_1 D_2) + \frac{\partial}{\partial u^3} (h_1 h_2 D_3) = h_1 h_2 h_3 \rho. \quad (IV)$$

Разрешить в общем виде уравнения этой системы так, чтобы разделить компоненты векторов поля и получить уравнения, которым удовлетворяла бы каждая из компонент в отдельности, не представляется возможным. В каждой конкретной задаче необходимо максимально использовать выгоды и особые возможности, предоставляемые различными координатными системами.

1.18. Свойства некоторых простейших систем. Как было показано, ортогональная координатная система полностью характеризуется тремя метрическими коэффициентами h_1, h_2, h_3 . Эти параметры будут теперь определены для некоторых элементарных систем; в некоторых случаях, для удобства ссылок будут приведены и дифференциальные операторы.

1. *Цилиндрические координаты.* Пусть P' будет проекцией точки $P(x, y, z)$ на z -плоскость, и r, ϑ будут полярными координатами точки P' на этой плоскости (рис. 7). Переменные

$$u^1 = r, \quad u^2 = \vartheta, \quad u^3 = z \quad (86)$$

называются круговыми цилиндрическими координатами. Они связаны с прямоугольными координатами уравнениями:

$$x = r \cos \vartheta, \quad y = r \sin \vartheta, \quad z = z. \quad (87)$$

Координатными поверхностями являются коаксиальные круговые цилиндры,

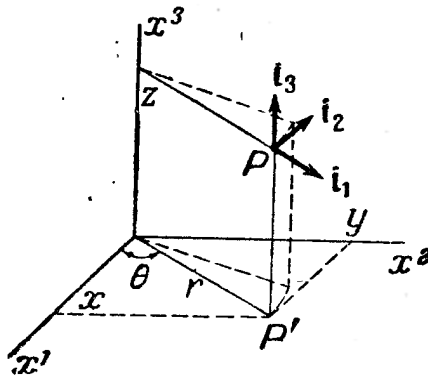


Рис. 7. Круговые цилиндрические координаты.

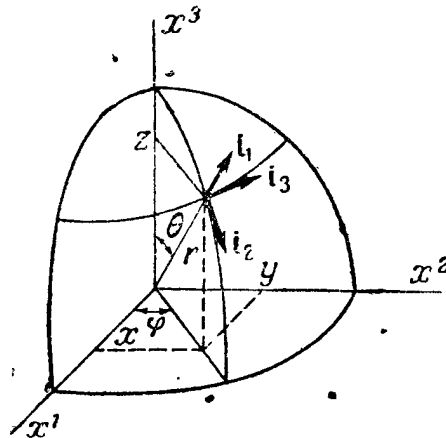


Рис. 8. Сферические координаты.

пересекаемые ортогонально плоскостями $\vartheta = \text{const.}$ и $z = \text{const.}$ Бесконечно малый элемент длины равен

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + dz^2, \quad (88)$$

откуда ясно, что метрические коэффициенты равны:

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = 1. \quad (89)$$

Если ψ — какая-либо скалярная, а F — векторная функция координат, то находим:

$$\left. \begin{aligned} \text{grad } \psi &= \frac{\partial \psi}{\partial r} \mathbf{i}_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \mathbf{i}_2 + \frac{\partial \psi}{\partial z} \mathbf{i}_3; \\ \text{div } F &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F_1) + \frac{1}{r} \frac{\partial F_2}{\partial \vartheta} + \frac{\partial F_3}{\partial z}; \\ \text{rot } F &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F_3}{\partial \vartheta} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \mathbf{i}_1 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial r} \right) \mathbf{i}_2 + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F_2) - \frac{1}{r} \frac{\partial F_1}{\partial \vartheta} \right] \mathbf{i}_3; \\ \Delta \psi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}. \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

2. *Сферические координаты.* Переменные:

$$u^1 = r, \quad u^2 = \vartheta, \quad u^3 = \varphi, \quad (91)$$

связанные с прямоугольными координатами преобразованием

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta, \quad (92)$$

называются сферическими координатами точки P . Координатные поверхности $r = \text{const.}$ — концентрические сферы, пересекаемые меридиональными плоскостями $\varphi = \text{const.}$ и семейством конусов $\vartheta = \text{const.}$ Единичные векторы $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ проводятся в направлении возрастания r, ϑ и φ так, что составляют правую базисную систему, как показано на рис. 8. Линейный элемент

равен

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2, \quad (93)$$

откуда для метрических коэффициентов получаем:

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r \sin \vartheta. \quad (94)$$

Эти значения приводят к следующим выражениям:

$$\left. \begin{aligned} \text{grad } \psi &= \frac{\partial \psi}{\partial r} \mathbf{i}_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \mathbf{i}_2 + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \mathbf{i}_3; \\ \text{div } \mathbf{F} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_1) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta F_2) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial F_3}{\partial \varphi}; \\ \text{rot } \mathbf{F} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta F_3) - \frac{\partial F_2}{\partial \varphi} \right] \mathbf{i}_1 + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial F_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r F_3) \right] \mathbf{i}_2 + \\ &\quad + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r F_2) - \frac{\partial F_1}{\partial \vartheta} \right] \mathbf{i}_3; \\ \Delta \psi &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}. \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

3. *Эллиптические координаты.* Пусть координаты двух фиксированных точек P_1 и P_2 , расположенных на оси x , будут $x=c$ и $x=-c$ и пусть r_1 и r_2 будут расстояния переменной точки P в z -плоскости от P_1 и P_2 . Тогда переменные

$$u^1 = \xi, \quad u^2 = \eta, \quad u^3 = z, \quad (96)$$

определённые уравнениями

$$\xi = \frac{r_1 + r_2}{2c}, \quad \eta = \frac{r_1 - r_2}{2c}, \quad (97)$$

называются эллиптическими координатами. Из этих соотношений видно, что

$$\xi \geq 1; \quad -1 \leq \eta \leq 1. \quad (98)$$

Координатная поверхность $\xi = \text{const.}$ есть цилиндр эллиптического сечения, фокусы которого суть P_1 и P_2 . Большая и малая полуоси эллипса ξ даются формулами:

$$a = c\xi, \quad b = c\sqrt{\xi^2 - 1}. \quad (99)$$

а эксцентриситет равен

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\xi}. \quad (100)$$

Поверхности $\eta = \text{const.}$ представляют собой семейство конфокальных гиперболических цилиндров, состоящих из двух полостей каждый, как показано на рис. 9. Уравнения этих двух конфокальных систем будут

$$\frac{x^2}{\xi^2} + \frac{y^2}{\xi^2 - 1} = c^2, \quad \frac{x^2}{\eta^2} - \frac{y^2}{1 - \eta^2} = c^2, \quad (101)$$

откуда мы получаем формулы преобразования:

$$x = c\xi\eta, \quad y = c\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}, \quad z = z. \quad (102)$$

Переменная η соответствует косинусу угла, измеряемого от оси x , и следовательно, единичные векторы $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ правой базисной системы направлены так, как показано на рис. 9, где вектор $\mathbf{i}_3$ перпендикулярен к плоскости чертежа и направлен от читателя.

Метрические коэффициенты подсчитываются из (102) и (70), откуда

$$h_1 = c \sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1}}, \quad h_2 = c \sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{1 - \eta^2}}, \quad h_3 = 1. \quad (103)$$

4. *Параболические координаты.* Если r, ϑ — полярные координаты точки на z -плоскости, то можно определить два семейства взаимно ортогональных парабол уравнениями:

$$\xi = \sqrt{2r} \sin \frac{\vartheta}{2}, \quad \eta = \sqrt{2r} \cos \frac{\vartheta}{2}. \quad (104)$$

Поверхности $\xi = \text{const.}$ и $\eta = \text{const.}$ представляют собой пересекающиеся параболические цилиндры, образующие которых параллельны оси z , как показано на рис. 10. Параметры

$$u^1 = \xi, \quad u^2 = \eta, \quad u^3 = z \quad (105)$$

называются параболическими координатами. Заменяя в (104) r и ϑ прямоугольными координатами, находим:

$$\xi^2 = \sqrt{x^2 + y^2} - x, \quad (106)$$

$$\eta^2 = \sqrt{x^2 + y^2} + x,$$

откуда для преобразования от параболических координат к прямоугольным имеем:

$$x = \frac{1}{2} (\eta^2 - \xi^2), \quad y = \xi\eta, \quad (107)$$

$$z = z.$$

Единичные векторы i_1 и i_2 направлены как показано на рис. 10,

Рис. 9. Эллиптические цилиндрические координаты. Неопределённость в знаке устранена тем, что положено $\xi = \text{ch } u$ и $\eta = \text{csch } v$.

причём i_3 нормален к плоскости чертежа и направлен от читателя. Подсчёт метрических коэффициентов из (107) согласно (70) даёт

$$h_1 = h_2 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad h_3 = 1. \quad (108)$$

5. *Биполярные координаты.* Пусть P_1 и P_2 — две фиксированные точки на какой-либо z -плоскости с координатами $(a, 0), (-a, 0)$ соответственно. Уравнение

$$(x - a \text{cth } \xi)^2 + y^2 = a^2 \text{csch}^2 \xi \quad (109)$$

с параметром ξ описывает два семейства окружностей с центрами, лежащими на оси x . Эти два семейства симметричны относительно оси y , как показано на рис. 11. Точка $P_1(a, 0)$ соответствует $\xi = +\infty$, в то время как её изображение $P_2(-a, 0)$ достигается при $\xi = -\infty$. Линия, даваемая уравнением (109) при $\xi = 0$, совпадает с осью y . Ортогональное семейство также представляет из себя семейство окружностей, центры которых лежат на оси y и которые все проходят через фиксированные точки P_1 и P_2 . Они определяются уравнением:

$$x^2 + (y - a \text{ctg } \eta)^2 = a^2 \text{cosec}^2 \eta, \quad (110)$$

в котором изменение параметра η ограничено пределами $0 \leq \eta \leq 2\pi$. Для того чтобы координаты точки P в заданном квадранте были однозначными, каждая окружность этого семейства разделяется точками P_1 и P_2 на два сегмента. Значения меньше π , приписываются дугам, лежащим выше оси x , в то время как нижние дуги обозначаются значениями η , равными π плюс значение η , соответствующее верхнему сегменту той же окружности.

Переменные

$$u^1 = \xi, \quad u^2 = \eta, \quad u^3 = z \quad (111)$$

называются биполярными координатами. Из (109) и (110) преобразование к прямоугольным координатам получается в виде:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{a \operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta}, \\ y &= \frac{a \sin \eta}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta}, \quad z = z. \end{aligned} \right\} \quad (112)$$

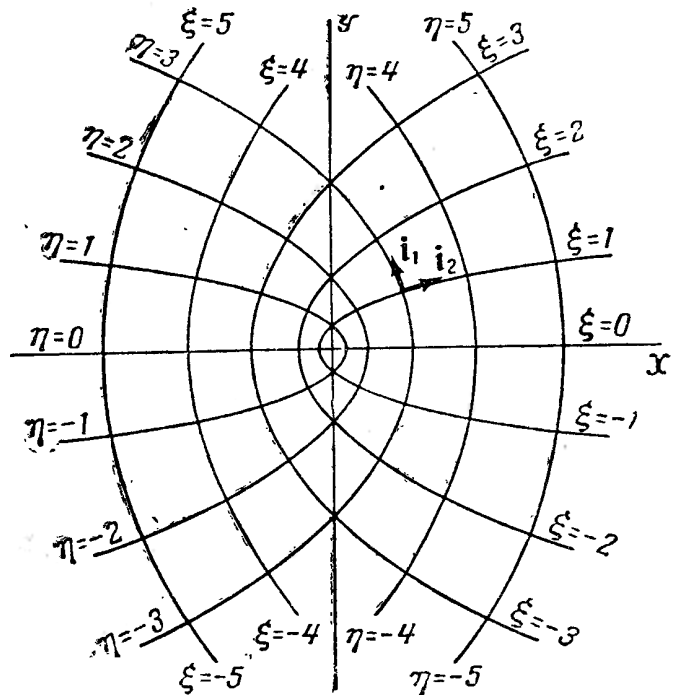


Рис. 10. Параболические координаты.

Единичные векторы i_1 и i_2 направлены в сторону возрастания ξ и η , как показано на рис. 11, в то время как i_3 направлен от читателя вдоль оси z .

Подсчёт метрических коэффициентов даёт:

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= h_2 = \frac{a}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta}, \\ h_3 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (113)$$

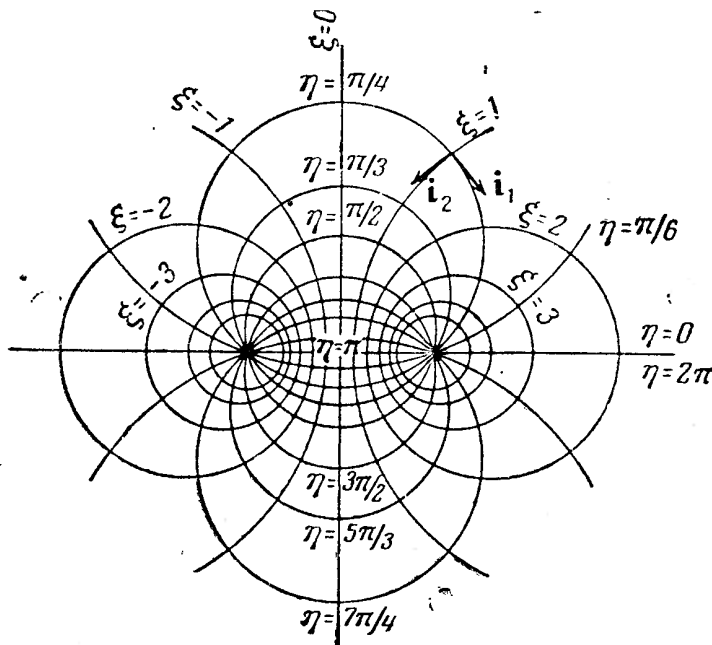


Рис. 11. Биполярные координаты.

вдоль оси x прямоугольной системы координат. При вращении рисунка вокруг этой оси образуется система вытянутых сфероидов, ортогональными поверхностями которых является система двуполостных гиперболоидов. Если φ измеряет угол поворота от оси y в x -плоскости, а r — расстояние точки по перпендикуляру от оси x , то

$$y = r \cos \varphi, \quad z = r \sin \varphi. \quad (114)$$

6. Сфероидальные координаты. Эллиптические координаты были образованы трансляцией системы конфокальных эллипсов вдоль оси z . Сфероидальные координаты получаются вращением тех же эллипсов вокруг оси симметрии. При этом необходимо различать два случая в зависимости от того, происходит ли вращение вокруг большой или вокруг малой оси. На рис. 9 большая ось ориентирована

Переменные

$$u^1 = \xi, \quad u^2 = \eta, \quad u^3 = \varphi, \quad (115)$$

определённые уравнениями (97) и (114), называются вытянутыми сфероидальными координатами. В качестве уравнений двух конфокальных систем мы имеем вместо (101):

$$\frac{x^2}{\xi^2} + \frac{r^2}{\xi^2 - 1} = c^2, \quad \frac{x^2}{\eta^2} - \frac{r^2}{1 - \eta^2} = c^2, \quad (116)$$

откуда получаем

$$\left. \begin{aligned} x &= c\xi\eta, \quad y = c\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \cos \varphi, \\ z &= c\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \sin \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (117)$$

$$\xi \geq 1, \quad -1 \leq \eta \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (118)$$

Подсчёт метрических коэффициентов даёт

$$h_1 = c\sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1}}, \quad h_2 = c\sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{1 - \eta^2}}, \quad h_3 = c\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}. \quad (119)$$

Если эллипсы рис. 9 вращаются вокруг оси y , то сфероиды получаются сплюснутые и фокальные точки P_1 и P_2 описывают круг в плоскости $y = 0$. Пусть r, φ, y будут цилиндрические координаты относительно оси y :

$$z = r \cos \varphi, \quad x = r \sin \varphi. \quad (120)$$

Если под P_1 и P_2 мы будем подразумевать теперь точки, в которых фокальное кольцо радиуса c пересекает плоскость $\varphi = \text{const.}$, то переменные ξ и η будут попрежнему определяться уравнением (97), но в качестве уравнений координатных поверхностей мы будем иметь:

$$\frac{r^2}{\xi^2} + \frac{y^2}{\xi^2 - 1} = c^2, \quad \frac{r^2}{\eta^2} - \frac{y^2}{1 - \eta^2} = c^2, \quad (121)$$

откуда выводим преобразование от сплюснутых сфероидальных координат

$$u^1 = \xi, \quad u^2 = \eta, \quad u^3 = \varphi \quad (122)$$

к прямоугольным координатам:

$$x = c\xi\eta \sin \varphi, \quad y = c\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}, \quad z = c\xi\eta \cos \varphi. \quad (123)$$

Поверхности $\xi = \text{const.}$ — сплюснутые сфероиды, в то время как ортогональное семейство $\eta = \text{const.}$ представляет собой однополостные гиперболоиды. Метрические коэффициенты будут

$$h_1 = c\sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1}}, \quad h_2 = \sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{1 - \eta^2}}, \quad h_3 = c\xi\eta. \quad (124)$$

Практическую ценность сфероидальных координат можно понять из того, что при приближении эксцентриситета к единице, вытянутые сфероиды становятся стержнеобразными, а сплюснутые сфероиды вырождаются в плоские эллиптические диски. В пределе, при фокальном расстоянии $2c$ и эксцентриситете, стремящемся к нулю, сфероидальные координаты совпадают со сферическими, причём $\xi \rightarrow r$, а $\eta \rightarrow \cos \vartheta$.

7. *Параболоидальные координаты.* Другая система координат с симметрией вращения может быть получена вращением парабол рис. 10 вокруг их осей симметрии. Переменные

$$u^1 = \xi, \quad u^2 = \eta, \quad u^3 = \varphi, \quad (125)$$

определённые соотношениями:

$$x = \xi \eta \cos \varphi, \quad y = \xi \eta \sin \varphi, \quad z = \frac{1}{2} (\xi^2 - \eta^2), \quad (126)$$

называются параболоидальными координатами. Поверхности $\xi = \text{const.}$, $\eta = \text{const.}$ являются параболоидами вращения вокруг оси симметрии, за которую в данном случае была взята ось z . Плоскость $y = 0$ пересекается с этими поверхностями по кривым:

$$x^2 = 2\xi^2 \left(\frac{\xi^2}{2} - z \right), \quad x^2 = 2\eta^2 \left(\frac{\eta^2}{2} + z \right), \quad (127)$$

которые, очевидно, являются параболоми с фокусами, расположенными в начале координат и с параметрами ξ^2 и η^2 . Метрические коэффициенты равны

$$h_1 = h_2 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad h_3 = \xi \eta. \quad (128)$$

8. *Эллипсоидальные координаты.* Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > b > c) \quad (129)$$

является уравнением эллипсоида с главными полуосями a , b и c .

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2 + \xi} + \frac{y^2}{b^2 + \xi} + \frac{z^2}{c^2 + \xi} &= 1 & (\xi > -c^2), \\ \frac{x^2}{a^2 + \eta} + \frac{y^2}{b^2 + \eta} + \frac{z^2}{c^2 + \eta} &= 1 & (-c^2 > \eta > -b^2), \\ \frac{x^2}{a^2 + \zeta} + \frac{y^2}{b^2 + \zeta} + \frac{z^2}{c^2 + \zeta} &= 1 & (-b^2 > \zeta > -a^2) \end{aligned} \right\} \quad (130)$$

являются соответственно уравнениями эллипсоида, однополостного гиперболоида и двуполостного гиперболоида, которые конфокальны с эллипсоидом (129). Через каждую точку пространства будет проходить только одна поверхность каждого рода и каждой точке будет соответствовать только одна система значений ξ , η , ζ .

Переменные

$$u^1 = \xi, \quad u^2 = \eta, \quad u^3 = \zeta \quad (131)$$

называются эллипсоидальными координатами. Поверхности $\eta = \text{const.}$ — однополостные гиперболоиды, а $\xi = \text{const.}$ — двуполостные. Преобразование к прямоугольным координатам получается разрешением (130) относительно x , y , z , что даёт:

$$\left. \begin{aligned} x &= \pm \left[\frac{(\xi + a^2)(\eta + a^2)(\zeta + a^2)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)} \right]^{1/2}, \\ y &= \pm \left[\frac{(\xi + b^2)(\eta + b^2)(\zeta + b^2)}{(c^2 - b^2)(a^2 - b^2)} \right]^{1/2}, \\ z &= \pm \left[\frac{(\xi + c^2)(\eta + c^2)(\zeta + c^2)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)} \right]^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (132)$$

Взаимная ортогональность этих трёх семейств поверхностей может быть установлена подсчётом коэффициентов g_{ij} из (132) при помощи (45). Они равны нулю при $i \neq j$; для диагональных членов находим:

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{2} \left[\frac{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)}{(\xi + a^2)(\xi + b^2)(\xi + c^2)} \right]^{1/2}, \\ h_2 &= \frac{1}{2} \left[\frac{(\eta - \zeta)(\eta - \xi)}{(\eta + a^2)(\eta + b^2)(\eta + c^2)} \right]^{1/2}, \\ h_3 &= \frac{1}{2} \left[\frac{(\zeta - \xi)(\zeta - \eta)}{(\zeta + a^2)(\zeta + b^2)(\zeta + c^2)} \right]^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (133)$$

Удобно ввести сокращённое обозначение:

$$R_s = \sqrt{(s + a^2)(s + b^2)(s + c^2)} \quad (s = \xi, \eta, \zeta). \quad (134)$$

Для лапласиана от скаляра ψ мы получаем тогда:

$$\Delta\psi = \frac{4}{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)(\eta - \zeta)} \left[(\eta - \zeta) R_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(R_\xi \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) + (\zeta - \xi) R_\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \left(R_\eta \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) + (\xi - \eta) R_\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(R_\zeta \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right) \right]. \quad (135)$$

ТЕНЗОРЫ ПОЛЯ

1.19. Ортогональные преобразования и их инварианты. В теории относительности ставится задача такой формулировки законов физики и, в частности, уравнений электромагнитного поля, чтобы они были инвариантны по отношению к преобразованиям системы отсчёта. Хотя в этой книге нам не представится случай рассматривать основы теории относительности, тем не менее, иногда оказывается выгодным пользоваться симметричной четырёхмерной системой обозначений, введенной Минковским и Зоммерфельдом, и преобразованием Лоренца, по отношению к которому уравнения поля инвариантны. Для определения величин, остающихся инвариантными при преобразовании от одной системы криволинейных координат к другой, существенно различие между ковариантными и контравариантными компонентами векторов и между основной и взаимной координатными базисными системами. Однако для наших целей достаточно будет ограничиться системой прямоугольных декартовых координат, в которых, как мы видели, ковариантные и контравариантные компоненты совпадают¹⁾.

Пусть $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ три ортогональных, единичных базисных вектора, определяющих прямоугольную координатную систему X , начало которой находится в фиксированной точке O , и пусть $\mathbf{r}$ — вектор, определяющий положение какой-либо точки P по отношению к O :

$$\mathbf{r} = x_1 \mathbf{i}_1 + x_2 \mathbf{i}_2 + x_3 \mathbf{i}_3. \quad (1)$$

Так как

$$\mathbf{i}_j \mathbf{i}_k = \delta_{jk}, \quad (2)$$

то координаты P в системе X будут

$$x_k = \mathbf{r} \mathbf{i}_k. \quad (3)$$

Предположим теперь, что $\mathbf{i}'_1, \mathbf{i}'_2, \mathbf{i}'_3$ являются базисными векторами второй прямоугольной системы X' , начало которой совпадает с O и которая, следовательно, отличается от X только поворотом координатных осей.

Так как

$$\mathbf{r} = x'_1 \mathbf{i}'_1 + x'_2 \mathbf{i}'_2 + x'_3 \mathbf{i}'_3, \quad (4)$$

то координаты точки P по отношению к системе X' будут:

$$x'_j = \mathbf{r} \mathbf{i}'_j = x_1 \mathbf{i}_1 \mathbf{i}'_j + x_2 \mathbf{i}_2 \mathbf{i}'_j + x_3 \mathbf{i}_3 \mathbf{i}'_j, \quad (5)$$

т. е. каждая координата P в системе X' является линейной функцией её координат в системе X , причём коэффициенты

$$a_{jk} = \mathbf{i}_j \mathbf{i}'_k \quad (6)$$

¹⁾ Этот раздел основан главным образом на следующих работах: Minkowski, *Ann. Physik.* 47, 927 (1915); Sommerfeld, *Ann. Physik.* 32, 749 (1910) и 33, 649 (1910); Mie, *Ann. Physik.* 37, 511 (1912); Паули, Теория относительности, Гостехиздат, 1947, г.

линейной формы являются, очевидно, направляющими косинусами координатных осей X' по отношению к осям X . Следовательно, вращение прямоугольной системы координат влечёт за собой изменение координат точки, которое может быть представлено линейным преобразованием:

$$x'_j = \sum_{k=1}^3 a_{jk} x_k \quad (j = 1, 2, 3). \quad (7)$$

Коэффициенты a_{jk} подчинены определённому условию, которое является следствием того факта, что расстояние от точки O до точки P , иначе говоря, абсолютная величина r не зависит от направления координатных осей:

$$\sum_{j=1}^3 (x_j)^2 = \sum_{j=1}^3 (x'_j)^2. \quad (8)$$

Но:

$$\sum_{j=1}^3 (x'_j)^2 = \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 a_{ji} x_i \right) \left(\sum_{k=1}^3 a_{jk} x_k \right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 x_i x_k \sum_{j=1}^3 (a_{ji} a_{jk}), \quad (9)$$

откуда следует, что

$$\sum_{j=1}^3 a_{ji} a_{jk} = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{при } i = k, \\ 0, & \text{при } i \neq k. \end{cases} \quad (10)$$

Уравнения (10) выражают соотношения, которым должны удовлетворять косинусы углов между координатными осями для того, чтобы последние были ортогональными, и они известны поэтому как условия ортогональности. Преобразование (7) при условии выполнения (10) называется ортогональным преобразованием. Можно показать, что прямым следствием (10) является равенство единице квадрата детерминанта $|a_{jk}|$ и, следовательно, $|a_{jk}| = \pm 1$. Любая система коэффициентов a_{jk} , удовлетворяющих (10), определяет некоторое ортогональное преобразование в том смысле, что соотношение (8) выполняется. Геометрически преобразование (8) представляет вращение только тогда, когда детерминант $|a_{jk}| = +1$. Ортогональное преобразование с детерминантом, равным -1 , соответствует отражению с последующим вращением.

Поскольку детерминант ортогонального преобразования не равен нулю, x_k могут быть выражены как линейные функции x'_j . Проще всего получить эти соотношения, написав, как и в (5):

$$x_k = r \mathbf{i}_k = x'_1 \mathbf{i}'_1 + x'_2 \mathbf{i}'_2 + x'_3 \mathbf{i}'_3 \quad (11)$$

или

$$x_k = \sum_{j=1}^3 a_{jk} x'_j, \quad (k = 1, 2, 3), \quad (12)$$

откуда, совместно с (8), следует, что

$$\sum_{j=1}^3 a_{ij} a_{kj} = \delta_{ik}. \quad (13)$$

Пусть $\mathbf{A}$ — произвольный приложенный (т. е. с закреплённым началом) вектор:

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^3 A_k \mathbf{i}_k = \sum_{k=1}^3 A'_k \mathbf{i}'_k. \quad (14)$$

Компоненты A'_j этого вектора по отношению к системе X' даются выражениями:

$$A'_j = A i'_j = \sum_{k=1}^3 A_k i_k i'_j = \sum_{k=1}^3 a_{jk} A_k, \quad (15)$$

так что прямоугольные компоненты фиксированного вектора преобразуются при вращении координатной системы как координаты точки. Хотя каждый вектор имеет в общем случае три скалярные компоненты, отсюда не следует, что любые три скалярные величины составляют компоненты вектора. Для того чтобы три скаляра A_1, A_2, A_3 могли быть интерпретированы как компоненты вектора, необходимо, чтобы они преобразовывались как координаты точки.

Среди скалярных величин мы должны различать *вариантные скаляры* и *инварианты*. Величины, подобные температуре, давлению, работе и т. п., не зависящие от ориентации координатной системы, называются инвариантами. С другой стороны, координаты точки и компоненты вектора обладают численной величиной, которая меняется при преобразовании координатной системы. Такие величины мы назовём *вариантными скалярами*. Известно, что скалярное произведение AB двух векторов A и B является скаляром. Спрашивается, что это за скаляр? В силу (12) и (13) мы имеем:

$$AB = \sum_{k=1}^3 A_k B_k = \sum_{k=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 a_{jk} A'_j \right) \left(\sum_{i=1}^3 a_{ik} B'_i \right) = \sum_{j=1}^3 A'_j B'_j. \quad (16)$$

Скалярное произведение двух векторов является инвариантом ортогонального преобразования координатной системы.

Пусть φ является инвариантом; рассмотрим совокупность трёх величин:

$$B_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (17)$$

В силу (12)

$$\frac{\partial x_k}{\partial x'_i} = a_{ik}, \quad (18)$$

и, следовательно:

$$B'_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x'_i} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} = \sum_{k=1}^3 a_{ik} B_k. \quad (19)$$

Величины B_i преобразуются как компоненты вектора, и, следовательно, градиент φ

$$\text{grad } \varphi = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} i_k, \quad (20)$$

подсчитанный в точке P , является приложенным в этой точке вектором.

Пусть A_i будет прямоугольной компонентой вектора A и пусть

$$B_i = \frac{\partial A_i}{\partial x'_i}. \quad (21)$$

Тогда, по (18) и (15):

$$B'_i = \frac{\partial A'_i}{\partial x'_i} = \sum_{k=1}^3 a_{ik} \frac{\partial A'_i}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ik} a_{ij} \frac{\partial A_j}{\partial x_k}, \quad (22)$$

откуда, согласно (10), следует, что

$$\sum_{i=1}^3 B'_i = \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 a_{ik} a_{ij} \right) \frac{\partial A_j}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^3 B_j. \quad (23)$$

Дивергенция вектора есть инвариант ортогонального преобразования координатной системы.

Наконец, из того, что градиент инвариантного скаляра есть вектор, а дивергенция вектора является инвариантом, следует, что *лапласиан*

$$\Delta \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} \quad (24)$$

является инвариантом при ортогональном преобразовании.

Трансформационные свойства векторов могут быть распространены и на многообразия с числом измерений большим трёх. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 будут прямоугольными координатами точки P относительно координатной системы X в четырёхмерном континууме. Положение точки P по отношению к заданному началу отсчёта O определяется вектором

$$\mathbf{r} = \sum_{j=1}^4 x_j \mathbf{i}_j, \quad \mathbf{i}_j \mathbf{i}_k = \delta_{jk}. \quad (25)$$

Линейное преобразование

$$x'_j = \sum_{k=1}^4 a_{jk} x_k, \quad (j = 1, 2, 3, 4) \quad (26)$$

называется ортогональным, если его коэффициенты удовлетворяют условию:

$$\sum_{j=1}^4 a_{ji} a_{jk} = \delta_{ik}. \quad (27)$$

Специальным свойством ортогонального преобразования является инвариантность суммы квадратов координат:

$$\sum_{j=1}^4 (x_j)^2 = \sum_{j=1}^4 (x'_j)^2. \quad (28)$$

Легко показать, что квадрат детерминанта, образованного из a_{jk} , положителен и равен единице; следовательно, сам детерминант может быть равен ± 1 . Однако, если (26) включает тождественное преобразование

$$x'_j = x_j \quad (j = 1, 2, 3, 4), \quad (29)$$

то детерминант должен быть, очевидно, положительным. Впредь мы ограничимся подгруппой ортогональных преобразований, которые характеризуются удовлетворением соотношений (27) и условием

$$|a_{jk}| = +1. \quad (30)$$

Тогда геометрически это преобразование соответствует вращению координатных осей.

Мы определим теперь *четыре-вектор* как любую совокупность четырёх вариантных скаляров A_i ($i = 1, 2, 3, 4$), преобразующихся при вращении системы координат как координаты точки:

$$A'_j = \sum_{k=1}^4 a_{jk} A_k, \quad A_k = \sum_{j=1}^4 a_{jk} A'_j. \quad (31)$$

Тогда легко, как и выше, показать, что скалярное произведение двух четырех-векторов и четырехмерная дивергенция четырех-вектора являются инвариантами по отношению к вращению координатной системы:

$$AB = \sum_{k=1}^4 A_k B_k = \sum_{j=1}^4 A'_j B'_j, \quad (32)$$

$$\square A = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^4 \frac{\partial A'_j}{\partial x'_j}. \quad (33)$$

Далее, производные скаляра

$$B_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (34)$$

преобразуются как компоненты четырех-вектора и, следовательно, четырех-мерный лапласиан от инвариантного скаляра:

$$\square^2 \varphi = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = \sum_{j=1}^4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j'^2} \quad (35)$$

тоже инвариантен по отношению к ортогональному преобразованию.

1.20. Элементы тензорного анализа. Хотя большинство физических величин может быть классифицировано на скаляры, если они характеризуются только численным значением, и на векторы, если они характеризуются величиной и направлением, существуют некоторые величины, которые не могут быть представлены должным образом ни посредством скаляров, ни посредством векторов. Смещение центра тяжести металлического стержня, например, может быть охарактеризовано вектором; однако стержень можно также растягивать вдоль оси, прилагая напряжения к двум его концам, без того, чтобы центр вообще смещался. Величина, которая должна быть использована для того чтобы представить подобное растяжение, должна, таким образом, определять *два* направления. Неадекватность векторного представления становится ещё более очевидной, если попытаться описать объёмную деформацию, принимая во внимание и боковое сжатие стержня. В этом разделе мы коснёмся тензорного исчисления только в простейшем виде, в каком оно является подходящим аппаратом для рассмотрения подобных задач.

Пусть в трёхмерном континууме каждая прямоугольная компонента вектора B является линейной функцией компонент вектора A :

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= T_{11}A_1 + T_{12}A_2 + T_{13}A_3, \\ B_2 &= T_{21}A_1 + T_{22}A_2 + T_{23}A_3, \\ B_3 &= T_{31}A_1 + T_{32}A_2 + T_{33}A_3. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Для того чтобы эта связь компонент B с компонентами A в системе X сохранялась и при повороте системы координат, необходимо, чтобы коэффициенты T_{jk} преобразовывались специальным образом. Следовательно, T_{jk} являются *вариантными скалярами*. Тензор — точнее говоря, тензор второго ранга, — мы определим теперь как линейное преобразование компонент вектора A в компоненты вектора B , которое инвариантно по отношению к поворотам координатной системы. Девять коэффициентов T_{jk} линейного преобразования называются компонентами тензора.

Для того чтобы установить способ, по которому должны преобразовываться компоненты тензора, напомним сначала (36) в сокращённой форме:

$$B_j = \sum_{k=1}^3 T_{jk} A_k. \quad (37)$$

Если (37) инвариантно по отношению к преобразованию

$$x'_j = \sum_{k=1}^3 a_{jk} x_k, \quad \sum_{j=1}^3 a_{ji} a_{jk} = \delta_{ik}, \quad (38)$$

то T_{jk} должны преобразовываться в T'_{il} так, чтобы имело место

$$B'_i = \sum_{l=1}^3 T'_{il} A'_l \quad (i=1, 2, 3). \quad (39)$$

Умножим (37) на a_{ij} и просуммируем по индексу j :

$$\sum_{j=1}^3 a_{ij} B_j = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_{ij} T_{jk} A_k. \quad (40)$$

Но

$$B'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} B_j, \quad A_k = \sum_{l=1}^3 a_{lk} A'_l \quad (41)$$

и, следовательно, (40) запишется в виде

$$B'_i = \sum_{l=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_{ij} a_{lk} T_{jk} \right) A'_l = \sum_{l=1}^3 T'_{il} A'_l. \quad (42)$$

Итак, компоненты тензора второго ранга должны преобразовываться по закону:

$$T'_{il} = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_{ij} a_{lk} T_{jk} \quad (i, l=1, 2, 3) \quad (43)$$

и обратно, *любая совокупность девяти величин, которые преобразуются согласно (43), составляет тензор.*

Аналогичным путём можно показать, что обратное преобразование будет:

$$T_{jk} = \sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^3 a_{ij} a_{lk} T'_{il}. \quad (44)$$

Если порядок индексов во всех компонентах тензора может быть изменён без того, чтобы изменился сам тензор, так что $T_{jk} = T_{kj}$, то говорят, что тензор симметричен. Тензор называется антисимметричным, если перестановка индексов в каждой из компонент меняет в результате знак тензора. Диагональные члены антисимметричного тензора очевидно исчезают, в то время как для недиагональных членов $T_{jk} = -T_{kj}$. Из (43) ясно, что если $T_{jk} = T_{kj}$, то и $T'_{il} = T'_{li}$. Точно так же из $T_{jk} = -T_{kj}$ следует, что и $T'_{il} = -T'_{li}$. Таким образом, симметричный или антисимметричный характер тензора инвариантен по отношению к вращению координатной системы.

Сумма или разность двух тензоров строится из суммы или разности соответствующих им компонент. Если 2R — сумма тензоров 2S и 2T ,¹⁾ то компоненты 2R , по определению, равны:

$$R_{jk} = S_{jk} + T_{jk} \quad (j, k=1, 2, 3). \quad (45)$$

Ввиду линейного характера преобразования (43), величины R_{jk} преобразуются так же, как S_{jk} и T_{jk} и, следовательно, составляют компоненты тензора 2R . Из этого правила следует, что любой несимметричный тензор

¹⁾ Тензор второго ранга будет отмечаться верхним индексом, как написано в тексте.

может быть представлен в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров. Полагая, что 2R — данный асимметричный тензор; мы строим симметричный тензор 2S с компонентами

$$S_{jk} = \frac{1}{2} (R_{jk} + R_{kj}) = S_{kj} \quad (46)$$

и антисимметричный тензор 2T с компонентами

$$T_{jk} = \frac{1}{2} (R_{jk} - R_{kj}) = -T_{kj}. \quad (47)$$

Тогда, согласно (45), сумма так построенных 2S и 2T равна 2R .

В трёхмерном многообразии антисимметричный тензор сводится к трём независимым компонентам и в этом смысле напоминает вектор. Преобразование (36) сводится, например, в этом случае к такому:

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= 0 - T_{21}A_2 + T_{13}A_3, \\ B_2 &= T_{21}A_1 + 0 - T_{32}A_3, \\ B_3 &= -T_{13}A_1 + T_{32}A_2 + 0. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Но B_i являются компонентами вектора:

$$B = [TA], \quad (49)$$

где вектор T имеет компоненты

$$T_1 = T_{32}, \quad T_2 = T_{13}, \quad T_3 = T_{21}. \quad (50)$$

Напомним теперь, что в векторном анализе принято различать *полярные векторы*, используемые, например, для представления перемещений и механических сил, от *аксиальных векторов*, с которыми связаны направления вращений. Геометрически полярный вектор представляется отрезком или линией, в то время как полярный вектор соответствует площади. В результате векторного перемножения двух полярных векторов мы получаем типичный аксиальный вектор, и из предыдущего мы должны заключить, что аксиальный вектор в действительности является антисимметричным тензором и что его компоненты должны по существу обозначаться двумя индексами, а не одним. Таким образом, для компонент $T = [AB]$ мы напомним:

$$T_{jk} = A_j B_k - A_k B_j = -T_{kj} \quad (j, k = 1, 2, 3). \quad (51)$$

При повороте системы координат компоненты A и B преобразуются согласно

$$A_j = \sum_{l=1}^3 a_{lj} A'_l, \quad B_k = \sum_{i=1}^3 a_{ik} B'_i. \quad (52)$$

Подставив эти значения в (51), находим:

$$A_j B_k - A_k B_j = \sum_{l=1}^3 \sum_{i=1}^3 a_{lj} a_{ik} (A'_l B'_i - A'_i B'_l) \quad (53)$$

соотношение, которое совпадает с (44) и показывает, что компоненты «векторного произведения» двух векторов преобразуются как компоненты тензора. Существенная разница в свойствах полярных и аксиальных векторов (с помощью которых представляются такие величины, как угловые скорости, моменты и т. п.) теперь ясна: аксиальные векторы являются векторами только по способу их построения, но не по закону их преобразования. Существенно добавить, что антисимметричный тензор может быть представлен аксиальным или псевдо-вектором только в трёхмерном пространстве, и то только в прямоугольных компонентах.

Поскольку векторное произведение двух векторов является фактически антисимметричным тензором, можно предвидеть, что то же справедливо и в отношении ротора вектора. То, что величина $\frac{\partial A_i}{\partial x_k}$, где A_i — компонента вектора A , является компонентой тензора, видно сразу же из уравнения (22):

$$\frac{\partial A'_i}{\partial x'_l} = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_{ij} a_{lk} \frac{\partial A_j}{\partial x_k}. \quad (54)$$

Компоненты $\text{rot } A$:

$$T_{jk} = \frac{\partial A_k}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_k} = -T_{kj} \quad (j, k = 1, 2, 3) \quad (55)$$

преобразуются, следовательно, как компоненты антисимметричного тензора.

Дивергенция тензора определяется как следующая операция:

$$(\text{div } {}^2T)_j = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_k} = B_j \quad (j = 1, 2, 3). \quad (56)$$

Легко показать, что величины B_j преобразуются как компоненты вектора. Имеем:

$$\frac{\partial T'_{il}}{\partial x'_l} = \sum_{k=1}^3 a_{lk} \frac{\partial T'_{il}}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{lk} a_{ij} a_{ik} \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_k} \quad (57)$$

или, суммируя по индексу l и применяя условие ортогональности:

$$B'_i = \sum_{l=1}^3 \frac{\partial T'_{il}}{\partial x'_l} = \sum_{j=1}^3 a_{ij} \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_k} \right) = \sum_{j=1}^3 a_{ij} B_j. \quad (58)$$

Дивергенция тензора второго ранга является вектором, или тензором первого ранга. Дивергенция вектора есть инвариантный скаляр или тензор нулевого ранга. Это — примеры процесса, известного в тензорном анализе как свёртывание или сокращение индексов.

Как и в случае векторов, понятие тензора может быть распространено и на многообразие четырёх измерений. Любая совокупность 16 величин, преобразующихся по закону

$$T'_{il} = \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 a_{ij} a_{lk} T_{jk} \quad (i, l = 1, 2, 3, 4) \quad (59)$$

или ему обратному:

$$T_{jk} = \sum_{i=1}^4 \sum_{l=1}^4 a_{ij} a_{lk} T'_{il} \quad (j, k = 1, 2, 3, 4) \quad (60)$$

называется тензором второго ранга в четырёхмерном многообразии. Как и в трёхмерном случае, говорят, что тензор симметричен, если $T_{jk} = T_{kj}$, и антисимметричен, если $T_{jk} = -T_{kj}$, причём $T_{jj} = 0$. Из определения ясно, что антисимметричный четыре-тензор имеет только шесть независимых компонент. Развёртывая (59), заменяя T_{kj} на $-T_{jk}$ и затем перегруппировывая члены, мы получаем формулу для преобразования антисимметричного тензора в виде соотношения:

$$T'_{il} = \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 (a_{ij} a_{lk} - a_{ik} a_{lj}) T_{jk} = \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{ik} \\ a_{lj} & a_{lk} \end{vmatrix} T_{jk} \quad (k > j). \quad (61)$$

Любые шесть величин, которые преобразуются по этому закону, составляют антисимметричный четыре-тензор или, как его часто называют, *шести-вектор*.

В трёхмерном пространстве векторное произведение представляется геометрически в виде площади параллелограмма, стороны которого определяются двумя векторами, проведёнными из общего начала. Компонентами этого произведения являются тогда проекции площади на три координатные плоскости. По аналогии векторное произведение в четыре-пространстве *определяется* как «площадь» параллелограмма, образованного двумя четыре-векторами A и B , проведёнными из общего начала. Компонентами такого обобщённого произведения будут проекции этого параллелограмма на шесть координатных плоскостей, площади которых равны:

$$T_{jk} = A_j B_k - A_k B_j = -T_{kj} \quad (j, k = 1, 2, 3, 4). \quad (62)$$

Векторное произведение двух четыре-векторов является, следовательно, антисимметричным четыре-тензором или шести-вектором.

Если опять A является четыре-вектором, то можно показать, как и в (54), что величины

$$T_{jk} = \frac{\partial A_k}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_k} = -T_{kj} \quad (j, k = 1, 2, 3, 4) \quad (63)$$

преобразуются как компоненты антисимметричного тензора. Величины T_{jk} могут быть интерпретированы как компоненты ротора четыре-вектора.

Как и в случае трёх измерений, дивергенция четыре-тензора определяется соотношением:

$$(\text{div } {}^2T)_j = \sum_{k=1}^4 \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_k} \quad (j = 1, 2, 3, 4), \quad (64)$$

т. е. является совокупностью величин, образующих, очевидно, четыре-вектор.

1.21. Пространственно-временная симметрия уравнений поля. Если в уравнения электромагнитного поля ввести в качестве независимых переменных четыре длины:

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ict, \quad (65)$$

где c — скорость света в пустом пространстве, то сразу становится очевидной замечательная симметрия этих уравнений. Записанные в прямоугольных координатах уравнения

$$\text{rot } H - \frac{\partial D}{\partial t} = J \quad (\text{II}), \quad \text{div } D = \rho \quad (\text{IV})$$

представляются системой:

$$\left. \begin{aligned} 0 + \frac{\partial H_3}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_3} - ic \frac{\partial D_1}{\partial x_4} &= J_1, \\ -\frac{\partial H_3}{\partial x_1} + 0 + \frac{\partial H_1}{\partial x_3} - ic \frac{\partial D_2}{\partial x_4} &= J_2, \\ \frac{\partial H_2}{\partial x_1} - \frac{\partial H_1}{\partial x_2} + 0 - ic \frac{\partial D_3}{\partial x_4} &= J_3, \\ ic \frac{\partial D_1}{\partial x_1} + ic \frac{\partial D_2}{\partial x_2} + ic \frac{\partial D_3}{\partial x_3} + 0 &= ic\rho. \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

Будем рассматривать правые члены уравнений этой системы как компоненты плотности «четыре-тока»:

$$J_1 = J_x, \quad J_2 = J_y, \quad J_3 = J_z, \quad J_4 = ic\rho, \quad (67)$$

и введём в левые части систему зависимых переменных, определённых соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} G_{11} &= 0 & G_{12} &= H_3 & G_{13} &= -H_2 & G_{14} &= -icD_1 \\ G_{21} &= -H_3 & G_{22} &= 0 & G_{23} &= H_1 & G_{24} &= -icD_2 \\ G_{31} &= H_2 & G_{32} &= -H_1 & G_{33} &= 0 & G_{34} &= -icD_3 \\ G_{41} &= icD_1 & G_{42} &= icD_2 & G_{43} &= icD_3 & G_{44} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Тогда в системе отсчёта X уравнения (II) и (IV) сведутся к уравнениям

$$\sum_{k=1}^4 \frac{\partial G_{jk}}{\partial x_k} = J_j \quad (j = 1, 2, 3, 4). \quad (69)$$

Только шесть величин из G_{jk} независимы, и сходство системы этих величин с компонентами антисимметричного четыре-тензора совершенно очевидно. Так как дивергенция четыре-тензора является четыре-вектором, то из (69) следует, что *если* G_{jk} составляют тензор, то J_k являются компонентами четыре-вектора. Обратно, если мы сможем показать, что J действительно является четыре-вектором, то мы можем сделать заключение о тензорном характере 2G . До сих пор, однако, мы не привели доказательств в подтверждение подобного предположения. В предшествующих разделах было показано, что векторные или тензорные свойства системы скалярных величин определяются способом их преобразования при переходе от одной системы отсчёта к другой. Очевидно, ортогональному преобразованию координат x_k соответствует одновременное изменение как пространственных координат x, y, z , так и времени t , и только обратившись к опыту, мы сможем сказать, какого преобразования векторов поля можно ожидать при подобных обстоятельствах. В разделе 1.22 мы приведём кратко экспериментальные факты, которые приводят к заключению, что J_k действительно являются компонентами четыре-вектора, а G_{jk} — компонентами тензора поля. Временно мы будем рассматривать (69) и выводы, которые последуют ниже, просто как сжатую и симметричную запись уравнений поля в фиксированной системе координат.

Два однородных уравнения

$$\text{rot } E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \quad (\text{I}), \quad \text{div } B = 0 \quad (\text{III})$$

представляются системой:

$$\left. \begin{aligned} 0 + \frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3} + ic \frac{\partial B_1}{\partial x_4} &= 0, \\ -\frac{\partial E_3}{\partial x_1} + 0 + \frac{\partial E_1}{\partial x_3} + ic \frac{\partial B_2}{\partial x_4} &= 0, \\ \frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} + 0 + ic \frac{\partial B_3}{\partial x_4} &= 0, \\ -\frac{\partial B_1}{\partial x_1} - \frac{\partial B_2}{\partial x_2} - \frac{\partial B_3}{\partial x_3} + 0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

После деления первых трёх уравнений на ic , система антисимметричных компонент определится следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} F_{11} &= 0 & F_{12} &= B_3 & F_{13} &= -B_2 & F_{14} &= -\frac{i}{c} E_1 \\ F_{21} &= -B_3 & F_{22} &= 0 & F_{23} &= B_1 & F_{24} &= -\frac{i}{c} E_2 \\ F_{31} &= B_2 & F_{32} &= -B_1 & F_{33} &= 0 & F_{34} &= -\frac{i}{c} E_3 \\ F_{41} &= \frac{i}{c} E_1 & F_{42} &= \frac{i}{c} E_2 & F_{43} &= \frac{i}{c} E_3 & F_{44} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Все уравнения (70) содержатся тогда в системе:

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial F_{jk}}{\partial x_i} = 0, \quad (72)$$

где i, j, k — любые три числа из четырёх чисел 1, 2, 3, 4.

Системы (68) и (71) согласованы в том смысле, что в каждой из них действительные компоненты связаны с магнитным полем, в то время как мнимые компоненты связаны с электрическим полем. Чтобы отметить это расчленение, удобно представить систему компонент символами

$${}^2F = (B, -\frac{i}{c} E), \quad {}^2G = (H, -icD). \quad (73)$$

Но уравнения поля могут быть с равным успехом выражены и через «дуальную» систему

$${}^2F^* = (-\frac{i}{c} E, B), \quad {}^2G^* = (-icD, H), \quad (74)$$

или

$$\left. \begin{aligned} F_{11}^* &= 0 & F_{12}^* &= -\frac{i}{c} E_3 & F_{13}^* &= \frac{i}{c} E_2 & F_{14}^* &= B_1 \\ F_{21}^* &= \frac{i}{c} E_3 & F_{22}^* &= 0 & F_{23}^* &= -\frac{i}{c} E_1 & F_{24}^* &= B_2 \\ F_{31}^* &= -\frac{i}{c} E_2 & F_{32}^* &= \frac{i}{c} E_1 & F_{33}^* &= 0 & F_{34}^* &= B_3 \\ F_{41}^* &= -B_1 & F_{42}^* &= -B_2 & F_{43}^* &= -B_3 & F_{44}^* &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

и соответствующую систему для компонент ${}^2G^*$. После подстановки этих значений в (I) и (III), и (II) и (IV), соответственно, мы получаем:

$$\sum_{k=1}^4 \frac{\partial F_{jk}^*}{\partial x_k} = 0 \quad (j=1, 2, 3, 4), \quad (76)$$

$$\frac{\partial G_{ij}^*}{\partial x_k} + \frac{\partial G_{ki}^*}{\partial x_j} + \frac{\partial G_{kj}^*}{\partial x_i} = J_l \quad (i, j, k, l=1, 2, 3, 4). \quad (77)$$

Разными авторами было указано, что последнее представление является искусственным, так как (74) содержит в себе утверждение, что вектор E — аксиальный, а B — полярный, в то время как известно, что в действительности верно обратное. Представление

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial F_{jk}}{\partial x_i} = 0 \quad (i, j, k=1, 2, 3, 4), \quad (72)$$

$$\sum_{k=1}^4 \frac{\partial G_{jk}}{\partial x_k} = J_j \quad (j=1, 2, 3, 4) \quad (69)$$

следует в этом смысле рассматривать как «естественную» форму уравнений поля. К ним мы добавим ещё уравнение непрерывности

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (V)$$

которое в четырёхмерных обозначениях примет вид:

$$\sum_{k=1}^4 \frac{\partial J_k}{\partial x_k} = 0. \quad (78)$$

Если выразить компоненты F_{jk} через компоненты «четыре-потенциала» Φ посредством

$$F_{jk} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_j} - \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_k} \quad (j, k = 1, 2, 3, 4), \quad (79)$$

то можно легко убедиться, что уравнение (72) удовлетворяется при этом тождественно. В трёхмерном пространстве векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ выводятся из векторного и скалярного потенциалов с помощью соотношений

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad (80)$$

или в компонентах

$$-\frac{i}{c} E_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{i}{c} \varphi \right) - \frac{\partial A_j}{\partial x_4}, \quad B_i = \frac{\partial A_k}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_k}, \quad (81)$$

где индексы i, j, k следует брать в циклическом порядке. Очевидно, все эти уравнения будут заключаться в системе (79), если мы определим компоненты четыре-потенциала соотношениями

$$\Phi_1 = A_x, \quad \Phi_2 = A_y, \quad \Phi_3 = A_z, \quad \Phi_4 = \frac{i}{c} \varphi. \quad (82)$$

Как и в трёх измерениях, четырёх-потенциал полезен только в том случае, если мы можем определить из него поле ${}^2\mathbf{G}(\mathbf{H}, -ic\mathbf{D})$ наряду с полем ${}^2\mathbf{F}(\mathbf{B}, -\frac{i}{c}\mathbf{E})$. Поэтому на Φ нужно наложить некоторое дополнительное условие, чтобы (69) удовлетворялось, как и (72). Необходимо, следовательно, чтобы компоненты G_{jk} были функционально связаны с F_{jk} . Мы ограничимся здесь обычным случаем *однородной изотропной среды* и предположим, что соотношения *линейны*. Для того чтобы сохранить симметрию обозначений, удобно писать фактор пропорциональности, который характеризует среду в виде γ_{jk} , так что

$$G_{jk} = \gamma_{jk} F_{jk}. \quad (83)$$

Из (68) и (71) ясно, что ¹⁾

$$\gamma_{jk} = \frac{1}{\mu} \quad \text{при } j, k = 1, 2, 3; \quad \gamma_{jk} = \varepsilon c^2 \quad \text{при } j \text{ или } k, \text{ равном } 4. \quad (84)$$

¹⁾ Соотношение (83) можно сохранить и для анизотропной в электрическом или магнитном отношении среды при условии, что координатные оси совпадают с главными осями анизотропии. В случае наличия электрической и магнитной анизотропии одновременно для этого необходимо, чтобы главные оси электрической анизотропии совпадали с главными осями магнитной анизотропии. [В общем случае произвольной анизотропии связь между тензорами ${}^2\mathbf{G}$ и ${}^2\mathbf{F}$ должна быть установлена с помощью тензора γ четвёртого ранга. См. L. I. Mandelstamm und Ig. Tamm, *Math. Annalen* 95, 154, 1925. Прим. ред.]

Фактически эти коэффициенты являются компонентами симметричного тензора и, имея в виду последующие применения, мы придадим диагональным членам значения:

$$\gamma_{jj} = \frac{1}{\mu} \quad (j = 1, 2, 3), \quad \gamma_{44} = \mu \varepsilon^2 c^4. \quad (85)$$

Уравнение (69) можно теперь заменить следующим:

$$\sum_{k=1}^4 \gamma_{jk} \frac{\partial F_{jk}}{\partial x_k} = J_j \quad (j = 1, 2, 3, 4). \quad (86)$$

Подставив сюда (79), находим, что (86) удовлетворяется при условии, что Φ является решением уравнения

$$\sum_{k=1}^4 \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} (\gamma_{jk} \Phi_j) = -J_j \quad (j = 1, 2, 3, 4), \quad (87)$$

удовлетворяющим условию

$$\sum_{k=1}^4 \frac{\partial}{\partial x_k} (\gamma_{jk} \Phi_k) = 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4). \quad (88)$$

Последнее соотношение, очевидно, эквивалентно

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \mu \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (89)$$

а (87) включает в себе два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \Delta A_j - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 A_j}{\partial t^2} &= -\mu J_j, & (j = 1, 2, 3) \\ \Delta \varphi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\varepsilon} \rho. \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

В свободном пространстве $\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$, $\gamma_{jk} = \frac{1}{\mu}$ для всех значений индексов. Уравнения (87) и (88) приобретают тогда простой вид:

$$\sum_{k=1}^4 \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x_k^2} = -\mu_0 J_j, \quad \sum_{k=1}^4 \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_k} = 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4). \quad (91)$$

1.22. Преобразование Лоренца. Физическое значение полученных результатов гораздо более важно, чем их чисто формальное изящество. Ряд опытов, наиболее решающим из которых было знаменитое исследование Майкельсона и Морлея¹⁾, привёл к установлению двух фундаментальных постулатов, весьма вероятных, если не абсолютно достоверных. Согласно первому из них, называемому *постулатом относительности*, путём физических экспериментов, проведённых в системе отсчёта X , невозможно обнаружить равномерное поступательное движение по отношению к другой системе отсчёта X' . То, что земля движется по орбите вокруг солнца, мы знаем из наблюдений над удалёнными звёздами. Но если бы земля была окутана облаками, то никакие наблюдения на её поверхности не смогли бы обнаружить равномерное поступательное перемещение в пространстве. Течение естественных явлений не должно поэтому меняться, если система координат, по отношению к которой

¹⁾ Michelson and Morley, *Am. J. Sci.*, 3, 34, 1887.

производится отсчёт, движется без ускорения; все системы отсчёта, движущиеся равномерно и прямолинейно друг относительно друга, эквивалентны. В том виде, в каком он нам сейчас понадобится, мы сформулируем этот принцип относительности следующим образом: *Законы физики, надлежащим образом сформулированные, инвариантны по отношению к переходу от одной системы координат к другой, движущейся прямолинейно с постоянной скоростью относительно первой.* Прямым следствием этого постулата является то, что компоненты всех векторов или тензоров, входящих в уравнения, должны преобразовываться одним и тем же способом, или ковариантно. Существование подобного принципа, ограниченного равномерным перемещением, было установлено для классической механики Ньютоном, но его обобщением на электродинамику мы обязаны Эйнштейну.

Второй постулат Эйнштейна более примечателен: *скорость распространения электромагнитного возмущения в свободном пространстве является универсальной константой c , не зависящей от движения источника.* Это предположение является, очевидно, прямо противоположным нашему опыту в отношении механических и акустических волн в материальной среде, о которых известно, что измеряемая их скорость зависит от относительного движения наблюдателя и источника. Было сделано много попыток объяснения экспериментальных фактов без обращения к такому радикальному предположению, из которых наибольшее значение имела электродинамика Ритца¹⁾. Результаты всех этих исканий показывают, что хотя постоянство скорости света и не обязательно для объяснения отрицательных результатов опытов Майкельсона-Морлея, но лишь один этот постулат совместим *и с этими опытами, и с другими* оптическими явлениями²⁾.

Предположим например, что источник света расположен в начале отсчёта O системы координат $X(x, y, z)$. В момент $t=0$ этот источник испускает сферическую волну. Наблюдатель, расположенный в точке x, y, z системы координат X , впервые отметит прохождение волны в момент t , и уравнение точки на поверхности волнового фронта будет, следовательно,

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0. \quad (92)$$

Наблюдатель может, однако, измерять положение и время и по отношению к другой системе отсчёта $X'(x', y', z')$, движущейся с постоянной скоростью относительно O . Для простоты положим, что начало O' совпадает с O в момент $t=0$. Согласно второму постулату, световая волна распространяется в X' с той же самой скоростью, что и в X , так что уравнение волнового фронта в X' будет:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0. \quad (93)$$

Под t' мы должны подразумевать время, измеренное наблюдателем в системе X' с помощью инструментов, расположенных в этой системе. В этом, следовательно, содержится ключ к преобразованию, которое связывает координаты x, y, z, t наблюдения или события в X , с координатами x', y', z', t' того же самого события в X' : оно должно быть линейным и должно оставаться инвариантным квадратичную форму (92). Линейность следует из требования, чтобы равномерное прямолинейное движение частицы в X оставалось линейным и в X' .

Пусть:

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ict \quad (94)$$

¹⁾ Ritz, *Ann. Chim. Phys.*, 13, 145, 1908.

²⁾ Обзор этих исследований можно найти в книге Паули, *loc. cit.*

будут компонентами вектора R в четырёхмерном многообразии $X(x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$R^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2. \quad (95)$$

Постулат постоянства скорости c будет удовлетворён группой преобразований, которая оставляет инвариантной длину этого вектора. Но в разделе 1.19 было показано, что (95) инвариантно по отношению к группе вращений в четырёхмерном пространстве, и мы можем заключить поэтому, что преобразования, которые позволяют перейти от координат события в X к координатам того же события в X' , имеют вид:

$$x'_j = \sum_{k=1}^4 a_{jk} x_k \quad (j=1, 2, 3, 4), \quad (26)$$

причём

$$\sum_{j=1}^4 a_{ji} a_{jk} = \delta_{ik} \quad (i, k=1, 2, 3, 4) \quad (27)$$

и детерминант $|a_{jk}|$ равен единице.

Мы должны теперь найти эти коэффициенты. Вычисление упростится, если мы предположим, что поворот испытывают только оси x_3 и x_4 . Общность результата от этого отнюдь не страдает. Мы полагаем поэтому $x'_1 = x_1$, $x'_2 = x_2$ и пишем следующую матрицу коэффициентов:

	x_1	x_2	x_3	x_4
x'_1	1	0	0	0
x'_2	0	1	0	0
x'_3	0	0	a_{33}	a_{34}
x'_4	0	0	a_{43}	a_{44}

(96)

Условия ортогональности сводятся к равенствам:

$$a_{33}^2 + a_{43}^2 = 1, \quad a_{34}^2 + a_{44}^2 = 1, \quad a_{33}a_{34} + a_{43}a_{44} = 0. \quad (97)$$

Если мы положим $a_{33} = \alpha$, $a_{34} = i\alpha\beta$, то из (97) найдём, что $a_{43} = \mp i\alpha\beta$, $\alpha\sqrt{1-\beta^2} = \pm 1$. Только верхний знак удовлетворяет требованию равенства детерминанта коэффициентов положительной единице, а это в свою очередь является необходимым условием для того, чтобы группа содержала тождественное преобразование. Выражая коэффициенты только через параметр β , получаем:

$$a_{33} = a_{44} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad a_{34} = -a_{43} = \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (98)$$

а для самого преобразования получаем:

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_2, \\ x'_3 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (x_3 + i\beta x_4), \quad x'_4 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (x_4 - i\beta x_3). \quad (99)$$

Возвращаясь к исходному пространственно-временному многообразию, получаем, что это преобразование эквивалентно такому:

$$\begin{aligned} x' &= x, \quad y' = y, \\ z' &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (z - \beta ct), \quad t' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(t - \frac{\beta}{c} z \right). \end{aligned} \quad (100)$$

Параметр β можно определить, рассматривая координаты x', y', z' фиксированной точки в X' . По отношению к X координаты этой точки будут x, y, z . Поскольку $dz' = 0$, постольку

$$\frac{dz}{dt} = v = \beta c, \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad (101)$$

Таким образом, поворот, определяемый (96) и (97), эквивалентен перемещению системы X' вдоль оси z с постоянной скоростью v относительно нештрихованной системы X .

Преобразование

$$\begin{aligned} x' &= x, \quad y' = y, \\ z' &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} (z - vt), \quad t' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left(t - \frac{v}{c^2} z \right), \end{aligned} \quad (102)$$

получаемое из (100) подстановкой значения β , или ему обратное:

$$\begin{aligned} x &= x', \quad y = y' \\ z &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} (z' + vt'), \quad t = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \left(t' + \frac{v}{c^2} z' \right) \end{aligned} \quad (103)$$

было названо именем Лоренца, который первый показал¹⁾, что уравнения Максвелла инвариантны по отношению к замене переменных, определяемой соотношениями (102), и не инвариантны по отношению к «галилееву преобразованию»:

$$z' = z - vt, \quad t' = t. \quad (104)$$

Все известные электромагнитные явления могут быть объяснены, если пространственные и *временная* координаты события в движущейся системе координат X' связаны с координатами того же события в произвольной фиксированной системе X лоренцовым преобразованием. В пределе, при $v \ll c$, (102) принимает вид галилеева преобразования классической механики (104), которое может быть интерпретировано как применение принципа относительности к миру, в котором электромагнитные возмущения распространяются с бесконечной скоростью.

1.23. Преобразование векторов поля к движущейся системе координат. Мы не будем говорить подробно о многочисленных следствиях лоренцова преобразования — сокращении Фидджеральда-Лоренца, новом понятии одновременности, изменении кажущейся массы, верхнем пределе c , который

¹⁾ Это утверждение не вполне точно. Первым, кто действительно показал (формальную) инвариантность уравнений поля при преобразовании (102) и назвал это преобразование лоренцовым, был А. Пуанкаре. Сам Лоренц, написав (102), не смог добиться полного сохранения вида уравнений, так как не ввёл соответствующего этому преобразованию закона сложения скоростей. Конечно, ни Лоренц ни Пуанкаре не придавали преобразованию (102) того прямого физического смысла, который оно приобрело лишь у Эйнштейна, благодаря признанию относительности понятия одновременности удалённых событий. См. например, сборник «Принцип относительности Лоренц, Пуанкаре, Эйнштейн, Минковский» в серии «классики естествознания», ОНТИ, 1935. *Прим. ред.*

накладывается на скорость движения материи, — всё это относится по существу к теории относительности. Однако приложение принципов этой теории к уравнениям электромагнитного поля существенно для понимания четырёхмерной их формулировки, данной в разделе 1.21.

Преобразование Лоренца было выведено из постулата о постоянстве скорости света и было показано, что оно эквивалентно повороту в пространстве $x_1, x_2, x_3, x_4 = ict$. Согласно постулату относительности, соответствующим образом сформулированные физические законы должны иметь один и тот же вид во всех системах, движущихся друг относительно друга равномерно и прямолинейно; в противном случае, очевидно, было бы возможно обнаружить такое движение. В разделах 1.19 и 1.20 было показано, что ротор, дивергенция и лапласиан вектора или тензора инвариантны по отношению к повороту координатной системы. Следовательно, для уверенности в том, что уравнения инвариантны по отношению к лоренцову преобразованию, достаточно предположить, что четыре-ток $\mathbf{J}$ и четыре-потенциал Φ действительно преобразуются как векторы, а величины ${}^2\mathbf{F}$, ${}^2\mathbf{G}$ — как тензоры. Другими словами, мы обосновываем векторный и тензорный характер этих четырёхмерных величин непосредственно двумя указанными постулатами.

Четыре-ток $\mathbf{J}$ удовлетворяет уравнению

$$\square \mathbf{J} = \sum_{k=1}^4 \frac{\partial J_k}{\partial x_k} = 0. \quad (78)$$

При повороте координатной системы компоненты $\mathbf{J}$ преобразуются так:

$$J'_j = \sum_{k=1}^4 a_{jk} J_k, \quad (105)$$

или, если подставить значения a_{jk} из (98):

$$\begin{aligned} J'_x &= J_x, & J'_y &= J_y, \\ J'_z &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (J_z - v\rho), & \rho' &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\rho - \frac{v}{c^2} J_z \right), \end{aligned} \quad (106)$$

а обратное преобразование будет:

$$\left. \begin{aligned} J_x &= J'_x, & J_y &= J'_y, \\ J_z &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (J'_z + v\rho'), & \rho &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\rho' + \frac{v}{c^2} J'_z \right). \end{aligned} \right\} \quad (107)$$

Впредь мы будем предполагать, что система отсчёта X' жёстко связана с телом, движущимся с постоянной скоростью v по отношению к системе X . Последняя обычно будет предполагаться покоящейся по отношению к земле. Если скорость v намного меньше скорости света, то уравнения (107) приближённо таковы:

$$\begin{aligned} J_x &= J'_x, & J_y &= J'_y, \\ J_z &= J'_z + v\rho', & \rho &= \rho'. \end{aligned} \quad (108)$$

Наблюдатель на движущемся теле измерит плотность заряда ρ' и плотность тока J'_z , в то время как его коллега, покоящийся в системе X , найдёт, что ток J'_z увеличен на конвекционный ток $v\rho'$.

Подобным же образом соотношения между электрическими и магнитными векторами, определяющими заданное поле в неподвижной и движущейся

системах, получаются непосредственно из правила (61) для преобразования компонент антисимметричного тензора. После подстановки соответствующих значений для коэффициентов a_{jk} , получаем для компонент 2F :

$$\left. \begin{aligned} F'_{12} &= a_{11}a_{22}F_{12} = F_{12}, \\ F'_{13} &= a_{11}a_{33}F_{13} + a_{11}a_{34}F_{14} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (F_{13} + i\beta F_{14}), \\ F'_{14} &= a_{11}a_{43}F_{13} + a_{11}a_{44}F_{14} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (F_{14} - i\beta F_{13}), \\ F'_{23} &= a_{22}a_{33}F_{23} + a_{22}a_{34}F_{24} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (F_{23} + i\beta F_{24}), \\ F'_{24} &= a_{22}a_{43}F_{23} + a_{22}a_{44}F_{24} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (F_{24} - i\beta F_{23}), \\ F'_{34} &= (a_{33}a_{44} - a_{34}a_{43}) F_{34} = F_{34}, \end{aligned} \right\} \quad (109)$$

и отсюда:

$$\left. \begin{aligned} B'_x &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(B_x + \frac{v}{c^2} E_y \right), & E'_x &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (E_x - vB_y), \\ B'_y &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(B_y - \frac{v}{c^2} E_x \right), & E'_y &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (E_y + vB_x), \\ B'_z &= B_z, & E'_z &= E_z. \end{aligned} \right\} \quad (110)$$

Ограничение направления скорости вдоль оси z может быть снято, если написать $\mathbf{v}$ в виде вектора, выражающего скорость перемещения X' (движущегося тела) в любом направлении по отношению к неподвижной системе X . Поскольку в (110) ориентация оси z была произвольна, мы имеем в общем случае:

$$\left. \begin{aligned} B'_{\parallel} &= B_{\parallel}, & E'_{\parallel} &= E_{\parallel}, \\ B'_{\perp} &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(\mathbf{B} - \frac{1}{c^2} [\mathbf{v}, \mathbf{E}] \right)_{\perp}, & E'_{\perp} &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (\mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}]_{\perp}), \end{aligned} \right\} \quad (111)$$

где знак $\parallel$ отмечает компоненты, параллельные направлению перемещения, а знак $\perp$ — перпендикулярные. Опуская члены с $\frac{1}{c^2}$, что допустимо во всех случаях, когда тело движется со скоростью $v \ll 3 \cdot 10^8$ метров/секунду, мы получаем приближённые формулы:

$$\left. \begin{aligned} B'_{\parallel} &= B_{\parallel}, & E'_{\parallel} &= E_{\parallel}, \\ B'_{\perp} &= B_{\perp}, & E'_{\perp} &= E_{\perp} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}]_{\perp}. \end{aligned} \right\} \quad (112)$$

Следствия этих результатов поистине поразительны: электрическое и магнитное поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ не имеют независимого существования как самостоятельные величины. Основным образованием является тензор поля ${}^2F = \left(\mathbf{B}, -\frac{i}{c} \mathbf{E} \right)$;

разложение поля на электрическую и магнитную компоненты целиком связано с относительным движением наблюдателя. Если мы покоимся относительно постоянных магнитов или относительно стационарных токов, то мы измеряем чисто магнитное поле $\mathbf{B}$. Наблюдатель же, движущийся вместе с телом или системой X' , заметит приблизительно такое же магнитное поле, но кроме того ещё и электрическое поле с напряжённостью $\mathbf{E}' = [\mathbf{v}, \mathbf{B}]$.

Обратно: движущееся тело может нести какой-либо определённый заряд. Для наблюдателя, находящегося на этом теле и движущегося вместе с зарядом, поле является чисто электростатическим, в то время как его неподвижный коллега обнаружит наряду с электрическим ещё и магнитное поле, совершенно законно отождествляя движущийся заряд с током.

Подобным же образом из тензора ${}^2G = (H, -icD)$ получаются преобразования векторов H и D от неподвижной к движущейся системе:

$$\left. \begin{aligned} H'_{\parallel} &= H_{\parallel}, & D'_{\parallel} &= D_{\parallel}, \\ H'_{\perp} &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (H - [v, D])_{\perp}, & D'_{\perp} &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(D + \frac{1}{c^2} [v, H] \right)_{\perp}. \end{aligned} \right\} \quad (113)$$

Инвариантность уравнений Максвелла по отношению к равномерному перемещению сводится к следующему: если векторные функции E, B, H, D определяют электромагнитное поле в системе X , то уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot}' E' + \frac{\partial B'}{\partial t'} &= 0, & \text{div}' B' &= 0, \\ \text{rot}' H' - \frac{\partial D'}{\partial t'} &= J', & \text{div}' D' &= \rho' \end{aligned} \right\} \quad (114)$$

удовлетворяются в системе X' , которая движется с постоянной скоростью v по отношению к X ; операторы rot' и div' обозначают дифференцирование по переменным x', y', z' . Наблюдатель, покоящийся в X' , будет интерпретировать векторы E', B', D', H' как напряжённости электромагнитного поля, удовлетворяющие уравнениям Максвелла. Ясно, что соотношения D с E и H с B не являются одинаковыми в обеих системах. Макроскопические параметры ϵ, μ, σ также должны подвергаться преобразованию, которое может быть приписано действительному изменению структуры материи при движении. Практически интересуются в большей мере *механическими и электродвижущими силами, измеряемыми в неподвижной системе X , которые действуют на движущуюся материю*, нежели преобразованными напряжённостями поля E', B', H', D' . Нахождение этих сил и дифференциальных уравнений, которым они удовлетворяют в рамках теории относительности, было завершено Минковским в его исследованиях по электродинамике движущихся тел.

Векторный характер четыре-потенциала демонстрируется уравнением (79), которое выражает тензор поля 2F как ротор Φ . При преобразовании Лоренца получаем:

$$\Phi'_j = \sum_{k=1}^4 a_{jk} \Phi_k \quad (j=1, 2, 3, 4), \quad (115)$$

или, переходя к скалярному и векторному потенциалам:

$$\left. \begin{aligned} A'_x &= A_x, & A'_y &= A_y, \\ A'_z &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(A_z - \frac{v}{c^2} \varphi \right), & \varphi' &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (\varphi - v A_z). \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

Как и в случае векторов поля, разложение на векторный и скалярный потенциалы в трёхмерном пространстве определяется относительным движением наблюдателя.

В заключение можно отметить, что поворот координатной системы оставляет инвариантным скалярное произведение любых двух векторов. Лоренцово преобразование мы вывели фактически из требования инвариантности величины

$$RR = R^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2. \quad (117)$$

Поскольку было показано, что плотность тока $\mathbf{J}$ и потенциал Φ являются четырёх-векторами, постольку величины

$$\left. \begin{aligned} J^2 &= J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 - c^2 \rho^2, \\ \Phi^2 &= A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 - \frac{\varphi^2}{c^2}, \\ \Phi \mathbf{J} &= A_x J_x + A_y J_y + A_z J_z - \varphi \rho \end{aligned} \right\} \quad (118)$$

являются инвариантными скалярами в пространственно-временном континууме. Более того, имеются и другие инвариантные скаляры, имеющие фундаментальное значение для общей теории электромагнитного поля. Из формулы преобразования (59) читатель может установить, что если ${}^2\mathbf{S}$ и ${}^2\mathbf{T}$ — два тензора второго ранга, то суммы

$$\sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 S_{jk} T_{jk} = \text{инвариант}, \quad \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 S_{jk} T_{kj} = \text{инвариант} \quad (119)$$

инвариантны по отношению к повороту координатных осей. Эти величины могут быть интерпретированы как скалярные произведения двух тензоров. Образует сначала скалярное произведение ${}^2\mathbf{F}$ на самого себя. Согласно (71) и (119), находим:

$$\sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 F_{jk}^2 = 2 \left(B^2 - \frac{1}{c^2} E^2 \right) = \text{инвариант}. \quad (120)$$

Теперь построим скалярное произведение ${}^2\mathbf{F}$ на дуальный тензор ${}^2\mathbf{F}^*$, определённый по (75):

$$\sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 F_{jk} F_{jk}^* = -4 \frac{i}{c} \mathbf{B} \mathbf{E} = \text{инвариант}. \quad (121)$$

Из тензора ${}^2\mathbf{G}$ и ему дуального ${}^2\mathbf{G}^*$ можно построить инварианты:

$$\sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 G_{jk}^2 = 2 (H^2 - c^2 D^2) = \text{инвариант}, \quad (122)$$

$$\sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 G_{jk} G_{jk}^* = -4ic \mathbf{H} \mathbf{D} = \text{инвариант}. \quad (123)$$

Следуя тому же пути, получаем:

$$\sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 F_{jk} G_{jk} = \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 F_{jk}^* G_{jk}^* = 2 (\mathbf{B} \mathbf{H} - \mathbf{E} \mathbf{D}) = \text{инвариант}, \quad (124)$$

$$\sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 F_{jk} G_{jk}^* = \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 F_{jk}^* G_{jk} = -2i \left(c \mathbf{B} \mathbf{D} + \frac{1}{c} \mathbf{E} \mathbf{H} \right) = \text{инвариант}. \quad (125)$$

Инвариантность этих величин в конфигурационном пространстве очевидна; они отличаются от других трёхмерных скалярных произведений тем, что сохраняют одно и то же значение во всякой системе, движущейся с постоянной относительной скоростью.

СИЛЫ И ЭНЕРГИЯ

Чтобы использовать математические построения, развитые на предыдущих страницах, для истолкования экспериментов, осуществляемых в лаборатории, мы должны рассчитать силы, действующие на элемент заряда или тока, или на нейтральное материальное тело, находящееся в поле. В этой главе будет показано, как при соответствующем определении векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ эти силы могут быть выведены непосредственно из уравнений Максвелла. При этих исследованиях мы должны будем принять во внимание упругие свойства материальной среды. Небольшое отступление в область анализа упругих напряжений и деформаций даст нам соответствующую базу для рассмотрения объёмных и поверхностных сил, вызываемых электрическими или магнитными полями.

НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ В УПРУГОЙ СРЕДЕ

2.1. Тензор упругих напряжений. Предположим, что данное твёрдое или жидкое тело находится в состоянии статического равновесия под действием определённой системы внешних сил. Внутри этого тела мы выделим некоторый объём V с помощью замкнутой поверхности S , как показано на рис. 12.

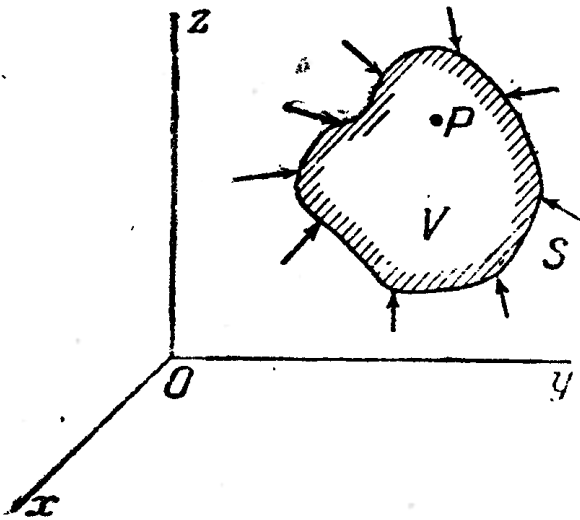


Рис. 12. Ограниченная поверхностью S область V упругой среды, в которой имеются напряжения.

Поскольку предположено, что тело находится в равновесии во всех своих частях, равнодействующая $\mathbf{F}$ сил, действующих на вещество внутри S , должна равняться нулю. Эта равнодействующая складывается из *объёмных сил*, подобных силе тяжести, и из *поверхностных сил*, действующих со стороны элементов материи, расположенных с внешней стороны границы выделенного объёма, на смежные элементы внутри него. Поэтому мы предположим, что силы в объёме V распределены с плотностью $\mathbf{f}$ на единицу объёма, в то время как силы, действующие со стороны материи

вне S на единицу площади S , будут выражаться вектором $\mathbf{t}$. Очевидно, компонентами $\mathbf{t}$ являются нормальные давления или натяжения и тангенциальные или скалывающие напряжения. Условие равновесия относительно поступательных перемещений выражается уравнением:

$$\int_V \mathbf{f} dv + \oint_S \mathbf{t} da = 0. \quad (1)$$

Для обеспечения равновесия в отношении вращения необходимо также, чтобы результирующий вращающий момент был равен нулю, т. е.:

$$\int_V [\mathbf{r}, \mathbf{f}] dv + \oint_S [\mathbf{r}, \mathbf{t}] da = 0, \quad (2)$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведённый из произвольного начала отсчёта O к элементу объёма или поверхности.

Переход от интегральных соотношений (1) и (2) к дифференциальной или локальной системе, выражающей те же самые условия в непосредственной окрестности произвольной точки $P(x, y, z)$, может быть совершён способом, которым мы пользовались в первой главе: поверхность S сжимается около точки P , и компоненты $\mathbf{t}$ разлагаются в ряд Тэйлора. Мы получаем при этом возможность вычислить поверхностный интеграл и получить после перехода к пределу условия равновесия, выраженные через производные $\mathbf{t}$ в точке P . Однако применяя теоремы, имеющиеся в нашем распоряжении, мы можем избежать этого. Пусть $\mathbf{n}$ будет единичным вектором внешней нормали к элементу поверхности S . Тогда имеются три вектора $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$, которые удовлетворяют уравнениям:

$$t_x = Xn, \quad t_y = Yn, \quad t_z = Zn. \quad (3)$$

X_n является, очевидно, x -ой компонентой силы, действующей по направлению во вне на единичный элемент поверхности, ориентация которой определяется нормалью $\mathbf{n}$. Развёрнутая форма скалярных произведений:

$$\left. \begin{aligned} t_x &= X_x n_x + X_y n_y + X_z n_z, \\ t_y &= Y_x n_x + Y_y n_y + Y_z n_z, \\ t_z &= Z_x n_x + Z_y n_y + Z_z n_z \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

может рассматриваться так же, как линейное преобразование компонент $\mathbf{n}$ в компоненты $\mathbf{t}$; компоненты n_x, n_y, n_z являются направляющими косинусами $\mathbf{n}$ по отношению к координатным осям. Равновесие x -компонент сил, действующих на вещество, находящееся внутри S , выразится теперь соотношением:

$$\int_V f_x dv + \oint_S Xn da = 0, \quad (5)$$

которое, по теореме о дивергенции и ввиду произвольности объёма V , эквивалентно тому, что во всех точках внутри S соблюдается условие:

$$f_x + \operatorname{div} \mathbf{X} = 0. \quad (6)$$

Для y - и z -компонент имеем аналогично:

$$f_y + \operatorname{div} \mathbf{Y} = 0, \quad f_z + \operatorname{div} \mathbf{Z} = 0. \quad (7)$$

Равновесие относительно вращения, выраженное соотношением (2), накладывает дальнейшие условия на девять компонент трёх векторов $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$. Например, x -компонента этого уравнения есть:

$$\int_V (yf_z - zf_y) dv + \oint_S (yt_z - zt_y) da = 0. \quad (8)$$

Подстановка значений t_x и t_y , определённых по (3), приводят к уравнению:

$$\int_V (yf_x - zf_y) dv + \oint_S (yZ - zY) n da = 0, \quad (9)$$

которое опять-таки, согласно теореме о дивергенции и произвольности объёма V , эквивалентно:

$$yf_x - zf_y + \operatorname{div}(yZ - zY) = 0. \quad (10)$$

Но

$$\operatorname{div}(yZ) = y \operatorname{div} Z + Z \operatorname{grad} y = y \operatorname{div} Z + Z_y, \quad (11)$$

и уравнение (10) приводится к виду:

$$y(f_z + \operatorname{div} Z) - z(f_y + \operatorname{div} Y) + Z_y - Y_z = 0 \quad (12)$$

или, учитывая (7):

$$Z_y = Y_z. \quad (13)$$

Подобным же способом можно из y - и z -компонент уравнения (2) вывести соотношения симметрии:

$$X_y = Y_x, \quad X_z = Z_x. \quad (14)$$

Девять компонент $X_x, X_y, \dots, Z_z$, представляющие собою силы, действующие на единичный элемент поверхности, называются *напряжениями*. Диагональные элементы X_x, Y_y, Z_z действуют в направлении, *нормальном к поверхности элемента*, и являются, следовательно, давлениями или натяжениями. Остальные шесть компонент являются тангенциальными напряжениями, *действующими в плоскости элемента*. Эти девять величин являются компонентами симметричного тензора, как это очевидно из (4) и из того, что $\mathbf{t}$ и $\mathbf{n}$ являются полярными векторами (ср. раздел 1.20). Для сокращения обозначений мы будем в дальнейшем писать компоненты тензора напряжений в виде T_{jk} , где:

$$\begin{aligned} X_x &= T_{11}, \quad X_y = T_{12}, \quad \dots \\ Y_x &= T_{21}, \quad \dots \\ Z_z &= T_{33}. \end{aligned} \quad (15)$$

Итак, для того чтобы жидкая или твёрдая среда, подвергающаяся действию напряжений, находилась в равновесии, необходимо чтобы в каждой точке

$$\mathbf{f} + \operatorname{div}^2 \mathbf{T} = 0, \quad T_{jk} = T_{kj}. \quad (16)$$

Представим себе в такой среде бесконечно малый плоский элемент поверхности, содержащий точку (x, y, z) . Напряжения, действующие на этот элемент поверхности, будут в общем случае как нормальными, так и тангенциальными. Однако имеются три различных направления, в которых напряжения являются чисто нормальными. Если результирующая сила $\mathbf{t}$, действующая на единицу площади плоского элемента, направлена по положительной нормали $\mathbf{n}$, то мы можем положить

$$\mathbf{t} = \lambda \mathbf{n}, \quad (17)$$

где λ — неизвестная скалярная функция координат x, y, z элемента. Наложив это условие на уравнения (4), мы получим однородную систему:

$$\lambda n_j = \sum_{k=1}^3 T_{jk} n_k \quad (j = 1, 2, 3). \quad (18)$$

Для того чтобы эти однородные уравнения были совместны, необходимо, чтобы детерминант системы равнялся нулю. Отсюда следует, что скалярная функция λ может быть определена из уравнения:

$$\begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (19)$$

конечно, при условии, что компоненты тензора напряжений T_{jk} по отношению к какой-либо произвольной системе координат известны. Вековое уравнение (19) имеет три корня: λ_a , λ_b и λ_c , определяющие через уравнения (18) три ориентации элемента поверхности, которые мы обозначим соответственно через $\mathbf{n}^{(a)}$, $\mathbf{n}^{(b)}$, $\mathbf{n}^{(c)}$. Если корни (19) различны, то направления, определённые единичными векторами $\mathbf{n}^{(a)}$, $\mathbf{n}^{(b)}$, $\mathbf{n}^{(c)}$ и называемые главными осями напряжений, взаимно перпендикулярны. Рассмотрим, например, $\mathbf{n}^{(a)}$ и $\mathbf{n}^{(b)}$. Согласно (18):

$$\lambda_a n_j^{(a)} = \sum_{k=1}^3 T_{jk} n_k^{(a)}, \quad \lambda_b n_j^{(b)} = \sum_{k=1}^3 T_{jk} n_k^{(b)}. \quad (20)$$

Умножая первое из этих уравнений на $n_j^{(b)}$, второе на $n_j^{(a)}$, вычитая второе из первого и суммируя по индексу j , получаем:

$$(\lambda_a - \lambda_b) \sum_{j=1}^3 n_j^{(a)} n_j^{(b)} = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 T_{jk} (n_k^{(a)} n_j^{(b)} - n_k^{(b)} n_j^{(a)}). \quad (21)$$

Правая сумма равна нулю, откуда

$$(\lambda_a - \lambda_b) \mathbf{n}^{(a)} \mathbf{n}^{(b)} = 0. \quad (22)$$

Если $\lambda_a \neq \lambda_b$, то, как мы и утверждали, вектор $\mathbf{n}^{(a)}$ ортогонален к $\mathbf{n}^{(b)}$.

Физический смысл главных осей можно уяснить себе и иначе. В точке P среды, подвергнутой напряжениям, симметричный тензор 2T связывает с единичным вектором $\mathbf{n}$ результирующую силу $\mathbf{t}$, действующую на единичный элемент поверхности, нормальный к $\mathbf{n}$. Пусть начало прямоугольной системы координат расположено в точке P . Масштаб длины в этой новой системе координат произволен, и мы можем положить, что компоненты нормали $\mathbf{n}$, проведённой из точки P , равны ξ , η , ζ . Скалярное произведение $\mathbf{t}$ и $\mathbf{n}$, которое мы обозначим через Φ , квадратично относительно ξ , η , ζ :

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{t}\mathbf{n} = T_{11}\xi^2 + T_{22}\eta^2 + T_{33}\zeta^2 + 2T_{12}\xi\eta + 2T_{23}\eta\zeta + 2T_{31}\zeta\xi. \quad (23)$$

Поверхность $\Phi = \text{const.}$ называется *поверхностью* или *квадрикой напряжений*. Поворотом координатных осей (23) может быть приведено к сумме только квадратичных членов, и главные оси напряжений $\mathbf{n}^{(a)}$, $\mathbf{n}^{(b)}$, $\mathbf{n}^{(c)}$, очевидно, совпадают с главными осями квадрики. Можно заметить, что:

$$\mathbf{t} = \frac{1}{2} \text{grad } \Phi. \quad (24)$$

Это свойство позволяет найти напряжения, действующие на какой-либо поверхностный элемент в точке P , путём графического построения. Предположим, что напряжения таковы, что квадрика является эллипсоидом, и проведём вокруг P поверхность $\Phi = 1$. Радиус-вектор из точки P к любой точке P' этой поверхности есть $\mathbf{n}$. Согласно (24), результирующая сила, действующая в точке P на элемент с нормалью $\mathbf{n}$, направлена вдоль $\text{grad } \Phi$, т. е. нормально к поверхности $\Phi = 1$ в точке P' . Величина $\mathbf{t}$, согласно (23), обратна величине проекции NP' , показанной на рис. 13. Вдоль главных осей a , b , c нормаль к поверхности $\Phi = 1$ совпадает с вектором $\mathbf{n}$, и

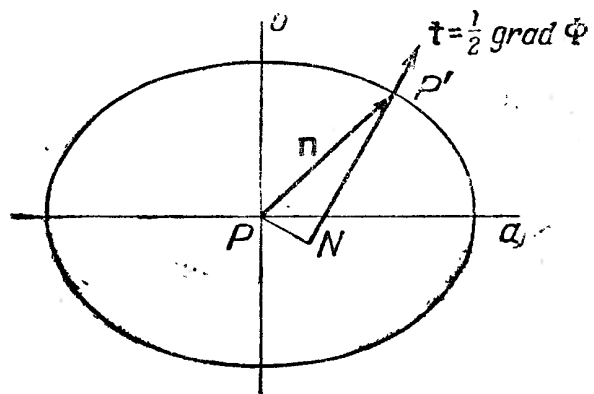


Рис. 13. Графическое определение напряжений, действующих на элемент площади в точке P , с помощью квадрики напряжений.

напряжение, действующее на элемент в точке P , является чисто нормальным. Если эти главные напряжения известны, то можно построить квадрику напряжений и графически определить напряжения, действующие на любой произвольно ориентированный элемент.

2.2. Анализ деформаций. Если поверхностные и объёмные силы приложены к абсолютно твёрдому телу, то возникающее в результате движение может быть описано как перемещение тела в целом и вращение вокруг его центра масс. Если, однако, тело деформируемо, то отдельные его части испытывают также относительные смещения, которые возрастают до тех пор, пока возникающие в процессе деформации внутренние силы не восстановят равновесия. Изменения относительного расположения частей тела под действием напряжений называются *деформациями*.

Пусть в сплошной среде положение точки P по отношению к произвольному фиксированному началу отсчёта определяется в отсутствие напряжений радиусом-вектором $\mathbf{r}$. Под влиянием приложенных сил среда испытывает деформацию, в процессе которой вещество, локализованное первоначально в точке P , перемещается в точку P' с радиусом-вектором $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{s}$. Смещение $\mathbf{s}$, соответствующее данной деформации, зависит от координат исходной точки P ; мы предположим, что $\mathbf{s}$ — непрерывная функция $\mathbf{r}$. Рассмотрим теперь какую-либо соседнюю точку P_1 , положение которой определяется радиусом-вектором $\mathbf{r}_1$. Исходное положение точки P_1 по отношению к P определяется вектором $\delta\mathbf{r}$:

$$\delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}. \quad (25)$$

Смещение P_1 при деформации равно $\mathbf{s}_1$ и является функцией $\mathbf{r}_1$. *Относительное* смещение двух соседних точек P и P_1 , возникающее при деформации, будет, следовательно:

$$\delta\mathbf{s} = \mathbf{s}_1 - \mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) - \mathbf{s}(\mathbf{r}). \quad (26)$$

Поскольку функция $\mathbf{s}(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r})$ непрерывна, она может быть разложена в ряд Тэйлора; для точек достаточно малой области вблизи P мы можем удерживать только линейные члены

$$\delta\mathbf{s} = (\delta\mathbf{r} \operatorname{grad}) \mathbf{s} \quad (27)$$

или в компонентах

$$\delta s_j = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial s_j}{\partial x_k} \delta x_k \quad (j = 1, 2, 3). \quad (28)$$

(Для удобства суммирования, вместо x, y, z , опять написаны индексы 1, 2, 3.)

Девять производных $\partial s_j / \partial x_k$ являются компонентами тензора (ср. уравнение (54), раздел 1.20), который в общем случае является асимметричным. Однако по способу, данному в уравнениях (46) и (47), стр. 68, он может быть разложен на симметричную часть

$$a_{jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_j}{\partial x_k} + \frac{\partial s_k}{\partial x_j} \right) \quad (j, k = 1, 2, 3) \quad (29)$$

и часть антисимметричную

$$b_{jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial s_j}{\partial x_k} - \frac{\partial s_k}{\partial x_j} \right) \quad (j, k = 1, 2, 3). \quad (30)$$

Компоненты антисимметричной части тензора тождественны, очевидно, с компонентами аксиального вектора $\mathbf{b}$, определённого соотношениями:

$$\mathbf{b} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{s}, \quad (31)$$

$$b_1 = b_{32}, \quad b_2 = b_{13}, \quad b_3 = b_{21}. \quad (32)$$

Относительное смещение δs также может быть разложено на часть $\delta s'$, связанную с симметричным тензором a_{jk} , и на часть $\delta s''$, связанную с антисимметричным тензором b_{jk} . Тогда, согласно (28) и (30),

$$\delta s'' = [b, \delta r] = \frac{1}{2} [\text{rot } s, \delta r]. \quad (33)$$

Физически (33) означает, что вещество, содержащееся внутри бесконечно малого объёма около P , испытывает поворот как абсолютно твёрдое тело. Вращение происходит около мгновенной оси, проходящей через точку P в направлении $\text{rot } s$, с угловой скоростью, равной $\frac{1}{2} |\text{rot } s|$. Это локальное вращение обуславливается напряжениями, ротор которых отличен от нуля.

В то время, как локальный поворот (33) сохраняет относительное расположение точек в непосредственной окрестности точки P , симметричный тензор (29) определяет местную деформацию — растяжение и изгибание. Прежде всего нас интересует вопрос, имеется ли такой вектор δr , проведённый из точки P , направление которого после деформации не изменяется; иначе говоря, имеются ли такие точки P_1 (рис. 14), которые в процессе деформации движутся вдоль линии, определяемой вектором δr ? Необходимым условием этого будет:

$$\delta s' = \lambda \delta r, \quad (34)$$

где λ — неизвестная скалярная функция координат точки P , или

$$\lambda \delta x_j = \sum_{k=1}^3 a_{jk} \delta x_k \quad (j = 1, 2, 3). \quad (35)$$

Параметр λ находится из условия, что детерминант этой однородной системы должен быть равен нулю. Как и в аналогичном случае тензора напряжений, разобранным в предыдущем параграфе, легко показать, что три корня определяют три главных направления, которые в общем случае взаимно ортогональны. Вдоль этих главных осей деформации и только вдоль них деформация является чистым растяжением. Характер деформации вдоль какой-либо другой оси может быть иллюстрирован с помощью квадрики деформаций, подобной (23). Пусть точка P' , рис. 14, имеет координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3 по отношению к P . Построим поверхность:

$$\Psi = \delta r \delta s' = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_{jk} \xi_j \xi_k = \text{const.} \quad (36)$$

Если все прямые, проведённые из P , растягиваются, или все сжимаются, то поверхность деформаций будет эллипсоидом; если часть прямых сжимается, а часть растягивается, то поверхность будет гиперболоидом. Относительное смещение точки P_1 по отношению к P даётся выражением:

$$\delta s' = \frac{1}{2} \text{grad } \Psi. \quad (37)$$

Радиус-вектор, проведённый из точки P в точку P_1 на поверхности $\Psi = 1$, есть δr . На рис. 15 предположено, что поверхность деформаций является эллипсоидом. Направление относительного смещения $\delta s'$, вызванного дефор-

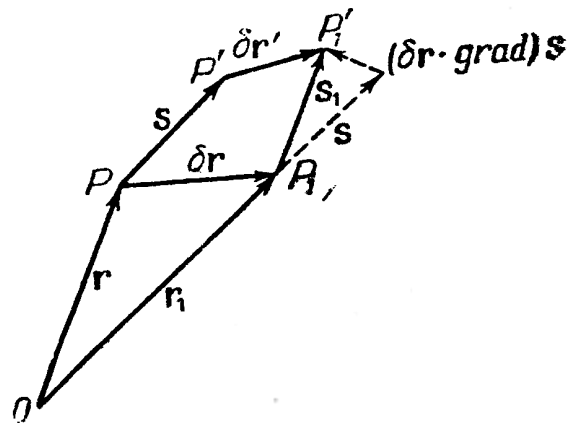


Рис. 14. Векторное изображение деформации сплошной среды.

мацией, совпадает с направлением нормали, проведенной в точке P_1 , а величина смещения обратна длине проекции NP_1 радиуса-вектора $\delta \mathbf{r}$ на нормаль. Очевидно, векторы $\delta \mathbf{s}'$ и $\delta \mathbf{r}$ параллельны только вдоль главных осей эллипсоида. Эти оси представляют собой

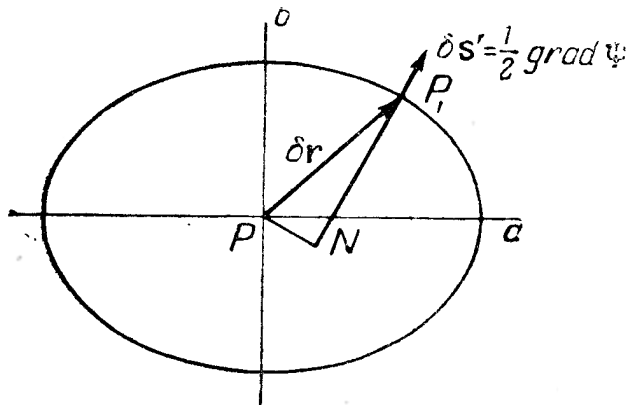


Рис. 15. Графическое определение деформации в точке P с помощью квадратики деформаций.

также направления максимального и минимального сжатия или растяжения. Интересная физическая интерпретация может быть дана компонентам тензора a_{jk} . Если относительное положение точек P и P_1 до деформации определялось вектором $\delta \mathbf{r}$, то после деформации их относительное положение будет определяться вектором $\delta \mathbf{r}' = \delta \mathbf{r} + \delta \mathbf{s}'$, где штрих у $\delta \mathbf{s}'$ указывает на то, что локальное вращение исключено. Предположим теперь, что $\delta \mathbf{r}$ направлен по x_1 -оси, так что $\delta x_2 = \delta x_3 = 0$. Тогда $\delta \mathbf{r}'$ будет вектором с компонентами:

$$\delta x'_1 = (1 + a_{11}) \delta x_1, \quad \delta x'_2 = a_{21} \delta x_1, \quad \delta x'_3 = a_{31} \delta x_1. \quad (38)$$

Абсолютная величина расстояния между P и P_1 после деформации равна:

$$|\delta \mathbf{r}'| = \sqrt{(1 + a_{11})^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2} \delta x_1, \quad (39)$$

а относительное изменение длины составит:

$$\frac{|\delta \mathbf{r}'| - \delta x_1}{\delta x_1} = a_{11} = \frac{\partial s_1}{\partial x_1}, \quad (40)$$

что получается разложением (39) в ряд и отбрасыванием всех членов порядка выше первого. Аналогичные выражения могут быть получены и для деформаций линейных элементов, расположенных первоначально вдоль x_2 и x_3 -осей, откуда мы заключаем, что диагональные компоненты $a_{jj} = \partial s_j / \partial x_j$ представляют собой растяжения линейных элементов, которые в недеформированном состоянии были параллельны координатным осям.

Пусть опять $\delta \mathbf{a}$ будет линейным элементом, который в недеформированном состоянии параллелен x_1 -оси, а $\delta \mathbf{b}$ — линейным элементом, первоначально параллельным x_2 -оси. Локальная деформация преобразует вектор $\delta \mathbf{a} = \mathbf{i}_1 \delta x_1$ в элемент:

$$\delta \mathbf{a}' = \mathbf{i}_1 (1 + a_{11}) \delta x_1 + \mathbf{i}_2 a_{21} \delta x_1 + \mathbf{i}_3 a_{31} \delta x_1, \quad (41)$$

в то время как $\delta \mathbf{b} = \mathbf{i}_2 \delta x_2$ преобразуется в

$$\delta \mathbf{b}' = \mathbf{i}_1 a_{12} \delta x_2 + \mathbf{i}_2 (1 + a_{22}) \delta x_2 + \mathbf{i}_3 a_{32} \delta x_2. \quad (42)$$

В первоначальном состоянии $\delta \mathbf{a}$ и $\delta \mathbf{b}$ взаимно ортогональны, но после деформации они образуют угол, который несколько отличается от $\pi/2$ и который мы обозначим через $\frac{\pi}{2} - \theta_{12}$, так что

$$\delta \mathbf{a}' \delta \mathbf{b}' = |\delta \mathbf{a}'| |\delta \mathbf{b}'| \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta_{12} \right). \quad (43)$$

Но

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta_{12} \right) = \sin \theta_{12} \cong \theta_{12}. \quad (44)$$

и, следовательно,

$$\theta_{12} = a_{12}(1 + a_{11}) + a_{21}(1 + a_{22}) + a_{31}a_{32}, \quad (45)$$

или, если пренебречь членами порядка выше первого,

$$\theta_{12} = a_{12} + a_{21} = \frac{\partial s_1}{\partial x_2} + \frac{\partial s_2}{\partial x_1}. \quad (46)$$

Таким образом, в общем случае, коэффициенты a_{jk} с $j \neq k$ равны половине косинуса угла, образуемого после деформации двумя линейными элементами, которые до деформации были направлены вдоль двух ортогональных координатных осей.

Сообразно этому, принято писать компоненты тензора деформации в несколько ином виде. Коэффициенты, определяемые соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} e_{11} &= \frac{\partial s_1}{\partial x_1}, & e_{12} &= \frac{\partial s_1}{\partial x_2} + \frac{\partial s_2}{\partial x_1} = e_{21}, \\ e_{22} &= \frac{\partial s_2}{\partial x_2}, & e_{23} &= \frac{\partial s_2}{\partial x_3} + \frac{\partial s_3}{\partial x_2} = e_{32}, \\ e_{33} &= \frac{\partial s_3}{\partial x_3}, & e_{31} &= \frac{\partial s_3}{\partial x_1} + \frac{\partial s_1}{\partial x_3} = e_{13}, \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

называются *компонентами деформации*; компоненты относительного смещения двух любых точек P и P_1 , вызванного локальной деформацией, будут, следовательно:

$$\left. \begin{aligned} \delta s'_1 &= e_{11} \delta x_1 + \frac{1}{2} e_{12} \delta x_2 + \frac{1}{2} e_{13} \delta x_3, \\ \delta s'_2 &= \frac{1}{2} e_{21} \delta x_1 + e_{22} \delta x_2 + \frac{1}{2} e_{23} \delta x_3, \\ \delta s'_3 &= \frac{1}{2} e_{31} \delta x_1 + \frac{1}{2} e_{32} \delta x_2 + e_{33} \delta x_3. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Если начало произвольной координатной системы x_1, x_2, x_3 поместить в точке P и затем повернуть координатные оси до совпадения их с главными осями эллипсоида деформации, связанного с данной точкой, то все недиагональные компоненты деформации обратятся в нуль. Будем измерять расстояния вдоль главных осей деформации координатами u_1, u_2, u_3 . Тогда компоненты любой локальной деформации по отношению к P будут:

$$\delta s'_{u_1} = e_1 \delta u_1, \quad \delta s'_{u_2} = e_2 \delta u_2, \quad \delta s'_{u_3} = e_3 \delta u_3, \quad (49)$$

где

$$e_1 = \frac{\partial s_{u_1}}{\partial u_1}, \quad e_2 = \frac{\partial s_{u_2}}{\partial u_2}, \quad e_3 = \frac{\partial s_{u_3}}{\partial u_3}, \quad (50)$$

и где $\delta u_1, \delta u_2, \delta u_3$ — компоненты $\delta \mathbf{r}$ по отношению к главным осям. Коэффициенты e_1, e_2, e_3 называются *главными деформациями* или *главными удлинениями*.

С деформацией бесконечно малой области связано изменение её объёма. Если $\delta \mathbf{a}, \delta \mathbf{b}, \delta \mathbf{c}$ — три вектора, определяющие параллелепипед, то его объём даётся выражением

$$\delta V = [\delta \mathbf{a}, \delta \mathbf{b}] \delta \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \delta a_1 & \delta a_2 & \delta a_3 \\ \delta b_1 & \delta b_2 & \delta b_3 \\ \delta c_1 & \delta c_2 & \delta c_3 \end{vmatrix}. \quad (51)$$

Не уменьшая общности, мы можем выбрать в качестве исходного элемента прямоугольный параллелепипед, стороны которого параллельны координатным осям:

$$\delta a = i_1 \delta x_1, \quad \delta b = i_2 \delta x_2, \quad \delta c = i_3 \delta x_3. \quad (52)$$

Деформация изменяет эти векторы согласно (41) и (42), откуда для объёма после деформации находим:

$$\delta V' = [\delta a', \delta b'], \quad \delta c' = \begin{vmatrix} 1 + a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & 1 + a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & 1 + a_{33} \end{vmatrix} \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3. \quad (53)$$

Разлагая детерминант в ряд и пренебрегая всеми членами порядка выше первого, получаем для относительного изменения объёма:

$$\frac{\delta V' - \delta V}{\delta V} = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \text{div } s \quad (54)$$

— величина, называемая коэффициентом объёмного расширения.

Таким образом, вкратце проведённый анализ показал, что в наиболее общем случае смещение частиц в окрестности какой-либо точки может быть разложено на перемещение и на локальное вращение этой окрестности, как целого, и на деформацию этой окрестности, характеризуемую компонентами деформации e_{jk} и сопровождающуюся изменением объёма. Компонента вращения в полной деформации может быть вызвана только вращающими напряжениями, т. е. силами, ротор которых не равен тождественно нулю.

2.3. Упругая энергия и соотношение между напряжениями и деформациями. Под действием внешних сил частицы, составляющие сжимаемую жидкость или твёрдое тело, испытывают относительные смещения. Эти смещения, в свою очередь, вызывают внутренние силы, которые, в случае статического равновесия, очевидно, компенсируют приложенные напряжения. Работа, совершённая приложенными объёмными и поверхностными силами при смещении каждой точки среды на δs , равна:

$$\delta W = \int f \delta s \, dv + \oint t \delta s \, da. \quad (55)$$

Согласно уравнению (3):

$$t \delta s = \delta s_x Xn + \delta s_y Yn + \delta s_z Zn \quad (56)$$

и, следовательно:

$$\oint t \delta s \, da = \int \text{div} (X \delta s_x + Y \delta s_y + Z \delta s_z) \, dv. \quad (57)$$

Далее

$$\text{div} (X \delta s_x) = \delta s_x \text{div } X + X \text{grad } \delta s_x; \quad (58)$$

и так как, согласно (6), $f_x = -\text{div } X$, то (55) сведётся к выражению:

$$\delta W = \int (X \text{grad } \delta s_x + Y \text{grad } \delta s_y + Z \text{grad } \delta s_z) \, dv. \quad (59)$$

Но слагаемые подинтегрального выражения могут быть записаны в виде:

$$X \text{grad } \delta s_x = T_{11} \delta \left(\frac{\partial s_x}{\partial x} \right) + T_{12} \delta \left(\frac{\partial s_x}{\partial y} \right) + T_{13} \delta \left(\frac{\partial s_x}{\partial z} \right) \text{ и т. д.,} \quad (60)$$

что, в обозначениях (47), даёт следующее выражение:

$$\delta W = \int (T_{11} \delta e_{11} + T_{22} \delta e_{22} + T_{33} \delta e_{33} + T_{12} \delta e_{12} + T_{23} \delta e_{23} + \\ + T_{31} \delta e_{31}) \, dv \quad (61)$$

откуда, согласно (65):

$$\left. \begin{aligned} T_{11} &= \lambda_1 (e_{11} + e_{22} + e_{33}) + 2\lambda_2 e_{11}, & T_{12} &= \lambda_2 e_{12}, \\ T_{22} &= \lambda_1 (e_{11} + e_{22} + e_{33}) + 2\lambda_2 e_{22}, & T_{23} &= \lambda_2 e_{23}, \\ T_{33} &= \lambda_1 (e_{11} + e_{22} + e_{33}) + 2\lambda_2 e_{33}, & T_{31} &= \lambda_2 e_{31}. \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Условия статического равновесия выражаются уравнением:

$$\mathbf{f} + \operatorname{div} \mathbf{T} = 0. \quad (16)$$

Подставляя компоненты (69) в развёрнутое выражение для дивергенции и выражая компоненты деформации e_{jk} через деформацию $\mathbf{s}$, мы получаем

$$\mathbf{f} + (\lambda_1 + \lambda_2) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{s} + \lambda_2 \Delta \mathbf{s} = 0 \quad (70)$$

в качестве уравнения, определяющего деформацию изотропного тела, на которое действуют объёмные силы $\mathbf{f}$. Постоянные интегрирования должны быть выражены через величины, дающие либо смещения точек на граничной поверхности, либо распределение напряжений на ней.

Параметры λ_1 и λ_2 являются положительными величинами. λ_2 называется *модулем сдвига*, поскольку через λ_2 выражаются деформации, вызываемые тангенциальными или скалывающими напряжениями. В λ_1 нельзя вложить какой-либо простой физический смысл; однако λ_1 может быть выражено через более известные константы E и σ , где *модуль Юнга* E есть отношение простого продольного натяжения к вызываемому им относительному удлинению, а *коэффициент Пуассона* σ является отношением поперечного сжатия стержня к его продольному удлинению под действием натяжения. Именно:

$$\lambda_1 = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}, \quad \lambda_2 = \frac{E}{2(1+\sigma)}. \quad (71)$$

В идеальной жидкости напряжения сдвига существовать не могут, и следовательно, $\lambda_2 = 0$. Напряжение, действующее на какой-либо элемент замкнутой поверхности внутри такой жидкости, является, следовательно, обычным давлением:

$$T_{11} = T_{22} = T_{33} = -p, \quad T_{12} = T_{23} = T_{31} = 0, \quad (72)$$

где отрицательный знак показывает, что напряжение направлено внутрь. Компоненты деформации e_{11} , e_{22} , e_{33} все равны между собой и

$$p = -\lambda_1 (e_{11} + e_{22} + e_{33}) = -\lambda_1 \operatorname{div} \mathbf{s}, \quad (73)$$

в то время, как уравнение равновесия принимает вид:

$$\mathbf{f} - \operatorname{grad} p = 0. \quad (74)$$

Пусть V_0 будет первоначальный объём элемента жидкости, V_1 — его объём при давлении p_1 и V_2 — его объём при давлении p_2 . Из определения (54) коэффициента объёмного расширения $\operatorname{div} \mathbf{s}$ мы имеем:

$$p_1 = -\lambda_1 \frac{V_1 - V_0}{V_0}, \quad p_2 = -\lambda_1 \frac{V_2 - V_0}{V_0} \quad (75)$$

и для достаточно малых изменений:

$$p_2 - p_1 = -\lambda_1 \frac{V_2 - V_1}{V_0}. \quad (76)$$

Для бесконечно малого изменения давления получаем:

$$dp = -\lambda_1 \frac{dV}{V} = \lambda_1 \frac{d\tau}{\tau}, \quad (77)$$

где τ — плотность жидкости. Величина, обратная λ_1 , называется в этом случае сжимаемостью.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ЗАРЯДЫ И ТОКИ

2.4. Определение векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$. Электромагнитное поле определяется, согласно нашей первоначальной гипотезе, четырьмя векторами $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$, удовлетворяющими уравнениям Максвелла. Физическая природа этих векторов должна быть установлена через опыты, посредством которых они могут быть измерены. Легко показать, что $\rho\mathbf{E}$ и $[\mathbf{J}, \mathbf{B}]$ является величинами, размерность которых совпадает с размерностью плотности силы. Согласно разделу 1.8, имеем:

$$[\rho\mathbf{E}] = \frac{\text{кулон}}{\text{метр}^3} \times \frac{\text{вольт}}{\text{метр}} = \frac{\text{килограмм}}{\text{секунда}^2 \cdot \text{метр}^2}, \quad (1)$$

$$[[\mathbf{J}, \mathbf{B}]] = \frac{\text{ампер}}{\text{метр}^2} \times \frac{\text{вебер}}{\text{метр}^2} = \frac{\text{килограмм}}{\text{секунда}^2 \cdot \text{метр}^2}. \quad (2)$$

Мы можем поэтому *определить* векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ как силы, действующие со стороны поля на единичный элемент соответственно заряда и тока. Точнее, если мы предположим, что заряд распределён по объёму V с макроскопически непрерывной плотностью ρ , то $\mathbf{E}$ определяется так, что полная механическая сила, действующая на заряд, равна:

$$\mathbf{F}_e = \int_V \rho \mathbf{E} d\tau \quad (3)$$

и распределена с объёмной плотностью

$$\mathbf{f}_e = \rho \mathbf{E}. \quad (4)$$

Если V достаточно мало, то поле внутри этой области в какой-либо момент можно считать однородным, и в пределе:

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{E} \int_V \rho d\tau = q \mathbf{E} \quad (V \rightarrow 0). \quad (5)$$

Точно так же магнитный вектор $\mathbf{B}$ связывается с силой, действующей на единичный объёмный элемент тока, с помощью уравнения

$$\mathbf{f}_m = [\mathbf{J}, \mathbf{B}], \quad (6)$$

что даёт:

$$\mathbf{F}_m = \int_V [\mathbf{J}, \mathbf{B}] d\tau \quad (7)$$

в качестве полной силы, действующей на ток, распределённый по объёму V . Если ток идёт по линейному проводнику достаточно малого поперечного сечения, то $\mathbf{B}$ можно считать однородным, а линии тока параллельными элементу длины ds . Сила, действующая на линейный элемент тока, будет тогда:

$$d\mathbf{F}_m = I [ds, \mathbf{B}]. \quad (8)$$

В то время как сила, действующая со стороны электрического поля на элемент заряда, направлена вдоль вектора $\mathbf{E}$, сила, действующая на элемент тока в магнитном поле, нормальна к плоскости, определяемой элементом ds и вектором $\mathbf{B}$.

Произвольность в нашем определении векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ неизбежна. Взаимные силы; с которыми заряды действуют на заряды или токи на токи, могут быть измерены, но сами векторы поля не являются независимыми величинами, доступными прямому наблюдению. Определения $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, данные

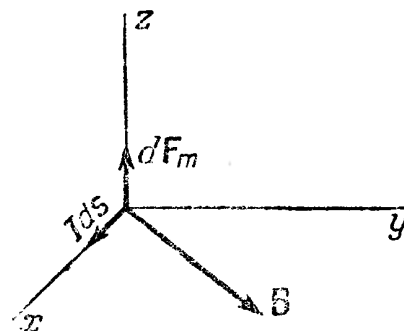


Рис. 16. Направление силы, действующей на элемент тока $I ds$ в магнитном поле $\mathbf{B}$.

уравнениями (3) и (7), были подсказаны исключительно соображения размерности и совместимости с уравнениями Максвелла. В дальнейшем мы должны будем показать, что свойства полей векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, определённых подобным образом и удовлетворяющих этим уравнениям, полностью согласуются с опытом. Зная силы, вызываемые зарядами и токами, можно определить работу, необходимую для создания поля; из энергетических соотношений, в свою очередь, можно вывести силы, действующие на элемент нейтральной материи.

2.5. Тензор электромагнитных напряжений в свободном пространстве. Предположим, что некоторая ограниченная область пространства содержит распределённые заряды и токи, но свободна от всякого нейтрального диэлектрического или магнитного вещества. Поле вызывается частично зарядами и токами, находящимися в рассматриваемой области, частично же источниками, лежащими вне её. В каждой внутренней точке:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (\text{I}) \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (\text{III})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad (\text{II}) \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho. \quad (\text{IV})$$

Умножим (I) векторно на $\varepsilon_0 \mathbf{E}$, а (II) на $\mathbf{B}$. После сложения и перегруппировки членов, получаем:

$$\varepsilon_0 [\operatorname{rot} \mathbf{E}, \mathbf{E}] + \frac{1}{\mu_0} [\operatorname{rot} \mathbf{B}, \mathbf{B}] = [\mathbf{J}, \mathbf{B}] + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{E}, \mathbf{B}]. \quad (9)$$

В прямоугольной системе координат первый член без множителя ε_0 можно представить детерминантом:

$$[\operatorname{rot} \mathbf{E}, \mathbf{E}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} & \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} & \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}. \quad (10)$$

x -компонента этого вектора равна

$$\begin{aligned} [\operatorname{rot} \mathbf{E}, \mathbf{E}] \mathbf{i} &= E_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + E_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + E_z \frac{\partial E_x}{\partial z} - E_x \frac{\partial E_x}{\partial x} - E_y \frac{\partial E_y}{\partial x} - E_z \frac{\partial E_z}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(E_x^2 - \frac{1}{2} E^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (E_y E_x) + \frac{\partial}{\partial z} (E_z E_x) - E_x \operatorname{div} \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (11)$$

Так как величины

$$S_{11}^{(e)} = \varepsilon_0 \left(E_x^2 - \frac{1}{2} E^2 \right), \quad S_{12}^{(e)} = \varepsilon_0 E_x E_y, \quad S_{13}^{(e)} = \varepsilon_0 E_x E_z \quad (12)$$

преобразуются как компоненты тензора, (уравнение (43), стр. 67), то первые три члена в правой части соотношения (11) образуют x -компоненту дивергенции тензора ${}^2\mathbf{S}^{(e)}$. Остальные компоненты получаются из y - и z -компонент $\varepsilon_0 [\operatorname{rot} \mathbf{E}, \mathbf{E}]$. Таким образом, мы приходим к тождеству:

$$\varepsilon_0 [\operatorname{rot} \mathbf{E}, \mathbf{E}] = \operatorname{div} {}^2\mathbf{S}^{(e)} - \varepsilon_0 \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{E}; \quad (13)$$

компоненты ${}^2\mathbf{S}^{(e)}$ приведены в таблице I (стр. 95).

Преобразование $[\operatorname{rot} \mathbf{B}, \mathbf{B}]$ проводится аналогично и даёт:

$$\frac{1}{\mu_0} [\operatorname{rot} \mathbf{B}, \mathbf{B}] = \operatorname{div} {}^2\mathbf{S}^{(m)} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{B}. \quad (14)$$

Компоненты ${}^2\mathbf{S}^{(m)}$ представлены в таблице II (стр. 95).

Таблица I. Компоненты $S_{jk}^{(e)}$ тензора ${}^2S^{(e)}$ в свободном пространстве

$j \backslash k$	1	2	3
1	$\epsilon_0 \dot{E}_x^2 - \frac{\epsilon_0}{2} E^2$	$\epsilon_0 E_x E_y$	$\epsilon_0 E_x E_z$
2	$\epsilon_0 E_y E_x$	$\epsilon_0 E_y^2 - \frac{\epsilon_0}{2} E^2$	$\epsilon_0 E_y E_z$
3	$\epsilon_0 E_z E_x$	$\epsilon_0 E_z E_y$	$\epsilon_0 E_z^2 - \frac{\epsilon_0}{2} E^2$

Таблица II. Компоненты $S_{jk}^{(m)}$ тензора ${}^2S^{(m)}$ в свободном пространстве

$j \backslash k$	1	2	3
1	$\frac{1}{\mu_0} B_x^2 - \frac{1}{2\mu_0} B^2$	$\frac{1}{\mu_0} B_x B_y$	$\frac{1}{\mu_0} B_x B_z$
2	$\frac{1}{\mu_0} B_y B_x$	$\frac{1}{\mu_0} B_y^2 - \frac{1}{2\mu_0} B^2$	$\frac{1}{\mu_0} B_y B_z$
3	$\frac{1}{\mu_0} B_z B_x$	$\frac{1}{\mu_0} B_z B_y$	$\frac{1}{\mu_0} B_z^2 - \frac{1}{2\mu_0} B^2$

После подстановки в (9) вместо первых двух членов (13) и (14) и с учётом (III) и (IV), мы получаем следующее тождество:

$$\operatorname{div} {}^2S = E\rho + [\mathbf{J}, \mathbf{B}] + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{E}, \mathbf{B}], \quad (15)$$

где компоненты тензора 2S равны:

$$S_{jk} = S_{jk}^{(e)} + S_{jk}^{(m)}, \quad (16)$$

и где:

$$\operatorname{div} {}^2S = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 i_j \frac{\partial S_{jk}}{\partial x_k}. \quad (17)$$

С помощью уравнения (15) силы, действующие на элементы заряда и тока в любой точке пространства, не содержащего материи, могут быть выражены только через векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$.

Проинтегрируем это тождество по объёму V . Интеграл от дивергенции тензора по объёму V равен интегралу вектора по поверхности, ограничивающей этот объём. Чтобы доказать эту тензорную аналогию векторной теоремы о дивергенции, положим, что $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали в точке на граничной поверхности и будем рассматривать S_{11} как x -компоненту вектора,

y - и z -компоненты которого равны нулю. Компонента этого вектора в направлении нормали $\mathbf{n}$ будет $S_{11}n_x$, откуда, по теореме о дивергенции:

$$\int S_{11}n_x da = \int \frac{\partial S_{11}}{\partial x} dv. \quad (18)$$

Очевидно также, что:

$$\left. \begin{aligned} \int S_{12}n_y da &= \int \frac{\partial S_{12}}{\partial y} dv, \\ \int S_{13}n_z da &= \int \frac{\partial S_{13}}{\partial z} dv. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

После сложения этих трёх тождеств, мы получаем:

$$\int (S_{11}n_x + S_{12}n_y + S_{13}n_z) da = \int \left(\frac{\partial S_{11}}{\partial x} + \frac{\partial S_{12}}{\partial y} + \frac{\partial S_{13}}{\partial z} \right) dv. \quad (20)$$

Подынтегральное выражение в правой части является x -компонентой $\operatorname{div} {}^2\mathbf{S}$ и, следовательно,

$$t_x = S_{11}n_x + S_{12}n_y + S_{13}n_z \quad (21)$$

есть компонента вектора $\mathbf{t}$, который, согласно (20), и должен быть проинтегрирован по поверхности, ограничивающей объём V . Поступая подобным образом и для других компонент, получаем общую теорему:

$$\int \mathbf{t} da = \int \operatorname{div} {}^2\mathbf{S} dv, \quad (22)$$

где компоненты $\mathbf{t}$ равны:

$$t_j = \sum_{k=1}^3 S_{jk}n_k \quad (j = 1, 2, 3), \quad (23)$$

или, в сокращённых обозначениях:

$$\mathbf{t} = {}^2\mathbf{S}\mathbf{n}. \quad (24)$$

Применение к уравнению (15) теоремы о дивергенции (22) даёт:

$$\oint {}^2\mathbf{S}\mathbf{n} da = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int [\mathbf{E}, \mathbf{B}] dv, \quad (25)$$

где $\mathbf{F}_e$ и $\mathbf{F}_m$ представляют собой, как и в уравнениях (3) и (7), результирующие силы, действующие соответственно на заряды и токи, находящиеся внутри V .

Сначала рассмотрим стационарное распределение зарядов и токов. В этом случае поля не зависят от времени, и третий член в правой части уравнения (25) равен нулю. Уравнение (25) теперь показывает, что сила, действующая со стороны поля на стационарные заряды и токи, может быть представлена в виде интеграла вектора по какой-либо регулярной замкнутой поверхности, охватывающей эти заряды и токи. Оно *не утверждает*, что объёмные силы $\mathbf{F}_e$ и $\mathbf{F}_m$ находятся в равновесии с силами ${}^2\mathbf{S}\mathbf{n}$, распределёнными по поверхности. Равновесие должно устанавливаться благодаря механическим силам какого-либо другого рода, и мы вскоре действительно покажем, что распределение зарядов не может поддерживаться в статическом равновесии действием одних только электрических сил. Конкретнее, представим себе статическое распределение заряда, разделённое на две части произвольной замкнутой поверхностью Σ . Силы, действующие со стороны внешних зарядов, на заряды, находящиеся внутри Σ , должны каким-то образом передаваться через эту поверхность. Результирующая сила, действующая на внутренние

заряды, может быть, согласно (25), подсчитана в предположении, что через элемент площади da передаётся сила $2\mathbf{S}^{(e)} \mathbf{n} da$ и что компоненты $S_{jk}^{(e)}$ являются, следовательно, действующими напряжениями в электростатическом поле. С каждой точкой поля связана квадрика напряжений, с помощью которой могут быть определены нормальные и тангенциальные компоненты напряжений, действующих на элемент с нормалью $\mathbf{n}$. Чтобы найти главные оси этой квадрики по отношению к направлению поля, мы применим способ, описанный в разделе 2.1. Введённый там вековой детерминант (19) примет в данном случае вид:

$$\begin{vmatrix} \epsilon_0 \left(E_x^2 - \frac{1}{2} E^2 \right) - \lambda & \epsilon_0 E_x E_y & \epsilon_0 E_x E_z \\ \epsilon_0 E_y E_x & \epsilon_0 \left(E_y^2 - \frac{1}{2} E^2 \right) - \lambda & \epsilon_0 E_y E_z \\ \epsilon_0 E_z E_x & \epsilon_0 E_z E_y & \epsilon_0 \left(E_z^2 - \frac{1}{2} E^2 \right) - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (26)$$

Развёртывая этот детерминант и учитывая, что

$$E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 = E^2,$$

получим, что уравнение (26) эквивалентно уравнению

$$8\lambda^3 + 4E^2\lambda^2 - 2E^4\lambda - E^6 = 0. \quad (27)$$

Следовательно, корни (26) будут:

$$\lambda_a = \frac{\epsilon_0}{2} E^2, \quad \lambda_b = \lambda_c = -\frac{\epsilon_0}{2} E^2, \quad (28)$$

откуда видно, что квадрика напряжений имеет осевую симметрию.

Пусть $\mathbf{n}^{(a)}$ будет единичным вектором, определяющим направление главной оси, соответствующей значению λ_a . Согласно (18), стр. 84, компоненты $\mathbf{n}^{(a)}$ по отношению к произвольной системе отсчёта должны удовлетворять уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} (E_x^2 - E^2) n_x^{(a)} + E_x E_y n_y^{(a)} + E_x E_z n_z^{(a)} &= 0, \\ E_y E_x n_x^{(a)} + (E_y^2 - E^2) n_y^{(a)} + E_y E_z n_z^{(a)} &= 0, \\ E_z E_x n_x^{(a)} + E_z E_y n_y^{(a)} + (E_z^2 - E^2) n_z^{(a)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Из теории линейных однородных уравнений известно, что отношение неизвестных $n_x^{(a)}, n_y^{(a)}, n_z^{(a)}$ равно отношению миноров детерминанта системы, на основании чего легко получить из (29), что

$$n_x^{(a)} : n_y^{(a)} : n_z^{(a)} = E_x : E_y : E_z. \quad (30)$$

Главная ось квадрики электрических напряжений в какой-либо точке поля направлена вдоль вектора $\mathbf{E}$ в этой точке. Напряжение, передаваемое через элемент поверхности, нормаль к которому ориентирована по этому направлению, является простым натяжением

$$\mathbf{t}^{(a)} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \mathbf{n}^{(a)}. \quad (31)$$

Напряжения через элемент, в плоскости которого находится вектор $\mathbf{E}$, т. е. элемент, нормаль к которому перпендикулярна к силовым линиям, тоже

нормальны, но отрицательны, что соответствует давлениям:

$$t^{(b)} = -\frac{\epsilon_0}{2} E^2 n^{(b)}, \quad t^{(c)} = -\frac{\epsilon_0}{2} E^2 n^{(c)}. \quad (32)$$

Предположим, наконец, что нормаль к элементу поверхности, находящемуся в поле, ориентирована в произвольном направлении, определяемом вектором $\mathbf{n}$. Пусть ось z координатной системы, находящейся в рассматриваемой точке, проведена параллельно $\mathbf{E}$, а ось x возьмём перпендикулярной к плоскости, проходящей через $\mathbf{E}$ и $\mathbf{n}$. Пусть угол между $\mathbf{n}$ и $\mathbf{E}$ будет θ . Тогда:

$$E_x = E_y = 0, \quad |\mathbf{E}| = E_z, \\ n_x = 0, \quad n_y = \sin \theta, \quad n_z = \cos \theta,$$

откуда, согласно (23), компоненты напряжений равны:

$$t_x = 0, \quad t_y = -\frac{\epsilon_0}{2} E^2 \sin \theta, \quad t_z = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \cos \theta. \quad (33)$$

Абсолютная величина напряжений, передаваемых через какой-либо находящийся в поле элемент поверхности, независимо от его ориентации будет, следовательно:

$$|t| = \frac{\epsilon_0}{2} E^2. \quad (34)$$

Кроме того, вектор $\mathbf{t}$ лежит в плоскости векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{n}$ и направлен так, что вектор $\mathbf{E}$ делит пополам угол между $\mathbf{n}$ и $\mathbf{t}$, как показано на рис. 17.

В свете этих представлений легко понять попытки Фарадея и Максвелла свести проблему электрического и магнитного полей к силам, действующим

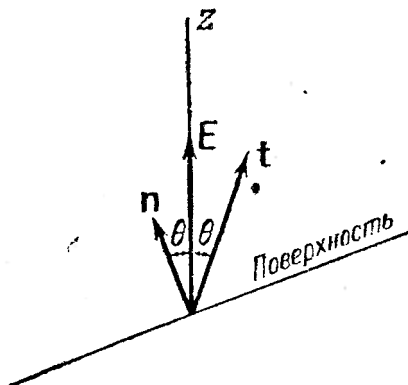


Рис. 17. Соотношение между натяжением $\mathbf{t}$, действующим на элемент поверхности в электростатическом поле, и напряжённостью поля $\mathbf{E}$.

в упругой непрерывной среде. Концепция распространения сил от одной точки среды к другой без участия промежуточной среды казалась обоим совершенно несостоятельной и, за отсутствием чего-либо более осязаемого, всепроникающий «эфир» и был в конечном счёте постулирован для выполнения этой роли. Затем компонентам напряжений поля была даже в пустом пространстве приписана физическая реальность и делались отважные попытки приписать эфиру свойства, аналогичные деформации упругой среды.

Эти попытки не принесли успеха. Дальнейшие исследования показали, что электромагнитные явления могут быть описаны без применения какой-либо выделенной системы отсчёта, и что нет оснований для предположения, что силы

могут распространяться только путём непосредственного соприкосновения соседних элементов материи или эфира. С современной точки зрения представление электростатического поля через компоненты напряжения $S_{jk}^{(e)}$ не имеет существенного физического значения. Всё, что можно и необходимо сказать, это то, что взаимные силы, действующие между элементами заряда, могут быть правильно подсчитаны в предположении, что в поле существует фиктивное состояние напряжений, как это описано выше.

Поскольку тензоры ${}^2S^{(m)}$ и ${}^2S^{(e)}$ имеют одинаковый вид, всё, что говорилось в предыдущих параграфах, приложимо полностью и к полю, создаваемому стационарным распределением токов. Силы, действующие со стороны внешних источников на токи, заключённые внутри произвольной замкнутой

поверхности, могут быть получены интегрированием по этой поверхности напряжений, абсолютная величина которых равна

$$|t| = \frac{1}{2\mu_0} B^2, \quad (35)$$

и направление которых по отношению к ориентации элемента поверхности и направлению поля B такое же, как и на рис. 17.

Если в уравнение (23) подставить компоненты S_{jk} из таблиц I и II, то становится очевидным, что напряжения, передаваемые через элемент поверхности с положительной нормалью n , могут быть записаны векторно в виде:

$$t^{(e)} = {}^2S^{(e)}n = \epsilon_0 (En) E - \frac{\epsilon_0}{2} E^2 n, \quad (36)$$

$$t^{(m)} = {}^2S^{(m)}n = \frac{1}{\mu_0} (Bn) B - \frac{1}{2\mu_0} B^2 n. \quad (37)$$

Следовательно, для любого объёма, ограниченного замкнутой регулярной поверхностью Σ , для случая *стационарного* распределения зарядов и токов мы имеем:

$$\int_{\Sigma} \left\{ \epsilon_0 (En) E - \frac{\epsilon_0}{2} E^2 n \right\} da = \int_V \rho E dv, \quad (38)$$

$$\int_{\Sigma} \left\{ \frac{1}{\mu_0} (Bn) B - \frac{1}{2\mu_0} B^2 n \right\} da = \int_V [J, B] dv. \quad (39)$$

2. 6. Импульс электромагнитного поля. В постоянном поле равнодействующая сил, передаваемых через замкнутую поверхность Σ , ограничивающую область, не содержащую ни зарядов ни токов, равна нулю. Если, однако, поле переменное, то из уравнения (25) ясно, что это уже не так. Как же тогда должны мы интерпретировать действие силы на элемент объёма пустого пространства? Поскольку размерность $\epsilon_0 E = D$ есть QL^{-2} , а размерность $B = \mu_0 H$ есть $MQ^{-1}T^{-1}$, постольку величина

$$g = \epsilon_0 [E, B] = \frac{1}{c^2} [E, H] \quad (40)$$

имеет, очевидно, размерность *количества движения (или импульса) на единицу объёма*. Q исчезает из выражения для размерности произведения $[D, B]$, и поэтому указанное заключение не является следствием применения какой-либо особой системы единиц.

Тождество

$$\int_{\Sigma} {}^2Sn da = \frac{\partial}{\partial t} \int_V g dv \quad (41)$$

может быть интерпретировано в том смысле, что с электромагнитным полем связан импульс, распределённый с плотностью g . Полный импульс поля, находящегося внутри V , будет

$$G = \int_V g dv \quad \text{кгм/сек}, \quad (42)$$

и (41) является теперь утверждением того, что силы, передающиеся через поверхность Σ , связаны с увеличением импульса поля внутри Σ . Вектор 2Sn измеряет поток импульса, направленный *внутрь* через поверхность Σ , приходящийся на единицу площади поверхности, в то время как величина — S_{jk}

может быть интерпретирована как *импульс, который переносится в единицу времени в направлении j через единичный элемент поверхности, нормаль к которому направлена вдоль оси k .*

Прямым следствием этой гипотезы является заключение, что третий закон Ньютона и закон сохранения импульса строго справедливы только при учёте импульса электромагнитного поля, наряду с импульсом материи, которая это поле вызывает. Предположим, что внутри замкнутой поверхности Σ распределены заряды с плотностью ρ , и что движение этих зарядов может быть описано током плотности J . Силы, действующие на заряженную материю, находящуюся внутри Σ , будут тогда равны

$$F_e + F_m = \int (\rho E + [J, B]) dv = \frac{d}{dt} G_{\text{мех}}, \quad (43)$$

где $G_{\text{мех}}$ — полный импульс движущихся, весомых зарядов. Поэтому закон сохранения импульса для системы, состоящей из зарядов и поля, находящихся внутри ограниченной области, выражается, согласно уравнению (25), в виде:

$$\frac{d}{dt} (G_{\text{мех}} + G_{\text{электромаг}}) = \int_{\Sigma} {}^2S_n da. \quad (44)$$

Если поверхность Σ увеличивать до тех пор, пока она не будет заключать в себе всё поле, то правая часть уравнения (44) исчезнет, и мы получим в этом случае:

$$G_{\text{мех}} + G_{\text{электромаг}} = \text{const.} \quad (45)$$

Таким образом оказывается, что с электромагнитным полем должно быть связано *свойство инерции*, сходное с инерционными свойствами весомой материи.

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

2.7. Электростатическая энергия как функция плотности зарядов. Конечный заряд, сконцентрированный в столь малой области, что её протяжённостью можно пренебречь по сравнению с другими макроскопическими размерами, называется *точечным зарядом*. Сила, действующая на подобный точечный заряд q в поле стационарно распределённых зарядов, равна qE , а работа, совершаемая при перемещении заряда q из точки $r = r_1$ в другую точку $r = r_2$, будет:

$$W = q \int_{r_1}^{r_2} E ds. \quad (1)$$

Так как ротор E равен нулю в каждой точке электростатического поля, вектор E равен отрицательному градиенту скалярного потенциала φ , и мы имеем:

$$E ds = - \text{grad } \varphi ds = - d\varphi, \quad (2)$$

где $d\varphi$ — изменение потенциала вдоль элемента ds пути интегрирования. Отсюда следует, очевидно, что работа, производимая при перемещении заряда q из r_1 в r_2 , не зависит от выбора пути и является функцией только начального и конечного значений потенциала φ :

$$W = -q \int_{r_1}^{r_2} d\varphi = q \{ \varphi(r_1) - \varphi(r_2) \}. \quad (3)$$

В частности, работа, произведённая при перемещении заряда по замкнутому пути, равна нулю. Говорят, что силовое поле *консервативно*, если работа, производимая при перемещении системы частиц из одного положения в другое, зависит только от начальной и конечной конфигураций и не зависит от последовательности бесконечно малых изменений, с помощью которых получается конечное перемещение. Консервативный характер электростатического поля устанавливается уравнением (3) или, точнее, условием $\text{rot } \mathbf{E} = 0$. При этом перемещения и изменения в электростатическом поле следует представлять себе настолько медленными, что они эквивалентны последовательности стационарных состояний. В термодинамике про подобные процессы говорят, что они *обратимы*.

В главе III будет показано, что если все источники электростатического поля расположены на конечном расстоянии от какой-либо произвольной точки, то потенциалы и напряжённости поля в достаточно удалённых точках становятся исчезающе малыми. Работа, которую совершит заряд q при перемещении из начальной точки $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$, в точку $\mathbf{r}_2 = \infty$, будет равна, следовательно,

$$W = q\varphi(\mathbf{r}). \quad (4)$$

Сам скалярный потенциал, очевидно, может быть интерпретирован как работа, совершаемая *против* сил поля единичным зарядом, при перемещении его из бесконечности в точку $\mathbf{r}$, или как работа, отдаваемая *системой* при удалении единичного элемента заряда в бесконечность:

$$\varphi(x, y, z) = - \int_{\infty}^{(x, y, z)} \mathbf{E} d\mathbf{s}. \quad (5)$$

До некоторой степени произвольно мы будем применять термин *энергия* электростатической системы для обозначения работы, произведённой над системой при перемещении элементов её зарядов из бесконечности в заданное распределение посредством последовательности обратимых ступеней. Мы предполагаем, что температура всех диэлектриков или магнетиков, находящихся в поле, поддерживается постоянной¹⁾.

Энергия точечного заряда q_2 в поле одиночного точечного источника q_1 есть

$$U = q_2 \varphi_{21}, \quad (6)$$

где φ_{21} — потенциал от заряда q_1 в точке, в которой находится заряд q_2 . Далее, поскольку работа, затраченная на внесение заряда q_2 из бесконечности в заданную точку в поле заряда q_1 , должна быть возвращена, если заряд q_1 удаляется в бесконечность, постольку

$$U = q_1 \varphi_{12}. \quad (7)$$

Взаимная энергия двух зарядов может быть, следовательно, выражена симметричным соотношением

$$U = \frac{1}{2} (q_1 \varphi_{12} + q_2 \varphi_{21}). \quad (8)$$

Если в поле q_1 вводится сначала q_2 , а затем q_3 , то энергия будет

$$U = q_2 \varphi_{21} + q_3 (\varphi_{31} + \varphi_{32}), \quad (9)$$

что, в силу взаимности между парами зарядов, эквивалентно выражению:

$$U = \frac{1}{2} (\varphi_{12} + \varphi_{13}) q_1 + \frac{1}{2} (\varphi_{21} + \varphi_{23}) q_2 + \frac{1}{2} (\varphi_{31} + \varphi_{32}) q_3. \quad (10)$$

¹⁾ В действительности энергия, о которой мы здесь говорим, является в термодинамическом смысле *свободной энергией*.

По индукции мы можем заключить, что энергия замкнутой системы из n точечных зарядов равна:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \varphi_{ij} q_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_i q_i, \quad (11)$$

где φ_i — потенциал в точке нахождения q_i , создаваемый остальными $n-1$ зарядами системы.

Заметим, что (11) справедливо лишь для случая полной или замкнутой системы. Если напротив, n зарядов расположены во внешнем поле с потенциалом φ_0 , то появляется член, не содержащий множителя $\frac{1}{2}$. В этом случае

$$U = \sum_{i=1}^n \varphi_0 q_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_i q_i. \quad (12)$$

Рассмотрим теперь область пространства V , в которой находятся закреплённые проводники и диэлектрики. Внутри диэлектриков заряды распределены с объёмной плотностью ρ , в то время как на поверхности этих диэлектриков и на проводниках может находиться тонкий слой зарядов с поверхностной плотностью ω . Пусть потенциал, создаваемый в точке (x, y, z) внутри области V данным распределением зарядов и возможными источниками, расположенными вне V , будет φ . Работа, необходимая для увеличения заряда в точке (x, y, z) на бесконечно малую величину δq , будет $\varphi \delta q$, а увеличение энергии, которое произойдёт вследствие увеличения объёмной плотности зарядов на величину $\delta \rho$ и поверхностной плотности на величину $\delta \omega$, будет

$$\delta U_1 = \int \varphi \delta \rho \, dv + \int \varphi \delta \omega \, da. \quad (13)$$

Второй интеграл должен быть распространён по всем поверхностям, находящимся внутри V , на которых имеются заряды. С другой стороны, увеличение элемента заряда на величину δq в точке (x, y, z) увеличит потенциал во всех точках как внутри, так и вне V на величину $\delta \varphi$, в результате чего энергия зарядов, уже находившихся внутри V , возрастет на

$$\delta U_2 = \int \rho \delta \varphi \, dv + \int \omega \delta \varphi \, da. \quad (14)$$

Работа δU_1 , произведённая над системой при увеличении плотности зарядов, равна потенциальной энергии δU_2 , накопленной полем, при условии, что система замкнута, т. е. при условии, что область интегрирования V настолько велика, что включает все заряды, создающие поле. В этом случае:

$$\left. \begin{aligned} \delta U &= \delta U_1 = \delta U_2, \\ \delta U &= \frac{1}{2} \int (\varphi \delta \rho + \rho \delta \varphi) \, dv + \frac{1}{2} \int (\varphi \delta \omega + \omega \delta \varphi) \, da, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

что после интегрирования даёт:

$$U = \frac{1}{2} \int \varphi \rho \, dv + \frac{1}{2} \int \varphi \omega \, da \quad (16)$$

в качестве выражения для электростатической энергии системы зарядов относительно нулевого состояния $\rho = \omega = 0^1$.

¹⁾ Сходимость этих интегралов будет показана в главе III.

2.8. Электростатическая энергия как функция напряжённости поля. Представим себе на время, что все проводники удалены из поля и что все поверхности разрыва на границах диэлектриков заменены тонкими, но непрерывными переходными слоями. Заряды распределены по всему диэлектрику с плотностью ρ , но мы предположим, что это распределение ограничено конечной областью; тогда потенциалы и напряжённости поля в бесконечности равны нулю. Области, не содержащие материи, рассматриваются, конечно, как диэлектрики с единичной относительной диэлектрической постоянной. Работа, необходимая для увеличения плотности заряда в любой точке поля на величину $\delta\rho$, равна

$$\delta U = \int \varphi \delta\rho dv, \quad (17)$$

где φ — потенциал, создаваемый первоначальным распределением ρ . Приращение плотности заряда связано с изменением вектора $\mathbf{D}$ соотношением:

$$\delta\rho = \delta(\operatorname{div} \mathbf{D}) = \operatorname{div}(\delta\mathbf{D}). \quad (18)$$

Кроме того:

$$\varphi \operatorname{div}(\delta\mathbf{D}) = \operatorname{div}(\varphi \delta\mathbf{D}) - \delta\mathbf{D} \operatorname{grad} \varphi = \operatorname{div}(\varphi \delta\mathbf{D}) + E \delta D \quad (19)$$

и, следовательно, уравнение (17) эквивалентно:

$$\delta U = \int E \delta D dv + \int \operatorname{div}(\varphi \delta\mathbf{D}) dv, \quad (20)$$

что, после применения теоремы с дивергенции, даёт:

$$\delta U = \int_V E \delta D dv + \oint_S \varphi \delta\mathbf{D} \mathbf{n} da, \quad (21)$$

где S — замкнутая поверхность, ограничивающая объём V . Область V не обязательно должна включать в себя все заряды, создающие поле, но, если мы допустим, что поверхность S бесконечно увеличивается, как сфера с центром в произвольной точке, то доля, вносимая поверхностным интегралом, исчезнет, ибо, как в дальнейшем будет показано, на достаточно больших расстояниях от источника φ убывает как $1/r$, а $\mathbf{D}$ как $1/r^2$. Поверхность увеличивается с возрастанием радиуса как r^2 , и, следовательно, поверхностный интеграл убывает как $1/r$. Прирост энергии, запасённой в электростатическом поле, определяется из интеграла

$$\delta U = \int E \delta D dv, \quad (22)$$

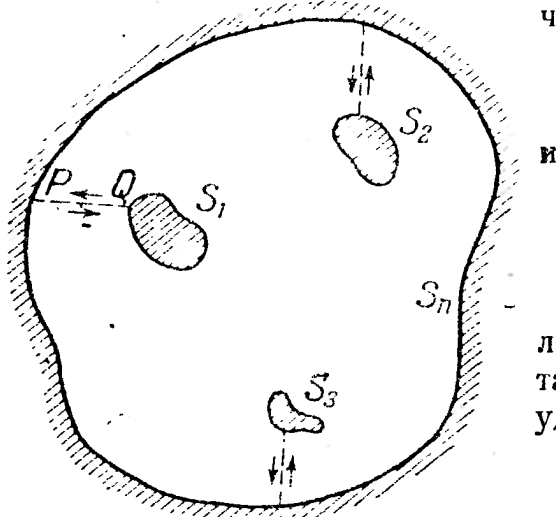
распространённого на всё пространство.

На практике заряды лишь в редких случаях распределены по объёму диэлектрика, а обычно располагаются тонким слоем по поверхности проводников с поверхностной плотностью ω . Эти проводники можно рассматривать как электроды конденсаторов, и прирост энергии поля может быть результатом работы, совершённой, например, электродвижущими силами батарей в процессе образования зарядов на электродах. Предположим, что имеется n проводников, поверхности которых мы будем обозначать через S_i , помещённых в бесконечный диэлектрик. Одну из этих поверхностей, например S_n , будем предполагать замкнутой и охватывающей все остальные, как показано на рис. 18. Чтобы быть уверенным в непрерывности потенциала и поля, необходимых для применения теоремы о дивергенции, мы снова можем заменить поверхности с резким изменением свойств диэлектрика

тонкими переходными слоями, нисколько не уменьшая этим общности результатов. Работа, необходимая для увеличения плотности заряда на поверхности S_i на величину $\delta\omega$, равна

$$\delta U = \sum_{i=1}^n \int_{S_i} \varphi \delta\omega da_i. \quad (23)$$

Сумма n таких поверхностных интегралов может быть представлена в виде одного поверхностного интеграла путём проведения двусторонних соединительных поверхностей, от внутренних проводников к S_n , как показано на рис. 18. Интегрирование начинается с точки P на S_n , производится далее по одной стороне соединительной поверхности до Q , затем по S_1 и потом мы возвращаемся в P по другой стороне соединительной поверхности. На двусторонней поверхности PQ зарядов нет, и поэтому она ничего в интеграл не вносит. Таким образом, пространство внутри поверхности S_n сводится к простой односвязной области ¹⁾, ограниченной единой поверхностью



$$S = \sum_{i=1}^n S_i$$

$$\delta U = \int_S \varphi \delta\omega da. \quad (24)$$

В разделе 1.13 было показано, что на любой поверхности разрыва нормальные и тангенциальные компоненты векторов $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ удовлетворяют условиям:

$$n(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \omega \quad [n, \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1] = 0. \quad (25)$$

Рис. 18. Проводники, помещённые в диэлектрик и ограниченные поверхностями $S_1, S_2, \dots$

Положительная нормаль к поверхностям S_i направлена в диэлектрик, и поскольку n в параграфе 1.13 проводилось из среды (1) в среду (2), индекс (1) обозначает теперь внутреннюю область проводника, в то время как (2) относится к диэлектрику. В главе III нам представится случай подробнее рассмотреть электростатические свойства проводника, теперь же нам нужно только учесть тот элементарный факт, что в любой внутренней точке проводника поле равно нулю. Если бы это было не так, свободные заряды в проводнике начали бы двигаться, в противоположность нашему предположению о статическом состоянии. Следовательно, внутри проводника и на его поверхности мы имеем область постоянного потенциала. Плотность заряда во внутренних точках равна нулю (уравнение (21), стр. 27), и каков бы заряд проводника ни был, этот заряд распределён по его поверхности таким образом, что поле внутри проводника равно нулю. Поскольку $\mathbf{E}_1 = \mathbf{D}_1 = 0$, постольку

$$n\mathbf{D}_2 = \omega \quad [n, \mathbf{E}_2] = 0;$$

в точке, лежащей снаружи непосредственно у поверхности проводника, тангенциальная компонента вектора $\mathbf{E}$ равна нулю, а нормальная компонента вектора $\mathbf{D}$ равна плотности поверхностных зарядов.

¹⁾ См. раздел 4.2, стр. 205.

Внося в (24) первое из этих соотношений и опуская индекс, мы получаем:

$$\delta U = \int_S \varphi \delta D n da. \quad (27)$$

Для того чтобы выразить этот результат в виде интеграла по объёму диэлектрика, ограниченного поверхностями S_i , мы опять применим теорему о дивергенции, но, поскольку нормаль n в (27) направлена *внутрь* диэлектрика, должен быть взят знак минус:

$$\delta U = - \int \operatorname{div} (\varphi \delta D) dv = \int E \delta D dv - \int \varphi \operatorname{div} (\delta D) dv. \quad (28)$$

Если плотность зарядов в диэлектрике равна нулю или постоянна, то $\operatorname{div} (\delta D) = 0$, и как и в (22) мы получаем, что работа, затрачиваемая батареями на увеличение зарядов на электродах на величину $\delta \omega$, равна

$$\delta U = \int E \delta D dv, \quad (29)$$

где интеграл распространяется на всё пространство, занятое полем, и что эта работа накапливается в поле в виде электростатической энергии.

Поскольку энергия δU оказывается запасённой в поле, подобно тому, как потенциальная энергия растянутой пружины запасена некоторым образом внутри неё, постольку представляется не лишённым основания предположить, что электростатическая энергия распределена в поле с *плотностью*

$$\delta u = E \delta D \text{ джоулей/метр}^3. \quad (30)$$

Трудно подтвердить или опровергнуть подобную гипотезу. Преобразование поверхностного интеграла в объёмный, очевидно, неоднозначно, так как к $\varphi \delta D$ в (27) можно прибавить любой вектор, интеграл от нормальной компоненты которого по поверхности S равен нулю. Более того, может быть задан вопрос о том, имеет ли термин «плотность энергии» вообще какой-либо физический смысл. Ведь энергия является функцией конфигурации системы в целом. Несколько причудливым образом против локализации энергии возразили Мезон и Вивер¹⁾, заявив, что спрашивать об этой локализации имеет не больше смысла, чем утверждать, что красота картины особым образом распределена по холсту. Будучи остроумной, подобная аналогия представляется всё же не вполне обоснованной. Энергия неоднородно деформированной упругой среды безусловно сконцентрирована главным образом в областях наибольшей деформации, и плотность упругой энергии имеет в этом случае вполне определённый физический смысл. Соглашаясь с тем, что аналогия между электростатическим и упругим полем не является полной, и что мы можем быть *уверены* только в правильности выражения (29), в котором производится интегрирование по всему полю, мы тем не менее можем сделать правдоподобное предположение о том, что энергия локализована в областях поля с большей напряжённостью, как это и предписывает выражение (30).

Для того чтобы найти полное количество запасённой в поле энергии, надо проинтегрировать приращение δU от начального состояния $D = 0$ до конечного значения D :

$$U = \int_V \int_0^D E \delta D dv. \quad (31)$$

¹⁾ Mason and Weaver, The Electromagnetic Field, стр. 266, University of Chicago Press, 1929.

В случае, если среда *изотропна* и описывается *линейными* соотношениями между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$, так что ϵ в соотношении $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ может быть функцией точки, но не $\mathbf{E}$, мы имеем:

$$\mathbf{E} \delta \mathbf{D} = \frac{\epsilon}{2} \delta E^2$$

и, следовательно,

$$U = \frac{1}{2} \int_V \epsilon E^2 d\tau. \quad (32)$$

2.9. Теорема векторного поля. Пусть $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ будут две векторные функции точки, которые во всём пространстве удовлетворяют условиям:

$$\operatorname{rot} \mathbf{P} = 0; \operatorname{div} \mathbf{Q} = 0, \quad (33)$$

а также непрерывны и обладают непрерывными производными всюду, за исключением замкнутой регулярной поверхности S_1 . Тангенциальная компонента $\mathbf{P}$ и нормальная компонента $\mathbf{Q}$ предполагаются непрерывными при переходе через поверхность S_1 , для нормальной же компоненты $\mathbf{P}$ и тангенциальной компоненты $\mathbf{Q}$ допускаются произвольные разрывы. Условия, имеющие место на поверхности S_1 , будут, следовательно:

$$[\mathbf{n}, \mathbf{P}_+ - \mathbf{P}_-] = 0, \quad \mathbf{n}(\mathbf{Q}_+ - \mathbf{Q}_-) = 0. \quad (34)$$

Единичный вектор нормали $\mathbf{n}$ проведён наружу от поверхности S_1 и векторы в непосредственном соседстве с наружной стороной поверхности обозначены индексом «+», в то время как расположенные непосредственно у поверхности изнутри — индексом «—». Наконец, предполагается, что источники полей $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ расположены на конечном расстоянии от произвольного начала отсчёта и что $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ стремятся в бесконечности к нулю так, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r\mathbf{P} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r\mathbf{Q} = 0. \quad (35)$$

При этих предположениях можно показать, что *интеграл по всему пространству от скалярного произведения потенциального вектора $\mathbf{P}$ и соленоидального вектора $\mathbf{Q}$ равен нулю, при условии, что $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ и их производные непрерывны всюду, за исключением конечного числа регулярных замкнутых поверхностей, на которых разрывы непрерывности удовлетворяют условиям (34).*

Поскольку $\operatorname{rot} \mathbf{P} = 0$, мы можем написать, что $\mathbf{P} = -\operatorname{grad} \varphi$ и, следовательно,

$$\mathbf{P}\mathbf{Q} = -\operatorname{div}(\varphi \mathbf{Q}) + \varphi \operatorname{div} \mathbf{Q}. \quad (36)$$

Объём, ограниченный поверхностью S_1 , мы обозначим через V_1 , а объём вне этой поверхности — через V_2 , так что всё пространство, занятое полями $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$, будет $V_1 + V_2$. Последний член в (36) равен нулю и, следовательно:

$$\int_{V_1 + V_2} \mathbf{P}\mathbf{Q} d\tau = - \int_{V_1} \operatorname{div}(\varphi \mathbf{Q}) d\tau - \int_{V_2} \operatorname{div}(\varphi \mathbf{Q}) d\tau. \quad (37)$$

Применяя к этому выражению теорему о дивергенции, мы принимаем во внимание, что V_1 ограничен поверхностью S_1 , и что V_2 ограничен внутри поверхностью S_1 , а снаружи — поверхностью S , которая удаляется в бесконечность. Ввиду того, что поведение $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ в бесконечности определено соотношениями (35), интеграл от $\varphi \mathbf{Q}\mathbf{n}$ по S равен нулю. Положительная нормаль к замкнутой поверхности по условию направлена наружу от замкнутого объёма; поэтому, в силу (34), два интеграла от $\varphi \mathbf{Q}\mathbf{n}$ по S_1 имеют про-

тнвоположные знаки при одинаковой абсолютной величине, и уравнение (37) переходит в следующее:

$$\int_{V_1+V_2} PQ \, dv = - \int_{S_1} \varphi Q_+ n \, da + \int_{S_1} \varphi Q_- n \, da = 0, \quad (38)$$

как это и утверждалось. Распространение этой теоремы на конечное число замкнутых поверхностей разрыва не представляет затруднений.

2.10. Энергия диэлектрического тела в электростатическом поле. Теорема предыдущего раздела может быть применена для решения следующей задачи. Предположим, что в диэлектрической среде создано поле E_1 . Для упрощения мы предположим, что среда *изотропна* и *линейна* и характеризуется, следовательно, диэлектрической проницаемостью ϵ_1 , которая постоянна или, в крайнем случае, является скалярной функцией точки. Пусть теперь непроводящее тело с диэлектрической проницаемостью ϵ_2 внесено в поле E_1 , в то время как источники поля E_1 поддерживаются строго неизменными. Мы хотим знать энергию инородного диэлектрического тела, связанную с пребыванием его в поле.

Первоначальная энергия U_1 , представляющая собою полную работу, необходимую для установления первоначального поля, получается вычислением интеграла

$$U_1 = \frac{1}{2} \int E_1 D_1 \, dv, \quad (39)$$

взятого по всему пространству. После внесения тела изменившееся поле в какой-либо точке будет E и таким образом, разность $E_2 = E - E_1$ представляет собой поле, появившееся в результате поляризации тела. Объем, занятый инородным телом, мы обозначим через V_1 , а объем остальной среды — через V_2 . Энергия поля в этом новом состоянии будет:

$$U_2 = \frac{1}{2} \int_{V_1+V_2} E D \, dv, \quad (40)$$

и разность

$$U = U_2 - U_1 = \frac{1}{2} \int_{V_1+V_2} (E D - E_1 D_1) \, dv \quad (41)$$

должна представлять собой энергию тела во внешнем поле E_1 , и, соответственно, работу, производимую при внесении тела в поле. Уравнение (41) эквивалентно уравнению:

$$U = \frac{1}{2} \int_{V_1+V_2} E (D - D_1) \, dv + \frac{1}{2} \int_{V_1+V_2} (E - E_1) D_1 \, dv. \quad (42)$$

Ротор E везде равен нулю; дивергенция $D - D_1$ также всюду равна нулю, ибо первоначальное распределение зарядов задано. На поверхности, отделяющей среду ϵ_2 от среды ϵ_1 , условия

$$[n, E_+ - E_-] = 0, \quad n \{ (D - D_1)_+ - (D - D_1)_- \} = 0 \quad (43)$$

выполнены, если только на этой поверхности нет зарядов. Тогда, по теореме раздела 2.9, первый интеграл в (42) равен нулю, и мы получаем:

$$U = \frac{1}{2} \int_{V_1} (E - E_1) D_1 \, dv + \frac{1}{2} \int_{V_2} (E - E_1) D_1 \, dv. \quad (44)$$

Так как $D_1 = \epsilon_1 E_1$ можно переписать второй интеграл в (44) в другом виде:

$$\frac{1}{2} \int_{V_2} (E - E_1) D_1 dv = \frac{1}{2} \int_{V_2} (D - D_1) E_1 dv. \quad (45)$$

Подинтегральные векторы интеграла справа удовлетворяют условиям раздела 2.9, поскольку $\text{rot } E_1 = 0$ и $\text{div } (D - D_1) = 0$, так что поэтому можно написать

$$\int_{V_1 + V_2} E_1 (D - D_1) dv = \int_{V_1} E_1 (D - D_1) dv + \int_{V_2} E_1 (D - D_1) dv = 0, \quad (46)$$

откуда:

$$\frac{1}{2} \int_{V_2} E_1 (D - D_1) dv = - \frac{1}{2} \int_{V_1} E_1 (D - D_1) dv. \quad (47)$$

Подставляя (47) в (44), мы получаем выражение для энергии диэлектрического тела, погружённого в диэлектрическую среду, в виде интеграла, распространённого не по всему пространству, а *только по объёму этого тела*:

$$U = \frac{1}{2} \int_{V_1} (E_2 D_1 - E_1 D_2) dv \quad (48)$$

или, поскольку внутри V_1 : $D_1 = \epsilon_1 E_1$, $D = \epsilon_2 E$,

$$U = \frac{1}{2} \int_{V_1} (E D_1 - E_1 D) dv = \frac{1}{2} \int_{V_1} (\epsilon_1 - \epsilon_2) E E_1 dv. \quad (49)$$

В этом случае, когда внешняя среда является свободным пространством, проницаемость ϵ_1 сводится к ϵ_0 . Тогда, поскольку результирующее поле в теле связано с его поляризацией, согласно разделу 1.6, соотношениями

$$D = \epsilon_0 E + P = \epsilon_2 E, \quad P = (\epsilon_2 - \epsilon_0) E, \quad (50)$$

можно написать U в виде

$$U = - \frac{1}{2} \int_{V_1} P E_1 dv. \quad (51)$$

Плотность потенциальной энергии диэлектрического тела в свободном пространстве в заданном внешнем поле E_1 равна $-\frac{1}{2} P E_1$.

Вариирование потенциальной энергии U , данной выражениями (49) или (51), по отношению к малым перемещениям, даёт нам механические силы, действующие на поляризованный диэлектрик. Из уравнения (49) видно, что при $\epsilon_2 > \epsilon_1$ энергия отрицательна и уменьшается с уменьшением ϵ_1 , увеличением ϵ_2 или увеличением напряжённости поля E_1 . Мы можем ожидать поэтому, что если $\epsilon_2 > \epsilon_1$, то тело будет втягиваться в области с большей напряжённостью поля или с меньшей проницаемостью ϵ_1 . С другой стороны, если $\epsilon_1 > \epsilon_2$, что возможно в случае твёрдого тела, погружённого в жидкость с большой проницаемостью, силы, действующие на тело, будут стремиться вытолкнуть тело из поля.

Прямым следствием (49) является теорема о том, что *всякое увеличение проницаемости диэлектрика приводит к уменьшению полной энергии поля*. Предположим опять, что E_1 — поле заданной системы зарядов, находящихся в диэлектрической среде с проницаемостью $\epsilon = \epsilon(x, y, z)$. Если

в каждой точке ϵ увеличится на бесконечно малую величину $\delta\epsilon$, то соответствующее изменение электростатической энергии будет, согласно (49), равно

$$\delta U = -\frac{1}{2} \int \delta\epsilon E^2 dv, \quad (52)$$

так как произведение $\delta\epsilon EE_1$ отличается от $\delta\epsilon E^2$ на бесконечно малые второго порядка.

Но энергия электростатического поля полностью определена распределением зарядов ρ и ω и диэлектрической проницаемостью $\epsilon(x, y, z)$. Уравнение (52) выражает изменение энергии в результате малого изменения в свойствах диэлектрика, во время которого заряды поддерживаются постоянными:

$$U = -\frac{1}{2} \int_0^\epsilon \int E^2 d\epsilon dv \quad (\text{заряды неизменны}). \quad (53)$$

С другой стороны, вариация

$$\delta U = \int \varphi \delta\rho dv + \int \varphi \delta\omega da = \int E \delta D dv \quad (54)$$

выражает приращение энергии в результате малого изменения плотности зарядов, во время которого свойства диэлектрика поддерживаются постоянными.

2.11. Теорема Томсона. Заряды, находящиеся на системе заданных проводников, погружённых в диэлектрик, распределятся по поверхности этих проводников таким образом, что энергия получившегося в результате электростатического поля будет минимальной.

При доказательстве этой и последующих теорем мы ограничимся случаем изотропного диэлектрика с линейной связью между векторами D и E . Предположим, что имеется n проводников, ограниченных поверхностями S_i ($i=1, 2, \dots, n$), причём каждый из проводников несёт заряд q_i . Разрывы в свойствах диэлектрика могут быть без уменьшения общности теоремы заменены тонкими переходными слоями, и поэтому мы будем предполагать диэлектрическую проницаемость среды ϵ непрерывной, а в остальных отношениях произвольной функцией точки. Мы будем предполагать также наличие заряда, распределённого по объёму диэлектрика, хотя подобные условия встречаются на практике редко.

В каждой точке диэлектрика поле находящихся в равновесии зарядов должно удовлетворять условиям:

$$\operatorname{div} D = \rho, \quad \operatorname{rot} E = 0, \quad E = -\operatorname{grad} \varphi \quad (55)$$

на поверхности S_i каждого проводника:

$$\varphi_i = \text{const.}, \quad \int_{S_i} Dn da = q_i; \quad (56)$$

а в бесконечности потенциал должен исчезать как $1/r^1$.

Предположим, что φ' , E' , D' — какое-либо другое возможное электростатическое поле; оно удовлетворяет условиям (55), но не обязательно (56), и где-либо, если не всюду, отлично от φ , E , D . Так как объёмное распределение ρ и полный заряд на каждом из проводников заданы, то мы имеем:

$$\operatorname{div} (D' - D) = 0, \quad \int_{S_i} (D' - D)n da = 0. \quad (57)$$

¹⁾ Смотри раздел 3.5, стр. 155.

Если U и U' — электростатические энергии этих двух полей, то их разность

$$U' - U = \frac{1}{2} \int E' D' dv - \frac{1}{2} \int E D dv, \quad (58)$$

или, поскольку $D' = \epsilon E'$,

$$U' - U = \frac{1}{2} \int (E' - E) (D' - D) dv + \int E (D' - D) dv. \quad (59)$$

Второй член правой части равен нулю, так как, положив $E = P$, $D' - D = Q$, мы убеждаемся, что условия теоремы, доказанной в разделе 2.9, соблюдены. Таким образом, остаётся:

$$U' - U = \frac{1}{2} \int \epsilon (E' - E)^2 dv, \quad (60)$$

что является существенно положительной величиной. Теорема таким образом доказана, ибо если в какой-либо области пространства E' отличается от E , то получающаяся в результате энергия U' будет больше, чем U . Условие электростатического равновесия характеризуется, таким образом, минимальным значением электростатической энергии, и мы можем поэтому заключить, что для определения равновесия энергия U играет в электростатике ту же роль, что потенциальная энергия в механике.

2.12. Теорема Ирншоу. Заряженные тела, находящиеся в электростатическом поле, не могут удерживаться в состоянии устойчивого равновесия под действием одних только электрических сил.

Мы предположим, что первичное поле создаётся системой зарядов q_i ($i = 1, 2, \dots, n$), находящихся на n заданных проводниках, ограниченных поверхностями S_i . Эти проводники погружены в диэлектрик, диэлектрическая проницаемость ϵ которого может быть непрерывной функцией точки, но в котором отсутствуют объёмно распределённые заряды. Мы замечаем прежде всего, что ни сам потенциал, ни какая-либо из его частных производных не могут иметь ни максимума, ни минимума ни в одной из точек внутри диэлектрика, поскольку для абсолютного максимума φ необходимо, чтобы все три частных производных $\partial^2 \varphi / \partial x^2$, $\partial^2 \varphi / \partial y^2$, $\partial^2 \varphi / \partial z^2$ были в рассматриваемой точке отрицательны, что несовместимо с уравнением Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (61)$$

Точно так же для существования абсолютного минимума необходимо, чтобы все эти три производные были положительны, что опять-таки несовместимо с (61). Те же соображения применимы и к производным от потенциала.

Предположим теперь, что заряд q_0 находится на проводящей поверхности S_0 . Предположим на время, что распределение зарядов на всех проводниках фиксировано, и внесём поверхность S_0 в поле остальных n зарядов. Если ω_0 — поверхностная плотность зарядов на S_0 , то энергия этого проводника будет:

$$U_0 = \frac{1}{2} \int_{S_0} \varphi \omega_0 da, \quad (62)$$

где φ — потенциал первоначального поля. Пусть x, y, z будут координаты какой-либо точки, фиксированной на S_0 , а ξ, η, ζ — координаты произвольной точки на этой поверхности. Потенциал в точках поверхности S_0 , обусловленный другими n -зарядами, может быть представлен в виде ряда Тэй-

лора через значение потенциала и его производных в точке x, y, z ,

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = \varphi(x, y, z) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial \varphi}{\partial z}(\zeta - z) + \dots, \quad (63)$$

а следовательно, и энергия также может быть определена через значение потенциала и его производных в этой точке. Но так как φ не может иметь минимума в точке x, y, z , то всегда можно сместить проводник S_0 таким образом, чтобы энергия U_0 уменьшилась. Если после такого смещения заряды, которые до сих пор предполагались «замороженными» на поверхностях S_0, S_i , освободить, то эти поверхности снова сделаются эквипотенциальными и, по теореме Томсона, энергия поля ещё более уменьшится. Таким образом, в электростатическом поле не существует минимума энергии $U_0(x, y, z)$, и, соответственно, проводник S_0 нигде не может находиться в состоянии статического равновесия.

2.13. Теорема об энергии незаряженного проводника. Введение незаряженного проводника в поле заданной системы зарядов уменьшает полную энергию поля.

Пусть проводники будут такие же, как и в предыдущей теореме, но поверхность S_0 будет теперь незаряженной. Пусть E, D — векторы, характеризующие поле до внесения S_0 , а E', D' — после внесения. Изменение энергии будет:

$$U - U' = \frac{1}{2} \int ED \, dv - \frac{1}{2} \int E'D' \, dv. \quad (64)$$

Объёмный интеграл должен быть распространён по всему пространству, но так как внутри поверхностей S_0, S_i поле отсутствует, эти области в интеграл ничего не вносят. Пусть V — объём поля, внешний по отношению к n -проводникам S_i до внесения S_0 , а V_0 — объём, ограниченный S_0 . Тогда

$$V_1 = V - V_0 \quad (65)$$

представляет собой объём области, занятой полем после внесения S_0 , и уравнение (64) может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} U - U' &= \frac{1}{2} \int_V ED \, dv - \frac{1}{2} \int_{V_1} E'D' \, dv = \frac{1}{2} \int_{V_0} ED \, dv + \frac{1}{2} \int_{V_1} (ED - E'D') \, dv = \\ &= \frac{1}{2} \int_{V_0} ED \, dv + \frac{1}{2} \int_{V_1} (E - E')(D - D') \, dv + \int_{V_1} E'(D - D') \, dv. \end{aligned} \quad (66)$$

Можно показать, что последний интеграл справа равен нулю, так как

$$E'(D - D') = -\text{grad } \varphi' (D - D') = -\text{div} \{ \varphi' (D - D') \} + \varphi' \text{div} (D - D')$$

и $\text{div} (D - D') = 0$. По теореме о дивергенции

$$\int_{V_1} E'(D - D') \, dv = \int_{V_1} \text{div} \{ \varphi' (D' - D) \} \, dv = \sum_{i=1}^n \varphi'_i \int_{S_i} (D' - D) n \, da, \quad (67)$$

где φ'_i — потенциалы проводящих поверхностей S_i . Полный заряд на каждой из поверхностей задан, так что

$$\int_{S_i} D' n \, da = \int_{S_i} D n \, da = q_i, \quad (68)$$

и следовательно,

$$\int_{S_1} (D' - D) n da = 0. \quad (69)$$

Разность между начальной и конечной энергиями будет поэтому:

$$U - U' = \frac{1}{2} \int_{V_0} \epsilon E^2 dv + \frac{1}{2} \int_{V_1} \epsilon (E - E')^2 dv, \quad (70)$$

а это существенно положительная величина.

МАГНИТОСТАТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

2.14. Магнитная энергия стационарных токов. Рассмотрим стационарное распределение токов, ограниченное конечной областью пространства. Эти токи могут протекать в проводящей среде, или же представлять собой движение зарядов в свободном пространстве.

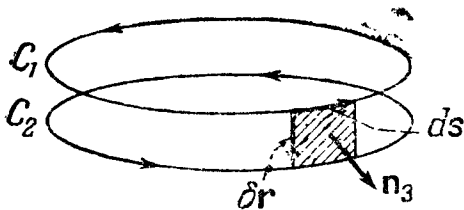


Рис. 19. Иллюстрация смещения нити тока.

Уравнение непрерывности сводится к условию $\text{div } \mathbf{J} = 0$, в силу чего мы можем представить себе, что распределение токов разложено на линии тока, замыкающиеся сами на себя. Трубка или нить тока, может быть построена из линий тока, проходящих через бесконечно малый элемент площади. Трубка ограничена линиями, проходящими через точки контура этого элемента площади. Поток в каждой точке поверхности

трубки является чисто тангенциальным — ток из трубки не выходит и, соответственно, через любое поперечное сечение трубки за данный промежуток времени проходит один и тот же заряд.

Подсчитаем прежде всего потенциальную энергию одиночной изолированной нити тока в поле $\mathbf{B}$ заданных внешних источников. Пусть ток, несомый нитью, будет I , и пусть он проходит первоначально по контуру, обозначенному на рис. 19 через C_1 . Сила, действующая со стороны поля на линейный элемент нити, равна

$$\mathbf{f} = I [ds, \mathbf{B}]. \quad (1)$$

Предположим теперь, что нить C_1 перемещена и деформирована таким образом, что каждый элемент ds сместился на бесконечно малую величину $\delta \mathbf{r}$, перейдя в элемент контура C_2 . Смещение $\delta \mathbf{r}$ предполагается непрерывной функцией положения на C_1 , а в остальном произвольно. Работа, совершённая силой (1) при смещении элемента ds , будет:

$$\mathbf{f} \delta \mathbf{r} = I [ds, \mathbf{B}] \delta \mathbf{r} = I \mathbf{B} [\delta \mathbf{r}, ds]. \quad (2)$$

Пусть S_1 — любая регулярная поверхность, опирающаяся на контур C_1 . Другая поверхность S_2 пусть опирается на контур C_2 , проходит через точки контура C_1 и далее совпадает с поверхностью S_1 . Поверхность

$$S_3 = S_2 - S_1 \quad (3)$$

будет, следовательно, полосой или лентой ширины $\delta \mathbf{r}$, ограниченной кривыми C_1 и C_2 . Если da_3 — элемент S_3 , то мы имеем, очевидно:

$$[\delta \mathbf{r}, ds] = \mathbf{n}_3 da_3, \quad (4)$$

где $\mathbf{n}_3$ — положительная единичная нормаль к поверхности S_3 . Положительные стороны S_1 и S_2 определяются обычным условием, что положительная

сторона должна находиться с левой стороны от наблюдателя, движущегося по контуру в направлении тока. Магнитные потоки, пронизывающие контуры C_1 и C_2 , будут:

$$\Phi_1 = \int_{S_1} \mathbf{B} \mathbf{n}_1 da_1, \quad \Phi_2 = \int_{S_2} \mathbf{B} \mathbf{n}_2 da_2, \quad (5)$$

отсюда полное изменение магнитного потока в результате перемещения контура равно:

$$\delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = \int_{S_3} \mathbf{B} \mathbf{n}_3 da_3. \quad (6)$$

С другой стороны, полная работа, совершённая механическими силами, может быть получена интегрированием выражения (2) по замкнутому контуру C_1 , откуда в силу (4) получаем:

$$\delta W = \oint_{C_1} \mathbf{f} \delta \mathbf{r} = I \delta\Phi. \quad (7)$$

Если теперь предположить, что во время виртуального перемещения $\delta \mathbf{r}$ внешние источники и ток I поддерживаются неизменными, то работа, совершённая механическими силами, компенсируется уменьшением потенциальной энергии U :

$$\delta U = -\delta W = -I \delta\Phi, \quad (8)$$

или

$$U = -I\Phi = -I \int_S \mathbf{B} \mathbf{n} da, \quad (9)$$

где S представляет собой любую поверхность, опирающуюся на нить тока. Обратно, механические силы и вращающие моменты, действующие на нить тока в магнитостатическом поле, могут быть получены вариированием функции U при неизменном токе I и неизменной силе источников поля.

Если $\delta \mathbf{r}$ является действительным, а не виртуальным перемещением, то необходимо затратить работу для поддержания тока постоянным. Изменение магнитного потока на $\delta\Phi$ индуцирует электродвижущую силу:

$$V = \int_C \mathbf{E} ds = -\frac{\delta\Phi}{\delta t}, \quad (10)$$

где δt — время, затрачиваемое на перемещение. Эта индуцированная электродвижущая сила должна быть сбалансирована равной и противоположно направленной сторонней электродвижущей силой V' . Работа, произведённая в контуре сторонней э. д. с. за время δt , будет:

$$V'I \delta t = +I \delta\Phi. \quad (11)$$

Работа, производимая поперечными механическими силами при малом перемещении линейного контура, полностью компенсируется энергией, затрачиваемой продольными электродвижущими силами, необходимыми для поддержания тока неизменным. Полная работа, произведённая над контуром, равна нулю.

Предположим теперь, что источником поля $\mathbf{B}$ является другая нить тока. Таким образом, мы представим себе сейчас распределение токов, состоящее из двух изолированных замкнутых нитей I_1 и I_2 . Поля, создаваемые этими токами, будут соответственно $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$. Потенциальная энергия контура I_2

во внешнем поле B_1 равна:

$$U_{21} = -I_2 \int_{S_2} B_1 n_2 da_2, \quad (12)$$

где S_2 — любая поверхность, опирающаяся на нить тока I_2 . Точно так же потенциальная энергия контура 1 в поле тока I_2 равна

$$U_{12} = -I_1 \int_{S_1} B_2 n_1 da_1. \quad (13)$$

U_{12} и U_{21} являются скалярными функциями точки и конфигурации контуров; их производные дают силы и вращающие моменты, действующие со стороны одной нити на другую. Из равенства действия и противодействия следует, что

$$U_{12} = U_{21} = U, \quad (14)$$

а значит и взаимная потенциальная энергия может быть выражена в виде:

$$U = -\frac{1}{2} I_1 \Phi_1 - \frac{1}{2} I_2 \Phi_2, \quad (15)$$

где Φ_1 — магнитный поток, пронизывающий контур I_1 .

Взаимная энергия U , которая обращается в нуль при бесконечном удалении нитей друг от друга, *не равна* полной работе, которая должна быть совершена при сближении нитей из бесконечности до данного взаиморасположения, и поэтому не представляет собой полной энергии системы. Действительно предположим, что контур 2 испытывает малое перемещение под действием сил со стороны 1, в результате чего потенциальная энергия уменьшается на величину $-\delta U$. Для того, чтобы поддерживать ток I_2 во время смещения неизменным, в контуре 2 должно быть совершено равное количество работы δW с тем, чтобы компенсировать действие индуцированных э. д. с. До сих пор полное изменение энергии было равно нулю. Но теперь мы должны учесть, что в результате смещения I_2 меняется поток, пронизывающий контур I_1 , вследствие чего индуцируется э. д. с. V_1 , противоположная току I_1 . Если ток I_1 должен поддерживаться неизменным, то к контуру 1 необходимо приложить стороннее напряжение V'_1 , компенсирующее V_1 и производящее в единицу времени работу $I_1 V'_1$. Индуцированная э. д. с. зависит, однако, только от *относительного* движения 1 и 2. Работа, производимая электродвижущими силами, индуцированными в контуре 1 при перемещении контура 2, должна равняться работе, которая была бы произведена, если бы контур 2 был неподвижен, а контуру 1 было сообщено 1, равное и противоположное перемещение. Работа, совершённая в контуре 1 будет, следовательно, δW . В результате, если механическим силам, действующим на обе нити тока, дана возможность совершать работу, то хотя и получается уменьшение взаимной потенциальной энергии на величину $-\delta U$, но это уменьшение перекрывается работой $2\delta W$, которая должна быть совершена *над* системой для того, чтобы поддерживать токи I_1 и I_2 неизменными. Если полную магнитную энергию системы мы обозначим через T , то изменение T , связанное с относительным перемещением *при неизменных токах*, будет:

$$\delta T = 2\delta W + \delta U = \delta W = -\delta U, \quad (16)$$

или, согласно (15),

$$T = \frac{1}{2} I_1 \Phi_1 + \frac{1}{2} I_2 \Phi_2 \quad (17)$$

В общем случае, если система состоит из n отдельных нитей тока, магнитная энергия будет:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_i \Phi_i \quad (18)$$

где Φ_i — магнитный поток, пронизывающий контур i , обусловленный остальными $n - 1$ контурами.

Уравнение (18) даёт выражение работы, необходимой для перемещения n замкнутых нитей тока из исходного положения в бесконечности в некоторое заданное положение в конечной области пространства. Поперечное сечение любой из нитей тока очень мало, но не исчезающе мало, и нить тока в том смысле, в каком мы пользовались этим понятием выше, не является особой линией. Каждая нить или трубка тока может быть разделена на пучок более тонких нитей, каждая из которых несёт долю первоначального тока. В пределе, при исчезающе малом поперечном сечении, ток, несомый нитью, бесконечно мал, как бесконечно мала и энергия, необходимая для его установления. Соответственно, полная энергия данного распределения токов равна просто взаимной энергии бесконечно тонких нитей тока, на которые это распределение токов может быть разложено.

Практически, однако, распределение токов в проводящей среде не может быть установлено посредством математически простого приёма собирания нитей из бесконечности и, хотя (18) является правильным для выражения магнитной энергии n замкнутых контуров в среде, в которой соотношение между H и B линейно, но отсюда ещё не следует, что оно верно и в общем случае. Вместо непрерывного распределения рассмотрим теперь n линейных контуров, помещённых в магнитную среду. Пусть сопротивление i -го контура будет R_i , а мгновенный ток, который он несёт, равен I_i . К каждому контуру пусть теперь будет приложена сторонняя э. д. с. V'_i , создаваемая химическим или механическим путём. Эти сторонние э. д. с. вызывают изменение токов и соответствующее изменение магнитных потоков, пронизывающих каждый из контуров. Если V_i — э. д. с., индуцированная изменением Φ_i , то соотношение между током и полной э. д. с. в контуре в каждый момент будет:

$$V'_i + V_i = R_i I_i \quad (19)$$

или, поскольку $V_i = -\frac{d\Phi_i}{dt}$,

$$V'_i = R_i I_i + \frac{d\Phi_i}{dt} \quad (20)$$

Мощность, затрачиваемая приложенной э. д. с. V'_i , будет $V'_i I_i$ и соответственно работа, совершённая в i -ом контуре за время δt , равна

$$\delta W_i = R_i I_i^2 \delta t + I_i \delta \Phi_i \quad (21)$$

Из этой работы количество, равное $R_i I_i^2 \delta t$ рассеивается в виде тепла, в то время как количество, равное $I_i \delta \Phi_i$ накапливается в виде магнитной энергии¹⁾. Изменение магнитной энергии n нитей вследствие приращения магнитного потока будет, следовательно:

$$\delta T = \sum_{i=1}^n I_i \delta \Phi_i \quad (22)$$

¹⁾ Часть энергии $I_i \delta \Phi_i$ может, однако, совсем исчезнуть благодаря явлению гистерезиса. См. раздел 2.16.

и полная энергия, затрачиваемая на систему при медленном возрастании токов от нуля до их конечных значений, за вычетом рассеивающихся в виде тепла омических потерь в проводниках, будет:

$$T = \sum_{i=1}^n \int_{\Phi_{i0}}^{\Phi_i} I_i d\Phi_i, \quad (23)$$

где Φ_{i0} — магнитный поток, пронизывающий i -ый контур в начальный момент, когда все токи равны нулю. Первоначальный поток был бы равен нулю, если бы отсутствовало остаточное намагничение среды, окружающей контуры. Выражение (23) может быть интерпретировано как энергия, запасённая в магнитном поле, только в том случае, если соотношение между I_i и Φ_i однозначно (отсутствие гистерезиса); (23) сводится к (18) только тогда, когда соотношение между H и B и, соответственно, между I_i и Φ_i линейно, так что $I_i d\Phi_i = \Phi_i dI_i$.

Не представляет труда распространить выражение (23) от конечного числа нитей тока на непрерывное распределение токов. В пространстве, в котором распределены токи, выберем произвольную элементарную площадку $d\sigma$. Линии тока, проходящие через точки $d\sigma$, образуют трубку тока, которая, в силу стационарного характера распределения, замыкается сама на себя. Если $\mathbf{J}$ — плотность тока, то скалярное произведение $\mathbf{J}n d\sigma = dI$ постоянно для каждого сечения трубки. Пусть $\mathbf{B}'$ будет магнитным полем в любой точке внутри трубки, создаваемым всеми нитями тока, лежащими вне её. Приращение энергии тока dI , связанное с бесконечно малым увеличением поля *внешних* нитей тока, будет

$$\delta(dT) = dI \delta\Phi' = dI \int \delta\mathbf{B}'n d\sigma, \quad (24)$$

где интеграл должен быть распространён по любой поверхности, опирающейся на контур нити тока dI . Если $\mathbf{A}'$ — векторный потенциал поля $\mathbf{B}'$, то $\mathbf{B}' = \text{rot } \mathbf{A}'$, и (24) может быть преобразовано по теореме Стокса в линейный интеграл вдоль контура нити:

$$\delta(dT) = \mathbf{J}n d\sigma \oint \delta\mathbf{A}' ds. \quad (25)$$

Полный векторный потенциал $\mathbf{A}$ на какой-либо линии внутри трубки d равен $\mathbf{A}'$ плюс слагаемое, связанное с самим током $dI = \mathbf{J}n d\sigma$. Но по мере того, как площадь поперечного сечения $d\sigma \rightarrow 0$, это слагаемое стремится к нулю, так что в пределе $\mathbf{A}'$ может быть заменено через $\mathbf{A}$. Более того, поскольку вектор плотности тока $\mathbf{J}$, единичный вектор $\mathbf{n}$, нормальный к $d\sigma$, и элемент длины вдоль трубки ds параллельны друг другу внутри трубки бесконечно малого сечения, постольку вместо (25) можно написать:

$$\delta(dT) = \oint \mathbf{J} \delta\mathbf{A} d\sigma ds. \quad (26)$$

Произведение $d\sigma ds = dv$ представляет собой объём участка трубки бесконечно малой длины. Полное приращение энергии при заданном распределении токов получится суммированием слагаемых от всех трубок, на которые это распределение было разложено, а это суммирование эквивалентно, очевидно, интегралу от произведения $\mathbf{J} \delta\mathbf{A}$ по всему объёму, занятому токами

$$\delta T = \int \mathbf{J} \delta\mathbf{A} dv. \quad (27)$$

Таким образом, работа, необходимая для установления непрерывного распределения токов посредством приложенных электродвижущих сил, равна в общем случае

$$T = \int_{A_0}^A \int J \delta A dv. \quad (28)$$

Если соотношение между током и создаваемым им векторным потенциалом линейно, то это выражение принимает вид:

$$T = \frac{1}{2} \int J A dv. \quad (29)$$

2.15. Магнитная энергия как функция напряжённости поля. Мы будем предполагать, что разрывы непрерывности в магнитных свойствах среды, находящейся в поле, могут быть заменены слоями с быстрым но непрерывным изменением этих свойств. Поле может частично вызываться токами, частично — постоянными магнитами или остаточным намагничиванием среды; во всяком случае, все источники поля находятся на конечном расстоянии от какого-либо произвольного начала отсчёта. В главе IV будет показано, что при этих условиях векторы A и B исчезают в бесконечности как r^{-1} и r^{-2} . Плотность тока J в любой точке связана с вектором H в той же точке соотношением

$$J = \text{rot } H. \quad (30)$$

Далее, согласно хорошо известному тождеству,

$$J \delta A = \delta A \text{ rot } H = \text{div } [H, \delta A] + H \text{ rot } \delta A = \text{div } [H, \delta A] + H \delta B. \quad (31)$$

После подстановки (31) в (28) и применения теоремы о дивергенции, мы получаем:

$$T = \int_V \int_{B_0}^B H dB dv + \int_S \int_{A_0}^A [H, dA] n da, \quad (32)$$

где V — любой объём, ограниченный поверхностью S , охватывающей все источники поля. Если поверхность S неограниченно увеличивать, то второй интеграл в (32) исчезнет, поскольку подинтегральное выражение убывает как r^{-3} , в то время как S растёт только как r^2 . Следовательно, работа, совершённая сторонними э. д. с. (которые создаются, например, батареями или генераторами), при увеличении магнитного поля от начального значения B_0 до конечного значения B , может быть выражена в виде интеграла

$$T = \int dv \int_{B_0}^B H dB, \quad (33)$$

распространённого по всему пространству. Необходимо подчеркнуть, что интеграл (33) представляет собой энергию, связанную с установлением данного распределения токов в присутствии магнетиков, и не включает внутреннюю энергию постоянных магнитов или взаимную энергию систем постоянных магнитов.

Магнитные свойства всех материалов, за исключением ферромагнитной группы, мало отличаются от магнитных свойств свободного пространства; соотношение между B и H линейно в широких пределах изменения напряжённости поля; множитель μ в соотношении $B = \mu H$ почти равен μ_0 , а заметное остаточное намагничивание отсутствует. При этих условиях работа,

затраченная на установление поля $\mathbf{B}$, возвращается обратно при уменьшении поля до нуля. Уравнение (33) можно проинтегрировать, и мы получаем выражение

$$T = \frac{1}{2} \int \mu H^2 dv, \quad (34)$$

которое мы интерпретируем как энергию, запасённую в магнитном поле. Как и в соответствующем электростатическом случае, мы можем предположить, что энергия распределена в поле с плотностью $\frac{1}{2} \mu H^2$ джоулей/метр³.

2.16. Ферромагнитные материалы. В ферромагнитных веществах соотношение между $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$ в общем случае нелинейно и неоднозначно. В исходном ненамагниченном состоянии векторы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ равны нулю. Если теперь с помощью сторонних электродвижущих сил, приложенных к проводящим контурам, медленно увеличивать поле, то функция $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H})$ в любой точке ферромагнитного вещества будет следовать кривой, имеющей вид, показанный на рис. 20. Согласно (33), работа, необхо-

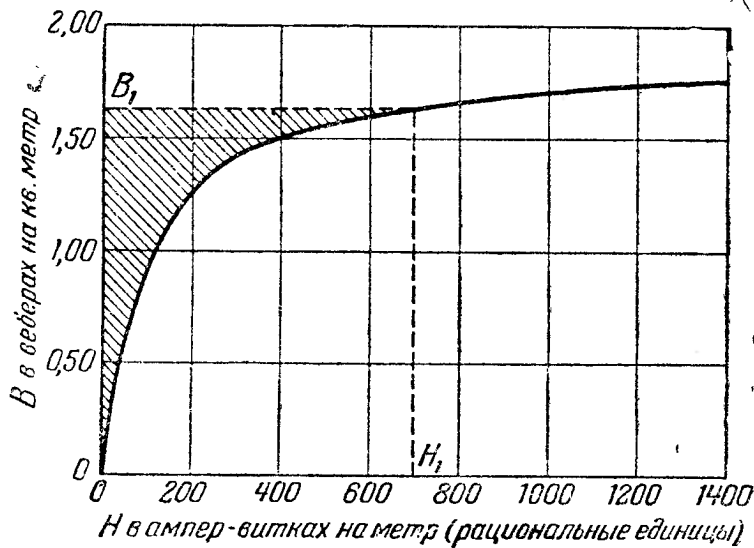


Рис. 20. Типичная кривая намагничивания отожжённого листа стали.

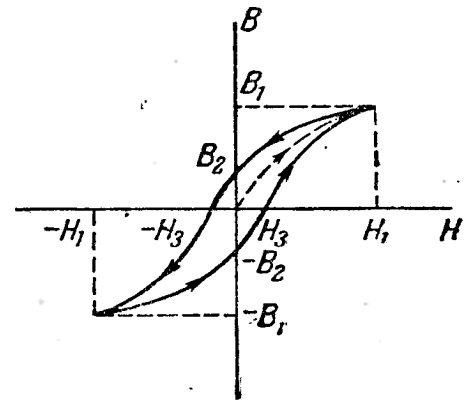


Рис. 21. Петля гистерезиса.

димая для намагничивания единицы объёма среды, изображается заштрихованной на рисунке площадью. Будь функция $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ однозначна, уменьшение поля от $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{B}_1$ до нуля происходило бы по этой же кривой, и вся энергия (33) могла бы быть превращена в полезную работу. В действительности, возвращение происходит обычно по пути, подобному тому, какой показан на рис. 21. Начиная с $\mathbf{H}_1$ поле уменьшается до $\mathbf{H} = 0$. Однако соответствующее значение $\mathbf{B} = \mathbf{B}_2$ всё ещё положительно. Чтобы $\mathbf{B}$ уменьшилось до нуля, необходимо придать $\mathbf{H}$ отрицательное значение, что физически означает возрастание $\mathbf{H}$ в *противоположном* направлении. При $\mathbf{H} = -\mathbf{H}_3$ вектор $\mathbf{B}$ равен нулю и при возрастании отрицательной величины $\mathbf{H}$ достигает в конце концов точки, где $\mathbf{H} = -\mathbf{H}_1$, $\mathbf{B} = -\mathbf{B}_1$. При возвращении к положительным значениям $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{B}_1$ система следует по симметричному пути через точки $\mathbf{B} = -\mathbf{B}_2$, $\mathbf{H} = 0$ и $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{H} = +\mathbf{H}_3$. Во всех точках отрезка $\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2$ значения $\mathbf{B}$ больше, нежели первоначальные значения на пунктирной кривой при тех же значениях $\mathbf{H}$; изменение $\mathbf{B}$ отстаёт от изменения $\mathbf{H}$; в этом случае говорят, что в среде проявляется *гистерезис*.

Пусть ω будет работой, произведённой над *единицей объёма магнетика* при изменении поля от значения $\mathbf{B}_1$ до $\mathbf{B}$.

$$\omega = \int_{\mathbf{B}_1}^{\mathbf{B}} \mathbf{H} d\mathbf{B} = \mathbf{H}\mathbf{B} \Big|_{\mathbf{B}_1}^{\mathbf{B}} - \int_{\mathbf{H}_1}^{\mathbf{H}} \mathbf{B} d\mathbf{H}. \quad (35)$$

Если изменение поля пройдёт полный цикл, следуя по гистерезисной петле от B_1 через B_2 , $-B_1$, $-B_2$ и возвращаясь к B_1 , то полная работа, произведённая над единицей объёма, будет равна

$$\omega = - \oint B dH \quad (36)$$

— величина, представляемая, очевидно, площадью, находящейся внутри гистерезисной петли, показанной на рис. 21. Полная работа за один цикл во всём поле будет:

$$Q = - \int dv \oint B dH. \quad (37)$$

Q является потерей на гистерезис — частью энергии поля, необратимо рассеявшейся в виде тепла.

2.17. Энергия магнитного тела в магнитостатическом поле. Предположим, что в магнитной среде с помощью заданных источников создано поле B_1 . Мы примем, что соотношение между B_1 и H_1 линейно и что среда изотропна. Тогда $B_1 = \mu_1 H_1$, где μ_1 является самое большее скалярной функцией точки; μ_1 есть константа в случае однородной среды. Энергия поля выражается интегралом

$$T_1 = \frac{1}{2} \int H_1 B_1 dv, \quad (38)$$

распространённым по всему пространству. Уменьшим теперь интенсивность источников до нуля, и внесём в подходящую полость, сделанную в первой среде, тело, которое мы предположим немагнитным; магнитные свойства этого тела произвольны. Как и в разделе 2.10, объём, занятый внесённым телом, мы обозначим через V_1 (рис. 22), а остальную область вне тела — через V_2 . Если внешние источники являются токами, то работа, которая должна быть совершена, чтобы восстановить их первоначальную величину, равна:

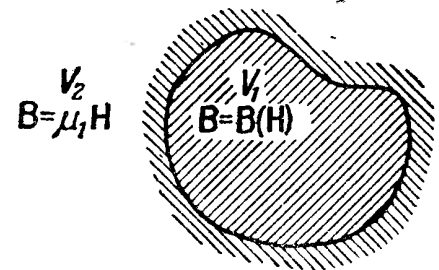


Рис. 22. Область V_1 занята магнитным телом, помещённым в однородную изотропную среду V_2 .

$$T_2 = \int_{V_1+V_2} dv \int_0^B H dB = \frac{1}{2} \int_{V_1} H B dv + \int_{V_1} dv \int_0^B H dB. \quad (39)$$

В этом выражении конечное поле B отличается в каждой точке от поля B_1 на величину $B_2 = B - B_1$, что является следствием магнитной поляризации вещества, находящегося в V_1 . Увеличение энергии, необходимое для восстановления первоначальной силы тока, равно

$$T = T_2 - T_1 = \frac{1}{2} \int_{V_1} (H B - H_1 B_1) dv + \int_{V_1} dv \left(\int_0^B H dB - \frac{1}{2} H_1 B_1 \right). \quad (40)$$

Мы предположили, что в области V_2 , внешней по отношению к телу, соотношение между B и H линейно:

$$B_1 = \mu_1 H_1, \quad B = \mu_1 H \quad \text{в } V_2. \quad (41)$$

Поэтому первый интеграл в выражении (40) эквивалентен:

$$\frac{1}{2} \int_{V_2} (H B - H_1 B_1) dv = \frac{1}{2} \int_{V_2} (H - H_1) (B + B_1) dv. \quad (42)$$

По условию, первоначальное и конечное распределение токов в источниках одинаково, так что и в V_1 и в V_2 условия

$$\operatorname{div}(\mathbf{B} + \mathbf{B}_1) = 0, \quad \operatorname{rot}(\mathbf{H} - \mathbf{H}_1) = 0 \quad (43)$$

удовлетворены, т.е. о время как на поверхности, ограничивающей V_1 , мы имеем, согласно (18), стр. 45:

$$\left. \begin{aligned} n \{(\mathbf{B} + \mathbf{B}_1)_+ - (\mathbf{B} + \mathbf{B}_1)_-\} &= 0, \\ [n \{(\mathbf{H} - \mathbf{H}_1)_+ - (\mathbf{H} - \mathbf{H}_1)_-\}] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Таким образом, мы можем применить теорему раздела 2.9, что даёт

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{V_1+V_2} (\mathbf{H} - \mathbf{H}_1) (\mathbf{B} + \mathbf{B}_1) dv &= \\ &= \frac{1}{2} \int_{V_1} (\mathbf{H} - \mathbf{H}_1) (\mathbf{B} + \mathbf{B}_1) dv + \frac{1}{2} \int_{V_2} (\mathbf{H} - \mathbf{H}_1) (\mathbf{B} + \mathbf{B}_1) dv = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

или

$$\frac{1}{2} \int_{V_2} (\mathbf{H} - \mathbf{H}_1) (\mathbf{B} + \mathbf{B}_1) dv = - \frac{1}{2} \int_{V_1} (\mathbf{H} - \mathbf{H}_1) (\mathbf{B} + \mathbf{B}_1) dv. \quad (46)$$

Дополнительная работа, необходимая для установления тех же токов в присутствии тела, может быть, таким образом, выражена через интеграл, распространённый по объёму, занятому телом. Подставляя (46) в (40), получаем:

$$-T = \frac{1}{2} \int_{V_1} \left(\mathbf{H}_1 \mathbf{B} - \mathbf{H} \mathbf{B}_1 - \mathbf{H} \mathbf{B} + 2 \int_0^{\mathbf{B}} \mathbf{H} d\mathbf{B} \right) dv. \quad (47)$$

Если явлением гистерезиса можно пренебречь ($\mathbf{H}$ — однозначная функция $\mathbf{B}$), то величина T может быть интерпретирована как энергия тела в магнитном поле какой-либо системы постоянных источников, и вариация T при виртуальном перемещении тела определяет действующие на него механические силы. Если, кроме того, магнитные свойства вещества внутри V_1 могут быть охарактеризованы магнитной проницаемостью μ_2 , так что $\mathbf{B} = \mu_2 \mathbf{H}$, то (47) сводится тогда к

$$T = \frac{1}{2} \int_{V_1} (\mathbf{H}_1 \mathbf{B} - \mathbf{H} \mathbf{B}_1) dv = \frac{1}{2} \int_{V_1} (\mu_2 - \mu_1) \mathbf{H} \mathbf{H}_1 dv. \quad (48)$$

Так как предполагалось, что первоначально тело не имело остаточного намагничивания, то соответственно векторы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ внутри V_1 связаны с индуцированным намагничиванием $\mathbf{M}$, согласно разделу 1.6, соотношением

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}), \quad (49)$$

и, поскольку $\mathbf{B} = \mu_2 \mathbf{H}$, это даёт:

$$\mathbf{M} = \left(\frac{\mu_2}{\mu_0} - 1 \right) \mathbf{H} = \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu_2} \right) \mathbf{B}. \quad (50)$$

Следовательно, если полость V_1 первоначально не содержала магнетика, то мы можем положить $\mu_1 = \mu_0$ и написать (48) в виде:

$$T = \frac{1}{2} \int_{V_1} \mathbf{M} \mathbf{B}_1 dv \quad (51)$$

— выражение, которое соответствует соотношению (51), стр. 108, для электростатического случая во всём, за исключением знака. Однако это различие является фундаментальным. В то время как в электростатическом случае работа, совершённая внешними источниками при виртуальном перемещении, сопровождается уменьшением потенциальной энергии U , механические силы, действующие на намагниченное тело, должны, как мы скоро увидим, определяться из *увеличения* T , так что T в этом смысле ведёт себя как кинетическая, а не потенциальная энергия.

Из соотношения (48) может быть выведен полезный аналог уравнению (52), стр. 109, для магнитостатического поля. Предположим опять, что B_1 есть поле *заданных* источников — безразлично токов или постоянных магнитов, — и что в каждой точке пространства магнитная проницаемость $\mu = \mu(x, y, z)$ является непрерывной функцией точки. Если магнитная проницаемость изменится теперь на бесконечно малую величину $\delta\mu$, то соответствующее изменение магнитной энергии будет:

$$\delta T = \frac{1}{2} \int \delta\mu H^2 dv; \quad (52)$$

и, следовательно, магнитная энергия некоторого распределения вещества в заданном поле будет равна:

$$T = \frac{1}{2} \int dv \int_{\mu_0}^{\mu} H^2 d\mu \quad (\mu = \mu_0 \chi_m), \quad (53)$$

при условии, что первоначально вещество было ненамагничено, и что μ не зависит от H . Для парамагнитных материалов $\mu > \mu_0$, $\chi_m > 1$, но в случае диамагнитного вещества $\mu < \mu_0$, и магнитная энергия первоначального поля при внесении диамагнитных тел уменьшается.

2.18. Потенциальная энергия постоянных магнитов. Исследование энергии материальных тел в магнитом поле становится намного труднее, если эти тела первоначально намагничены. В этом случае даже в отсутствие внешних источников имеется остаточное магнитное поле, которое связано с магнитами и которое мы будем обозначать через B_0 , H_0 . Соотношение между B_0 и H_0 может быть попрежнему выражено в виде:

$$B_0 = \mu_0 (H_0 + M_0), \quad (54)$$

но M_0 — интенсивность намагничения — теперь совершенно не зависит от H_0 , определяясь исключительно предыдущей историей образца. Если теперь налагается внешнее поле, то индуцируется дополнительная составляющая намагничения, которую, как и ранее, мы обозначим через M . Это индуцированное намагничение M зависит прежде всего от *полного* поля H внутри магнита (и исчезает, когда H сводится к H_0), но также и от состояния магнита и от его постоянного или остаточного намагничения M_0 .

$$B = \mu_0 \{ H + M(H, M_0) + M_0 \}. \quad (55)$$

Полное поле H во внутренних точках определяется кроме того формой магнита, равно, как и интенсивностью и распределением внешних источников.

Мы ограничимся выводом простого, но часто используемого выражения для потенциальной энергии системы постоянных магнитов. Доказательство основывается на предположениях, которые на практике приблизительно выполняются, а именно, что намагничение M_0 строго постоянно и что намагничением M , возникающим в каком-либо магните под действием внешнего

поля других магнитов, можно пренебречь по сравнению с M_0 . Поле во всех точках внутри и вне намагниченного тела, занимающего объём V_1 , в точности такое же, какое было бы создано стационарным распределением токов по объёму V_1 с плотностью

$$\mathbf{J} = \text{rot } \mathbf{M}_0, \quad (56)$$

совместно с поверхностными токами, распределёнными по поверхности S , ограничивающей объём V_1 , с плотностью ¹⁾

$$\mathbf{K} = [\mathbf{M}_0, \mathbf{n}], \quad (57)$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности S . Прямым следствием анализа, проведённого в разделе 2.14, и, в частности, уравнения (9), является то, что потенциальная энергия магнита V_1 в поле других *постоянных* магнитов или постоянных токов равна

$$U = - \int_{V_1} \mathbf{J} \mathbf{A} \, dv - \int_S \mathbf{K} \mathbf{A} \, da, \quad (58)$$

или, в силу (56) и (57),

$$U = - \int_{V_1} \text{rot } \mathbf{M}_0 \mathbf{A} \, dv - \int_S [\mathbf{M}_0, \mathbf{n}] \mathbf{A} \, da. \quad (59)$$

Далее,

$$\mathbf{A} \text{ rot } \mathbf{M}_0 = \text{div } [\mathbf{M}_0, \mathbf{A}] + \mathbf{M} \text{ rot } \mathbf{A}, \quad (60)$$

$$[\mathbf{M}_0, \mathbf{A}] \mathbf{n} = [\mathbf{n}, \mathbf{M}_0] \mathbf{A} = - [\mathbf{M}_0, \mathbf{n}] \mathbf{A}, \quad (61)$$

так что, применяя теорему о дивергенции и полагая $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, получаем из (59):

$$U = - \int_{V_1} \mathbf{M}_0 \mathbf{B} \, dv. \quad (62)$$

В уравнении (62) можно рассматривать $d\mathbf{m} = \mathbf{M}_0 \, dv$, как магнитный момент элемента dv магнита. Его потенциальная энергия в результирующем поле $\mathbf{B}$ равна $dU = - \mathbf{B} \, d\mathbf{m}$. Результирующее поле $\mathbf{B}$ состоит из первоначального поля $\mathbf{B}_1$ всех внешних источников и поля $\mathbf{B}_2$, обусловленного всеми другими элементами самого магнита V_1 . Следовательно, работа, необходимая для того, чтобы собрать вместе первоначально намагниченные элементы магнита, в отсутствие внешнего поля должна быть равна

$$U_2 = - \int_{V_1} \mathbf{M}_0 \mathbf{B}_2 \, dv. \quad (63)$$

Эти элементы должны удерживаться вместе силами немагнитного характера. Работа же, необходимая для перенесения магнита, как жёсткого целого, из бесконечности в некоторую точку во *внешнем* поле $\mathbf{B}_1$, будет:

$$U_1 = - \int_{V_1} \mathbf{M}_0 \mathbf{B}_1 \, dv, \quad (64)$$

а силы, действующие со стороны внешних источников на единицу объёма магнита, будут:

$$\mathbf{f} = + \text{grad } (\mathbf{M}_0 \mathbf{B}_1). \quad (65)$$

¹⁾ См. разделы 1.6 и 4.10.

Различие между (64) и (51) объясняется тем, что (64) является только потенциальной энергией намагниченного тела во внешнем поле, в то время как (51) включает и работу, связанную с увеличением намагничения от нуля до M , и основывается на предположении, что существует линейное соотношение между B_1 и H_1 и, соответственно, между B_1 и M .

ПОТОК ЭНЕРГИИ

2.19. Теорема Пойнтинга. В предшествующих параграфах настоящей главы было показано, что работа, совершаемая при осуществлении малых вариаций в величине или распределении зарядов и токов в источниках поля, может быть выражена через интегралы от векторов поля, распространённые по всему пространству. Вид этих интегралов наводит на предположение (но отнюдь не доказывает его), что электрическая и магнитная энергии распределены в поле с объёмными плотностями соответственно

$$u = \int_0^D \mathbf{E} dD, \quad w = \int_0^B \mathbf{H} dB. \quad (1)$$

Вывод этих соотношений основывался на предположении *обратимости* процессов; предполагалось, что возникновение поля происходит настолько медленно, что оно может быть представлено последовательностью равновесных состояний. Сейчас мы установим, остаются ли эти выражения для плотности энергии справедливыми и в том случае, когда поля меняются с произвольной скоростью. Очевидно далее, что если наша гипотеза о распределении энергии по всему полю вообще справедлива, то изменение напряжённости поля и плотности энергии должно быть связано с *потоком* энергии от источника, или по направлению к нему.

Соотношение между скоростью изменения энергии, запасённой в поле, и потоком энергии может быть выведено как общий интеграл уравнений поля:

$$\text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad (\text{I}) \quad \text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (\text{III})$$

$$\text{rot } \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}, \quad (\text{II}) \quad \text{div } \mathbf{D} = \rho. \quad (\text{IV})$$

Заметим, что $\mathbf{E}\mathbf{J}$ имеет размерность мощности на единицу объёма (ватты на 1 куб. метр); это подсказывает нам скалярное умножение (II) на $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{E} \text{ rot } \mathbf{H} - \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{E}\mathbf{J}. \quad (2)$$

Для того чтобы каждый член в (I) мог иметь размерность мощности на единицу объёма, необходимо умножить (I) на $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{E} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad (3)$$

Вычитая (2) из (3) и применяя тождество

$$\text{div } [\mathbf{E}, \mathbf{H}] = \mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \text{ rot } \mathbf{H}, \quad (4)$$

мы получаем:

$$\text{div } [\mathbf{E}, \mathbf{H}] + \mathbf{E}\mathbf{J} = -\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (5)$$

Наконец, интегрируя (5) по объёму V , ограниченному замкнутой поверхностью S , получаем:

$$\oint_S [\mathbf{E}, \mathbf{H}] \mathbf{n} d\alpha + \int_V \mathbf{E}\mathbf{J} dv = - \int_V \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dv. \quad (6)$$

Этот результат впервые был выведен Пойнтингом в 1884 г., и независимо в том же году Хевисайдом. Обычная интерпретация этого соотношения следующая: мы предполагаем, что формальные выражения для плотностей энергии, запасённой в поле, таковы же, как и при стационарном режиме. Тогда правая часть в соотношении (6) представляет уменьшение электрической и магнитной энергии, содержащейся в данном объёме. Уменьшение этой энергии должно быть обусловлено членами левой части уравнения (6). Пусть σ будет проводимостью среды, а E' — напряжённостью *сторонних* электродвижущих сил, таких, какие возникают, скажем, в областях химической активности, например, внутри батарей. Тогда:

$$J = \sigma(E + E'), E = \frac{J}{\sigma} - E', \quad (7)$$

и отсюда:

$$\int_V E J dv = \int_V \frac{1}{\sigma} J^2 dv - \int_V E' J dv. \quad (8)$$

Первый член в правой части (8) представляет собою мощность, рассеиваемую в виде джоулева тепла — превращение необратимое. Второй член выражает мощность, затрачиваемую потоком зарядов против сторонних сил; отрицательный знак показывает, что эти сторонние силы совершают работу *над* системой, частью компенсируя джоулевы потери и стремясь увеличить энергию, заключённую в поле. Если, наконец, все материальные тела в поле абсолютно тверды, так что исключён возможный переход электромагнитной энергии в упругую энергию деформации среды, то баланс энергии должен поддерживаться потоком энергии через поверхность, ограничивающую объём V . Этот смысл, согласно Пойнтингу, и придаётся поверхностному интегралу в соотношении (6). Уменьшение электромагнитной энергии, содержащейся в поле в объёме V , частично объясняется потерями на джоулево тепло, лишь отчасти скомпенсированное энергией, даваемой сторонними силами; остающаяся часть вытекает через граничную поверхность S , представляя собою потери, определяемые в джоулях в секунду или ваттах интегралом

$$\int_S S_n da = \int_S [E, H] n da. \quad (9)$$

Вектор Пойнтинга S , определяемый соотношением

$$S = [E, H] \text{ ватт/метр}^2, \quad (10)$$

может быть интерпретирован как *плотность* потока энергии в какой-либо точке поля, т. е. как количество энергии, пересекающее за одну секунду единичную площадку, нормаль к которой ориентирована по направлению вектора $[E, H]$.

Молчаливо было предположено, что в среде отсутствует явление гистерезиса. Если соотношение между B и H неоднозначно, то количество энергии, равное Q (уравнение (37), стр. 119), рассеивается в среде за каждый полный цикл вдоль гистерезисной петли. Если поле меняется со временем гармонически с частотой ν , то мы будем иметь ν циклов/сек, и соответственно, потери на гистерезис составят νQ джоулей/сек.

В отсутствие ферромагнитных веществ, соотношение между B и H обычно линейно, и если среда в то же время ещё и изотропна, то теорема Пойнтинга в дифференциальной форме принимает вид:

$$\operatorname{div} [E, H] + \frac{1}{\sigma} J^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon}{2} E^2 + \frac{\mu}{2} H^2 \right) = E' J. \quad (11)$$

В качестве общего интеграла уравнений поля теорема Пойнтинга обоснована безупречно. Её физическая интерпретация, однако, может быть подвергнута некоторой критике. Мы уже отмечали, что из того, что объёмный интеграл представляет *полную* энергию поля, нельзя, строго говоря, делать заключений об её распределении. Энергия электростатического поля была выражена сначала в виде суммы двух объёмных интегралов. Один из них по теореме о дивергенции был преобразован в поверхностный интеграл, который исчезал при расширении поверхности за пределы поля. Обратно, к выражению $u = \frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{D}$, которые мы условились принимать за плотность электростатической энергии, можно прибавить дивергенцию любой векторной функции, должным образом исчезающей на бесконечности, не изменив этим полной величины энергии. Подобная же неопределённость возникает и в случае статических магнитных полей.

Можно поставить также вопрос о том, насколько уместно принимать, что $\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ и $\mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ выражают скорость изменения плотности энергии в случае быстрых изменений в той же мере, что и при квазистатических процессах. Хотя подобное предположение и представляется правдоподобным, мы должны отметить всё же, что преобразование функции, выражающей энергию через векторы поля, к выражению энергии через плотности зарядов и токов приводит к трудностям в отношении поверхностных интегралов. Пусть

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \int \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dv \quad (12)$$

будет скоростью, с которой внешние силы производят работу над системой. Вводя потенциалы

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (13)$$

и применяя тождества

$$\text{grad } \varphi \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \text{div} \left(\varphi \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) - \varphi \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \mathbf{D}), \quad \mathbf{H} \text{rot } \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \text{div} \left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \mathbf{H} \right] - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \text{rot } \mathbf{H}, \quad (14)$$

мы получаем:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \int_V \left(\varphi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{J} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) dv - \int_S \left(\varphi \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \left[\mathbf{H}, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] \right) \mathbf{n} da, \quad (15)$$

где S — поверхность, охватывающая всё электромагнитное поле. В стационарном и квазистационарном случаях можно показать, что потенциалы убывают с расстоянием как r^{-1} , а поля как r^{-2} , и следовательно, интеграл по сфере бесконечного радиуса равен нулю. Однако в дальнейшем будет показано, что векторы полей от переменных источников убывают только как r^{-1} , и в этом случае последний член в (15) не может быть устранён просто путём распространения интеграла на бесконечно удалённую поверхность. С другой стороны, мы знаем, что поля и потенциалы распространяются с *конечной* скоростью. Если, следовательно, поле впервые возникло не бесконечно давно, то можно представить себе такую поверхность, элементы которой настолько удалены, что поле их ещё не достигло. Векторы поля на этой поверхности тогда строго равны нулю и, следовательно, при этих условиях

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \int \left(\varphi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{J} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) dv. \quad (16)$$

Наконец, следует признать, что если даже полный поток энергии через замкнутую поверхность и может быть представлен точно выражением (9), то мы не можем отсюда с определённой точностью заключить, что плотность потока энергии в точке равна $S = [E, H]$; к последней величине можно прибавить любой вектор, интеграл от которого по замкнутой поверхности равен нулю, отчего величина *полного* потока не изменится.

Классическая интерпретация теоремы Пойнтинга в значительной мере покоится на гипотезе. Время от времени предлагались различные взаимно исключающие формы теоремы¹⁾, но ни одна из них не имеет большей правдоподобности или большей простоты, чтобы её можно было рекомендовать. Не лишено значения и то, что ни одна другая трактовка до сих пор не дала ничего ценного для теории. С другой стороны, предположение о распределении энергии в поле с определённой плотностью и о потоке энергии с интенсивностью $S = [E, H]$ оказалось необычайно плодотворным. Всякая теория является не абсолютной истиной, а внутренне согласованной аналитической формулировкой соотношений, которым подчиняется определённая совокупность явлений природы. При таком подходе всё говорит за то, чтобы придерживаться точки зрения Пойнтинга-Хевисайда, пока столкновение с новыми экспериментальными фактами не потребует её пересмотра.

2.20. Комплексный вектор Пойнтинга. Если мы теперь допустим, что $h = u + w$ представляет собою плотность электромагнитной энергии в какой-либо момент, а $Q = \frac{1}{c} J^2 - E'J$ мощность, затрачиваемую в единице объёма благодаря термохимическим процессам, то теорема Пойнтинга для полей, свободных от явлений гистерезиса, может быть написана в виде

$$\operatorname{div} S + \frac{\partial h}{\partial t} + Q = 0. \quad (17)$$

В стационарном поле h не зависит от времени, так что (17) принимает вид:

$$\operatorname{div} S + Q = 0. \quad (18)$$

Величина Q может быть положительной или отрицательной, в зависимости от того, превышает ли работа сторонних электродвижущих сил E' энергию, расходуемую на тепло, или нет. Соответственно, направление потока энергии из элемента объёма или в него зависит от того, ведёт ли себя этот элемент объёма как источник энергии, или как её сток.

Источники и их поля в большинстве практических приложений электромагнитной теории являются периодическими функциями времени. Среднее значение плотности энергии h постоянно, и $\partial \bar{h} / \partial t = \overline{\partial h / \partial t} = 0$, где черта показывает, что берётся среднее значение, получаемое усреднением за период. Следовательно, в случае периодических полей:

$$\overline{\operatorname{div} S} + \bar{Q} = 0 \quad \text{или} \quad \int_S \bar{S}_n da + \int_V \bar{Q} dv = 0. \quad (19)$$

Если в объёме V источников нет, то энергия, рассеивающаяся в объёме V в виде тепла, равна среднему значению потока, втекающего внутрь через поверхность S .

¹⁾ Macdonald, Electric Waves, Cambridge University Press, 1902; Livens, The Theory of Electricity, Cambridge University Press, стр. 238 и далее, 1926; Mason and Weaver, The Electromagnetic Field, University of Chicago Press, стр. 204 и далее, 1929.

Преимущества комплексных величин для рассмотрения периодических процессов достаточно хорошо известны, чтобы была надобность в подробном их изложении. Необходимо, однако, напомнить читателю, что следует соблюдать некоторые предосторожности при составлении произведений и квадратов. Во всём последующем изложении мы будем обычно представлять гармоническое изменение во времени в виде комплексной функции координат, умноженной на $e^{-i\omega t}$. Таким образом, если A — рассматриваемая величина, то мы пишем:

$$A = A_0 e^{-i\omega t} = (\alpha + i\beta) e^{-i\omega t} = (\alpha + i\beta) (\cos \omega t - i \sin \omega t), \quad (20)$$

где α и β — действительные функции координат x, y, z . Величина, комплексно сопряжённая с A , получается заменой $i = \sqrt{-1}$ на $-i$, и обозначается знаком $*$:

$$A^* = (\alpha - i\beta) e^{i\omega t}. \quad (21)$$

Хотя при аналитических операциях и удобно пользоваться комплексной записью, но величины, имеющие физический смысл, должны в конечном счёте представляться действительными функциями. Если A удовлетворяет линейному уравнению с действительными коэффициентами, то и действительная и мнимая части A являются решениями этого же уравнения, и каждая из них в конце вычислений может быть выбрана, как представляющая некоторое физическое состояние. Однако в случае квадратов и произведений мы сначала должны взять действительные части сомножителей, а затем перемножить, поскольку произведение действительных частей двух комплексных величин не равно действительной части их произведения. Действительную часть A мы будем обозначать через $Re(A)$, а мнимую часть — через $Im(A)$.

$$\left. \begin{aligned} Re(A) &= \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin(\omega t + \varphi), \\ Im(A) &= \beta \cos \omega t - \alpha \sin \omega t = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cos(\omega t + \varphi), \\ \varphi &= \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Квадрат абсолютной величины A получается умножением на комплексно сопряжённую величину:

$$AA^* = \alpha^2 + \beta^2. \quad (23)$$

Действительная часть A даётся также выражением:

$$Re(A) = \frac{A + A^*}{2}. \quad (24)$$

Произведение действительных частей двух комплексных величин A_1 и A_2 равно, следовательно:

$$\begin{aligned} Re(A_1) Re(A_2) &= \frac{1}{4} (A_1 + A_1^*) (A_2 + A_2^*) = \\ &= \frac{1}{4} (A_1 A_2 + A_1^* A_2^* + A_1 A_2^* + A_2 A_1^*). \end{aligned} \quad (25)$$

Среднее по времени значение периодической функции определяется соотношением:

$$\bar{A} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} A dt, \quad (26)$$

где τ — период. Если A — простая гармоническая функция времени, то среднее значение её, конечно, равно нулю. Среднее значение функций, подобных

$\cos \omega t$ и $\sin \omega t$, также равно нулю и поэтому мы получаем из (25) следующий результат:

$$\overline{\operatorname{Re}(A_1) \operatorname{Re}(A_2)} = \frac{1}{4} (A_1 A_2^* + A_2 A_1^*) = \frac{1}{2} (\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2), \quad (27)$$

или

$$\overline{\operatorname{Re}(A_1) \operatorname{Re}(A_2)} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(A_1 A_2^*). \quad (28)$$

В соответствии с предшествующими формулами, среднее значение потока энергии в гармоническом электромагнитном поле равно:

$$\bar{S} = [\overline{\operatorname{Re}(E)}, \operatorname{Re}(H)] = \frac{1}{2} \operatorname{Re}([E, H^*]), \quad (29)$$

т. е. действительной части комплексного вектора $\frac{1}{2} [E, H^*]$. Свойства этого, так называемого *комплексного вектора Пойнтинга* очень интересны. Мы будем обозначать его через

$$S^+ = \frac{1}{2} [E, H^*]. \quad (30)$$

Предположим, что среда определяется константами ϵ, μ, σ и что в величины, характеризующие поле, время входит только в виде множителя $e^{-i\omega t}$. Тогда уравнения Максвелла для областей, свободных от сторонних электродвижущих сил E' , будут:

$$\operatorname{rot} E = i\omega \mu H, \quad \operatorname{rot} H = (\sigma - i\omega \epsilon) E. \quad (31)$$

Уравнение, комплексно сопряжённое второму из них, есть

$$\operatorname{rot} H^* = (\sigma + i\omega \epsilon) E^*. \quad (32)$$

Комбинируя его с первым из уравнений (31), как это было сделано в разделе 2.19, получаем:

$$\operatorname{div} S^+ = -\frac{1}{2} \sigma E E^* + i\omega \left(\frac{\mu}{2} H H^* - \frac{\epsilon}{2} E E^* \right), \quad (33)$$

или, в силу (28) и (23),

$$\operatorname{div} S^+ = -\bar{Q} + i2\omega (\bar{\omega} - \bar{u}). \quad (34)$$

Дивергенция действительной части S^+ определяет количество энергии, рассеиваемой в виде тепла в единице объёма за каждую секунду, в то время как дивергенция мнимой части в 2ω раз превышает разность средних значений плотности магнитной и электрической энергии. Для любой области поля, ограниченной поверхностью S , мы имеем:

$$\operatorname{Re} \int_S S^+ n da = \text{полной энергии, рассеиваемой в виде тепла}, \quad (35)$$

$$\operatorname{Im} \int_S S^+ n da = 2\omega \times \text{разность средних значений магнитной и электрической энергий}. \quad (36)$$

СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ДИЭЛЕКТРИК В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

2.21. Объёмные силы в жидких средах. Рассмотрим электростатическое поле зарядов, которые расположены на поверхностях проводников, погружённых в изотропный диэлектрик. Чтобы упростить анализ, мы предположим на время, что во всём поле нигде, кроме поверхностей проводни-

жов, диэлектрическая среда разрывов не имеет. Кроме того, мы предположим, что $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, где ϵ — непрерывная функция точки. Полная электростатическая энергия поля будет, следовательно:

$$U = \frac{1}{2} \int \epsilon E^2 dv, \quad (1)$$

где интеграл распространён по всему пространству.

Положение любой точки диэлектрика по отношению к фиксированному началу отсчёта определяется вектором $\mathbf{r}$. Сместим теперь каждую точку диэлектрика на произвольную бесконечно малую величину $\mathbf{s}(\mathbf{r})$. Предполагается, однако, что проводники остаются неизменными, и смещение частиц диэлектрика, находящихся около поверхности проводников, по необходимости тангенциально. В результате смещения или деформации, параметр ϵ изменится, и соответствующее изменение электростатической энергии будет равно:

$$\delta U = - \frac{1}{2} \int \delta \epsilon E^2 dv. \quad (2)$$

В то же время произойдёт и небольшое перераспределение зарядов на поверхности проводников. Первоначально заряды на поверхности находились в состоянии статического равновесия, и первоначальная энергия (1), в соответствии с теоремой Томсона (разд. 2.11), являлась минимальной по отношению к бесконечно малому изменению распределения зарядов. Следовательно, изменение энергии, связанное с перераспределением зарядов, является бесконечно малой величиной второго порядка, которой можно пренебречь по сравнению с (2).

Рассмотрим диэлектрик, первоначально находившийся в объёме dv_1 . Поскольку смещение сопровождается деформацией, объём этого элемента после деформирования, согласно уравнению (54), стр. 148, будет:

$$dv_2 = (1 + \operatorname{div} \mathbf{s}) dv_1. \quad (3)$$

Масса элемента сохраняется, и поэтому для плотности, обозначаемой через τ , мы будем иметь:

$$\tau_1 dv_1 = \tau_2 (1 + \operatorname{div} \mathbf{s}) dv_1, \quad (4)$$

или, для бесконечно малого смещения:

$$\delta \tau = \tau_2 - \tau_1 = -\tau \operatorname{div} \mathbf{s}. \quad (5)$$

Диэлектрическая проницаемость ϵ является функцией точки в диэлектрике и зависит также от плотности τ . Элемент, который после смещения оказывается в заданной точке $\mathbf{r}$, до смещения находился в точке $\mathbf{r} - \mathbf{s}$, и часть $\delta \epsilon$, связанная с неоднородностью диэлектрика, будет, следовательно, $-\mathbf{s} \operatorname{grad} \epsilon$. Если мы предположим, что ϵ зависит только от $\mathbf{r}$ и τ , то полное изменение ϵ будет:

$$\delta \epsilon = -\mathbf{s} \operatorname{grad} \epsilon + \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} \delta \tau = -\mathbf{s} \operatorname{grad} \epsilon - \tau \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} \operatorname{div} \mathbf{s}; \quad (6)$$

изменение электростатической энергии, вызванное деформацией, будет:

$$\delta U = \frac{1}{2} \int \left(E^2 \operatorname{grad} \epsilon \cdot \mathbf{s} + E^2 \tau \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} \operatorname{div} \mathbf{s} \right) dv; \quad (7)$$

но

$$E^2 \tau \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} \operatorname{div} \mathbf{s} = \operatorname{div} \left(E^2 \tau \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} \mathbf{s} \right) - \mathbf{s} \operatorname{grad} \left(E^2 \tau \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} \right), \quad (8)$$

и, следовательно:

$$\delta U = \int \left\{ \frac{1}{2} E^2 \operatorname{grad} \epsilon - \frac{1}{2} \operatorname{grad} \left(E^2 \tau \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} \right) \right\} \cdot \mathbf{s} dv + \int \frac{1}{2} \operatorname{div} \left(E^2 \tau \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} \mathbf{s} \right) dv. \quad (9)$$

Эти объёмные интегралы должны быть распространены на всё поле. Поверхности проводников, внутри которых поле равно нулю, будем обозначать через $S_1, S_2, \dots, S_n$. Поверхность S_0 проведём так, чтобы она содержала в себе все проводники и все части диэлектрика, в которых поле имеет сколько-нибудь заметную величину. Внутри области, ограниченной извне поверхностью S_0 , а изнутри поверхностями $S_1, S_2, \dots, S_n$, функция $E^2 \tau \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} s$ непрерывна. Следовательно, ко второму интегралу в (9) может быть применена теорема о дивергенции, что даёт:

$$\int \frac{1}{2} \operatorname{div} \left(E^2 \tau \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} s \right) dv = \sum_{j=0}^n \int_{S_j} E^2 \tau \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} s n da. \quad (10)$$

На поверхности S_0 вектор E равен нулю; на поверхностях же жёстких проводников $S_1, \dots, S_n$ мы приняли, что нормальная компонента s отсутствует. Следовательно, интеграл (10) равен нулю.

Если пренебречь гравитационными силами, то можно считать, что единственными объёмными силами будут силы f , действующие со стороны поля на элементы диэлектрика. Работа, совершённая этими силами в единице объёма при деформации равна fs , и следовательно, в соответствии с законом сохранения энергии:

$$\int fs dv = - \int \left\{ \frac{1}{2} E^2 \operatorname{grad} \epsilon - \frac{1}{2} \operatorname{grad} \left(E^2 \tau \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} \right) \right\} s dv. \quad (11)$$

Так как смещение s произвольно, мы получаем:

$$f = - \frac{1}{2} E^2 \operatorname{grad} \epsilon + \frac{1}{2} \operatorname{grad} \left(E^2 \tau \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} \right). \quad (12)$$

При наличии также и зарядов, распределённых по диэлектрику, к величине силы надо добавить член ρE .

Последний член в (12) связан с деформацией диэлектрика. Предположение, что ϵ может быть выражено в виде функции только точки и плотности, допустимо для жидкостей и газов, но не обязательно справедливо в случае твёрдых тел. Весьма хорошим приближением, выражающим соотношение между абсолютной диэлектрической проницаемостью κ ($\epsilon = \kappa \epsilon_0$) и плотностью для газов, жидкостей и даже некоторых твёрдых тел, служит закон Клаузиуса-Моссоти:

$$\frac{\kappa - 1}{\kappa + 2} = C \tau, \quad \text{или} \quad \kappa - 1 = \frac{3C \tau}{1 - C \tau}, \quad (13)$$

где C — константа, определяющаяся природой диэлектрика. Простой подсчёт приводит к выражению:

$$\tau \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} = \frac{\epsilon_0}{3} (\kappa - 1) (\kappa + 2), \quad (14)$$

и силы, действующие со стороны поля на единичный объём жидкости или газа, будут, следовательно:

$$f = - \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \operatorname{grad} \kappa + \frac{\epsilon_0}{6} \operatorname{grad} \{ E^2 (\kappa - 1) (\kappa + 2) \}. \quad (15)$$

2.22. Объёмные силы в твёрдых телах. Объёмные силы (12), действующие на диэлектрик в электростатическом поле, были выведены в предположении, что изменение диэлектрической проницаемости ϵ при бесконечно малой деформации может быть рассчитано, если известны неоднородность диэлек-

трика и изменение плотности, связанное с деформацией. Однако, в твёрдых телах могут быть деформации, не сопровождающиеся изменением объёма; строгая теория должна, следовательно, выражать изменения ϵ через компоненты деформации. Поскольку предполагается, что диэлектрик находится в состоянии статического равновесия, механические силы, действующие со стороны поля, должны уравниваться силами упругости, возникшими во время деформации. Наша задача состоит в том, чтобы найти эти силы и найти деформацию, которая получается в конечном счёте в результате наложения поля. Мы ограничим наше рассмотрение средой, у которой *электрические и упругие свойства в ненапряжённом состоянии изотропны*. Так как изменение ϵ зависит от компонент деформации, то трудно предположить, что твёрдое тело останется изотропным в электрическом отношении и после возникновения деформации. Первая наша задача — установить выражение для электростатической энергии анизотропного диэлектрика.

В разделе 2.8 было показано, что плотность электростатической энергии в диэлектрике равна:

$$u = \int_0^D \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} \quad (16)$$

независимо от соотношения между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$. Мы предположим теперь, что в анизотропной среде компоненты $\mathbf{D}$ являются линейными функциями компонент $\mathbf{E}$:

$$D_j = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{jk} E_k \quad (j = 1, 2, 3). \quad (17)$$

Поскольку величины E_k и D_j преобразуются как компоненты векторов, ясно, что величины ϵ_{jk} являются компонентами тензора второго ранга. Соответствующим поворотом координатных осей этот тензор может быть приведён к главным осям, определяемым единичными векторами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, так что:

$$D_a = \epsilon_a E_a, \quad D_b = \epsilon_b E_b, \quad D_c = \epsilon_c E_c. \quad (18)$$

Тогда

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{D} = \epsilon_a E_a dE_a + \epsilon_b E_b dE_b + \epsilon_c E_c dE_c = \mathbf{D} \cdot d\mathbf{E}, \quad (19)$$

и плотность энергии в анизотропной среде с линейным соотношением между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ будет, следовательно:

$$u = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{2} \sum_j \sum_k \epsilon_{jk} E_j E_k \quad (\epsilon_{jk} = \epsilon_{kj}). \quad (20)$$

Мы должны далее подсчитать изменение энергии, получающееся в результате вариирования параметров ϵ_{jk} при неизменных зарядах. Если мы пересмотрим доказательства раздела 2.10, то увидим, что они полностью могут быть применены и в этом случае. Чтобы избежать путаницы в индексах, мы заменим индекс «1» параграфа 2.10 для обозначения начальных условий штрихом. Таким образом, диэлектрик в поле первоначально характеризовался коэффициентами ϵ'_{jk} . В области V_1 эти значения перешли в ϵ_{jk} . Полное изменение энергии поля, согласно уравнению (49), стр. 108, будет:

$$U = \frac{1}{2} \int_{V_1} (\mathbf{E} \cdot d\mathbf{D}' - \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{D}) dv, \quad (21)$$

или, в силу (17):

$$U = -\frac{1}{2} \int_{V_1} \{ (\epsilon_{11} - \epsilon'_{11}) E_1 E'_1 + (\epsilon_{22} - \epsilon'_{22}) E_2 E'_2 + (\epsilon_{33} - \epsilon'_{33}) E_3 E'_3 + \\ + (\epsilon_{12} - \epsilon'_{12}) (E_2 E'_1 + E_1 E'_2) + (\epsilon_{23} - \epsilon'_{23}) (E_3 E'_2 + E_2 E'_3) + \\ + (\epsilon_{31} - \epsilon'_{31}) (E_1 E'_3 + E_3 E'_1) \} dv. \quad (22)$$

Если вариации ϵ_{jk} бесконечно малы, то это выражение переходит в такое:

$$\delta U = -\frac{1}{2} \int_{V_1} (\delta \epsilon_{11} E_1^2 + \delta \epsilon_{22} E_2^2 + \delta \epsilon_{33} E_3^2 + 2\delta \epsilon_{12} E_1 E_2 + \\ + 2\delta \epsilon_{23} E_2 E_3 + 2\delta \epsilon_{31} E_3 E_1) dv. \quad (23)$$

Теперь параметры ϵ_{jk} должны быть связаны с компонентами деформации. Для достаточно малых деформаций мы можем положить:

$$\delta \epsilon_{jk} = \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 a_{lm}^{jk} \delta e_{lm}, \quad a_{lm}^{jk} = \frac{\partial \epsilon_{jk}}{\partial e_{lm}}. \quad (24)$$

Коэффициенты a_{lm}^{jk} , число которых равно 81, являются компонентами тензора четвёртого ранга. В силу соотношений $\epsilon_{jk} = \epsilon_{kj}$, $e_{lm} = e_{ml}$, мы имеем:

$$a_{lm}^{jk} = a_{lm}^{kj} = a_{ml}^{jk}. \quad (25)$$

Тогда из $81 - 9 = 72$ недиагональных членов только 36 независимы, и полное число независимых коэффициентов сводится к $36 + 9 = 45$. Для доведения системы коэффициентов до ещё меньшего числа, необходимо воспользоваться условиями симметрии, и мы введём теперь ограничение, согласно которому среда первоначально изотропна¹⁾, хотя и не обязательно однородна.

Вариация плотности энергии, вызванная малой деформацией будет:

$$\delta u = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 a_{lm}^{jk} E_j E_k \delta e_{lm}. \quad (26)$$

Коэффициенты a_{lm}^{jk} имеют в каждой точке определённые значения, характеризующие диэлектрик, но меняются от точки к точке, если среда неоднородна. Далее, поскольку мы предполагаем, что первоначально диэлектрик был изотропен, уравнение (26) должно быть инвариантно по отношению к перемене направления любой из координатных осей. Так например, перемена направления оси x_j меняет знак E_j и e_{jk} ($k \neq j$), но оставляет все остальные сомножители неизменными. Следовательно, для того чтобы δu не изменялось при перемене направления осей или при замене одной оси на другую, необходимо чтобы некоторые коэффициенты исчезали. Действительно, очевидно, все коэффициенты, за исключением трёх типов, равны нулю; именно отличны от нуля

$$a_{jj}^{jj} = a_1, \quad a_{kk}^{jj} = a_2, \quad a_{jk}^{jk} = a_3 \quad (j \neq k). \quad (27)$$

Таким образом уравнение (26) принимает вид:

$$\delta u = -\frac{1}{2} \{ a_1 (E_1^2 \delta e_{11} + E_2^2 \delta e_{22} + E_3^2 \delta e_{33}) + a_2 [(E_2^2 + E_3^2) \delta e_{11} + (E_3^2 + E_1^2) \delta e_{22} + \\ + (E_1^2 + E_2^2) \delta e_{33}] + 4a_3 (E_1 E_2 \delta e_{12} + E_2 E_3 \delta e_{23} + E_3 E_1 \delta e_{31}) \}. \quad (28)$$

¹⁾ Анизотропный случай был рассмотрен P o s k e l s'ом, Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, т. V, ч. II, Teubner, 1906.

Но δu должно быть инвариантно также и по отношению к повороту координатных осей, а это приводит к дополнительным соотношениям между параметрами a_1, a_2, a_3 . Эти соотношения легко найти, если переписать (28) в виде:

$$\delta u = -\frac{1}{2} \left\{ (a_1 - a_2 - 4a_3) \sum_{j=1}^3 E_j^2 \delta e_{jj} + a_2 E^2 \sum_{j=1}^3 \delta e_{jj} + \right. \\ \left. + 4a_3 (E_1^2 \delta e_{11} + E_2^2 \delta e_{22} + E_3^2 \delta e_{33} + E_1 E_2 \delta e_{12} + E_2 E_3 \delta e_{23} + E_3 E_1 \delta e_{31}) \right\}, \quad (29)$$

где $E^2 = E_1^2 + E_2^2 + E_3^2$. Сумма $\sum_{j=1}^3 e_{jj}$, согласно уравнению (54), стр. 90,

представляет собой коэффициент объёмного расширения — величину, не зависящую от системы координат. Поэтому средний член в (29) инвариантен по отношению к повороту системы отсчёта. То же справедливо и по отношению к последнему члену, так как при замене деформаций e_{jk} коэффициентами $2a_{jk}$ из раздела 2.2 этот последний член превращается в инвариантную квадратичную форму, сходную по виду с квадратикой деформаций, уравнение (36), стр. 87. Таким образом, при вращении координатной системы меняется только первый член, и поэтому необходимо, чтобы ¹⁾

$$a_1 - a_2 - 4a_3 = 0, \quad a_3 = \frac{1}{4} (a_1 - a_2). \quad (30)$$

Вариация плотности электростатической энергии, вызванная локальной или чистой деформацией изотропного диэлектрика, равна окончательно:

$$\delta u_s = -\frac{1}{2} \left\{ (a_1 E_1^2 + a_2 E_2^2 + a_3 E_3^2) \delta e_{11} + (a_2 E_1^2 + a_1 E_2^2 + a_3 E_3^2) \delta e_{22} + \right. \\ \left. + (a_3 E_1^2 + a_2 E_2^2 + a_1 E_3^2) \delta e_{33} + (a_1 - a_2) (E_1 E_2 \delta e_{12} + E_2 E_3 \delta e_{23} + E_3 E_1 \delta e_{31}) \right\}. \quad (31)$$

Индекс s добавлен для того, чтобы подчеркнуть, что это только та часть полной вариации, которая вызвана чистой деформацией. Напомним, что наиболее общая деформация упругой среды состоит из перемещения, локального вращения, определённого уравнением (33), стр. 87, и локальной деформации, определённой уравнением (29), стр. 86, которую только мы и учли в уравнении (31). В анизотропном диэлектрике локальный поворот влечёт за собой изменение компонент тензора e_{jk} и вследствие этого на каждый объёмный элемент диэлектрика действуют вращающие моменты ²⁾. В рассматриваемой здесь первоначально изотропной среде, эти вариации (вследствие поворота) отсутствуют. Вариация в плотности электростатической энергии вследствие бесконечно малого перемещения δs неоднородного диэлектрика была подсчитана нами в разделе 2.21:

$$\delta u_t = \frac{1}{2} E^2 \text{grad } \epsilon \delta s, \quad (32)$$

где ϵ — диэлектрическая проницаемость в недеформированном изотропном состоянии.

¹⁾ Операция сведения констант электрострикции к двум, которую мы здесь провели, тождественна с операцией сведения констант упругости c_{jk} , раздел 2.3, к двум параметрам λ_1 и λ_2 . См. например, Love, *Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, гл. VI, 4-е изд. Cambridge Press, 1927. (А. Ляв, Математическая теория упругости М. — Л., ОНТИ, гл. VI, 1935.) Определение этих констант для различных классов анизотропных кристаллов было проведено Фохтом: Voigt, *Kompendium der theoretischen Physik*, т. 1, стр. 143—144, Leipzig, 1895. Его результаты приведены у Love, *loc. cit.*

²⁾ Pockels, *loc. cit.*, стр. 353.

Деформация диэлектрика влечёт за собой наряду с изменением электростатической энергии также и изменение *упругой энергии*. Согласно уравнению (68), стр. 91:

$$\delta u_e = (\lambda_1 \operatorname{div} \mathbf{s} + 2\lambda_2 e_{11}) \delta e_{11} + (\lambda_1 \operatorname{div} \mathbf{s} + 2\lambda_2 e_{22}) \delta e_{22} + \\ + (\lambda_1 \operatorname{div} \mathbf{s} + 2\lambda_2 e_{33}) \delta e_{33} + \lambda_2 (e_{12} \delta e_{12} + e_{23} \delta e_{23} + e_{31} \delta e_{31}). \quad (33)$$

Работа, совершённая механическими силами, действующими на диэлектрик в объёме V_1 и на поверхности S_1 , ограничивающей объём V_1 , во время бесконечно малого смещения $\delta \mathbf{s}$, должна равняться уменьшению *всей* энергии, могущей превращаться в работу, т.е. упругой плюс электростатической. Мы пишем поэтому для баланса энергии:

$$\int_{V_1} \mathbf{f} \delta \mathbf{s} dv + \int_{S_1} \mathbf{t} \delta \mathbf{s} da = -\delta \int_{V_1} (u_e + u_s + u_t) dv. \quad (34)$$

Полную объёмную силу $\mathbf{f}$, действующую на диэлектрик, удобно разбить совершенно произвольно на две компоненты $\mathbf{f}'$ и $\mathbf{f}''$, где

$$\mathbf{f}' = -\frac{1}{2} E^2 \operatorname{grad} \epsilon \quad (35)$$

— доля, обусловленная неоднородностью диэлектрика; $\mathbf{f}''$ — сила, связанная с чистой деформацией. Последняя должна удовлетворять соотношению:

$$\int_{V_1} \mathbf{f}'' \delta \mathbf{s} dv + \int_{S_1} \mathbf{t}'' \delta \mathbf{s} da = -\delta \int_{V_1} (u_e + u_s) dv. \quad (36)$$

Разложение объёмных и поверхностных сил на силы, связанные с перемещением, и силы, связанные с деформацией, таково, что

$$\int_{V_1} \mathbf{f}' dv + \int_{S_1} \mathbf{t}' da = 0, \quad \int_{V_1} \mathbf{f}'' dv + \int_{S_1} \mathbf{t}'' da = 0. \quad (37)$$

В этом случае, согласно разделу 2.3, правая часть уравнения (36) может быть преобразована к виду:

$$\delta W'' = \int_{V_1} (T''_{11} \delta e_{11} + T''_{22} \delta e_{22} + T''_{33} \delta e_{33} + T''_{12} \delta e_{12} + T''_{23} \delta e_{23} + T''_{31} \delta e_{31}) dv. \quad (38)$$

Вариации компонент деформации произвольны и, следовательно, приравнявая коэффициенты соответствующих членов из (31) и (33), мы получаем:

$$\left. \begin{aligned} T''_{11} &= -(\lambda_1 \operatorname{div} \mathbf{s} + 2\lambda_2 e_{11}) + \frac{1}{2} (a_1 E_1^2 + a_2 E_2^2 + a_3 E_3^2), \\ T''_{22} &= -(\lambda_1 \operatorname{div} \mathbf{s} + 2\lambda_2 e_{22}) + \frac{1}{2} (a_2 E_1^2 + a_1 E_2^2 + a_3 E_3^2), \\ T''_{33} &= -(\lambda_1 \operatorname{div} \mathbf{s} + 2\lambda_2 e_{33}) + \frac{1}{2} (a_3 E_1^2 + a_2 E_2^2 + a_1 E_3^2), \\ T''_{12} &= -\lambda_2 e_{12} + \frac{a_1 - a_2}{2} E_1 E_2, \\ T''_{23} &= -\lambda_2 e_{23} + \frac{a_1 - a_2}{2} E_2 E_3, \\ T''_{31} &= -\lambda_2 e_{31} + \frac{a_1 - a_2}{2} E_3 E_1. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Эти величины являются компонентами тензора напряжений, отрицательная дивергенция которого даёт нам равнодействующую объёмную силу, связанную с деформацией. Если объёмные силы исключительно электрического происхождения, как это будет в случае пренебрежения гравитационными эффектами, то дивергенция упругих напряжений исчезает, и мы получаем для x -компоненты силы:

$$f_1'' = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} (a_1 E_1^2 + a_2 E_2^2 + a_2 E_3^2) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \{ (a_1 - a_2) E_1 E_2 \} - \\ - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_3} \{ (a_1 - a_2) E_1 E_3 \}, \quad (40)$$

и аналогичные выражения для f_2'' и f_3'' . К этим выражениям необходимо прибавить компоненты f' из (35) и тогда мы получим полную объёмную силу, действующую на изотропный диэлектрик в электростатическом поле.

Параметры a_1 и a_2 для данного вещества должны в общем случае определяться из измерений. Физически a_1 выражает приращение ϵ , соответствующее удлинению параллельно линиям напряжённости поля, в то время как a_2 определяет приращение для деформаций под прямым углом к этим линиям.

Если диэлектрик, содержащийся в объёме V_1 , *однороден и не содержит зарядов*, то градиент ϵ равен нулю, и вектор E удовлетворяет уравнениям $\text{div } E = 0$, $\text{rot } E = 0$. В этом случае $f' = 0$, и равнодействующая сила $f'' = f$ сводится к

$$f = -\frac{1}{4} (a_1 + a_2) \text{grad } E^2. \quad (41)$$

В жидкостях или газах все деформации сдвига e_{jk} равны нулю и, следовательно, по уравнениям (24) и (27), $a_3 = a_{jk}^{jk} = 0$, $a_1 = a_2 = a$. Кроме того, в этом случае в диэлектрических свойствах не должно быть преимущественных направлений и соответственно $\epsilon_{jk} = 0$ при $j \neq k$, $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = \epsilon$. Вместо (24) мы можем написать:

$$\delta \epsilon = \frac{\partial \epsilon}{\partial e_{11}} \delta e_{11} + \frac{\partial \epsilon}{\partial e_{22}} \delta e_{22} + \frac{\partial \epsilon}{\partial e_{33}} \delta e_{33}. \quad (42)$$

Обозначая коэффициент объёмного расширения через $\Delta = e_{11} + e_{22} + e_{33}$, мы получаем:

$$a = \frac{\partial \epsilon}{\partial e_{jj}} = \frac{\partial \epsilon}{\partial \Delta}, \quad \delta a = a \delta \Delta. \quad (43)$$

Но, согласно (5),

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \Delta} = \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial \Delta} = -\tau \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau}, \quad (44)$$

и, соответственно, полная сила, действующая со стороны электростатического поля на единицу объёма жидкого или газообразного диэлектрика, будет:

$$f = -\frac{1}{2} E^2 \text{grad } \epsilon + \frac{1}{2} \text{grad} \left(E^2 \tau \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} \right), \quad (45)$$

что и было выведено непосредственно в разделе 2.21.

Вывод объёмных сил из энергетических соображений, как это изложено в предшествующих параграфах, был впервые предложен, повидимому, Кортвегом¹⁾ и развит Гельмгольцем²⁾ и другими. Полное изложение теории

¹⁾ Korteweg, *Wied. Ann.* 9, 1880.

²⁾ Helmholtz, *Wied. Ann.* 13, 385, 1881.

со ссылками на предшествующую литературу дано у Поккельса ¹⁾. Этот метод подвергся критике со стороны Лармора ²⁾ и Ливенса ³⁾, которые предложили другие выражения для сил. Эта критика не представляется, однако, достаточно обоснованной. Возражения против специальной формы интеграла энергии, использованного Гельмгольцом, устраняются при применении более строгих методов. Ливенс предпринял обобщение этого метода на среду, у которой соотношение между D и E нелинейно, стремясь показать, что этот метод ведёт к абсурдным результатам. При этом он пропустил существенный член, связанный с деформацией. С другой стороны, выражение для объёмной силы, предложенное Ливенсом, может быть очень просто выведено как в электрическом, так и в магнитном случае, исходя из предположения, что поляризованное вещество эквивалентно области, по которой распределены заряды с плотностью $\rho' = -\operatorname{div} P$ и токи с плотностью $J' = \frac{\partial P}{\partial t} + \operatorname{rot} M$ (ср. разд. 1.6). Силы могут быть тогда подсчитаны точно так же, как и в разделе 2.5. Этот путь был бы вполне удовлетворительным, если бы среда была абсолютно твёрдой. Согласно теории Ливенса, мы должны сначала подсчитать силы, действующие со стороны поля на поляризованное вещество, а затем ввести эти силы в уравнения теории упругости для определения деформаций. Деформации, однако, влияют на поляризацию, и обе части задачи не могут в общем случае рассматриваться подобным способом порознь. При некоторых условиях, в частности, для жидкостей и газов, обе теории приводят к одинаковым результатам, но в большинстве случаев их результаты различны. Нам представляется, что оснований для сомнения в принципиальной правильности энергетического метода Кортвега и Гельмгольца очень мало.

2.23. Тензор напряжений. Мы опять предположим, что S_1 — замкнутая поверхность, проведённая в изотропном диэлектрике, находящемся под действием электрических напряжений. Свойства диэлектрика предполагаются непрерывными во всех внутренних точках и при переходе через эту поверхность; другими словами, эта поверхность не является поверхностью разрыва, ограничивающей диэлектрическое тело. Полная сила, действующая на вещество и заряд внутри S_1 , равна:

$$F = \int_{V_1} \left(\rho E - \frac{1}{2} E^2 \operatorname{grad} \epsilon + f'' \right) dv. \quad (46)$$

Мы хотим показать теперь, что сила F может быть представлена в виде интеграла по поверхности S_1 . Для этого необходимо только представить подинтегральное выражение в виде дивергенции тензора. Член f'' уже написан в таком виде в уравнении (40) и в дальнейших преобразованиях не нуждается. В первом члене мы заменим ρ на $\operatorname{div} D$ и воспользуемся тождеством

$$E^2 \operatorname{grad} \epsilon = \operatorname{grad} (\epsilon E^2) - 2(D \operatorname{grad}) E, \quad (47)$$

которое справедливо только при $\operatorname{rot} E = 0$. Тогда получаем без затруднений, что компоненты вектора $\rho E - \frac{1}{2} E^2 \operatorname{grad} \epsilon$ равны:

$$\rho E_j - \frac{1}{2} E^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} (E_j D_k) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (E D) \quad (48)$$

¹⁾ Pockels, *Arch. Math. Phys.* (2) 12, 57—59, 1893 и *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, т. V, часть II, стр. 350—392, 1906.

²⁾ Larmor, *Phil. Trans.*, A. 190, 280, 1897.

³⁾ Livens, *Phil. Mag.*, 32, 162, 1916, и в его книге «*The Theory of Electricity*», стр. 93, Cambridge University Press, 1926.

и подинтегральное выражение в (46) может быть представлено как дивергенция тензора 2S ,

$$\rho E - \frac{1}{2} E^2 \operatorname{grad} \varepsilon + f'' = \operatorname{div} {}^2S, \quad (49)$$

компоненты которого S_{jk} выписаны ниже:

$$\left. \begin{aligned} S_{11} &= \frac{\varepsilon}{2} (E_1^2 - E_2^2 - E_3^2) - \frac{1}{2} (a_1 E_1^2 + a_2 E_2^2 + a_3 E_3^2), \\ S_{12} &= \varepsilon E_1 E_2 + \frac{a_2 - a_1}{2} E_1 E_2 = S_{21}, \\ S_{13} &= \varepsilon E_1 E_3 + \frac{a_2 - a_1}{2} E_1 E_3 = S_{31}, \\ S_{22} &= \frac{\varepsilon}{2} (E_2^2 - E_3^2 - E_1^2) - \frac{1}{2} (a_2 E_1^2 + a_1 E_2^2 + a_3 E_3^2), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

В результате применения теоремы о дивергенции (см. уравнения (22) и (23), стр. 96) оказывается, что сила F , действующая на заряды и вещество внутри S_1 , эквивалентна интегралу по поверхности S_1 от поверхностной силы s с плотностью:

$$t = \left(\varepsilon + \frac{a_2 - a_1}{2} \right) E (En) - \frac{\varepsilon + a_2}{2} E^2 n, \quad (51)$$

где n , как обычно, единичный вектор внешней нормали к элементу поверхности S_1 . Для сохранения равновесия необходимо, чтобы среда, находящаяся вне поверхности S_1 , действовала бы на частицы, составляющие поверхность S_1 с равными и противоположными силами.

Компоненты тензора (50) и поверхностные силы t отличаются от соответствующих выражений, выведенных для свободного пространства в разделе 2.5, тем, что ε_0 заменено на ε , а деформации учтены с помощью коэффициентов a_1 и a_2 , что привело к появлению дополнительных членов, которые могут быть весьма существенны. В любой точке на поверхности S_1 вектор t лежит в плоскости векторов E и n , но теперь вектор E уже не делит угол между n и t пополам, как это было в случае, изображённом на рис. 17, стр. 98.

2.24. Поверхности разрыва. В предшествующем анализе предполагалось, что разрывы непрерывности в свойствах среды, как например на поверхностях, ограничивающих диэлектрические тела, могут быть заменены слоями с быстрым, но непрерывным переходом. По мере того, как переходный слой становится исчезающе тонким, возникает разрыв непрерывности и градиент ε принимает бесконечное значение, но объём слоя также стремится к нулю, и мы должны найти предел плотности объёмной силы f , чтобы определить полную силу, действующую на получающуюся в результате поверхность разрыва.

На рис. 23 заштрихованная площадь изображает сечение переходного слоя между диэлектрическими средами (1) и (2). Силы, действующие со стороны поля на вещество и заряды, находящиеся в этом слое, могут быть найдены интегрированием (51) по двум поверхностям, ограничивающим слой. Два параметра, которыми характеризуется изотропный диэлектрик, мы будем обозначать через

$$\alpha = \varepsilon + \frac{a_2 - a_1}{2}, \quad \beta = \frac{\varepsilon + a_2}{2}. \quad (52)$$

Сила, действующая на единицу поверхности в направлении от среды (1) к среде (2), по мере приближения толщины слоя к нулю становится равной

$$t = \{\alpha E(En)\}_2 + \{\alpha E(En)\}_1 - \{\beta E^2 n\}_2 - \{\beta E^2 n\}_1, \quad (53)$$

где индексы показывают, что значения величины берутся для той или другой из сторон поверхности S . Следует отметить, что $n_1 = -n_2$.

В литературе было опубликовано очень немного надёжных измерений констант a_1 и a_2 для твёрдых тел. Натяжение t может быть, однако, подсчитано для случая соприкосновения двух жидкостей, к которым применим закон Клаузиуса-Моссоти. Согласно уравнениям (43) и (14),

$$a_1 = a_2 = -\tau \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} = -\frac{\epsilon_0}{3} (\chi - 1)(\chi + 2). \quad (54)$$

Таким образом, для жидкостей:

$$\alpha = \epsilon, \quad \beta = -\frac{\epsilon_0}{6} (\chi^2 - 2\chi - 2). \quad (55)$$

На поверхности соприкосновения тангенциальная компонента E непрерывна, $E_{t1} = E_{t2}$; в отсутствие поверхностных зарядов мы имеем также $\epsilon_1 E_{n1} = \epsilon_2 E_{n2}$. Поле E в (53) может быть, следовательно, выражено через его напряжённость в любой из сред. Значения α и β из (55), подставленные в (53), приводят к выражению:

$$t = \frac{\epsilon_0}{6} \left\{ \frac{1}{\chi_2} (\chi_1^2 \chi_2^2 + 4\chi_1^2 \chi_2 - 6\chi_1 \chi_2^2 - 3\chi_1^2 + 2\chi_1 + 2) E_{n1}^2 + \right. \\ \left. + [\chi_2 (\chi_2 - 2) - \chi_1 (\chi_1 - 2)] E_n^2 \right\} n_2. \quad (56)$$

Напряжение, действующее со стороны поля на поверхность раздела двух жидких сред, нормально к этой поверхности и направлено из среды (1) в среду (2), что является, конечно, необходимым следствием того факта, что в жидкости не может быть напряжений сдвига.

Если средой (2) является воздух, то k_2 может быть приближённо положено равным единице. Уравнение (56) принимает тогда вид:

$$t = \frac{\epsilon_0 (\chi_1 - 1)^2}{6} (2 E_{n1}^2 - E_{t1}^2) n_2. \quad (57)$$

Натяжение максимально, когда E нормально к поверхности и направлено в сторону убывания диэлектрической проницаемости (ср. стр. 108). Однако если E лежит в плоскости поверхности раздела, так что $E_{n1} = 0$, то натяжение становится отрицательным,

представляя собой давление, действующее на диэлектрик, находящийся в поле.

Другим интересным случаем, является тот, когда среда (1) — проводник. Тогда $E_1 = 0$, $E_{t2} = 0$ и (53) сводится к

$$t = (\alpha - \beta) E_n^2 n = \frac{\epsilon - a_1}{2} E_n^2 n, \quad (58)$$

где все величины равны их значениям непосредственно снаружи у поверхности металла в диэлектрике (1). Если этот диэлектрик является жидкостью, то

$$t = \frac{1}{2} \left(\epsilon + \tau \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} \right) E_n^2 n = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} (\epsilon \tau) E_n^2 n. \quad (59)$$

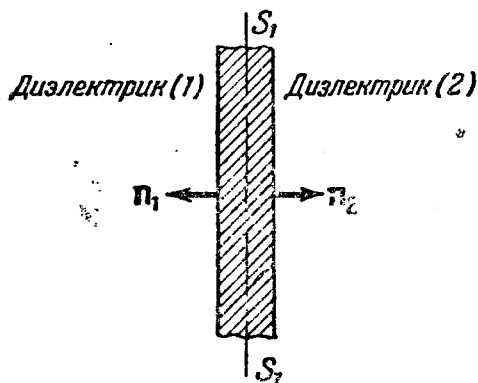


Рис. 23. Сечение переходного слоя, разделяющего две диэлектрические среды.

Эти выражения справедливы независимо от того, заряжен ли проводник или нет, поскольку E_n связано с поверхностной плотностью зарядов соотношением $\epsilon E_n = \omega$. Однако уравнения (58) и (59) не выражают равнодействующей силы, приходящейся на единицу поверхности, так как они в некоторой степени компенсируются напряжениями или давлениями, возникающими в диэлектрике под действием поля. Этими силами мы сейчас и займёмся. Подобное внутреннее давление можно игнорировать только в том случае, если среда (1) является свободным пространством или же газом с диэлектрической проницаемостью, очень близкой к единице. Тогда мы имеем $\tau \frac{d\epsilon}{d\tau} = 0$, и (59) переходит в

$$t = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_n^2 n = \frac{1}{2} \omega E_n n, \quad (60)$$

где ω — заряд единицы поверхности.

2.25. Электрострикция. Упругая деформация диэлектрика под влиянием сил, действующих на него в электростатическом поле, называется *электрострикцией*. Смещение s любой внутренней точки изотропного вещества должно удовлетворять уравнению (70), стр. 92.

$$f + (\lambda_1 + \lambda_2) \text{grad div } s + \lambda_2 \Delta s = 0, \quad (61)$$

где объёмные силы $f = f' + f''$ даются теперь в общем случае уравнениями (35) и (40). Если нужно, то к ним можно добавить силы E_r для учёта объёмных зарядов и гравитационные силы τg . Мы должны найти решение уравнения (61) в подходящей системе координат. Это решение должно удовлетворять краевым условиям на границе диэлектрика. На этой границе должны быть заданы либо приложенные напряжения, либо смещения. Если граничная поверхность является свободной, то на неё будут действовать только напряжения со стороны поля, из которых можно будет определить и граничные значения s .

В твёрдых телах этот эффект мал и легко может быть замаскирован деформациями, возникающими от посторонних причин. Силы притяжения между металлическими электродами, находящимися в соприкосновении с диэлектриком, могут вызвать внутри диэлектрика деформации, ничего общего не имеющие с электрострикцией. Экспериментальные данные по этому вопросу немногочисленны и часто противоречивы. Теория электрострикции в цилиндрическом конденсаторе была, однако, развита довольно подробно. Метод, описанный выше, был применён Адамсом¹⁾ и его результаты были позднее приведены Кембелом²⁾ в соответствие с более ранней работой Сакердота³⁾. Обширный перечень ссылок дан Кэди⁴⁾.

Электрострикция жидкостей более доступна для расчёта, поскольку модуль сдвига λ_2 равен нулю, а λ_1 обратно пропорционально сжимаемости. Согласно (73), стр. 92, давление в жидкости связано с объёмным расширением соотношением $p = -\lambda_1 \text{div } s$. Это выражение вместе с объёмными силами f из уравнения (45), после подстановки в (61), приводит к связи

$$-\frac{1}{2} E^2 \text{grad } \epsilon + \frac{1}{2} \text{grad} \left(E^2 \tau \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} \right) - \text{grad } p = 0 \quad (62)$$

между давлением и напряжённостью поля в какой-либо точке. Для того чтобы проинтегрировать это выражение, необходимо задать зависимость давления

¹⁾ Adams, *Phil Mag.* (6) 22, 889, 1911.

²⁾ Kemble, *Phys. Rev.* (2) 7, 614, 1916.

³⁾ Sacerdote, *Jour. physique* (3) 8, 457, 1899; 10, 196, 1901.

⁴⁾ Cady, *International Critical Tables*, т. VI, стр. 207, 1929.

и диэлектрической проницаемости от плотности τ . Для химически однородной жидкости или газа мы можем положить, что $p = p(\tau)$, $\varepsilon = \varepsilon(\tau)$ и что зависимость от точки включается в независимую переменную τ . Тогда:

$$\begin{aligned} \text{grad} \left(E^2 \frac{d\varepsilon}{d\tau} \tau \right) &= \tau \text{grad} \left(E^2 \frac{d\varepsilon}{d\tau} \right) + E^2 \frac{d\varepsilon}{d\tau} \text{grad} \tau, \\ \text{grad} \varepsilon &= \frac{d\varepsilon}{d\tau} \text{grad} \tau, \end{aligned} \quad (63)$$

и, таким образом, (62) сведётся к

$$\frac{1}{2} \text{grad} \left(E^2 \frac{d\varepsilon}{d\tau} \right) = \frac{1}{\tau} \text{grad} p. \quad (64)$$

Определим скалярную функцию давления $P(p)$ так, что

$$P(p) = \int_{p_0}^p \frac{1}{\tau(p)} dp, \quad \text{grad} P = \frac{1}{\tau} \text{grad} p, \quad (65)$$

где p_0 — давление в той точке жидкости, где $E = 0$. Если ds — элемент длины вдоль пути, соединяющего две точки, в которых давления равны соответственно p и p_0 , то $\text{grad} P ds = dP$ и (64) удовлетворяется соотношением

$$\int_{p_0}^p \frac{1}{\tau} dp = \frac{1}{2} E^2 \frac{d\varepsilon}{d\tau}. \quad (66)$$

В жидкостях $dp = \lambda_1 \frac{d\tau}{\tau}$ (уравнение (77), стр. 92)

или

$$\tau = \tau_0 e^{\frac{p - p_0}{\lambda_1}}. \quad (67)$$

Параметр λ_1 , обратный сжимаемости, является весьма большой величиной и, таким образом, $\tau \cong \tau_0$. Следовательно, для жидкостей

$$p - p_0 = \frac{1}{2} E^2 \tau \frac{d\varepsilon}{d\tau}, \quad (68)$$

или, если применить закон Клаузиуса-Моссоти:

$$p - p_0 = \frac{\varepsilon_0}{6} E^2 (\chi - 1)(\chi + 2). \quad (69)$$

Для газов (67) следует заменить соотношением $p = \tau \frac{RT}{M}$, где R — газовая постоянная, T — абсолютная температура, и M — молекулярный вес ¹⁾.

2.26. Силы, действующие на тело, погружённое в жидкость. Результаты нашего исследования могут быть с пользой подытожены рассмотрением следующей задачи: на рис. 24 диэлектрик или проводник показан погружённым в жидкость. Мы хотим получить выражение для *результатирующей силы, действующей на тело в целом* после приложения электростатического поля. Проведём поверхность S_1 , охватывающую тело и расположенную в жидкости непосредственно у границы S твёрдого тела. На каждый объёмный элемент твёрдого тела действует сила с плотностью:

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} - \frac{1}{2} E^2 \text{grad} \varepsilon + \mathbf{f}'', \quad (70)$$

¹⁾ Abraham, Becker and Dougall, The Classical Theory of Electricity and Magnetism, стр. 98, Blackie, 1932. [Абрагам-Беккер, Теория электричества, 2-е изд. Л. — М., ГОНТИ, 1939, стр. 94—95.]

где f'' даётся выражением (40), а на каждый элемент поверхности, на которой имеется разрыв непрерывности, действует натяжение, даваемое выражением (53). Вместо того, чтобы подсчитывать объёмный интеграл от f и интеграл по граничной поверхности S от t , нам необходимо лишь подсчитать интеграл от t из уравнения (51) по поверхности S_1 . Так как S_1 проведена в жидкости, то $a_1 = a_2 = -\tau \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau}$, и (51) сводится к

$$t = \epsilon E (En) - \frac{\epsilon}{2} E^2 n + \frac{\tau}{2} \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} E^2 n, \quad (71)$$

где n — единичный вектор нормали, направленной из твёрдого тела в жидкость, а ϵ и τ имеют значения, соответствующие жидкости. Интеграл от этого натяжения по поверхности S_1 даёт силы, действующие непосредственно со стороны поля на объём и поверхность тела. Но поле, как мы только что видели, вызывает также давление (68) и в жидкости, которое в каждой точке S_1 действует по нормали *внутрь*, т. е. по направлению к твёрдому телу. Равнодействующая сила на единицу поверхности S_1 равна (71) за вычетом (68), и полная сила, испытываемая телом в поле — сила, которая должна быть скомпенсирована посторонними связями, — равна:

$$F = \int_{S_1} \left\{ \epsilon E (En) - \frac{\epsilon}{2} E^2 n \right\} da. \quad (72)$$

Таким образом, для того чтобы получить результирующую силу, действующую на тело *в целом*, нам нет надобности знать константы a_1 и a_2 ни для твёрдого тела, ни для жидкости, так как силы, с которыми связаны эти константы, локально компенсируются другими напряжениями. Кроме того, поскольку жидкость находится в равновесии несущественно, что S_1 лежит в непосредственном соседстве с поверхностью тела S . Полная сила, действующая на жидкость, находящуюся между поверхностью S_1 и произвольной охватывающей поверхностью S_2 , равна нулю и, следовательно:

$$\int_{S_1} \left\{ \epsilon E (En) - \frac{\epsilon}{2} E^2 n \right\} da = \int_{S_2} \left\{ \epsilon E (En) - \frac{\epsilon}{2} E^2 n \right\} da, \quad (73)$$

если мы сохраним условие, что n направлена *наружу* из охватываемого объёма. Поверхность S_2 может быть, следовательно, выбрана любым способом, облегчающим интегрирование, при том лишь условии, что она не пересекает и не охватывает никакого другого тела.

Если твёрдое тело является проводником, то поле E нормально его поверхности. Полная сила, действующая на изолированный проводник, будет поэтому:

$$F = \frac{1}{2} \int_{S_1} \epsilon E^2 n da = \frac{1}{2} \int_{S_1} \omega E da, \quad (74)$$

где ω — плотность зарядов на поверхности S . Последнее верно, конечно, *только* для поверхности S_1 , непосредственно прилегающей к проводнику.

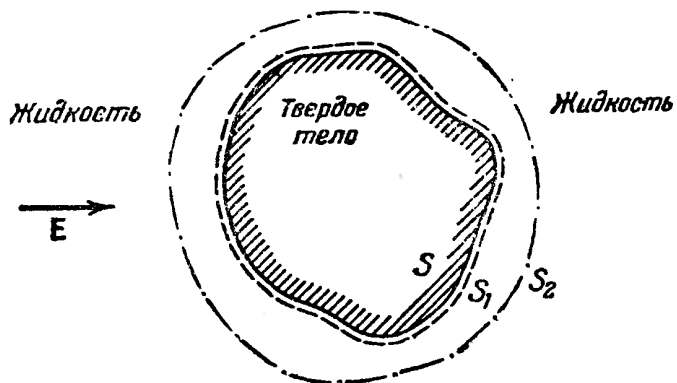


Рис. 24. Твёрдое тело, помещённое в жидкий диэлектрик.

Ясно теперь, что силы, действующие на твёрдое тело, окружённое в плотную другим твёрдым телом, могут быть подсчитаны только в том случае, если указан характер контакта на их общей поверхности. Задача усложняется ещё и тем обстоятельством, что упругие напряжения на границе раздела должны уравнивать не только нормальные давления, но и напряжения сдвига.

СИЛЫ В СТАТИЧЕСКОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

2.27. Неферромагнитные вещества. Исследование, проведённое в разделе 2.22, может быть непосредственно применено к статическому магнитному полю во всех случаях, когда соотношение между $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ имеет вид:

$$B_j = \sum_{k=1}^3 \mu_{jk} H_k \quad (j=1, 2, 3), \quad (1)$$

где компоненты μ_{jk} тензора магнитной проницаемости могут быть функциями точки, но не зависят от напряжённости поля. Изменение магнитной энергии изотропного тела в результате варьирования параметра μ даётся выражением (52) раздела 2.17:

$$\delta T = \frac{1}{2} \int \delta \mu H^2 dv, \quad (2)$$

а обобщением этого выражения для случая анизотропного тела, занимающего объём V_1 , будет:

$$\delta T = \frac{1}{2} \int_{V_1} (\delta \mu_{11} H_1^2 + \delta \mu_{22} H_2^2 + \delta \mu_{33} H_3^2 + \\ + 2\delta \mu_{12} H_1 H_2 + 2\delta \mu_{23} H_2 H_3 + 2\delta \mu_{31} H_3 H_1) dv. \quad (3)$$

Эти вариации могут быть выражены через компоненты деформаций, если мы примем, что соотношение между компонентами тензора магнитной проницаемости и компонентами тензора деформации линейно:

$$\delta \mu_{jk} = \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 b_{lm}^{jk} \delta e_{lm}, \quad b_{lm}^{jk} = \frac{\partial \mu_{jk}}{\partial e_{lm}}. \quad (4)$$

Если мы предположим далее, что в недеформированном состоянии среда изотропна, то коэффициенты b_{lm}^{jk} сведутся к двум:

$$b_1 = \frac{\partial \mu_{jj}}{\partial e_{jj}}, \quad b_2 = \frac{\partial \mu_{kk}}{\partial e_{kk}}, \quad \frac{1}{4} (b_1 - b_2) = \frac{\partial \mu_{jk}}{\partial e_{jk}}, \quad (5)$$

так что вариация магнитной энергии, связанная с чистой деформацией, будет:

$$\delta T = \frac{1}{2} \int_{V_1} \left\{ (b_1 H_1^2 + b_2 H_2^2 + b_2 H_3^2) \delta e_{11} + (b_2 H_1^2 + b_1 H_2^2 + b_2 H_3^2) \delta e_{22} + \right. \\ \left. + (b_2 H_1^2 + b_2 H_2^2 + b_1 H_3^2) \delta e_{33} + \right. \\ \left. + (b_1 - b_2) (H_1 H_2 \delta e_{12} + H_2 H_3 \delta e_{23} + H_3 H_1 \delta e_{31}) \right\} dv. \quad (6)$$

Уравнение (6) формально отличается от уравнения (31), стр. 133, только знаком. Электростатическая энергия U представляет собой работу, совершаемую при создании поля против сил, действующих между элементами зарядов. С другой стороны, магнитная энергия T представляет собой работу, совершаемую против взаимных сил, действующих между элементами

токов, *плюс* работа, совершаемая против индуцированных электродвижущих сил. Работа, необходимая для совершения малого смещения или деформации тела в магнитном поле, частично тратится против механических сил, действующих на тело, частично расходуется в источниках тока для поддержания токов постоянными¹⁾. После вычитания работы, совершённой против индуцированных электродвижущих сил, из полной магнитной энергии, остаётся потенциальная энергия взаимных механических сил, которая, как мы нашли в разделе 2.14, равна и противоположна T :

$$\delta U = -\delta T. \quad (7)$$

Силы, действующие со стороны поля на тела, находящиеся в объёме V_1 , могут быть подсчитаны из соотношения (6), взятого с обратным знаком.

Полностью аналогично случаю электростатического поля мы находим, что объёмная сила, действующая со стороны поля на среду, которая в недеформированном состоянии изотропна, магнитная проницаемость которой не зависит от напряжённости поля и которая свободна от остаточного магнетизма, но в которой могут течь токи плотности $\mathbf{J}$, равна:

$$f_j = \mu [\mathbf{J}, \mathbf{H}]_j - \frac{1}{2} H^2 \frac{\partial \mu}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ (b_1 - b_2) H_j H_k \right\} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (b_2 H^2). \quad (8)$$

Если среда однородна и в ней нет токов, то соотношение (8) сводится к следующему:

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{4} (b_1 + b_2) \text{grad } H^2. \quad (9)$$

В газах или жидкостях $b_1 = b_2 = -\tau \frac{\partial \mu}{\partial \tau}$, и (8) может быть написано в виде:

$$\mathbf{f} = \mu [\mathbf{J}, \mathbf{H}] - \frac{1}{2} H^2 \text{grad } \mu + \frac{1}{2} \text{grad} \left(H^2 \tau \frac{\partial \mu}{\partial \tau} \right). \quad (10)$$

Как и в случае электростатического поля, объёмные силы, компоненты которых даны уравнением (8), могут быть представлены в виде дивергенции тензора ${}^2\mathbf{S}$:

$$\mathbf{f} = \text{div } {}^2\mathbf{S}, \quad (11)$$

компоненты которого будут

$$\left. \begin{aligned} S_{jj} &= \left(\mu + \frac{b_2 - b_1}{2} \right) H_j^2 - \frac{\mu + b_2}{2} H^2, \\ S_{jk} &= \left(\mu + \frac{b_2 - b_1}{2} \right) H_j H_k \quad (j \neq k). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Следовательно, силы, действующие со стороны магнитного поля на вещество, находящееся внутри замкнутой поверхности S_1 , будут точно такими же, как если бы мы приложили к поверхности S_1 поверхностные силы с плотностью

$$\mathbf{t} = \left(\mu + \frac{b_2 - b_1}{2} \right) \mathbf{H} (\mathbf{Hn}) - \frac{\mu + b_2}{2} H^2 \mathbf{n}. \quad (13)$$

¹⁾ Если источниками являются постоянные магниты, то это замечание неприменимо, но тогда энергия поля не даётся выражением $T = \frac{1}{2} \int \mathbf{B} \mathbf{H} dv$.

Подобным же образом силы, действующие на единицу площади поверхности разрыва, могут быть получены подсчётом сил (13) по каждой из сторон поверхности. В результате получим для магнитного поля выражение, аналогичное (53). Особо важен случай магнитного тела, погружённого в жидкость, магнитная проницаемость которой с достаточной степенью приближения не зависит от плотности и равна μ_0 — значению для свободного пространства. Пусть область (1) представляет тело, а область (2) — жидкость (рис. 23). Тогда силы, действующие на единицу площади граничной поверхности, будут:

$$t = \frac{\mu_1 - \mu_0}{2} \left\{ H_1^2 + \left(\frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_0} \right) H_{n1}^2 \right\} n_2 + \frac{b_2}{2} H_1^2 n_2 + \frac{b_1 - b_2}{2} H_{n1} H_1, \quad (14)$$

где константы b_1 , b_2 относятся к магнитному телу, а H_1 следует измерять внутри тела непосредственно у поверхности.

В отношении параметров b_1 и b_2 известно не очень много, хотя имеются указания на то, что они могут быть весьма велики. Они должны быть, конечно, известны, если нужно рассчитать упругую деформацию тела. К счастью, в большинстве практических задач мы интересуемся только полной силой, действующей на тело как целое. Силы, возникающие благодаря деформациям, локально компенсируются вызванными ими упругими напряжениями, и соответствующие члены, включающие b_1 и b_2 , выпадают. Как и в случае электростатического поля, результирующая сила, действующая со стороны статического магнитного поля на неферромагнитное тело, погружённое в какую-либо жидкость, получается вычислением интеграла

$$F = \int_{S_1} \left\{ \mu H (Hn) - \frac{\mu}{2} H^2 n \right\} da \quad (15)$$

по какой-либо поверхности, охватывающей тело.

2.28. Ферромагнитные вещества. Предшествующие формулы применимы к ферромагнитным веществам в достаточно слабых полях. Если, однако, магнитная проницаемость заметно зависит от напряжённости поля, то энергия магнитного тела не выражается более уравнениями (2) или (3), и вместо них мы должны воспользоваться интегралом, полученным в разделе 2.17:

$$T = \frac{1}{2} \int_{V_1} \left(H_1 V - H V_1 - H V + 2 \int_0^V H dB \right) dv. \quad (16)$$

Исследование объёмных и поверхностных сил для этого случая было проведено Поккельсом¹⁾, который разобрал также вкратце и вопрос о магнито-стрикции. Явление магнито-стрикции определяется, однако, не только простой упругой деформацией, но и рядом других важных факторов. Образец железа, например, в целом являющийся изотропным, под микроскопом обнаруживает мелкозернистую структуру. Свойства каждого зерна или микрокристалла, строго анизотропны. Тот же порядок величины, что и эти зёрна, имеют группы или области атомов, каждая из которых ведёт себя как постоянный магнит. Группы эти необязательно должны отождествляться с микрокристаллами. В немагнитном состоянии ориентация намагничивания каждой из этих магнитных областей случайна, и полный магнитный момент равен нулю. Слабые внешние поля лишь слегка смещают эти маленькие магнетики из их первоначального положения равновесия. В результате мы получаем небольшой индуцированный магнитный момент, и поведение железного образца при этих условиях совершенно аналогично поведению поляризующегося диэлек-

¹⁾ Pockels, *loc. cit.* стр. 369.

трика в электрическом поле. Однако по мере увеличения напряжённости поля области намагничивания начинают внезапно перескакивать в новые положения равновесия вдоль приложенного поля, с соответствующим изменением упругих свойств образца. Удлинение в слабых полях может смениться сокращением, когда поле увеличивается, прямо противоположно тому, что предсказывает теория магнитострикции при применении её к строго изотропным телам. В этом вопросе мы встречаемся, таким образом, с задачей, в которой макроскопическое поведение вещества не может рассматриваться отдельно от его микроскопического строения.

СИЛЫ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

2.29. Силы, действующие на тело, погружённое в жидкость. Выражения

$$\delta U = -\frac{1}{2} \int E^2 \delta \varepsilon dv, \quad \delta T = \frac{1}{2} \int H^2 \delta \mu dv \quad (1)$$

для энергии тела в стационарном электрическом или магнитном поле были обоснованы в разделах 2.10 и 2.17 безвихревым характером векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1$, а также соответствующим поведением этих векторов в бесконечности. В переменном поле эти условия не выполняются, и поэтому соотношения (1) нельзя применить для вывода сил, действующих на тело или на элемент тела, не пересмотрев весь вывод. В лучшем случае, наш анализ будет содержать некоторые гипотетические элементы, поскольку наше предположение, что величины $\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ и $\mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ представляют собой скорости изменения плотностей энергии в электромагнитном поле, является в конце концов лишь правдоподобной интерпретацией теоремы Пойнтинга.

В разделе 2.5 было показано, что полная сила, передаваемая электромагнитным полем через замкнутую поверхность Σ в свободном пространстве, выражается интегралом:

$$\mathbf{F} = \int_{\Sigma} \left\{ \varepsilon_0 (\mathbf{E} \mathbf{n}) \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \mathbf{n}) \mathbf{B} - \frac{1}{2} (\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2) \mathbf{n} \right\} da. \quad (2)$$

Для стационарных полей мы могли показать затем, что если поверхность Σ проведена полностью в жидкости, где не могут существовать напряжения сдвига, то полная сила даётся тем же выражением (2), если только заменить ε_0 и μ_0 на соответствующие их значения в жидкости:

$$\mathbf{F} = \int_{\Sigma} \left\{ \varepsilon (\mathbf{E} \mathbf{n}) \mathbf{E} + \mu (\mathbf{H} \mathbf{n}) \mathbf{H} - \frac{1}{2} (\varepsilon E^2 + \mu H^2) \mathbf{n} \right\} da. \quad (3)$$

Эта сила является результирующей сил, действующих на заряды, токи и вещество, находящиеся *внутри* поверхности Σ . Вещество внутри поверхности Σ не обязательно должно быть жидкостью и в нём могут встречаться поверхности разрыва непрерывности физических свойств. Однако соотношения между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ и между $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ предполагаются линейными.

Далее, поскольку (2) справедливо в динамическом случае в той же мере, как и в статическом, то имеются все основания предположить, что (3) можно применить и к переменным полям. Нетрудно привести доводы в пользу подобного предположения, в особенности заимствованные из теории относительности. Однако правая часть уравнения (3) должна быть теперь интерпретирована в смысле раздела 2.6 не как сила, действующая со стороны поля на вещество, находящееся внутри поверхности, а как поток импульса

через поверхность Σ в единицу времени, направленный внутрь. Обозначим полный механический импульс вещества, находящегося в Σ , включая весомые заряды, через $G_{\text{мех}}$, а импульс электромагнитного поля через G_e . Тогда:

$$\frac{d}{dt}(G_{\text{мех}} + G_e) = \int_{\Sigma} \left\{ \epsilon (En) E + \mu (Hn) H - \frac{1}{2} (\epsilon E^2 + \mu H^2) n \right\} da. \quad (4)$$

Поверхностный интеграл в (4) может быть преобразован в объёмный. Имеем прежде всего

$$\frac{1}{2} \int_{\Sigma} \epsilon E^2 n da = \frac{1}{2} \int_V \text{grad} (\epsilon E^2) dv \quad (5)$$

и далее:

$$\frac{1}{2} \text{grad} (\epsilon E^2) = \frac{1}{2} E^2 \text{grad} \epsilon + (D \text{grad}) E + [D, \text{rot} E]; \quad (6)$$

$$(D \text{grad}) E = \frac{\partial}{\partial x} (D_x E) + \frac{\partial}{\partial y} (D_y E) + \frac{\partial}{\partial z} (D_z E) - E \text{div} D; \quad (7)$$

$$\int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (D_x E_x) + \frac{\partial}{\partial y} (D_y E_x) + \frac{\partial}{\partial z} (D_z E_x) \right\} dv = \int_{\Sigma} (Dn) E_x da, \quad (8)$$

что, очевидно, сокращается с x -компонентой вектора $\epsilon (En) E$ в (3). Поступая подобным же образом и с магнитными членами и используя соотношения

$$\text{rot} E = - \frac{\partial B}{\partial t}, \quad \text{rot} H = \frac{\partial D}{\partial t} + J, \quad \text{div} D = \rho,$$

мы приходим к уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(G_{\text{мех}} + G_e) = \int_V \left\{ \rho E + [J, B] - \frac{1}{2} E^2 \text{grad} \epsilon - \frac{1}{2} H^2 \text{grad} \mu + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial t} [D, B] \right\} dv. \quad (9) \end{aligned}$$

Приращение механического импульса является результатом действия сил со стороны поля на заряды и нейтральную материю:

$$F = \frac{d}{dt} G_{\text{мех}}. \quad (10)$$

Если, следовательно, мы сможем разделить правую сторону (9) на две части, которые можно будет отождествить соответственно с $G_{\text{мех}}$ и G_e , то мы сможем определить и силы. Как произвести подобного рода разделение, ни в какой степени не очевидно; предлагались разные гипотезы¹⁾. Согласно теореме Пойнтинга, поток энергии даже внутри весомого вещества определяется вектором

$$S = [E, H] \text{ джоулей/сек} \cdot \text{метр}^2. \quad (11)$$

Абрагам и Лауэ приняли за плотность электромагнитного импульса

$$g_e = \mu_0 \epsilon_0 S = \frac{1}{c^2} S \text{ кг/сек} \cdot \text{метр}^2. \quad (12)$$

¹⁾ Паули, Теория относительности, Гостехиздат, 1947.

Согласно этой гипотезе, равнодействующая сил, действующих на заряды, токи и поляризованное вещество, находящиеся внутри поверхности Σ , равна:

$$F = \int_V \left(\rho E + [J, B] - \frac{1}{2} E^2 \text{grad } \epsilon - \frac{1}{2} H^2 \text{grad } \mu + \frac{\chi_m \chi_e - 1}{c^2} \frac{\partial S}{\partial t} \right) dv, \quad (13)$$

или:

$$F = \int_{\Sigma} \left\{ \epsilon (En) E + \mu (Hn) H - \frac{1}{2} (\epsilon E^2 + \mu H^2) n \right\} da - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int_V [E, H] dv. \quad (14)$$

Практически, точный вид выражения для электромагнитного импульса не имеет большого значения, поскольку множитель $1/c^2$ делает его слишком малым, для того чтобы он мог бы быть легко обнаружен.

На основании (13) иногда утверждают, что сила, действующая со стороны электромагнитного поля на единицу объёма изотропного вещества, равна

$$f = \rho E + [J, B] - \frac{1}{2} E^2 \text{grad } \epsilon - \frac{1}{2} H^2 \text{grad } \mu + \frac{\chi_m \chi_e - 1}{c^2} \frac{\partial S}{\partial t}. \quad (15)$$

Подобное заключение, очевидно, неверно, поскольку (15) не включает в себя силы, связанные с деформацией. Как отмечено выше было, эти стрикционные силы частично компенсируются упругими напряжениями и не входят в интегралы (13) или (14) для результирующей силы, необходимой для поддержания в равновесии всего тела, как целого.

ГЛАВА III

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

От основных уравнений и общих теорем мы переходим в следующих главах к изучению структуры и свойств конкретных полей. Простейшими из них являются поля, связанные со стационарным распределением зарядов. Нужно сказать, что из всех разделов нашего предмета свойства электростатического поля получили наиболее полную и исчерпывающую трактовку. В этой главе мы рассмотрим только важнейшие из этих свойств и тех методов, которые были разработаны для их исследования.

ОБЩИЕ СВОЙСТВА ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

3.1. Уравнения для поля и потенциала. Уравнения, которым удовлетворяет поле стационарно распределённых зарядов, получаются непосредственно из уравнений Максвелла, если все производные по времени положить равными нулю. Для всех обыкновенных точек электростатического поля мы имеем, следовательно:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (\text{I})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho. \quad (\text{II})$$

Согласно (I), линейный интеграл от напряжённости поля $\mathbf{E}$ по любому замкнутому пути (*циркуляция* $\mathbf{E}$) равен нулю и, следовательно, поле консервативно.

Консервативный характер поля является необходимым и достаточным условием для существования скалярного потенциала, градиенту которого равен вектор $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (1)$$

Знак здесь совершенно произволен; минус был выбран для того, чтобы направление $\mathbf{E}$ соответствовало общепринятому условию, согласно которому вектор $\mathbf{E}$ направлен от положительного заряда к отрицательному. Уравнение (1) не определяет потенциала однозначно, поскольку к φ можно прибавить любую постоянную φ_0 , не нарушив условия

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} (\varphi + \varphi_0) \equiv 0. \quad (2)$$

В главе II было показано, что скалярный потенциал электростатического поля может быть интерпретирован как работа, необходимая для перемещения единичного положительного заряда из бесконечности в точку поля (x, y, z) :

$$\varphi(x, y, z) = - \int_{\infty}^{(x, y, z)} \mathbf{E} d\mathbf{r}. \quad (3)$$

Мы покажем ниже, что поле системы зарядов, заключённой в конечной области пространства, исчезает в бесконечности. Условие, что φ исчезает

в бесконечности, определяет, таким образом, постоянную φ_0 , которая до этого являлась совершенно произвольной.

Поверхности, на которых φ постоянно, называются *эквипотенциальными* поверхностями. В любой точке эквипотенциальной поверхности напряжённость поля E нормальна к этой поверхности. Пусть

$$\varphi(x, y, z) = \text{const.} \quad (4)$$

будет эквипотенциальной поверхностью; образуем первый дифференциал:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = 0. \quad (5)$$

Дифференциалы dx, dy, dz являются компонентами вектора смещения dr , вдоль которого мы хотим определить изменение φ , и так как $d\varphi = 0$, то этот вектор должен лежать на поверхности $\varphi = \text{const.}$ С другой стороны, частные производные $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ определяют изменение φ соответственно вдоль x -, y - и z -осей и, как было показано, являются компонентами другого вектора, а именно, градиента:

$$\text{grad } \varphi = i \frac{\partial \varphi}{\partial x} + j \frac{\partial \varphi}{\partial y} + k \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -E. \quad (6)$$

$d\varphi$ представляет собой, таким образом, скалярное произведение этих двух векторов и, поскольку это произведение равно нулю, эти векторы ортогональны. Исключение составляют те точки, в которых все три частные производные одновременно обращаются в нуль. Напряжённость поля в этом случае равна нулю, и точки эти являются точками равновесия.

Ортогональные траектории эквипотенциальных поверхностей образуют семейство линий, которые в каждой точке поля касательны к вектору E . Они называются *силовыми линиями*. Часто бывает удобно представлять поле заданной системы зарядов графически, вычерчивая проекции этих линий на какую-нибудь плоскость, проходящую через поле. Пусть ds представляет собой малое смещение вдоль силовой линии:

$$ds = i dx' + j dy' + k dz', \quad (7)$$

где штрихи введены для того, чтобы избежать путаницы с текущими координатами (x, y, z) на эквипотенциальной поверхности. Так как, по определению, силовая линия в каждой точке касательна к вектору напряжённости поля, прямоугольные компоненты ds и $E(x', y', z')$ должны быть пропорциональны между собой:

$$E_x = \lambda dx', \quad E_y = \lambda dy', \quad E_z = \lambda dz'. \quad (8)$$

Дифференциальные уравнения силовых линий будут, следовательно:

$$\frac{dx'}{E_x(x', y', z')} = \frac{dy'}{E_y(x', y', z')} = \frac{dz'}{E_z(x', y', z')}. \quad (9)$$

Соотношения между компонентами векторов D и E в большинстве случаев линейны. Если среда вместе с тем и изотропна, то можно положить:

$$D = \epsilon E = -\epsilon \text{grad } \varphi, \quad (10)$$

откуда, согласно (II), φ должно удовлетворять соотношению:

$$\text{div}(\epsilon \text{grad } \varphi) = \epsilon \Delta \varphi + \text{grad } \epsilon \text{grad } \varphi = -\rho. \quad (11)$$

В случае однородной среды φ должно быть решением уравнения Пуассона:

$$\Delta\varphi = -\frac{1}{\varepsilon} \rho. \quad (12)$$

В точках поля, в которых нет зарядов, (12) сводится к уравнению Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0. \quad (13)$$

Основная задача электростатики состоит в определении скалярной функции $\varphi(x, y, z)$, удовлетворяющей в каждой точке пространства уравнению Пуассона, а на заданных поверхностях — необходимым граничным условиям. Иногда рассматривается значительно более простая обратная задача: задан потенциал, как определённая функция координат, найденная из эксперимента; требуется найти систему зарядов, которая создаёт такой потенциал. Плотность необходимого *непрерывного* распределения тотчас же получается выполнением дифференцирования, указываемого уравнением (12). Однако в общем случае будут иметься дополнительно *точечные* заряды, присутствие и свойства которых не выявляются уравнением Пуассона. В таких точках потенциал становится бесконечным; обратно, мы можем ожидать нахождения точечных зарядов или систем точечных зарядов в особых точках потенциальной функции. Характер подобных систем или, как их называют, мультиполей, будет предметом дальнейших разделов, но простой пример может послужить иллюстрацией этого положения.

Пусть потенциал даётся функцией

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{e^{-ar}}{r}, \quad (14)$$

где r — расстояние по радиусу от начала координат до точки наблюдения, а a — константа. В силу сферической симметрии этой функции, уравнение Пуассона, написанное в сферических координатах, принимает вид:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = -\frac{1}{\varepsilon} \rho; \quad (15)$$

выполнив дифференцирование, находим для плотности необходимого непрерывного распределения заряда:

$$\rho = -\frac{a^2}{4\pi} \frac{e^{-ar}}{r}. \quad (16)$$

Заряд, содержащийся внутри сферы радиуса r , получается интегрированием ρ по объёму этой сферы, т. е.

$$\int_0^r \rho dv = e^{-ar} (ar + 1) - 1. \quad (17)$$

Если радиус становится бесконечным, то полный непрерывно распределённый заряд будет

$$\int_0^\infty \rho dv = -1. \quad (18)$$

Но это *не весь* заряд, необходимый для создания потенциала (14). При $r = 0$ потенциал становится бесконечным, и мы должны искать точечный заряд, расположенный в этой особой точке. Для того чтобы выявить его, нам нужно лишь применить (II) в интегральной форме. Если q — точечный заряд, заряд,

расположенный в начале координат, то

$$\int_S D_n da = q + \int_V \rho dv, \quad (19)$$

где поверхностный интеграл распространён на поверхность S , ограничивающую объём V . Имеем:

$$D_r = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{a}{r} + \frac{1}{r^2} \right) e^{-ar}, \quad (20)$$

$$\int D_r da = (ar + 1) e^{-ar}, \quad (21)$$

и, следовательно,

$$q = +1. \quad (22)$$

Таким образом, потенциал, определённый функцией (14), вызывается единичным положительным зарядом, расположенным в начале координат, и равным ему отрицательным зарядом, распределённым вокруг него с плотностью ρ . Система в целом является нейтральной.

3.2. Граничные условия. Поведение векторов поля при переходе через поверхность разрыва непрерывности в среде было разобрано в разделе 1.13, и результаты этого раздела непосредственно приложимы к случаю электростатического поля. Предположим, что две среды соприкасаются по поверхности S и что единичная нормаль $\mathbf{n}$ проведена от среды (1) к среде (2), так что среда (1) расположена с отрицательной стороны S , а среда (2) — с положительной. Тогда

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1] = 0; \quad \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \omega, \quad (23)$$

где ω — плотность поверхностных зарядов, расположенных на S .

Для дальнейшего удобно ввести единичный вектор $\mathbf{t}$, касательный к поверхности S . Производные $\partial\varphi/\partial\mathbf{n}$ и $\partial\varphi/\partial\mathbf{t}$ представляют соответственно изменения φ в нормальном и тангенциальном направлении. Граничные условия (23) могут быть выражены через потенциал с помощью соотношений

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{t}} \right)_2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{t}} \right)_1 = 0, \quad \varepsilon_2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} \right)_2 - \varepsilon_1 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} \right)_1 = -\omega. \quad (24)$$

Из консервативности поля следует также, что и сам потенциал должен быть непрерывен при переходе через поверхность S , так как работа, требуемая для переноса малого заряда из бесконечности в любую из двух соседних точек, расположенных на противоположных сторонах S , должна быть одинакова. Отсюда

$$\varphi_1 = \varphi_2. \quad (25)$$

Два условия

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \varepsilon_2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} \right)_2 - \varepsilon_1 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} \right)_1 = -\omega \quad (26)$$

являются независимыми.

Проводники играют в электростатике особую роль. Для целей чисто макроскопической теории достаточно рассматривать проводник как замкнутую область, внутри которой заряды могут свободно перемещаться. Если проводником является металл или электролит, то поток зарядов прямо пропорционален напряжённости $\mathbf{E}$ электрического поля: $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$. Заряды могут свободно перемещаться по поверхности проводника, но покидать её могут только под влиянием очень сильных внешних полей, или при высоких температурах (термоэмиссия). Если заряды на проводнике находятся в состоянии

электростатического равновесия и все токи прекратились, то очевидно, что в каждой внутренней точке проводника, находящегося в электростатическом поле, результирующая напряжённость поля E равна нулю, и в каждой точке на его поверхности тангенциальная компонента E также равна нулю. Отсюда электростатический потенциал φ внутри проводника постоянен, и поверхность каждого из проводников является эквипотенциальной. Предположим, что незаряженный проводник внесён в заданное внешнее поле E_0 . В первый момент возникнут временные токи. Согласно разд. 1.7, заряд не может накапливаться во внутренних точках проводника, но произойдёт такое перераспределение зарядов по поверхности, чтобы поверхностная плотность ω удовлетворяла условию:

$$\int_S \omega da = 0. \quad (27)$$

Поверхностное распределение зарядов вызывает индуцированное, или вторичное, поле с напряжённостью E_1 . Равновесие достигается при таком распределении, при котором в каждой внутренней точке проводника

$$E_0 + E_1 = 0. \quad (28)$$

Равным образом, если заряд q помещён на изолированном проводнике, то он распределится по поверхности проводника с поверхностной плотностью ω , подчинённой условию (28), а также соотношению

$$\int_S \omega da = q. \quad (29)$$

Внутреннюю область проводника, находящегося в состоянии электростатического равновесия, мы будем обозначать индексом (1), а внешний диэлектрик индексом (2). Тогда на поверхности S :

$$E_1 = D_1 = 0, \quad [n, E_2] = 0, \quad nD_2 = \omega, \quad (30)$$

или через потенциал:

$$\varphi = \text{const.}, \quad \epsilon_2 \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\omega. \quad (31)$$

Если может быть найдено решение уравнения Лапласа, которое сохраняет постоянное значение на поверхности заданных проводников, то поверхностная плотность зарядов может быть определена подсчётом нормальных производных от потенциала.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЯ ПО ЗАДАННОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ЗАРЯДОВ

3.3. Теорема Грина Пусть V будет замкнутая область пространства, ограниченная регулярной поверхностью S , и пусть φ и ψ — две скалярные функции точки, которые непрерывны внутри V и на поверхности S вместе со своими первыми и вторыми производными¹⁾. Тогда применение теоремы о дивергенции к вектору $\psi \text{ grad } \varphi$ даёт:

$$\int_V \text{div} (\psi \text{ grad } \varphi) dv = \int_S (\psi \text{ grad } \varphi) n da. \quad (1)$$

Развёртывая дивергенцию по формуле

$$\text{div} (\psi \text{ grad } \varphi) = \text{grad } \psi \text{ grad } \varphi + \psi \Delta \varphi \quad (2)$$

¹⁾ Это условие сильнее, чем необходимо. Вторая производная функции ψ не обязательно непрерывна.

и замечая, что

$$\text{grad } \varphi n = \frac{\partial \varphi}{\partial n}, \quad (3)$$

где $\partial \varphi / \partial n$ — производная по направлению положительной нормали, мы получаем соотношение, известное под названием *первого тождества Грина*:

$$\int_V \text{grad } \psi \text{ grad } \varphi \, dv + \int_V \psi \Delta \varphi \, dv = \int_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, da. \quad (4)$$

Если, в частности, мы положим $\psi = \varphi$ и возьмём в качестве φ решение уравнения Лапласа, то уравнение (4) перейдёт в следующее:

$$\int_V (\text{grad } \varphi)^2 \, dv = \int_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, da. \quad (5)$$

Поменяем местами функции φ и ψ , т. е. применим теорему о дивергенции к вектору $\varphi \text{ grad } \psi$:

$$\int_V \text{grad } \varphi \cdot \text{grad } \psi \, dv + \int_V \varphi \Delta \psi \, dv = \int_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \, da. \quad (6)$$

Вычитая (6) из (4), получаем соотношение между объёмным и поверхностным интегралами:

$$\int_V (\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi) \, dv = \int_S \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) \, da, \quad (7)$$

известное под названием *второго тождества Грина* или часто также под названием *теоремы Грина*.

3.4. Интегрирование уравнения Пуассона. С помощью теоремы Грина потенциал в заданной точке (x', y', z') внутри объёма V может быть выражен через объёмный интеграл по объёму V и поверхностный интеграл по поверхности S . Предположим, что заряд распределён с объёмной плотностью $\rho(x, y, z)$. Мы будем считать функцию $\rho(x, y, z)$ — ограниченной; в остальном она есть произвольная функция точки. Проведём произвольную регулярную поверхность S , охватывающую объём V (рис. 25). Совсем не обязательно, чтобы S заключала в себе все заряды или хотя бы даже часть их. Пусть O — произвольное начало координат, а $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$ — заданная точка наблюдения, находящаяся внутри V . Потенциал в этой точке, вызываемый всем распределением зарядов, будет $\varphi(x', y', z')$. В качестве функции ψ мы возьмём центрально симметричное решение уравнения Лапласа:

$$\psi(x, y, z; x', y', z') = \frac{1}{r}, \quad (8)$$

где r — расстояние от переменной точки (x, y, z) , находящейся внутри объёма V , до заданной точки (x', y', z') :

$$r = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}. \quad (9)$$

Однако эта функция не удовлетворяет необходимым условиям непрерывности при $r = 0$. Чтобы исключить особенность из рассматриваемой области, мы

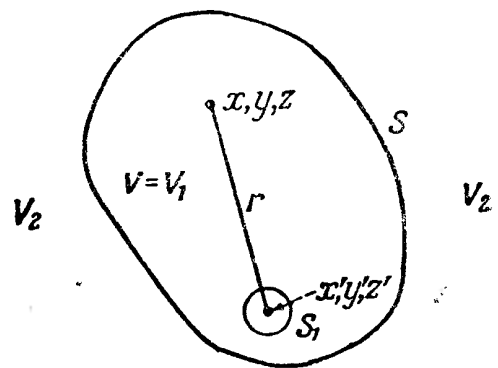


Рис. 25. Применение теоремы Грина к области V , ограниченной с внешней стороны поверхностью S , а с внутренней стороны сферой S_1 .

проведём небольшую сферу радиуса r_1 с центром в точке (x', y', z') . После этого объём V будет ограничен извне поверхностью S , а изнутри — сферой S_1 . Внутри V как φ , так и ψ удовлетворяют теперь требованиям теоремы Грина и кроме того $\Delta\psi = 0$. Таким образом, (7) сводится к равенству:

$$\int_V \frac{\Delta\varphi}{r} dv = \int_{S+S_1} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right\} da, \quad (10)$$

где поверхностный интеграл должен быть распространён по обеим поверхностям S и S_1 . На сфере S_1 положительная нормаль направлена по радиусу к центру (x', y', z') , ибо это направление является *внешним* по отношению к объёму V . Следовательно, на поверхности S_1

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = - \frac{\partial\varphi}{\partial r}, \quad \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right]_{r=r_1} = \frac{1}{r_1^2}. \quad (11)$$

Так как r_1 постоянно, то слагаемое, вносимое в правую часть соотношения (10) сферой, будет:

$$- \frac{1}{r_1} \int_{S_1} \frac{\partial\varphi}{\partial r} da - \frac{1}{r_1^2} \int_{S_1} \varphi da.$$

Если через $\bar{\varphi}$ и $\overline{\partial\varphi/\partial r}$ обозначать средние значения φ и $\partial\varphi/\partial r$ на S_1 , то это слагаемое будет равно

$$- \frac{1}{r_1} 4\pi r_1^2 \overline{\frac{\partial\varphi}{\partial r}} - \frac{1}{r_1^2} 4\pi r_1^2 \bar{\varphi},$$

что в пределе при $r_1 \rightarrow 0$ сводится к $-4\pi\varphi(x', y', z')$. После подстановки этого значения в выражение (10), мы получаем для потенциала в любой внутренней точке (x', y', z')

$$\varphi(x', y', z') = - \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\Delta\varphi}{r} dv + \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] da. \quad (12)$$

В случае однородной среды мы можем ввести плотность зарядов ρ с помощью соотношения $\Delta\varphi = -\frac{1}{\epsilon}\rho$:

$$\varphi(x', y', z') = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho}{r} dv + \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] da. \quad (13)$$

Если объём V , ограниченный поверхностью S , зарядов не содержит, то выражение (13) примет вид:

$$\varphi(x', y', z') = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] da. \quad (14)$$

Очевидно, поверхностные интегралы в (13) и (14) выражают долю, вносимую в потенциал в точке (x', y', z') всеми зарядами, расположенными вне S . Если значения φ и его производных по нормали на поверхности S известны, то потенциал в любой внутренней точке может быть определён интегрированием. Уравнение (14) может быть интерпретировано, следовательно, как решение уравнения Лапласа для области V , удовлетворяющее заданным условиям на границе. Интеграл

$$\varphi(x', y', z') = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho}{r} dv \quad (15)$$

является частным решением уравнения Пуассона для точки (x', y', z') . Общее решение получится прибавлением интеграла (14) однородного уравнения $\Delta\varphi = 0$. Если вне поверхности S зарядов нет, то поверхностный интеграл должен равняться нулю.

3.5. Поведение в бесконечности. Предположим, что все элементы некоторого распределения зарядов расположены на конечном расстоянии от какой-либо произвольной точки O . Представим себе, что это распределение зарядов ограничено внутренней областью поверхности S_1 , которая содержит также и точку O . Расстояния r , r_1 и R показаны на рис. 26. Имеем:

$$r = (R^2 + r_1^2 - 2r_1R \cos \theta)^{\frac{1}{2}}. \quad (16)$$

Потенциал в любой точке $P(x', y', z')$, расположенной вне поверхности S_1 , будет, следовательно:

$$\varphi(x', y', z') = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V_1} \frac{\rho(x, y, z) dv}{(R^2 + r_1^2 - 2r_1R \cos \theta)^{\frac{1}{2}}}. \quad (17)$$

По мере удаления P в бесконечность, члены r_1^2 и $2r_1R \cos \theta$ становятся пренебрежимо малыми по сравнению с R^2 и в пределе, при $R \rightarrow \infty$, мы получаем:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon R} \int_{V_1} \rho dv = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{R}, \quad (18)$$

где q — полный заряд системы. Говорят, что потенциальная функция *регулярна на бесконечности*, если при $R \rightarrow \infty$ произведение $R\varphi$ остаётся ограниченным. Вектор напряжённости поля $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$ на больших расстояниях направлен по радиусу от точки O , и функция $R^2|\mathbf{E}|$ также остаётся ограниченной.

Все реальные системы зарядов расположены в областях конечных размеров и, следовательно, их поля регулярны на бесконечности. Часто, однако, решение задачи упрощается в предположении, что внешнее поле однородно. Такое поле не исчезает в бесконечности и может вызываться только источниками, расположенными на бесконечном расстоянии от начала отсчёта.

Существенно отметить, что поверхность S делит всё пространство на две области — внутреннюю V_1 и внешнюю V_2 , и если функции φ и ψ регулярны на бесконечности, то теорема Грина применима не только к V_1 , но и к внешней области V_2 . Действительно, теорема может быть применена к замкнутой области, ограниченной изнутри поверхностью S , а извне — другой поверхностью S_2 . Если S_2 удаляется в бесконечность, и величины $\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ и $\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}$ исчезают как $1/r^3$, то интеграл по поверхности S_2 стремится к нулю. Следовательно:

$$\int_{V_2} (\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi) dv = \int_S \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) da, \quad (19)$$

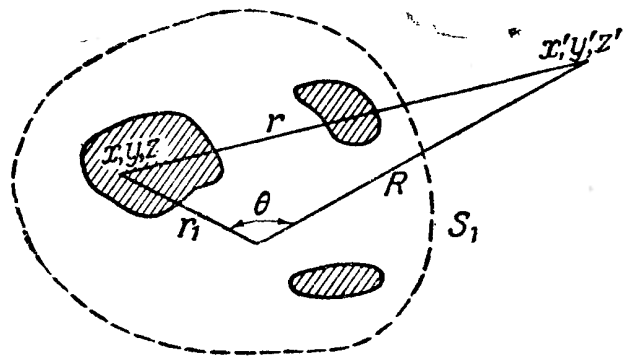


Рис. 26. Иллюстрация к разделу 3.5.

но теперь положительная нормаль в точках на S направлена из V_2 , т. е. *внутрь* V_1 . Предположим, например, что система зарядов полностью ограничена областью V_1 , заключённой внутри поверхности S . Потенциал

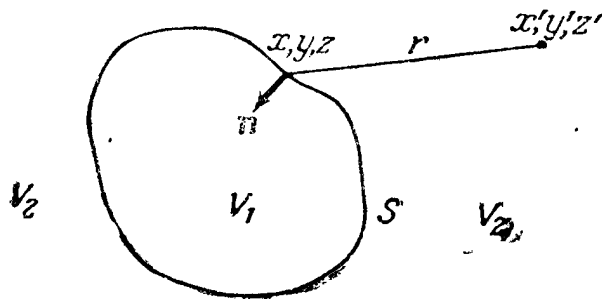


Рис. 27. Применение теоремы Грина к области V_2 , внешней по отношению к замкнутой поверхности S .

в любой точке (x', y', z') области V_2 вне поверхности S может быть вычислен из (17) или же, по известным φ и $\partial\varphi/\partial n$ на поверхности S , из (14), см. рис. 27.

3.6. Кулоново поле. Согласно (18), потенциал заряда на расстояниях, очень больших по сравнению с размерами самого заряда, приближается к значению

$$\varphi(x', y', z') = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r}. \quad (20)$$

Если заряд q расположен в точке (x, y, z) , то расстояние от q до точки наблюдения (x', y', z') равно

$$r = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}. \quad (21)$$

Пусть $\mathbf{r}^0$ представляет собой единичный вектор, направленный от источника, т. е. от (x, y, z) к (x', y', z') . Тогда:

$$\text{grad}'\left(\frac{1}{r}\right) = -\text{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2} \mathbf{r}^0, \quad (22)$$

где штрих при операторе градиента обозначает дифференцирование по переменным точки наблюдения (x', y', z') . Напряжённость поля в этой точке будет:

$$\mathbf{E}(x', y', z') = -\text{grad}'\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \mathbf{r}^0. \quad (23)$$

Поле точечного заряда обратно пропорционально квадрату расстояния и направлено по радиусу от заряда q , если заряд положителен. Это есть закон, который был установлен экспериментально Кулоном и Кавендишем и который обычно берётся за отправную точку в теории электростатики. Выражение «точечный заряд» используется здесь в смысле заряда, размерами которого можно пренебречь по сравнению с r . Математически можно представить себе, что размеры q становятся исчезающе малыми, в то время как плотность ρ возрастает так, что q остаётся постоянным. В пределе возникает особая точка, и выражение (23) имеет смысл во всех точках, кроме $r=0$. Нет никаких оснований полагать, что подобные особенности действительно существуют в природе, но на достаточно больших расстояниях удобно представлять поле таким, какое могло бы быть вызвано системой точечных зарядов в математическом смысле. В последующих разделах нам представится возможность развить это представление дальше.

Потенциал в точке (x', y', z') получается интегрированием слагаемых от каждого из элементов заряда $dq = \rho dv$ по всему пространству:

$$d\varphi(x', y', z') = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\rho(x, y, z)}{r} dv, \quad (24)$$

$$d\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \rho(x, y, z) \text{grad}'\left(\frac{1}{r}\right) dv = \frac{1}{4\pi\epsilon} \rho(x, y, z) \text{grad}\left(\frac{1}{r}\right) dv. \quad (25)$$

Напряжённость поля, создаваемого всем зарядом, распределённым в однородной изотропной среде, будет, следовательно:

$$\mathbf{E}(x', y', z') = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \rho(x, y, z) \text{grad}\left(\frac{1}{r}\right) dv. \quad (26)$$

3.7. Сходимость интегралов. Доказательство сходимости интегралов для потенциала и напряжённости поля содержится в самом методе, которым они были выведены. Мы опишем, однако, другой способ, который может послужить примером подобного рода доказательств. Поскольку элемент интегрирования в точке (x, y, z) может совпасть с (x', y', z') и при этом подинтегральное выражение обращается в этой точке в бесконечность, то совсем не очевидно, что интеграл действительно имеет смысл. Мы покажем, что хотя несобственный интеграл подобного типа и не может быть определён обычным образом как предел суммы, но при соответствующем определении он может быть сделан абсолютно сходящимся.

Пусть точка $Q(x', y', z')$, в которой мы хотим определить поле, окружена замкнутой поверхностью S произвольной формы, разделяющей всю область V , занятую зарядом, на две части — часть V_1 , представляющую объём внутри S , и часть V_2 , внешнюю по отношению к S . По области V_2 интеграл в уравнении (26) ограничен, и, следовательно, заряд, расположенный *вне* поверхности S , вносит в значение напряжённости поля в точке Q конечную величину, а именно, слагаемое E_2 :

$$E_2(x', y', z') = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V_2} \rho(x, y, z) \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right) dv. \quad (27)$$

Обозначим напряжённость, создаваемую зарядами, расположенными *внутри* S , через E_1 . Для того чтобы напряжённость поля $E = E_1 + E_2$ имела в точке Q определённое значение, необходимо, чтобы в пределе, при стягивании поверхности S около точки Q , поле E_1 было бы равно нулю. Небольшое рассуждение покажет нам, что так оно и получается в действительности, хотя знаменатель подинтегрального выражения обратно пропорционален квадрату расстояния и стремится к нулю, элемент заряда в числителе пропорционален объёму V_1 , который уменьшается пропорционально кубу линейных размеров. Мы молчаливо предположили при этом, что плотность заряда ρ в каждой точке объёма V конечна. Существует, следовательно, такое число m , что $|\rho| < m$ и $\left| \frac{\rho}{r} \right| < \frac{m}{r}$ во всех точках V . Из существования этой верхней границы следует далее, что

$$\left| \rho \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \right| < \frac{m}{r^2} \quad (28)$$

и

$$\left| \int_{V_1} \rho \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right) dv \right| < m \int_{V_1} \frac{dv}{r^2}. \quad (29)$$

Поверхность S , ограничивающая объём V_1 , может иметь произвольную форму, и поэтому, чтобы избежать неудобств, связанных с оценкой интеграла по этой области, мы проведём сферу радиуса a с центром в Q , охватывающую область V_1 . Поскольку элемент объёма интегрирования положителен, интеграл, распространённый по объёму V_1 , будет меньше, или, в крайнем случае, равен интегралу по объёму охватывающей сферы:

$$\int_{V_1} \frac{dv}{r^2} \leq \frac{4}{3} \pi a, \quad (30)$$

который, очевидно, стремится к нулю вместе с a . Таким образом, напряжённость в точке Q от зарядов, расположенных внутри поверхности S , становится исчезающе малой по мере того, как поверхность S сжимается около точки Q , и, следовательно, интеграл (26), в случае зарядов, распределённых по объёму, сходится как для внешних точек, так и для внутренних.

Интеграл, выражающий потенциал

$$\varphi(x', y', z') = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(x, y, z)}{r} dv, \quad (31)$$

тоже является несобственным интегралом, если точка наблюдения берётся в области распределения заряда, но, поскольку знаменатель подинтегрального выражения исчезает лишь как первая степень r , вышеприведённое доказательство заведомо справедливо и для данного случая. Если ρ — ограниченная интегрируемая функция положения, то (31) является непрерывной функцией координат x', y', z' , имеет непрерывные первые производные и всюду удовлетворяет условию $E = -\text{grad}' \varphi$. Можно показать, кроме того, что если ρ и все производные ρ порядка ниже n непрерывны, то потенциал φ имеет непрерывные производные всех порядков, ниже чем $n+1$ ¹⁾.

РАЗЛОЖЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА ПО СФЕРИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ

3.8. Аксиальные распределения зарядов. Предположим сначала, что элемент заряда q находится в точке $z = \zeta$ на оси z прямоугольной системы координат с началом в точке O . Мы хотим получить выражение для потенциала от заряда q в точке P через координаты точки P по отношению к началу отсчёта O . Прямоугольные координаты P будут x, y, z , но так как

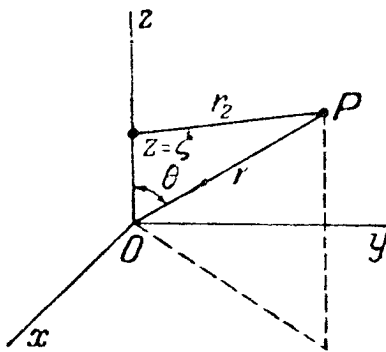


Рис. 28. Иллюстрация к разделу 3.8.

поле симметрично относительно оси z , то достаточно определить положение точки P посредством двух полярных координат r и θ (рис. 28). Расстояние от q до P обозначим r_2 , и потенциал в точке P будет, следовательно:

$$\varphi(r, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r_2}, \quad (1)$$

поскольку мы предполагаем, что среда однородна и изотропна.

$$r_2 = (r^2 + \zeta^2 - 2r\zeta \cos \theta)^{\frac{1}{2}}. \quad (2)$$

Необходимо рассмотреть два случая. Первый и, возможно, менее общий, когда точка P расположена внутри сферы, проведённой из O как из центра и проходящей через точку ζ . Тогда $r < \zeta$, и мы можем написать:

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{\zeta} \left\{ 1 + \left(\frac{r}{\zeta} \right)^2 - 2 \frac{r}{\zeta} \cos \theta \right\}^{-\frac{1}{2}}. \quad (3)$$

Скобка может быть разложена по биному, если

$$\left| \left(\frac{r}{\zeta} \right)^2 - 2 \frac{r}{\zeta} \cos \theta \right| < 1.$$

Если кроме того $\left| \frac{r}{\zeta} \right|^2 + \left| 2 \frac{r}{\zeta} \cos \theta \right| < 1$, то получающийся ряд сходится абсолютно и, следовательно, члены могут быть сгруппированы произвольно, и любые степени могут быть вынесены за скобки. Группируя члены ряда по восходящим степеням r/ζ , мы получаем:

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{\zeta} \left\{ 1 + \frac{r}{\zeta} \cos \theta + \left(\frac{r}{\zeta} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) + \dots \right\}, \quad (4)$$

¹⁾ Смотри, например, Kellogg, Foundations of Potential Theory, гл. VI, Springer, 1929 или Phillips, Vector Analysis, стр. 122 и сл., Wiley, 1933.

что можно записать сокращённо так:

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left(\frac{r}{\zeta}\right)^n \quad (r < \zeta). \quad (5)$$

Коэффициенты при r/ζ являются полиномами относительно $\cos \theta$ и известны под названием *полиномов Лежандра*:

$$\left. \begin{aligned} P_0(\cos \theta) &= 1, \\ P_1(\cos \theta) &= \cos \theta, \\ P_2(\cos \theta) &= \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1) = \frac{1}{4}(3 \cos 2\theta + 1), \\ P_3(\cos \theta) &= \frac{1}{2}(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) = \frac{1}{8}(5 \cos 3\theta + 3 \cos \theta), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Абсолютная величина коэффициентов P_n никогда не превосходит единицы и, следовательно, ряд сходится абсолютно при условии, что $r < |\zeta|$.

Второй случай тот, когда P лежит вне сферы радиуса ζ , так что $r > \zeta$. Соответствующее разложение получается переменной местами r и ζ в (3) и (5)

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} \left\{ 1 + \left(\frac{\zeta}{r}\right)^2 - 2 \frac{\zeta}{r} \cos \theta \right\}^{-\frac{1}{2}}, \quad (7)$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left(\frac{\zeta}{r}\right)^n \quad (r > \zeta). \quad (8)$$

Последний результат может быть получен несколько иным путём. Рассмотрим величину, обратную расстоянию от точки $z = \zeta$ до P , как функцию ζ и разложим её в ряд Тэйлора около точки $\zeta = 0$.

$$f(\zeta) = \frac{1}{r_2} = (r^2 + \zeta^2 - 2r\zeta \cos \theta)^{-\frac{1}{2}}, \quad (9)$$

$$f(\zeta) = f(0) + \zeta \left[\frac{\partial f(\zeta)}{\partial \zeta} \right]_{\zeta=0} + \frac{\zeta^2}{2!} \left[\frac{\partial^2 f(\zeta)}{\partial \zeta^2} \right]_{\zeta=0} + \dots \quad (10)$$

В прямоугольных координатах r_2 равно:

$$r_2 = \{ x^2 + y^2 + (z - \zeta)^2 \}^{\frac{1}{2}}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{r_2} \right) = - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r_2} \right). \quad (12)$$

Следовательно,

$$\left[\frac{\partial^n f(\zeta)}{\partial \zeta^n} \right]_{\zeta=0} = (-1)^n \left[\frac{\partial^n f(\zeta)}{\partial z^n} \right]_{\zeta=0} = (-1)^n \frac{\partial^n f(0)}{\partial z^n}, \quad (13)$$

и так как $f(0) = 1/r$, мы имеем:

$$f(\zeta) = \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} - \zeta \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) + \dots \zeta^n \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left(\frac{1}{r} \right) + \dots \quad (14)$$

Потенциал от заряда q в точке P вне сферы может быть записан в любом из видов:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n \frac{P_n(\cos \theta)}{r^{n+1}} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left(\frac{1}{r} \right), \quad (15)$$

откуда очевидно, что

$$\frac{P_n(\cos \theta)}{r^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (16)$$

Предположим, наконец, что заряд распределён непрерывно на длине l оси z с плотностью $\rho = \rho(\zeta)$. Потенциал на достаточно больших расстояниях от начала координат будет:

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^l \rho(\zeta) \zeta^n d\zeta \frac{P_n(\cos \theta)}{r^{n+1}} \quad (r > l). \quad (17)$$

Первый член этого ряда

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r} \int_0^l \rho(\zeta) d\zeta = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r}, \quad (18)$$

где q — теперь *полный* заряд отрезка, является очевидно *кулоновым потенциалом точечного заряда q , расположенного в начале координат*. Однако теперь мыслим такой случай, когда плотность может принимать отрицательные значения наряду с положительными, так что полный заряд

$$q = \int_0^l \rho(\zeta) d\zeta \quad (19)$$

может оказаться равным нулю. Главный член, к которому стремится потенциал при $r \gg l$, будет тогда:

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{P_1(\cos \theta)}{r^2} \int_0^l \rho(\zeta) \zeta d\zeta = \frac{p}{4\pi\epsilon} \frac{\cos \theta}{r^2}. \quad (20)$$

Величина

$$p = \int_0^l \rho(\zeta) \zeta d\zeta \quad (21)$$

называется *дипольным моментом* данного распределения зарядов. В общем случае мы напишем:

$$\varphi_n = \frac{1}{4\pi\epsilon} p^{(n)} \frac{P_n(\cos \theta)}{r^{n+1}} \quad (22)$$

и определим

$$p^{(n)} = \int_0^l \rho(\zeta) \zeta^n d\zeta \quad (23)$$

как *осевой мультиполь n -го порядка*.

3.9. Диполь. Для того чтобы потенциал линейно распределённого заряда мог быть представлен диполем, необходимо, чтобы полный заряд системы был равен нулю (т. е. система в целом была бы нейтральна) и чтобы расстояние до точки наблюдения было велико по сравнению с длиной отрезка, на котором распределён заряд. Мы видели, что потенциал φ_0 таков, какой был бы создан математически точечным зарядом, расположенным в начале координат. При $r=0$ потенциал φ_0 имеет особую точку, поскольку истинный точечный заряд подразумевает бесконечную плотность. Поставим теперь вопрос — можно ли сконструировать такое распределение точечных зарядов, которое создавало бы дипольный потенциал φ_1 ?

Расположим точечный заряд $+q$ в точке $z=l$ на оси z и равный ему отрицательный заряд $-q$ в начале координат. Согласно уравнению (8), потенциал в удалённой точке будет:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r} \right) = \frac{ql}{4\pi\epsilon} \frac{\cos\theta}{r^2} + \text{члены более высокого порядка.} \quad (24)$$

Произведение $p=ql$ является, очевидно, дипольным моментом данного расположения. Предположим теперь, что $l \rightarrow 0$, но что q в то же время возрастает по величине таким образом, что произведение p остаётся постоянным. Тогда в пределе получится точка с *дипольной особенностью*, потенциал которой всюду, кроме начала координат, будет:

$$\varphi = \frac{p}{4\pi\epsilon} \frac{\cos\theta}{r^2} = -\frac{p}{4\pi\epsilon} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (25)$$

Таким образом с точкой связывается некоторое направление. Фактически дипольный момент является *вектором* $\mathbf{p}$, направленным в данном случае вдоль оси z . Пусть единичный вектор, направленный вдоль r от диполя по направлению к точке наблюдения, будет опять r^0 . Потенциал равен тогда ¹⁾

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}^0}{r^2} = \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon} \mathbf{p} \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Поле диполя цилиндрически симметрично относительно его оси. Следовательно, в любой меридиональной плоскости радиальная и поперечная компоненты напряжённости поля будут:

$$\left. \begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \frac{p \cos\theta}{r^3}, \\ E_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{p \sin\theta}{r^3}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

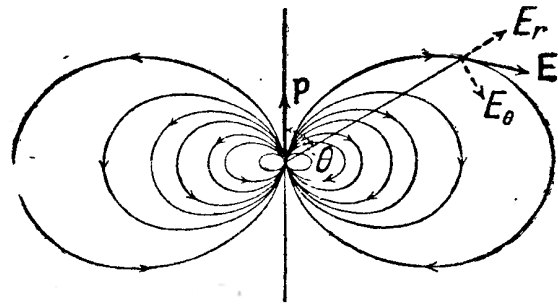


Рис. 29. Силовые линии в меридиональной плоскости, проходящей через ось диполя $\mathbf{p}$.

Потенциальную энергию диполя во внешнем поле легче всего определить из потенциальной энергии двух его точечных зарядов. Пусть заряд $+q$ расположен в точке a внешнего поля, потенциал которого $\varphi(x, y, z)$, а заряд $-q$ в точке b , удалённой от точки a на расстояние l . Потенциальная энергия системы будет тогда:

$$U = q\varphi(a) - q\varphi(b), \quad (28)$$

или при $b \rightarrow a$

$$U = q d\varphi = ql \operatorname{grad} \varphi = -\mathbf{p} \mathbf{E} = -pE \cos\theta, \quad (29)$$

где θ — угол между диполем и внешним полем $\mathbf{E}$.

Силы, действующие на диполь со стороны внешнего поля, равны отрицательному градиенту от U при фиксированной ориентации:

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad}(\mathbf{p} \mathbf{E}) \quad \vartheta = \text{const.} \quad (30)$$

С другой стороны, при изменении ориентации диполя в данной точке, потенциальная энергия также меняется. Вращающий момент, действующий на

¹⁾ В (26) $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и $\operatorname{grad}(1/r)$ означает дифференцирование в точке наблюдения. Если диполь расположен в точке (x, y, z) и потенциал измеряется в точке (x', y', z') , то мы будем иметь $\varphi(x', y', z') = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \mathbf{p} \operatorname{grad}' \left(\frac{1}{r} \right) = +\frac{1}{4\pi\epsilon} \mathbf{p} \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right)$; см. уравнение (22), стр. 156.

диполь во внешнем поле, будет:

$$T = - \frac{\partial U}{\partial \theta} = - pE \sin \theta, \quad (31)$$

или в векторной форме:

$$\mathbf{T} = [\mathbf{p}, \mathbf{E}]. \quad (32)$$

3.10. Осевые мультиполи. Вернёмся снова к уравнению (17) для потенциала линейно распределённого заряда. Это разложение справедливо для всех точек пространства, расположенных вне сферы, диаметр которой равен длине заряженного отрезка. Первый член ряда φ_0 — это просто потенциал, который создавался бы точечным зарядом q , расположенным в центре сферы. Второй член φ_1 представляет собой потенциал диполя $\mathbf{p}$, расположенного в том же центре. Мы покажем, что остальные члены φ_n также могут быть интерпретированы как потенциалы от особых точек более высокого порядка, соответствующих зарядам, собранным в центре сферы.

Диполь, момент которого мы обозначим теперь через $p^{(1)}$, был образован отрицательным зарядом $-q$, помещённым в начале координат, и положительным зарядом $+q$, помещённым в точке $z = l_0$ на оси z . Затем они совмещались, так что $p^{(1)} = pl_0$ оставалось постоянным. Потенциал полученной в результате особой точки был равен:

$$\varphi_1 = - \frac{1}{4\pi\epsilon} p^{(1)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (33)$$

Особую точку следующего более высокого порядка можно получить, помещая диполь с отрицательным моментом $-p^{(1)}$ в центре и другой диполь, с равным положительным моментом $+p^{(1)}$, на небольшом расстоянии l_1 от него. Мы ограничимся сейчас специальным случаем, когда оси обоих диполей, равно как и смещение l_1 , направлены вдоль оси z . Потенциал, получающийся в результате этой конфигурации зарядов, равен:

$$\varphi_2 = \varphi_1 + l_1 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)_{z=0} + \dots - \varphi_1, \quad (34)$$

или, в силу (12):

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon} p^{(1)} l_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \dots \quad (35)$$

Осевой квадрупольный момент определяется как произведение:

$$p^{(2)} = 2(p^{(1)} l_1) = 2(q l_0 l_1). \quad (36)$$

Математически квадруполь получается при $l_0 \rightarrow 0$, $l_1 \rightarrow 0$ и $q l_1 \rightarrow \infty$, причём так, что произведение (36) остаётся конечным и отличным от нуля. Потенциал подобного рода конфигурации будет тогда точно равен

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{p^{(2)}}{2!} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (37)$$

во всех точках, кроме $r = 0$.

По индукции можно построить особые точки заряда или мультиполи ещё более высокого порядка. В каждом случае мультиполь порядка $n-1$ с отрицательным моментом $-p^{(n-1)}$ располагается в центре, а равный положительный мультиполь $p^{(n-1)}$ на расстоянии l_n от него. В общем случае, с которым мы будем иметь дело ниже, смещение произвольно по направлению. Если же, как в данном частном случае, все эти величины совпадают по направлению, то мультиполь называется осевым. Потенциал приближённо

даётся первым членом разложения Тэйлора, который, согласно (12), может быть записан в виде:

$$\varphi_n = \frac{(-1)^n}{4\pi\epsilon} \frac{p^{(n-1)} l_{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left(\frac{1}{r} \right) + \dots \quad (38)$$

n -польный момент определяется как предел произведения

$$p^{(n)} = n p^{(n-1)} l_{n-1} \quad (39)$$

при $l_n \rightarrow 0$ и $p^{(n-1)} \rightarrow \infty$, причём $p^{(n-1)} l_n$ остаётся конечным. Потенциал точечного заряда n -го порядка будет тогда:

$$\varphi_n = \frac{p^{(n)}}{4\pi\epsilon} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (40)$$

Потенциал заряда, произвольно распределённого вдоль отрезка конечной длины, вне сферы, диаметр которой совпадает с этим отрезком, тождественен с потенциалом системы мультиполей, расположенных в центре сферы. Моменты этих мультиполей могут быть определены из распределения зарядов на отрезке по уравнению (23).

3.11. Произвольные распределения зарядов. Мы рассмотрим теперь заряды, распределённые совершенно произвольным образом в некоторой конечной области однородного изотропного диэлектрика или на поверхности проводников, помещённых в такой диэлектрик. Пусть область, содержащая заряды, лежит внутри сферы конечного радиуса R , проведённой вокруг начала координатной системы O . Мы хотим выразить потенциал данного распределения зарядов в точке P вне сферы через координаты точки P по отношению к O . Прямоугольные координаты точки P будут x, y, z , а её полярные координаты — r, θ, ψ , где

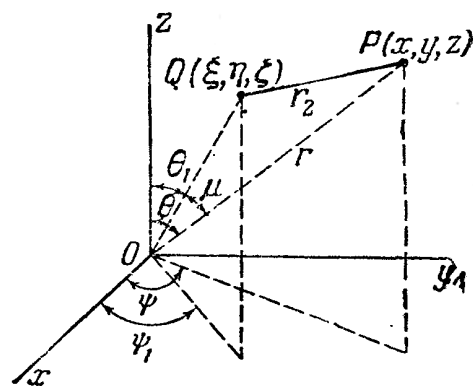


Рис. 30. Иллюстрация к разделу 3.11.

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \psi, \\ y &= r \sin \theta \sin \psi, \quad z = r \cos \theta. \end{aligned} \quad (41)$$

Подсчитаем прежде всего потенциал в точке P от элемента заряда $dq = \rho dv$, расположенного в переменной точке $Q(\xi, \eta, \zeta)$. Если r_2 (рис. 30) есть расстояние от dq до точки P , то слагаемое от этого элемента будет:

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{dq}{r_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{dq}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}. \quad (42)$$

Знаменатель этого выражения может быть разложен в окрестности начала координат по степеням ξ, η, ζ , точно так же, как и в уравнении (14), в результате чего получим:

$$\begin{aligned} d\varphi &= \frac{1}{4\pi\epsilon} dq \left\{ \frac{1}{r} - \left[\xi \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) + \eta \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) + \zeta \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) \right] + \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\xi^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \eta^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \zeta^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \right. \\ &\quad \left. \left. + 2\xi\eta \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{1}{r} \right) + 2\eta\zeta \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{1}{r} \right) + 2\zeta\xi \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \left(\frac{1}{r} \right) \right] - \dots \right\}. \quad (43) \end{aligned}$$

Этот ряд сходится при условии, что $r_1 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} < R$, $r > R$. Теперь мы проинтегрируем (43) по всему заряду, т. е. по координатам ξ, η, ζ , причём $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ при этом интегрировании остаётся постоянным.

Мы опять запишем φ в виде суммы частичных потенциалов φ_n : $\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n$.

Тогда первый член разложения будет:

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{p^{(0)}}{r}, \quad (44)$$

где

$$p^{(0)} = q = \int \rho(\xi, \eta, \zeta) dv \quad (45)$$

есть полный заряд. На достаточно больших по сравнению с R расстояниях потенциал произвольного распределения зарядов может быть приближённо представлен кулоновым потенциалом точечного заряда, расположенного в центре.

Второй член, который является главным, когда полный заряд равен нулю, будет:

$$\varphi_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon} p^{(1)} \text{grad} \left(\frac{1}{r} \right), \quad (46)$$

где $p^{(1)}$ — вектор дипольного момента, прямоугольные компоненты которого равны:

$$p_x^{(1)} = \int \rho \xi dv, \quad p_y^{(1)} = \int \rho \eta dv, \quad p_z^{(1)} = \int \rho \zeta dv. \quad (47)$$

Потенциал произвольного распределения зарядов, алгебраическая сумма которых равна нулю, может быть на больших расстояниях приближённо представлен потенциалом диполя, компоненты которого определяются соотношениями (47).

Подобным же образом частичный потенциал φ_2 обуславливается квадруполем, компоненты которого будут:

$$\left. \begin{aligned} p_{xx}^{(2)} &= \int \rho \xi^2 dv, & p_{yy}^{(2)} &= \int \rho \eta^2 dv, & p_{zz}^{(2)} &= \int \rho \zeta^2 dv, \\ p_{xy}^{(2)} &= \int \rho \xi \eta dv, & p_{yz}^{(2)} &= \int \rho \eta \zeta dv, & p_{zx}^{(2)} &= \int \rho \zeta \xi dv. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

В то время как дипольный момент — вектор, величины, определённые в (48), составляют компоненты тензора второго ранга. Мультипольные моменты более высоких порядков, определённые из соответствующих членов разложения (43), являются тензорами более высокого ранга.

3.12. Общая теория мультиполей. Пусть $\mathbf{l}_i$ будет вектором, проведённым из начала координат O в точку $Q(\xi, \eta, \zeta)$; направляющие косинусы его по отношению к координатным осям x, y, z обозначим соответственно $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$. Пусть потенциал, создаваемый в точке $P(x, y, z)$ особой точкой — $p^{(i)}$ любого порядка, расположенной в начале координат, будет равен $\frac{p^{(i)}}{4\pi\epsilon} f_i(x, y, z)$. Если теперь на другом конце вектора $\mathbf{l}_i$ расположить особую точку того же порядка и такой же величины, но противоположного знака, то потенциал такой пары мультипольных точек в точке P будет равен:

$$\varphi_{i+1} = \frac{p^{(i)}}{\epsilon_0} \{ f_i(x - \alpha_i l_i, y - \beta_i l_i, z - \gamma_i l_i) - f_i(x, y, z) \}, \quad (49)$$

откуда можно видеть, что изменение потенциала в точке (x, y, z) , вызванное смещением источника из начала координат в точку Q , координаты которой равны $\xi = \alpha_i l_i$, $\eta = \beta_i l_i$, $\zeta = \gamma_i l_i$, тождественно с тем изменением, которое получится при равном и противоположном смещении точки P в точку $(x - \xi, y - \eta, z - \zeta)$, при котором источник остаётся неподвижным в начале координат. Разлагая (49) в ряд Тэйлора, мы получаем:

$$\varphi_{i+1}(x, y, z) = -\frac{p^{(i)} l_i}{\epsilon_0} \left(\alpha_i \frac{\partial f_i}{\partial x} + \beta_i \frac{\partial f_i}{\partial y} + \gamma_i \frac{\partial f_i}{\partial z} \right) +$$

+ члены более высокого порядка относительно l_i . (50)

Выражение в скобках является, очевидно, производной от f_i по направлению вектора l_i .

$$\frac{\partial f_i}{\partial l_i} = \alpha_i \frac{\partial f_i}{\partial x} + \beta_i \frac{\partial f_i}{\partial y} + \gamma_i \frac{\partial f_i}{\partial z}. \quad (51)$$

Мультипольный момент $i+1$ -го порядка определяется опять-таки через момент i -го порядка, как предел произведения

$$p^{(i+1)} = (i+1) p^{(i)} l_i \quad (i=0, 1, \dots), \quad (52)$$

при $l_i \rightarrow 0$ и $p^{(i)} \rightarrow \infty$ при условии, что их произведение остаётся конечным. Потенциал в любой точке (x, y, z) , вызываемый мультиполем с моментом $p^{(i+1)}$, расположенным в начале координат, будет тогда равен:

$$\varphi_{i+1} = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{p^{(i+1)}}{(i+1)} \frac{\partial f_i}{\partial l_i} \quad (i=0, 1, \dots). \quad (53)$$

Одиночный точечный заряд можно рассматривать как особенность нулевого порядка с «моментом» $p^{(0)} = q$:

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon} p^{(0)} \left(\frac{1}{r} \right), \quad f_0 = \left(\frac{1}{r} \right). \quad (54)$$

Потенциал диполя, ориентированного в произвольном направлении, определяемом вектором l_0 , будет, соответственно:

$$\varphi_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon} p^{(1)} \frac{\partial}{\partial l_0} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (55)$$

Квадруполь получается смещением диполя параллельно его оси в направлении, определяемом вектором l_1 . Для потенциала квадруполя из (53) и (55) находим:

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{p^{(2)}}{2!} \frac{\partial^2}{\partial l_0 \partial l_1} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (56)$$

Таким путём, по индукции, для потенциала произвольного мультиполя n -го порядка получаем:

$$\varphi_n = \frac{(-1)^n}{4\pi\epsilon} \frac{p^{(n)}}{n!} \frac{\partial^n}{\partial l_0 \partial l_1 \dots \partial l_n} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (57)$$

Построение квадруполя и октуполя показано на рисунках 31a и 31b.

Результат n -кратного применения оператора

$$\frac{\partial}{\partial l_i} = \alpha_i \frac{\partial}{\partial x} + \beta_i \frac{\partial}{\partial y} + \gamma_i \frac{\partial}{\partial z} \quad (58)$$

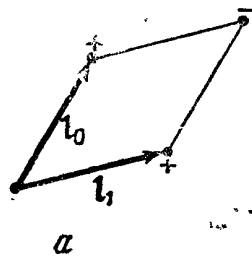


Рис. 31a.
Квадруполь.

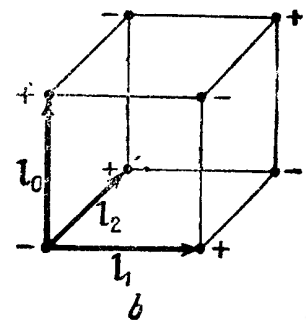


Рис. 31b.
Октуполь.

и функции $\frac{1}{r} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ должен иметь вид

$$\varphi_n = \frac{1}{4\pi\epsilon} p^{(n)} \frac{Y_n}{r^{n+1}}, \quad (59)$$

где Y_n — функция косинусов углов μ_i между r и n осями I_i и направляющих косинусов $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ углов между векторами I_i и координатными осями. Но углы μ_i связаны со сферическими координатами θ, ψ точки P уравнением

$$\cos \mu_i = (\alpha_i \cos \psi + \beta_i \sin \psi) \sin \theta + \gamma_i \cos \theta, \quad (60)$$

которое может быть получено подсчётом расстояния $QP = r_2$ (рис. 30); с одной стороны через $r_i = l_i, r$ и углы μ_i , а с другой стороны — через их проекции на координатные сси. Таким образом Y_n является функцией углов θ и ψ , т. е. положения точки на поверхности единичной сферы. Для дипольного члена мы имеем:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -\frac{1}{4\pi\epsilon} p^{(1)} \left\{ \alpha_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) + \beta_0 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) + \gamma_0 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{p^{(1)}}{r^3} (\alpha_0 x + \beta_0 y + \gamma_0 z). \end{aligned} \quad (61)$$

После замены прямоугольных координат сферическими, согласно уравнению (41), это выражение принимает вид:

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{p^{(1)}}{r^2} \{ (\alpha_0 \cos \psi + \beta_0 \sin \psi) \sin \theta + \gamma_0 \cos \theta \}, \quad (62)$$

или,

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{p^{(1)}}{r^2} \{ (\alpha_0 \cos \psi + \beta_0 \sin \psi) P_1^1(\cos \theta) + \gamma_0 P_1^0(\cos \theta) \}, \quad (63)$$

где $P_n^m(\cos \theta)$ — присоединённые функции Лежандра, определяемые соотношением

$$P_n^m(\cos \theta) = \sin^m \theta \frac{d^m}{d(\cos \theta)^m} P_n(\cos \theta). \quad (64)$$

Между четырьмя константами $p^{(1)}, \alpha_0, \beta_0$ и γ_0 существует одно соотношение, а именно $\alpha_0^2 + \beta_0^2 + \gamma_0^2 = 1$, и остаётся, следовательно, три произвольных параметра, которые и определяют величину и направление диполя.

Поступая подобным же образом и для квадрупольного члена, мы получаем:

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{p^{(2)}}{r^3} \left\{ \left(\gamma_0 \gamma_1 - \frac{\alpha_0 \alpha_1 + \beta_0 \beta_1}{2} \right) \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) + \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[(\beta_0 \gamma_1 + \beta_1 \gamma_0) \sin \psi + \frac{1}{2} (\gamma_0 \alpha_1 + \gamma_1 \alpha_0) \cos \psi \right] \frac{3}{2} \sin^2 2\theta + \\ &\quad \left. + \left[\frac{1}{4} (\alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0) \sin 2\psi + \frac{1}{4} (\alpha_0 \alpha_1 + \beta_0 \beta_1) \cos 2\psi \right] 3 \sin^2 \theta \right\}, \end{aligned} \quad (65)$$

или, пользуясь функциями (64):

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{p^{(2)}}{r^3} \left\{ a_{20} P_2^0(\cos \theta) + (a_{21} \cos \psi + b_{21} \sin \psi) P_2^1(\cos \theta) + \right. \\ &\quad \left. + (a_{22} \cos 2\psi + b_{22} \sin 2\psi) P_2^2(\cos \theta) \right\}. \end{aligned} \quad (66)$$

Между шестью направляющими косинусами существуют два соотношения вида $\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 = 1$, и, следовательно, вместе с произвольным моментом $p^{(2)}$ мы имеем пять произвольных констант для определения величины и ориентации квадрупольного члена.

Решения уравнения Лапласа называются *гармоническими функциями*. Поскольку координаты r, θ, ψ произвольны, каждый член φ_n в разложении φ должен сам по себе удовлетворять уравнению Лапласа и, следовательно, являться гармонической функцией. Обобщая, мы заключаем, что гармоническая функция φ_n , представляющая потенциал мультиполя n -го порядка, является однородным полиномом n -й степени от x, y, z . После перехода к сферическим координатам r, θ, ψ функция φ_n может быть записана в виде (59), где $Y_n(\theta, \psi)$ будет теперь определяться соотношением:

$$Y_n(\theta, \psi) = \sum_{m=0}^n Y_{nm}(\theta, \psi) = \sum_{m=0}^n (a_{nm} \cos m\psi + b_{nm} \sin m\psi) P_n^m(\cos \theta). \quad (67)$$

Гармоническая функция n -го порядка содержит $2n+1$ произвольных постоянных, достаточных для определения величины момента и направления осей соответствующего мультиполя. Если заряды распределены произвольным образом внутри сферы конечного радиуса, то потенциал во всех точках вне сферы должен быть гармонической функцией и, кроме того, должен быть регулярным в бесконечности. Этим условиям удовлетворяет выражение:

$$\varphi(r, \theta, \psi) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)} \frac{Y_n(\theta, \psi)}{r^{n+1}}. \quad (68)$$

Если распределение зарядов известно, то компоненты мультипольных моментов вычисляются так, как было показано в разд. 3.11; если распределение зарядов неизвестно, но задано внешнее поле, то эти константы, как мы вскоре увидим, получаются из граничных условий.

ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ

3.13. Интерпретация векторов $\mathbf{P}$ и $\mathbf{D}$. Хотя двух векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ достаточно для полного описания электростатического поля в любой среде, представляется, однако, удобным ввести третий вектор $\mathbf{P}$, определённый в разделе 1.6 как разность этих двух векторов:

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E}. \quad (1)$$

В свободном пространстве вектор $\mathbf{P}$ исчезает и поэтому он совершенно определённо связан с состоянием диэлектрика. Уравнение, выражающее дивергенцию $\mathbf{D}$, переходит в такое:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho - \operatorname{div} \mathbf{P}), \quad (2)$$

откуда мы заключаем, что влияние диэлектрика на поле может быть подсчитано путём введения эквивалентного распределения зарядов с объёмной плотностью:

$$\rho' = -\operatorname{div} \mathbf{P}. \quad (3)$$

В каждой точке внутри диэлектрика потенциал удовлетворяет видоизменённому уравнению Пуассона:

$$\Delta \varphi = -\frac{1}{\epsilon_0} (\rho + \rho'). \quad (4)$$

Справедливость уравнения (4) не зависит более от изотропности и однородности среды. Если, однако, имеются поверхности разрыва непрерывности как, например, границы диэлектрика, то вектор $\mathbf{D}$ подчинён условию:

$$n(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \omega, \quad (5)$$

$$n(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \frac{1}{\epsilon_0} \omega - \frac{1}{\epsilon_0} n(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) = \frac{1}{\epsilon_0} (\omega + \omega'). \quad (6)$$

Первичными источниками электростатического поля являются «истинные» заряды, объёмная и поверхностная плотности которых равны соответственно ρ и ω . Влияние присутствия *твёрдых* диэлектрических тел на потенциал может быть полностью учтено путём введения индуцированных или «связанных» зарядов, распределённых с объёмной плотностью ρ' , а на каждой из поверхностей разрыва непрерывности среды с поверхностной плотностью:

$$\omega' = -n(P_2 - P_1), \quad (7)$$

где единичный вектор n проведён от среды (1) к среде (2). Если (1) — диэлектрик, а (2) — свободное пространство, то индуцированные поверхностные заряды равны просто $\omega' = nP_1$, где n — внешняя нормаль. В случае перехода от диэлектрика (2) к проводнику (1), несущему свободные поверхностные заряды ω , результирующий поверхностный заряд будет $\omega - nP_2$, поскольку вектор P_1 в проводнике равен нулю.

Потенциал в любой заданной точке внутри или вне диэлектрика может быть выражен в виде:

$$\varphi(x', y', z') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho - \operatorname{div} P}{r} dv + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\omega + n(P_1 - P_2)}{r} da. \quad (8)$$

Поверхностный интеграл должен быть распространён по всем поверхностям разрыва. Едва ли нужно указывать, что анализ этот в большинстве случаев является чисто формальным, так как для того, чтобы определить P , обычно необходимо вычислить сначала потенциал.

Физический смысл вектора P становится ясным, если мы преобразуем (8) с помощью тождества:

$$\frac{\operatorname{div} P}{r} = \operatorname{div} \left(\frac{P}{r} \right) - P \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (9)$$

Диэлектрик можно разбить на отдельные объёмы V_i , ограниченные поверхностями разрыва непрерывности S_i . Для каждого такого объёма

$$\int_{V_i} \operatorname{div} \left(\frac{P}{r} \right) dv = \int_{S_i} \frac{P_i n_i}{r} da. \quad (10)$$

Суммируя эти интегралы по всем частичным объёмам V_i и помня, что n_i направлено из V_i , т. е. внутрь соседних объёмов V_k , мы найдём, что (8) приводится к виду:

$$\varphi(x', y', z') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho}{r} dv + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\omega}{r} da + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int P \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right) dv. \quad (11)$$

Третий интеграл представляет собой, очевидно, потенциал, обусловленный непрерывно распределённым дипольным моментом и поэтому P должно быть интерпретировано как *дипольный момент единицы объёма* или *поляризация диэлектрика*. Согласно (11), диэлектрическое тело, помещённое в данное поле внешних источников, создаёт такое индуцированное вторичное поле, какое давало бы непрерывное распределение диполей с моментом P на единицу объёма.

Это практически всё, что можно сказать о векторе поляризации в чисто макроскопической теории. Макроскопически заряженный проводник ведёт себя так, как будто заряд распределён по нему с непрерывной плотностью, хотя мы и знаем, что фактически заряд состоит из отдельных заряженных электронов. Точно так же нейтральная материя под действием внешнего поля ведёт себя так, как будто диполи распределены с плотностью, являющейся непрерывной функцией точки. Теперь мы знаем, что нейтральные атомы и молекулы в действительности состоят из равного числа положи-

тельных и отрицательных элементарных зарядов. Микроскопическая электродинамика должна показать, как можно подсчитать электрические моменты каждого атома или, по крайней мере, их наиболее вероятные значения. Тогда соответствующим процессом усреднения по элементам макроскопического объёма мы сможем определить поляризацию единицы объёма из моментов отдельных атомов и осуществить переход от микроскопических величин к макроскопическим.

Нужно сказать теперь несколько слов относительно физического смысла вектора Герца Π , введённого в более общей связи в разделе 1.11. Предположим, что плотность свободных зарядов ρ в диэлектрике равна нулю. Если потенциал φ выражен через дивергенцию вектора Π :

$$\varphi = -\operatorname{div} \Pi, \quad (12)$$

то уравнение Пуассона принимает вид $\operatorname{div} \left(\Delta \Pi + \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P} \right) = 0$, и это условие будет, конечно, удовлетворено, если

$$\Delta \Pi = -\frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P}. \quad (13)$$

Следовательно, вектор Π может быть найден через поляризацию путём вычисления интеграла

$$\Pi(x', y', z') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\mathbf{P}(x, y, z)}{r} dv. \quad (14)$$

Поэтому вектор Π называют иногда *поляризационным потенциалом*.

РАЗРЫВЫ НЕПРЕРЫВНОСТИ ИНТЕГРАЛОВ, ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ В ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

3.14. Объёмное распределение зарядов и дипольного момента. Согласно предыдущему, проводник представляет собой просто область, где поле равно нулю, ограниченную поверхностью, на которой расположен слой зарядов с поверхностной плотностью ω , в то время как твёрдый диэлектрик может быть представлен либо в виде эквивалентного распределения зарядов с объёмной плотностью $\rho' = -\operatorname{div} \mathbf{P}$, ограниченного поверхностным слоем зарядов с плотностью ω' , либо как область непрерывного распределения диполей с моментом $\mathbf{P}$ на единицу объёма. Граничные условия, которые ранее были выведены из уравнений поля, должны, очевидно, вытекать непосредственно и из аналитических свойств интегралов, выражающих потенциал и его производные через объёмные и поверхностные плотности зарядов и дипольных моментов.

В разделе 3.7 было установлено, что несобственные интегралы

$$\varphi(x', y', z') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(x, y, z)}{r} dv, \quad (1)$$

$$\mathbf{E}(x', y', z') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(x, y, z) \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right) dv \quad (2)$$

сходятся и являются непрерывными функциями x', y', z' , если плотность зарядов ρ — ограниченная и кусочно непрерывная функция, т. е. если объём, занимаемый зарядами, может быть разбит на конечное число объёмов, в каждом из которых ρ конечно и непрерывно. Таким образом, с каждой стороны поверхности, отмечающей разрывное изменение ρ , величины φ и $\mathbf{E}$ должны иметь одни и те же значения, хотя производные от $\mathbf{E}$ в общем случае разрывны. Рассмотрим, например, заряд, равномерно распределённый по сфере

радиуса a с плотностью ρ_0 . Поле E в точке внутри сферы проще всего можно найти, применяя закон Гаусса и учитывая сферическую симметрию задачи: $\int E n da = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dv$. На расстоянии r от центра ($r < a$) мы имеем:

$$E = \frac{1}{3\epsilon_0} \rho_0 r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{r}{a^3} \quad (r < a), \quad (3)$$

где q — полный заряд, содержащийся внутри сферы. Точно так же в любой внешней точке

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (r > a). \quad (4)$$

Потенциал вычисляется из интеграла $\varphi = - \int_{\infty}^r E dr$, который даёт:

$$\begin{aligned} \varphi &= - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{1}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}, & (r > a), \\ \varphi &= - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^a \frac{1}{r^2} dr - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_a^r r dr = \frac{q}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{3}{a} - \frac{r^2}{a^3} \right) & (r < a). \end{aligned} \quad (5)$$

На рис. 32 потенциал φ и его первая производная E нанесены в функции от r . Заметим, что хотя кривая E и остаётся непрерывной при переходе

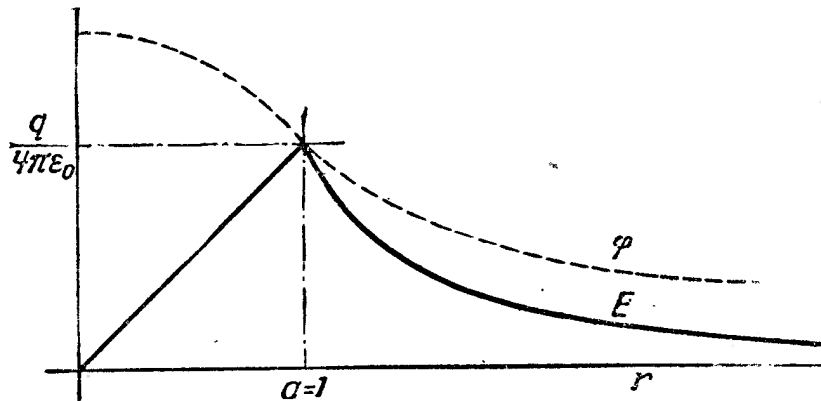


Рис. 32. Изменение потенциала и напряжённости поля при переходе через поверхность равномерно заряженной сферы единичного радиуса.

через поверхность $r = a$, её наклон, — вторая производная от φ , — испытывает скачок, потому что условие непрерывности для ρ в этой точке не выполняется.

Рассмотрим далее объёмное распределение дипольного момента с плотностью P . Потенциал в любой внешней точке будет:

$$\varphi(x', y', z') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int P \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right) dv. \quad (6)$$

Этот интеграл может быть изложен на три интеграла типа

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int P_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) dv = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{P_x}{r} dv. \quad (7)$$

Из того, что было только что доказано относительно уравнения (1), следует, что (6) сходится как в точках внутри области распределения диполей, так и вне её и является непрерывной функцией точки,

если только $P(x, y, z)$ ограничено и кусочно непрерывно. Поскольку диэлектрик эквивалентен области с распределённым дипольным моментом, постольку мы имеем здесь доказательство непрерывности потенциала при переходе через поверхность диэлектрика, не прибегающее к закону сохранения энергии.

При переходе через поверхность разрыва P нормальная производная от (6), а следовательно, и нормальная компонента E испытывают скачок. Проще всего величину скачка можно найти, заменив объёмное распределение дипольного момента эквивалентным объёмным и поверхностным распределением зарядов, определённым в разделе 3.13. Вектор E меняется непрерывно при переходе в область с объёмно распределённым зарядом, но мы сейчас покажем, что при переходе через слой поверхностных зарядов нормальная компонента испытывает скачок.

3.15. Простой заряженный слой. Пусть заряды распределены по поверхности S с плотностью ω , которую мы будем считать ограниченной и кусочно непрерывной функцией точки на поверхности S . Потенциал в любой точке, не лежащей на поверхности S , равен:

$$\varphi(x', y', z') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\omega(x, y, z)}{r} da, \quad (8)$$

где r проведён, как обычно, от элемента заряда $\omega(x, y, z)$ к точке наблюдения. Если точка (x', y', z') лежит на поверхности S , то интеграл (8) становится несобственным, и необходимо удостовериться в его конечности и непрерывности. Проведём вокруг точки (x', y', z') на поверхности S окружность радиуса a . Если радиус a достаточно мал, то получающийся таким образом круглый диск можно считать плоским. В точке (x', y', z') потенциал от поверхностных зарядов, расположенных вне диска, является ограниченной и непрерывной функцией точки в окрестности точки (x', y', z') . Обозначим эту часть потенциала через φ_2 . Остаётся часть φ_1 от зарядов, расположенных на самом диске. Поскольку поверхностная плотность ω ограничена, мы можем поступить так же, как и в разделе 3.7. Существует число m , такое, что во всех точках диска $|\omega| < m$, $\left| \frac{\omega}{r} \right| < \frac{m}{r}$ и, следовательно:

$$|\varphi_1| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left| \int_{S_1} \frac{\omega}{r} da \right| < \frac{m}{2\epsilon_0} \int_0^a \frac{1}{r} r dr = \frac{ma}{2\epsilon_0}, \quad (9)$$

где S_1 означает, что поверхностный интеграл распространяется на поверхность диска. Полный потенциал в любой точке на поверхности диска будет, следовательно:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \quad (10)$$

где и φ_1 , и φ_2 , как было показано, ограничены, а φ_2 также и непрерывен. Но φ_1 стремится к нулю вместе с стремлением к нулю площади диска и, так как можно сделать потенциал φ сколь угодно мало отличающимся от непрерывной функции, то он сам, следовательно, является непрерывной функцией. То, что мы специализировали форму диска, приняв её круглой, не накладывает каких-либо ограничений на общность доказательства, поскольку окружность можно считать описанной вокруг диска произвольной формы. Потенциал от поверхностно распределённых зарядов является ограниченной и непрерывной функцией точки во всех точках как вне поверхности, так и на ней. Таким образом, функция, определённая уравнением (8), при переходе через заряженную поверхность остаётся непрерывной.

Интеграл, выражающий напряжённость поля:

$$E(x', y', z') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \omega(x, y, z) \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right) da, \quad (11)$$

является непрерывной функцией с непрерывными производными всех порядков во всех точках, не лежащих на заряженной поверхности, и испытывает скачок при переходе точки (x', y', z') через поверхность S . Природа разрыва может быть определена непосредственно из (11)¹⁾, но мы ограничимся здесь лишь простым приёмом, использованным нами в разделе 1.13 и основанным на свойстве дивергенции и ротора E . Скачок вектора E при переходе через слой S определяется соотношением:

$$E_+ - E_- = \frac{1}{\epsilon_0} \omega n, \quad (12)$$

где n — единичный вектор нормали, проведённый наружу от положительной стороны поверхности. Если под ω мы будем понимать сумму истинных и связанных зарядов $\omega = n(P_+ - P_-)$, то (12) эквивалентно:

$$(\epsilon_0 E_+ + P_+) n - (\epsilon_0 E_- + P_-) n = (D_+ - D_-) n = \omega. \quad (13)$$

Рис. 33. Элемент площади da , на которой опирается положительный телесный угол с вершиной в точке P_1 и отрицательный телесный угол с вершиной в точке P_2 .

Это соотношение определяет в то же время и скачок E при переходе через поверхность разрыва в распределении диполей.

3.16. Двойной заряженный слой. Часто случается, что потенциал данного распределения зарядов совпадает с потенциалом, который мог бы создать слой диполей, распределённых по поверхности. Мы представляем себе такое поверхностное распределение диполей в виде положительного заряда, распределённого с плотностью $+\omega$ по положительной стороне регулярной поверхности S , и тождественного с ним распределения зарядов противоположного знака по отрицательной стороне этой поверхности. В результате получается двойной слой зарядов, разделённых бесконечно малым расстоянием l . Дипольный момент единицы площади, или поверхностная плотность τ , есть вектор, направленный по положительной нормали S и равный пределу:

$$\tau = n \lim (\omega l) \text{ при } l \rightarrow 0, \omega \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Дипольный момент, соответствующий элементу площади da двойного слоя, будет τda , а потенциал этого элемента в точке (x', y', z') , не лежащей на поверхности S , равен:

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau \cos \theta}{r^2} da = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \tau \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right) da. \quad (15)$$

Но $\frac{\cos \theta}{r^2} da$ как раз равно телесному углу $d\Omega$, под которым элемент da виден из точки наблюдения (x', y', z') . Этот угол положителен, если радиус-вектор, проведённый из точки (x', y', z') к элементу da , образует с положительной нормалью n острый угол. Таким образом, на рис. 33 элемент da виден из точки P_1 под положительным углом, а из точки P_2 — под отри-

¹⁾ Смотри Kellogg, *loc. cit.*; Phillips, *loc. cit.*, гл. VI.

цательным. Потенциал от всех зарядов, распределённых по поверхности, может быть записан в виде:

$$\varphi(x', y', z') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \tau(x, y, z) \operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right) da = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \tau d\Omega, \quad (16)$$

где Ω — телесный угол, под которым видна поверхность S из точки (x', y', z') . То, что второй интеграл должен иметь отрицательный знак, ясно из того, что $d\Omega$ положительно, если слой виден с отрицательной стороны, где потенциал отрицателен.

Потенциал φ имеет различные значения на противоположных сторонах двойного слоя. Предположим сначала, что поверхность S замкнута, и что заряды распределены с постоянной плотностью, так что τ может быть вынесено за знак интеграла. Положительный заряд расположен на наружной стороне S , так что τ имеет то же направление, что и положительная нормаль. Существует известная теорема о телесном угле, которую можно применить к нашему случаю. Она гласит: «если S является замкнутой поверхностью в трёхмерной области, то полный телесный угол, под которым поверхность S видна из точки P , равен нулю, если точка P расположена вне области, ограниченной этой поверхностью, и равен 4π , если точка P лежит внутри этой области»¹⁾. Потенциал в любой точке внутри S будет поэтому равен $\varphi_- = -\frac{1}{\epsilon_0} \tau$, а в любой точке вне S потенциал $\varphi_+ = 0$. Скачок потенциала при переходе с одной стороны двойного слоя на другую равен, таким образом,

$$\varphi_+ - \varphi_- = \frac{1}{\epsilon_0} \tau. \quad (17)$$

Убедимся теперь в том, что (17) определяет скачок φ при переходе через двойной слой и в том случае, когда поверхность S не замкнута. Действительно, поверхность S может быть сделана замкнутой прибавлением произвольной поверхности S' . В любой точке вне и внутри этой замкнутой поверхности потенциал может быть разложен на две части — долю φ от зарядов, расположенных на S , и долю φ' от зарядов на S' . Внутри замкнутой поверхности результирующий потенциал опять-таки равен $-\frac{1}{\epsilon_0} \tau$, а вне её — нулю. Таким образом, при переходе через поверхность S потенциал $\varphi + \varphi'$ меняется скачком на величину $\frac{1}{\epsilon_0} \tau$; но φ' от слоя S' , очевидно, непрерывен при переходе через S и, следовательно, весь скачок обусловлен скачком φ , как это и выражено уравнением (17).

Остаётся показать, что (17) справедливо и тогда, когда τ является функцией точки на поверхности S . Проведём около произвольной точки P на поверхности S окружность радиуса a . Пусть a будет настолько мало, что на площади круга радиуса a можно считать τ постоянным, равным τ_0 . Потенциал φ в окрестности точки P снова может быть разложен на две части — долю φ' от бесконечно малого диска и долю φ'' от дипольного слоя, лежащего вне окружности. φ'' непрерывно в точке P . С другой стороны, φ' испытывает при переходе через диск скачок, равный $\frac{1}{\epsilon_0} \tau_0$. Полный потенциал $\varphi = \varphi' + \varphi''$ должен, следовательно, иметь скачок той же величины, и при переходе к пределу при $a \rightarrow 0$ мы получаем, что (17) сохраняет

¹⁾ Об аналитических свойствах телесных углов смотри у Phillips, *loc. cit.* стр. 112.

силу и для переменного распределения, если для τ мы будем брать его значение в точке перехода через поверхность S .

Эти результаты означают ещё и то, что работа, необходимая для перемещения единичного положительного заряда по замкнутому пути, пересекающему один раз поверхность, по которой распределены диполи с постоянной плотностью τ_0 , равна $\pm \frac{1}{\epsilon_0} \tau_0$, где знак зависит от направления движения. При наличии подобного двойного слоя потенциал оказывается многозначной функцией; к значению потенциала в точке (x', y', z') можно прибавить $\frac{1}{\epsilon_0} m\tau$, где m — любое положительное или отрицательное целое число. Для того чтобы получить различные значения φ , достаточно вернуться в исходную точку после пересечения поверхности S . Всё это представляется противоречащим консервативному характеру электростатического поля. В действительности, математический двойной слой является особой поверхностью, точного подобия которой в природе не существует. Мы покажем ниже с помощью теоремы Грина, что потенциал *внутри* замкнутой области, ограниченной поверхностью S от зарядов, расположенных вне этой поверхности, точно такой же, какой мог бы быть создан некоторым распределением диполей на поверхности S . Этот эквивалентный дипольный слой не даёт, однако, правильного значения φ *вне* поверхности S .

Применение интеграла $\oint E_n da = \frac{1}{\epsilon_0} q$ к небольшому прямому цилиндру, основания которого расположены на разных сторонах двойного слоя, по способу, использованному в разделе 1.13, тотчас же обнаруживает отсутствие разрыва у нормальной компоненты вектора поля E при переходе через слой, так как полный заряд в цилиндре равен нулю:

$$(E_+ - E_-)n = 0. \quad (18)$$

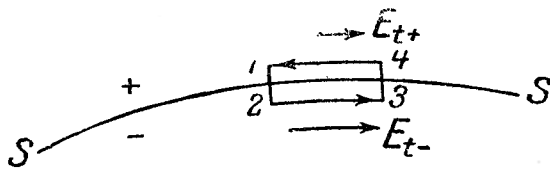


Рис. 34. Скачок тангенциальной компоненты вектора E при переходе через двойной слой.

Однако линейный интеграл E по замкнутому пути не обязательно равен нулю; соответственно, мы можем предвидеть наличие скачка у тангенциальной

составляющей. Пусть обход контура начинается в точке 1, рис. 34, где дипольная плотность равна τ . Скачок потенциала между точками 1 и 2, согласно (17), равен $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{1}{\epsilon_0} \tau$. (Следует обратить внимание на то, что напряжённость поля E определяется *производной* потенциала, а не *разностью* потенциалов по обе стороны от поверхности разрыва. Нормальная же производная непрерывна.) Если Δl — длина пути вдоль поверхности, то плотность диполей в 3 будет $\tau + \text{grad } \tau \Delta l$, и разность потенциалов между точками 4 и 3 равна:

$$\varphi_4 - \varphi_3 = \frac{1}{\epsilon_0} (\tau + \text{grad } \tau \Delta l),$$

Но величина $(\varphi_2 - \varphi_1) + (\varphi_3 - \varphi_2) + (\varphi_4 - \varphi_3) + (\varphi_1 - \varphi_4)$ тождественно равна нулю, и, следовательно:

$$-\frac{1}{\epsilon_0} \tau + (\varphi_3 - \varphi_2) + \frac{1}{\epsilon_0} (\tau + \text{grad } \tau \Delta l) + (\varphi_1 - \varphi_4) = 0. \quad (19)$$

Вводя сокращённые обозначения $\varphi_4 - \varphi_1 = \Delta\varphi_+$, $\varphi_3 - \varphi_2 = \Delta\varphi_-$, получаем (19) в виде:

$$\frac{\Delta\varphi_+}{\Delta l} - \frac{\Delta\varphi_-}{\Delta l} = \frac{1}{\epsilon_0} \text{grad } \tau \Delta l, \quad (20)$$

где $\mathbf{t}$ — единичный вектор, касательный к поверхности S . Предел $-\Delta\varphi/\Delta l$ при $\Delta l \rightarrow 0$ равен компоненте $\mathbf{E}$ в направлении $\mathbf{t}$, так что, в силу непрерывности нормальной компоненты $\mathbf{E}$, скачок вектора поля определяется соотношением:

$$\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_- = -\frac{1}{\epsilon_0} \text{grad } \tau. \quad (21)$$

Понятно, что $\text{grad } \tau$ обозначает здесь градиент τ на поверхности, и является поэтому вектором, касательным к S . Доказательство проводится в предположении, что τ и первые производные от τ на поверхности S непрерывны.

3.17. Интерпретация теоремы Грина. В разделе 3.4 было показано, что потенциал в любой внутренней точке области V , ограниченной замкнутой регулярной поверхностью S , может быть представлен в виде:

$$\varphi(x', y', z') = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho}{r} dv + \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial n} da - \frac{1}{4\pi} \int_S \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) da. \quad (22)$$

На основании предыдущего параграфа мы приходим к следующему истолкованию этого результата. Объёмный интеграл представляет собой, разумеется, потенциал от зарядов, находящихся внутри поверхности S , а поверхностные интегралы учитывают все заряды вне её. Однако первый из поверхностных интегралов эквивалентен также потенциалу простого слоя зарядов, распределённых по поверхности S с плотностью

$$\omega = \epsilon \frac{\partial\varphi}{\partial n}, \quad (23)$$

а второй может быть, очевидно, истолкован, как потенциал двойного слоя на поверхности S с плотностью

$$\tau = \epsilon\varphi. \quad (24)$$

Заряды, лежащие вне поверхности S , могут быть заменены эквивалентными простым и двойным слоями, плотность которых определяется по (23) и (24), без какого-либо изменения потенциала во внутренних точках. Однако вне поверхности S потенциал от этих слоёв ни в какой степени не соответствует потенциалу от истинного распределения зарядов. Очень важно отметить, в противоположность этому, что эти эквивалентные поверхностные слои, которые дают правильные значения потенциала во всех внутренних точках S , как раз такие, какие необходимы для того, чтобы свести к нулю как потенциал, так и поле $\mathbf{E}$ во всех внешних точках. Прежде всего мы видим, что простой слой вызывает скачок нормальной производной φ , равный

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} \right)_- - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} \right)_+ = \frac{1}{\epsilon} \omega. \quad (25)$$

Нормальная производная в уравнении (23) должна быть подсчитана на внутренней, отрицательной стороне поверхности S , поскольку только она одна принадлежит к рассматриваемой области V . Заменяя $(\partial\varphi/\partial n)_-$ её значением из (23), мы получаем, что $(\partial\varphi/\partial n)_+ = 0$. Далее, скачок потенциала, вызываемый двойным слоем, определяется соотношением (17), которое вместе с (24) показывает, что и $\varphi_+ = 0$. То, что φ и его производные исчезают *всюду* вне поверхности S , легко показать, применяя (22) к области V_2 , внешней по отношению к поверхности S . Поскольку в V_2 зарядов теперь нет, то $\Delta\varphi = 0$. В бесконечности потенциал регулярен и, следовательно, потенциал в области V_2 определяется только значениями φ_+ и $(\partial\varphi/\partial n)_+$ на поверхности S . Но последние, как только что было показано, равны нулю. Функция $\varphi(x', y', z')$,

определяемая уравнением (22), непрерывна и имеет непрерывные производные. Следовательно, напряжённость поля $\mathbf{E}$ вне поверхности S также равна нулю.

Из предыдущего рассмотрения ясно, что всегда можно любую часть электростатического поля окружить некоторой поверхностью, обратив снаружи поле и потенциал в нуль и учитывая влияние внешних зарядов на поле внутри поверхности посредством соответствующих распределений на ней простого и двойного слоёв. Поучительно рассмотреть эти результаты с точки зрения напряжённости поля $\mathbf{E}$. Простой слой даёт необходимый скачок нормальной компоненты E_n , оставляя неизменным поведение тангенциальной составляющей. С другой стороны, двойной слой никак не влияет на поведение нормальной компоненты, но может быть подобран так, чтобы обеспечить необходимую величину скачка для E_t или, согласно (21):

$$E_{t-} = \frac{1}{\epsilon} \frac{d\tau}{dl}, \quad E_{t+} = 0, \quad (26)$$

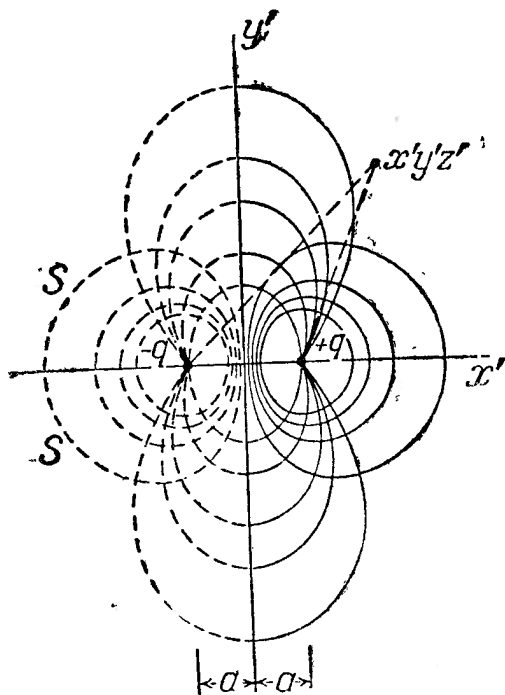


Рис. 35. Применение теоремы Грина к методу изображений.

где l — какое-либо направление, касательное к поверхности S . Если, в частности, поверхность S является эквипотенциальной, то $[\mathbf{n}, \mathbf{E}] = 0$, и надобность в дипольном распределении отпадает; поле внутри поверхности S от зарядов, расположенных вне её, может тогда рассматриваться как поле простого слоя с плотностью зарядов $\omega = \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n}$, расположенного на эквипотенциальной поверхности.

3.18. Метод изображений. Эти принципы находят себе важное применение в методе изображений. Эквипотенциальные поверхности пары равных точечных зарядов, одного положительного и другого отрицательного, в однородном диэлектрике с диэлектрической проницаемостью ϵ образуют семейство замкнутых поверхностей вращения вокруг прямой, соединяющей эти заряды. Пусть S представляет собой какую-либо эквипотенциальную поверхность, окружающую заряд $-q$ (рис. 35). Эта поверхность разделяет, таким образом, всё пространство на две области и, ввиду регулярности потенциала на бесконечности, теорема Грина применима к ним обеим, причём поверхность S будет ограниченной в каждом случае, т. е. каждая из областей может быть сочтена за «внутреннюю» по отношению к S . Если, следовательно, заряд $-q$ удалить, то поле в области, где находится заряд $+q$, останется неизменным, если по поверхности S распределить заряд с плотностью ω , определяемой соотношением (23). Обратно, если заряд $+q$ расположен по отношению к проводящей сфере как показано на рисунке, то на поверхности S индуцируются такие поверхностные заряды ω , что она делается эквипотенциальной. Изменение, которое этот индуцированный заряд вносит в поле вне проводника S , проще всего определить теперь, заменив поверхностное распределение эквивалентным точечным зарядом $-q$. Говорят, что заряд $-q$ является изображением заряда $+q$ по отношению к данной поверхности. В случае, если эквипотенциальной поверхностью является плоскость $x' = 0$, проходящая посередине между зарядами, расчёт особенно прост. Потенциал в какой-либо

точке (x', y', z') справа от $x' = 0$ будет:

$$\varphi(x', y', z') = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x'-a)^2 + y'^2 + z'^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x'+a)^2 + y'^2 + z'^2}} \right\}. \quad (27)$$

Нормальная производная при $x' = 0$ должна быть взята в направлении отрицательной оси x' , так как область справа от $x' = 0$ должна рассматриваться как внутренняя по отношению к этой эквипотенциальной поверхности:

$$\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x'} \right)_{x'=0} = -\frac{1}{2\pi\epsilon} \frac{aq}{(a^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}; \quad (28)$$

отсюда, согласно (23), поверхностная плотность заряда будет:

$$\omega = -\frac{1}{2\pi} \frac{aq}{r^3}, \quad (29)$$

где $r^2 = a^2 + y'^2 + z'^2$ ¹⁾.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

3.19. Формулировка электростатических задач. Анализ, проведённый в предыдущих разделах, позволяет вычислить потенциал в любой точке электрического поля, если распределение зарядов и поляризации полностью заданы. На практике, однако, задача редко бывает столь проста. Обычно заданы лишь определённые внешние источники, или приложенное внешнее поле, а поляризация диэлектриков и распределение поверхностных зарядов на проводниках должны быть определены из них так, чтобы удовлетворять граничным условиям на поверхностях разрыва.

Среди электростатических задач этого типа можно различать два класса: *однородные* краевые задачи и *неоднородные* задачи. Для иллюстрации первого класса задач рассмотрим уединённый проводник, помещённый в диэлектрик. Проводнику сообщён некоторый заряд, и мы хотим знать, как он распределится по поверхности проводника, и каков будет потенциал проводника по отношению к земле или бесконечности. Во всех точках вне проводника потенциал должен удовлетворять уравнению Лапласа. В бесконечности он должен исчезать (регулярность), а на поверхности проводника должен принимать постоянное значение. Мы покажем, что эти условия достаточны для однозначного определения φ . Плотность поверхностных зарядов может быть тогда определена из нормальной производной от φ , с тем условием, что $\int \omega da$ по всей поверхности проводника должен равняться его полному заряду.

Неоднородная задача имеет место в случае диэлектрика или проводящего тела, внесённых в заданное поле внешних источников. Заряд, индуцированный при этом на поверхности проводника, должен сам собою распределиться так, чтобы *резльтирующий* потенциал был постоянен на этой поверхности. Интеграл $\int \omega da$ равен теперь нулю. Равным образом в диэлектрике возникнет индуцированная поляризация, поле которой сложится с первичным полем и даст в результате поле, удовлетворяющее граничным условиям.

Выпишем условия, которые должны удовлетворяться в любой краевой задаче. Чтобы упростить дело, мы предположим далее, что диэлектрик

¹⁾ По поводу метода электрических изображений см. J e a n s, Mathematical Theory of Electricity and Magnetism, 5-е изд., гл. VIII, Cambridge University Press; или M a s o n and W e a v e r, The Electromagnetic Field, стр. 109 и дал., University of Chicago Press, 1929.

является изотропным и однородным, за исключением конечного числа поверхностей разрыва.

(1) $\Delta\varphi = 0$ во всех точках, не лежащих на граничной поверхности и не занятых внешними источниками.

(2) Потенциал φ непрерывен всюду, включая границы диэлектриков и проводников, кроме поверхностей с двойными слоями.

(3) Потенциал φ конечен всюду, за исключением точек местонахождения точечных зарядов, введённых в задачу в качестве первичных внешних источников.

(4) $\varepsilon_2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_2 - \varepsilon_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_1 = 0$ при переходе через поверхность, разделяющую два диэлектрика.

(5) $\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\omega$ на границе между проводником и диэлектриком.

(6) На поверхности проводника либо

(а) φ равен заданной постоянной φ_i , либо же

(б) φ равен неизвестной постоянной, но

$$\int_S \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} da = -q_i.$$

(7) Потенциал φ регулярен на бесконечности, при условии, что все источники поля находятся на конечном расстоянии от начала отсчёта.

В (4) предполагается, что на поверхности между диэлектриками зарядов нет; это и бывает в большинстве случаев. Нормаль направлена из среды 1 в среду 2, а в случае (5) — от проводника в диэлектрик.

Задача электростатики состоит в том, чтобы среди всех возможных решений уравнения Лапласа найти такое частное решение, которое удовлетворяет перечисленным выше условиям на поверхностях заданных проводников и диэлектриков.

3.20. Однозначность решения. Пусть φ будет гармонической функцией (т. е. решением уравнения Лапласа), имеющей непрерывные первую и вторую производные в области V и на ограничивающей её поверхности S . Согласно первому тождеству Грина [уравнение (5), стр. 153], φ удовлетворяет соотношению:

$$\int_V (\text{grad } \varphi)^2 dv = \int_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} da. \quad (1)$$

Предположим теперь, что на поверхности S потенциал $\varphi = 0$. Тогда $\int_V (\text{grad } \varphi)^2 dv = 0$. Но подинтегральное выражение — величина существенно положительная и, следовательно, $\text{grad } \varphi$ должно равняться нулю во всей области V .

Пусть теперь φ_1 и φ_2 будут две функции, гармонические в замкнутой области V , и пусть

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (2)$$

Тогда, если φ_1 и φ_2 на граничной поверхности S равны, то их разность тождественно равна нулю во всей области V . Гармоническая функция, обладающая непрерывными производными первого и второго порядка в замкнутой регулярной области V , однозначно определяется своими значениями на границе S этой области.

Рассмотрим теперь систему проводников, помещённых в однородный диэлектрик; потенциалы проводников заданы. Покажем, что в этом случае

потенциал в любой точке пространства определен однозначно. Соображения, высказанные в предыдущем параграфе, могут быть применены теперь к области V , которая ограничена с внутренней стороны поверхностями проводников, а с внешней стороны — сферой очень большого радиуса R . Предположим, что имеются два решения φ_1 и φ_2 , удовлетворяющие заданным граничным условиям. Тогда на поверхностях проводников $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 0$. Поскольку предположено, что φ_1 и φ_2 являются решениями задачи, обе эти функции должны удовлетворять условиям раздела 3.19; следовательно, разность этих двух функций является гармонической функцией, значение которой на поверхности проводников равно нулю, а поведение на бесконечности регулярно. Поверхностный интеграл в правой части (1) должен быть распространён как по внутренней, так и по внешней границе области. На внутренней границе $\varphi = 0$, и интеграл исчезает. На внешней сфере $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial R}$. По мере увеличения R потенциал φ стремится к нулю как $\frac{1}{R}$, а $\frac{\partial \varphi}{\partial R}$ как $\frac{1}{R^2}$. Подынтегральное выражение $\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ убывает, следовательно, как $\frac{1}{R^3}$, в то время как площадь растёт только как R^2 . Поэтому в пределе при $R \rightarrow \infty$ поверхностный интеграл по внешней границе равен нулю. Отсюда следует, что объёмный интеграл в (1), взятый по всему пространству вне проводников, равен нулю, и мы заключаем, как и выше, что если две функции φ_1 и φ_2 совпадают на границах, то они совпадают всюду, т. е. существует только одна потенциальная функция, которая принимает заданные значения на поверхностях данной системы проводников.

Если $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ на замкнутой граничной поверхности S равно нулю, то правая часть уравнения (1) также равна нулю. Отсюда опять-таки следует, что $\text{grad } \varphi \equiv 0$ во всей области V и, значит, потенциал φ всюду постоянен, хотя и не обязательно равен нулю, так как условие $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ не означает, что φ на поверхности S обращается в нуль. Отсюда, аналогично предыдущему, можно заключить, что если нормальные производные $\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}$ и $\frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$ двух решений совпадают на границах, то сами решения могут отличаться только на константу. Иными словами, значение нормальной производной на границах области определяет потенциал однозначно с точностью до аддитивной постоянной. Но нормальная производная в свою очередь пропорциональна поверхностной плотности заряда и, следовательно, данной системе зарядов на проводниках соответствует только одно решение.

При наличии в электрическом поле диэлектриков, требование непрерывности первых производных φ и самого потенциала φ уже более не выполняется, и мы не можем применить соотношение (1) непосредственно. Однако область вне проводников может быть разбита на частичные объёмы V_i , ограниченные поверхностями S_i , внутри которых диэлектрики однородны. Тогда соотношение (1) приложимо к каждому из этих объёмов в отдельности. При переходе через какую-либо из поверхностей S_i потенциал непрерывен, а его нормальные производные с одной стороны S_i определяются через нормальные производные на другой стороне. Легко видеть, что также и в этом, более общем случае, задача электростатики полностью определена, если заданы значения зарядов или потенциалов на проводниках системы.

3.21. Решение уравнения Лапласа. Очевидно, основной вопрос при решении задач электростатики заключается в отыскании решения уравнения Лапласа в такой форме, которая позволила бы удовлетворить граничным условиям путём соответствующего подбора произвольных постоянных. Иногда с этой

целью могут быть применены некоторые специальные приёмы, как например метод электрических изображений. Но если не считать теории интегральных уравнений, то имеется лишь один приём, являющийся как общим, так и практически пригодным,—это метод, известный под названием «разделения переменных». Предположим, что уравнение поверхности S , ограничивающей проводящее или диэлектрическое тело, есть:

$$f_1(x, y, z) = C. \quad (3)$$

Введём теперь, как в разделе 1.14, систему ортогональных криволинейных координат u^1, u^2, u^3 , такую, чтобы одна из координатных поверхностей, например $u^1 = C$, совпадала бы с заданной границей (3). Если в этой координатной системе мы сможем найти гармоническую функцию $\varphi(u^1, u^2, u^3)$, то, очевидно, нормальная производная в любой точке границы будет пропорциональна производной от φ по координате u^1 , а производные по u^2 и u^3 будут тангенциальными.

Согласно (82), стр. 54, уравнение Лапласа в криволинейных координатах есть:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\frac{\sqrt{g}}{h_i^2} \frac{\partial \varphi}{\partial u^i} \right) = 0, \quad \sqrt{g} = h_1 h_2 h_3. \quad (4)$$

Предположим, что метрические множители h_i удовлетворяют условию

$$\frac{\sqrt{g}}{h_i^2} = M_i f_1(u^1) f_2(u^2) f_3(u^3), \quad (5)$$

где каждая из функций $f_i(u^i)$ зависит только от переменной u^i , а множитель M_i не содержит u^i , но может зависеть от двух других координат. Мы предположим далее, что φ_i также может быть выражена в виде произведения трёх функций, каждая из которых зависит только от одной из переменных:

$$\varphi = F_1(u^1) F_2(u^2) F_3(u^3). \quad (6)$$

Тогда (4) можно записать в виде:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{M_i}{f_i F_i} \frac{\partial}{\partial u^i} \left(f_i \frac{\partial F_i}{\partial u^i} \right) = 0. \quad (7)$$

Если, наконец, M_i является рациональной функцией, то уравнение (7) может быть разложено на три обыкновенных дифференциальных уравнения. Лучше всего продемонстрировать этот метод на примерах.

1. *Цилиндрические координаты.* Согласно 1, стр. 56, имеем:

$$\sqrt{g} = r, \quad \frac{\sqrt{g}}{h_1^2} = r, \quad \frac{\sqrt{g}}{h_2^2} = \frac{1}{r}, \quad \frac{\sqrt{g}}{h_3^2} = r, \quad (8)$$

откуда

$$f_1 = r, \quad f_2 = f_3 = 1, \quad M_1 = M_3 = 1, \quad M_2 = \frac{1}{r^2}. \quad (9)$$

Уравнение (7) напишется в виде:

$$\frac{1}{F_1 r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 F_2} \frac{\partial^2 F_2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{F_3} \frac{\partial^2 F_3}{\partial z^2} = 0. \quad (10)$$

Первые два члена (10) не содержат z , последний член не зависит от r и φ . Изменение z не должно влиять на первые два члена и, следовательно, по-

следний член должен быть равен постоянной, чтобы (10) удовлетворялось тождественно для любого значения z :

$$\frac{1}{F_3} \frac{d^2 F_3}{dz^2} = -C_1. \quad (11)$$

Произвольная постоянная C , называемая *постоянной разделения*, взята с отрицательным знаком исключительно из удобства, а частные производные заменены на полные, потому что F_3 зависит только от z .

Заменяя третий член в (10) на $-C_1$ и умножая на r^2 , мы получаем:

$$\frac{r}{F_1} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{F_2} \frac{\partial^2 F_2}{\partial \theta^2} = r^2 C_1. \quad (12)$$

Очевидно, что второй член в (12) равен константе; откуда получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\frac{d^2 F_2}{d\theta^2} + C_2 F_2 = 0, \quad (13)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dF_1}{dr} \right) - \left(C_1 + \frac{C_2}{r^2} \right) F_1 = 0. \quad (14)$$

Уравнения для F_2 и F_3 удовлетворяются экспоненциальными функциями действительного или мнимого аргумента, в зависимости от знака, приписываемого постоянным разделения; F_1 есть *функция Бесселя*. В том довольно обычном случае, когда потенциал φ не зависит от z , константа C_1 равна нулю, и вместо (14) мы получаем:

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dF_1}{dr} \right) = C_2. \quad (15)$$

2. *Сферические координаты*. Согласно 2, стр. 56 мы имеем:

$$\sqrt{g} = r^2 \sin \theta, \quad \frac{\sqrt{g}}{h_1^2} = r^2 \sin \theta, \quad \frac{\sqrt{g}}{h_2^2} = \sin \theta, \quad \frac{\sqrt{g}}{h_3^2} = \frac{1}{\sin \theta}, \quad (16)$$

откуда

$$\begin{aligned} f_1 &= r^2, & f_2 &= \sin \theta, & f_3 &= 1, \\ M_1 &= 1, & M_2 &= \frac{1}{r^2}, & M_3 &= \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}. \end{aligned} \quad (17)$$

Уравнение (7) принимает вид:

$$\frac{1}{F_1 r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{2\partial F_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta F_2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial F_2}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta F_3} \frac{\partial^2 F_3}{\partial \psi^2} = 0, \quad (18)$$

где в данном случае азимутальный угол обозначен через ψ вместо обычного φ . Разделение переменных приводит к трём обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\frac{1}{F_1} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dF_1}{dr} \right) = C_1, \quad (19a)$$

$$\frac{\sin \theta}{F_2} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dF_2}{d\theta} \right) = C_2 - C_1 \sin^2 \theta, \quad (19b)$$

$$\frac{d^2 F_3}{d\psi^2} + C_2 F_3 = 0. \quad (19c)$$

Из трёх этих уравнений несколько сложно только *уравнение Лежандра* (19b).

3. *Эллиптические координаты*. Согласно 3, стр. 57, мы имеем:

$$\frac{\sqrt{g}}{h_1^2} = \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\sqrt{1 - \eta^2}}, \quad \frac{\sqrt{g}}{h_2^2} = \frac{\sqrt{1 - \eta^2}}{\sqrt{\xi^2 - 1}}, \quad \frac{\sqrt{g}}{h_3^2} = \frac{c^2 (\xi^2 - \eta^2)}{\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}}; \quad (20)$$

что даёт:

$$\begin{aligned} f_1 &= \sqrt{\xi^2 - 1}, \quad f_2 = \sqrt{1 - \eta^2}, \quad f_3 = 1, \\ M_1 &= \frac{1}{1 - \eta^2}, \quad M_2 = \frac{1}{\xi^2 - 1}, \quad M_3 = \frac{c^2 (\xi^2 - \eta^2)}{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Уравнение Лапласа для эллиптического цилиндра будет:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{F_1} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sqrt{\xi^2 - 1} \frac{\partial F_1}{\partial \xi} \right) + \frac{\sqrt{1 - \eta^2}}{F_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sqrt{1 - \eta^2} \frac{\partial F_2}{\partial \eta} \right) + \\ + \frac{c^2 (\xi^2 - \eta^2)}{F_3} \frac{\partial^2 F_3}{\partial z^2} = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

откуда, после деления переменных, получаем:

$$\frac{1}{F_3} \frac{d^2 F_3}{dz^2} = -C_1, \quad (23a)$$

$$\frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{F_1} \frac{d}{d\xi} \left(\sqrt{\xi^2 - 1} \frac{dF_1}{d\xi} \right) - c^2 \xi^2 C_1 = C_2, \quad (23b)$$

$$\frac{\sqrt{1 - \eta^2}}{F_2} \frac{d}{d\eta} \left(\sqrt{1 - \eta^2} \frac{dF_2}{d\eta} \right) + c^2 \eta^2 C_1 = -C_2. \quad (23c)$$

F_1 и F_2 являются функциями Матъё, но существенно упрощаются при $C_1 = 0$, что имеет место в том случае, когда потенциал φ вдоль оси цилиндра постоянен.

4. Сфероидальные координаты. Согласно 6, стр. 59, мы имеем:

$$\frac{\sqrt{g}}{h_1^2} = c(\xi^2 - 1), \quad \frac{\sqrt{g}}{h_2^2} = c(1 - \eta^2), \quad \frac{\sqrt{g}}{h_3^2} = \frac{c(\xi^2 - \eta^2)}{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}, \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \xi^2 - 1, & f_2 &= 1 - \eta^2, & f_3 &= 1, \\ M_1 &= \frac{c}{1 - \eta^2}, & M_2 &= \frac{c}{\xi^2 - 1}, & M_3 &= \frac{c(\xi^2 - \eta^2)}{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)^2} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Уравнение Лапласа имеет вид:

$$\frac{1}{F_1} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ (\xi^2 - 1) \frac{\partial F_1}{\partial \xi} \right\} + \frac{1}{F_2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ (1 - \eta^2) \frac{\partial F_2}{\partial \eta} \right\} + \frac{\xi^2 - \eta^2}{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2) F_3} \frac{\partial^2 F_3}{\partial \psi^2} = 0 \quad (26)$$

и разделяется на три обыкновенных уравнения:

$$\frac{1}{F_3} \frac{d^2 F_3}{d\psi^2} = -C_1, \quad (27a)$$

$$\frac{1}{F_1} \frac{d}{d\xi} \left\{ (\xi^2 - 1) \frac{\partial F_1}{\partial \xi} \right\} - \frac{C_1}{\xi^2 - 1} = C_2, \quad (27b)$$

$$\frac{1}{F_2} \frac{d}{d\eta} \left\{ (1 - \eta^2) \frac{\partial F_2}{\partial \eta} \right\} - \frac{C_1}{1 - \eta^2} = -C_2. \quad (27c)$$

Уравнения (27b) и (27c), очевидно, одинаковы, и удовлетворяются присоединёнными функциями Лежандра.

Критерии разделимости уравнения Лапласа, сформулированные нами на стр. 180, не являются наиболее общими из известных, но они охватывают все обычно используемые координатные системы. Более общие системы координатных поверхностей, допускающих деление переменных, примером которых могут служить тороидальные поверхности, образуемые вращением системы биполярных координат, были исследованы Бохером¹⁾.

¹⁾ B ö c h e r, Ueber die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie, Dissertation, 1894.

Обсуждение свойств различных функций, удовлетворяющих приведённым выше уравнениям, и методов определения произвольных постоянных увело бы нас слишком далеко в сторону. В дальнейшем на протяжении этой книги мы будем постоянно встречаться со случаями использования функций Бесселя и Лежандра. Мы отсылаем читателя к классическим работам Гобсона¹⁾ и Ватсона²⁾, а также Уиттекера и Ватсона³⁾. Подробный разбор применения методов решения краевых задач к вопросам электростатики можно найти у Джинса⁴⁾ и у Смита⁵⁾.

ЗАДАЧА О ШАРЕ

3.22. Проводящий шар в поле точечного заряда. Рассмотрим проводящий шар радиуса r_1 , центр которого совмещён с началом координатной системы. Шар помещён в однородный изотропный диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ϵ_2 . В точке $z = \zeta > r_1$ оси z расположен точечный заряд q (рис. 36). Мы хотим найти потенциал и распределение зарядов на шаре.

Пусть φ_0 будет потенциал от источника q , а φ_1 — потенциал от индуцированных зарядов, распределённых на шаре. Результирующий потенциал в любой точке вне шара будет $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$. Индуцированный потенциал φ_1 должен быть однозначным, — условие, которое выполняется только в том случае, если постоянная разделения C_2 (уравнение (19с), стр. 181) является квадратом целого числа: $C_2 = m^2$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Точно так же, единственное решение уравнения (19б), которое конечно и однозначно на всей сфере, является присоединённой функцией Лежандра $P_n^m(\cos \theta)$, что ограничивает C_1 значениями $C_1 = n(n+1)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. При этих условиях уравнению (19а) удовлетворяют как r^n , так и r^{-n-1} . Условие однозначности потенциала будет удовлетворено функцией:

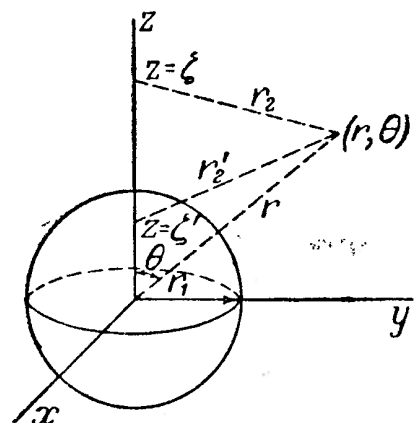


Рис. 36. Шар в поле точечного заряда, расположенного в точке $z = \zeta$.

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(a_{nm} r^n + \frac{b_{nm}}{r^{n+1}} \right) P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (1)$$

где a_{nm} , b_{nm} — произвольные константы. Но потенциал φ_1 должен быть регулярен и на бесконечности, что заставляет нас положить $a_{nm} = 0$. Кроме того, первичный потенциал φ_0 симметричен относительно оси z , и поэтому в данном случае $m = 0$. Таким образом, потенциал индуцированных зарядов выражается рядом:

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta). \quad (2)$$

¹⁾ Hobson, Spherical and Ellipsoidal Harmonics, Cambridge University Press, 1931.

²⁾ Watson, Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge University Press, 1922.

³⁾ Whittaker and Watson, Modern Analysis, Cambridge University Press, 1927; Е. Т. Уиттекер и Г. И. Ватсон, Курс современного анализа, Л. — М., ГТТИ, 1933.

⁴⁾ Jeans, *loc. cit.*

⁵⁾ Smythe, Static and Dynamic Electricity, Mc Graw-Hill, 1939.

Разложение первичного потенциала φ_0 в сферических координатах было приведено в разделе 3.8. При $r < \zeta$:

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q}{r_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{\zeta}\right)^n P_n(\cos \theta), \quad (3)$$

и результирующий потенциал на поверхности $r = r_1$ будет следовательно:

$$\varphi(r_1, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q}{\zeta} \left(\frac{r_1}{\zeta}\right)^n + \frac{b_n}{r_1^{n+1}} \right\} P_n(\cos \theta) = \varphi_s. \quad (4)$$

Но φ_s постоянен, а так как (4) должно быть справедливо на шаре для всех значений θ , то коэффициенты при $P_n(\cos \theta)$ должны быть равны нулю для всех n , больших нуля, коэффициенты b_n определятся, следовательно, из системы соотношений:

$$b_0 = r_1 \varphi_s - \frac{q}{4\pi\epsilon_2} \frac{r_1}{\zeta}, \quad b_n = -\frac{q}{4\pi\epsilon_2} \frac{q r_1^{2n+1}}{\zeta^{n+1}} \quad (n > 0). \quad (5)$$

В любой точке вне шара

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q}{r_2} + \frac{r_1 \varphi_s}{r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_1^{2n+1}}{\zeta^{n+1}} \frac{P_n(\cos \theta)}{r^{n+1}}. \quad (6)$$

Чтобы определить плотность зарядов, мы вычисляем нормальную производную на поверхности шара:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_{r=r_1} = \frac{q}{4\pi\epsilon_2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{r_1^{n-1}}{\zeta^{n+1}} P_n(\cos \theta) - \frac{\varphi_s}{r_1}, \quad (7)$$

откуда плотность индуцированных зарядов будет:

$$\omega = -\epsilon_2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_{r=r_1} = -\frac{q}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{r_1^{n-1}}{\zeta^{n+1}} P_n(\cos \theta) + \frac{\epsilon_2 \varphi_s}{r_1}. \quad (8)$$

Полный заряд на поверхности шара равен:

$$q_1 = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \omega r_1^2 \sin \theta \, d\theta \, d\psi. \quad (9)$$

Хорошо известным свойством функций Лежандра является их ортогональность:

$$\int_0^\pi P_n(\cos \theta) P_m(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta = 0, \quad n \neq m. \quad (10)$$

Мы можем взять $m = 0$, $P_0(\cos \theta) = 1$, и получим, что интеграл от $P_n(\cos \theta)$ от 0 до π при $n > 0$ равен нулю. Следовательно:

$$q_1 = -q \frac{r_1}{\zeta} + 4\pi\epsilon_2 r_1 \varphi_s, \quad (11)$$

откуда для потенциала шара получаем:

$$\varphi_s = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q_1}{r_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q}{\zeta}, \quad (12)$$

где q_1 — избыточный заряд, который был предварительно сообщён изолированному шару. Если шар заземлён, то φ_s можно положить равным нулю.

Интересно заметить, что потенциал φ_1 от индуцированных на шаре зарядов в любой точке вне шара такой же, как и от заряда $4\pi\epsilon_2 b_0 = q_1$, диполя с моментом $4\pi\epsilon_2 b_1 = -q \frac{r_1^3}{\zeta^2}$ и т. д., расположенных в начале координат и ориентированных вдоль оси z (раздел 3.8). Имеется, однако, и другая простая интерпретация. Точку $z = \zeta'$ (рис. 36), где $\zeta' = r_1^2$, называют взаимной с точкой z по отношению к поверхности шара. Величина, обратная расстоянию от этой взаимной точки до точки наблюдения, согласно уравнению (8), стр. 159, будет:

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta'}{r}\right)^n P_n(\cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_1^{2n}}{\zeta^n} \frac{P_n(\cos \theta)}{r^{n+1}}. \quad (13)$$

Следовательно, полный потенциал (6) может быть записан в виде:

$$4\pi\epsilon_2 \varphi = \frac{q}{r_2} - \frac{qr_1}{\zeta} \frac{1}{r_2} + \frac{q_1}{r} + \frac{qr_1}{\zeta} \frac{1}{r}. \quad (14)$$

Вне шара потенциал φ равен потенциалу заряда q , расположенного в точке $z = \zeta$, плюс потенциал его изображения $q' = -q \frac{r_1}{\zeta}$, расположенного во взаимной точке $z = \zeta'$, плюс потенциал заряда q_1 (который равен нулю, если шар не заряжен), расположенного в центре, и потенциалу заряда $q \frac{r_1}{\zeta}$ в центре шара, благодаря которому потенциал шара принимает требуемое значение во внешнем поле.

3.23. Диэлектрический шар в поле точечного заряда. Потенциал в любой точке вне шара, проводимость которого равна нулю, а диэлектрическая проницаемость равна ϵ_1 , будет:

$$\varphi^+ = \varphi_0 + \varphi_1^+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q}{r_2} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{P_n(\cos \theta)}{r^{n+1}}. \quad (15)$$

Обозначение φ^+ будет применяться для обозначения потенциала или поля вне или на положительной стороне замкнутой поверхности. Разложение φ_1 по обратным степеням r внутри шара не пригодно, так как потенциал должен быть всюду конечен. Мы должны обратиться, следовательно, к другому решению уравнения Лапласа, которое получается из (1), если положить равными нулю все коэффициенты b_{nm} . В любой внутренней точке полный потенциал будет:

$$\varphi^- = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos \theta). \quad (r < r_1). \quad (16)$$

φ^- включает в себя как слагаемое от заряда q , так и слагаемое от индуцированной поляризации, поскольку особая точка, связанная с этим точечным зарядом, расположена вне области, для которой определено (16). Вблизи поверхности имеем $r < |\zeta|$, так что φ_0 может быть разложено как и в (3). Непосредственно с внешней стороны сферы:

$$\varphi^+ = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q}{\zeta} \left(\frac{r}{\zeta}\right)^n + \frac{b_n}{r^{n+1}} \right\} P_n(\cos \theta). \quad (17)$$

При переходе через поверхность:

$$\varphi^+ = \varphi^-, \quad \epsilon_2 \frac{\partial \varphi^+}{\partial r} = \epsilon_1 \frac{\partial \varphi^-}{\partial r} \quad (r = r_1). \quad (18)$$

Из этих граничных условий мы можем получить выражения для коэффициентов разложений:

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{q}{4\pi\zeta^{n+1}} \frac{2n+1}{n\epsilon_1 + (n+1)\epsilon_2}, \\ b_n &= \frac{q}{4\pi} \frac{r_1^{2n+1}}{\zeta^{n+1}} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2} \frac{n}{n\epsilon_1 + (n+1)\epsilon_2}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Потенциал в любой точке вне шара будет:

$$\varphi^+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{q}{r_2} + \frac{q}{4\pi} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n\epsilon_1 + (n+1)\epsilon_2} \frac{r_1^{2n+1}}{\zeta^{n+1}} \frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}, \quad (20)$$

тогда как во внутренних точках

$$\varphi^- = \frac{q}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n\epsilon_1 + (n+1)\epsilon_2} \frac{r^n}{\zeta^{n+1}} P_n(\cos\theta). \quad (21)$$

Существенно отметить, что области с бесконечно большой диэлектрической проницаемостью ведут себя подобно незаряженным проводникам. По мере того как ϵ_1 становится очень большим, первый член ряда (20), соответствующий $n=0$, равен нулю, так что в пределе получается соотношение (6) для случая $q_1=0$.

3.24. Шар в параллельном поле. По мере того как точечный источник q удаляется от центра, поле в окрестности шара становится однородным и параллельным. Мы рассмотрим теперь случай шара, помещённого в диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ϵ_2 , в однородном параллельном внешнем поле E_0 , направленном вдоль положительной оси z . Первоначальный потенциал равен тогда

$$\varphi_0 = -E_0 z = -E_0 r \cos\theta = -E_0 r P_1(\cos\theta). \quad (22)$$

Следует заметить, что φ_0 уже не регулярен на бесконечности, поскольку сам источник бесконечно удалён. Потенциал вне шара, вызванный индуцированными поверхностными зарядами или поляризацией, будет попрежнему:

$$\varphi_1^+ = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}. \quad (23)$$

Если шар является проводящим, то результирующий потенциал на его поверхности и внутри него должен быть постоянен и равен φ_s . Таким образом,

$$\varphi_s = -E_0 r_1 P_1(\cos\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{P_n(\cos\theta)}{r_1^{n+1}}. \quad (24)$$

φ_s не зависит от θ , откуда следует, что

$$b_0 = r_1 \varphi_s, \quad b_1 = r_1^3 E_0, \quad b_n = 0 \text{ при } n > 1, \quad (25)$$

$$\varphi^+ = -E_0 r \cos\theta + E_0 r_1^3 \frac{\cos\theta}{r^2} + \varphi_s \frac{r_1}{r}. \quad (26)$$

Плотность заряда и полный заряд равны соответственно:

$$\omega = 3\epsilon_2 E_0 \cos\theta + \frac{\epsilon_2 \varphi_s}{r_1}, \quad q_1 = 4\pi r_1 \epsilon_2 \varphi_s. \quad (27)$$

Потенциал индуцированных поверхностных зарядов равен, следовательно, потенциалу диполя с моментом $p = 4\pi\epsilon_2 E_0 r_1^3$, т. е. с моментом, пропорциональ-

ным объёму шара. Если шар заряжен, то к этому потенциалу добавляется потенциал от заряда q_1 .

Если шар является диэлектрическим с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 , то потенциал во внутренних точках имеет вид (16). Для того чтобы удовлетворить граничным условиям (18), коэффициенты должны быть теперь равны:

$$\left. \begin{aligned} a_0 = b_0 = 0, \quad a_1 = \frac{-3\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0, \quad b_1 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} r_1^3 E_0, \\ a_n = b_n = 0 \quad \text{при } n > 1. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Результирующий потенциал будет тогда:

$$\left. \begin{aligned} \varphi^+ &= -E_0 r \cos \theta + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} r_1^3 E_0 \frac{\cos \theta}{r^2}, \\ \varphi^- &= -\frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0 r \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Внутри шара поле параллельно и однородно:

$$E^- = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0. \quad (30)$$

Диэлектрическая постоянная сферы κ_1 может быть как больше κ_2 , так и меньше. Таким образом, поле внутри сферической полости в однородном диэлектрике с диэлектрической константой κ_2 равно:

$$E^- = \frac{3\kappa_2}{1 + 2\kappa_2} E_0 > E_0. \quad (31)$$

Далее мы замечаем, что индуцированное поле вне шара равно полю диполя, ориентированного вдоль оси z и имеющего момент:

$$p = 4\pi\epsilon_2 \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} r_1^3 E_0. \quad (32)$$

Очевидно, сферическая полость также ведёт себя как диполь. Этот эффект

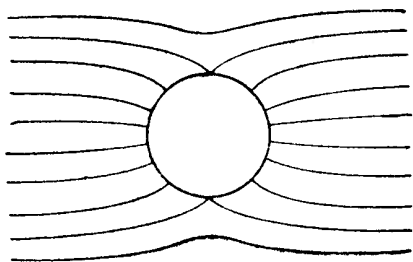


Рис. 37а. Проводящая сфера в параллельном поле. Окружающая среда — воздух.

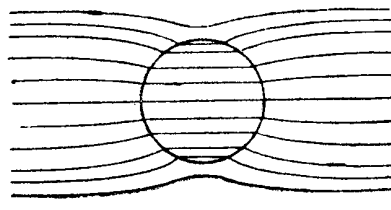


Рис. 37б. Сфера из диэлектрика в параллельном поле. Окружающая среда — воздух.

легко может быть понят, если мы вспомним, что на стенках полости находятся связанные заряды с плотностью $\omega' = -nP_2$, где P_2 — поляризация внешней среды.

В случае диэлектрического шара в воздухе $\epsilon_2 = \epsilon_0$. Поляризация шара будет тогда:

$$P_1 = \epsilon_0 (\kappa_1 - 1) E^- = 3 \frac{\kappa_1 - 1}{\kappa_1 + 2} \epsilon_0 E_0, \quad (33)$$

а его дипольный момент:

$$p = \frac{4}{3} \pi r_1^3 P_1 = 4\pi r_1^3 \frac{\kappa_1 - 1}{\kappa_1 + 2} \epsilon_0 E_0. \quad (34)$$

Энергия такого поляризованного шара во внешнем поле будет:

$$U_1 = -\frac{1}{2} \int_V \mathbf{P}_1 \mathbf{E}_0 dv = -2\pi r_1^3 \frac{\kappa_1 - 1}{\kappa_1 + 2} \epsilon_0 E_0^2 = -\frac{1}{2} p E_0. \quad (35)$$

Поляризация диэлектрика изменяет поле внутри шара. Это изменение удобно выражать непосредственно через $\mathbf{P}_1$: Коэффициент деполаризации L определяется соотношением:

$$\mathbf{E}^- = \mathbf{E}_0 - L \mathbf{P}_1. \quad (36)$$

Из (30) и соотношения $\mathbf{P}_1 = \epsilon_0 (\kappa_1 - 1) \mathbf{E}^-$ можно подсчитать, что для шара параллельном поле

$$L = \frac{1}{3\epsilon_0} \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_2 (\kappa_1 - 1)}. \quad (37)$$

В случае шара, находящегося в воздухе, $\kappa_2 = 1$ и $L = \frac{1}{3\epsilon_0}$.

ЗАДАЧА ОБ ЭЛЛИПСОИДЕ

3.25. Свободные заряды на проводящем эллипсоиде. В эллипсоидальных координатах в силу соотношений (135), стр. 62, уравнение Лапласа имеет вид:

$$(\eta - \zeta) R_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(R_\xi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) + (\zeta - \xi) R_\eta \frac{\partial}{\partial \eta} \left(R_\eta \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) + \\ + (\xi - \eta) R_\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(R_\zeta \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right) = 0. \quad (1)$$

Свойства эллипсоидальных гармонических функций, удовлетворяющих этому уравнению, были подробно изучены; мы построим здесь лишь некоторые простейшие из них, которых будет достаточно для задач, с которыми нам придётся встретиться.

Рассмотрим прежде всего проводящий эллипсоид, помещённый в однородный диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ϵ_2 . Главные полуоси эллипсоида пусть будут a, b, c и пусть q — полный заряд эллипсоида. Первоначально мы предположим, что внешнее поле отсутствует. Мы хотим определить потенциал и распределение зарядов на проводящей поверхности.

Чтобы решить эту задачу, необходимо найти потенциальную функцию, удовлетворяющую уравнению (1), регулярную на бесконечности и постоянную на поверхности данного эллипсоида. Пусть ξ будет параметром семейства эллипсоидов, конфокальных с заданным эллипсоидом $\xi = 0$, полуоси которого определяются величинами a, b, c . Переменные η и ζ являются параметрами конфокальных гиперболоидов и служат для определения положения точки на любом из эллипсоидов $\xi = \text{const}$. Следовательно, на поверхности $\xi = 0$ потенциал φ должен быть независимым от η и ζ . Если мы сможем найти функцию только от ξ , удовлетворяющую уравнению (1) и ведущую себя на бесконечности должным образом, то её можно будет подобрать так, чтобы она правильно выражала потенциал в любой точке вне эллипсоида $\xi = 0$.

Итак, предположим, что $\varphi = \varphi(\xi)$. Уравнение Лапласа примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(R_\xi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) = 0, \quad R_\xi = \sqrt{(\xi + a^2)(\xi + b^2)(\xi + c^2)}, \quad (2)$$

что в результате интегрирования даёт:

$$\varphi(\xi) = C_1 \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\xi}{R_{\xi}}, \quad (3)$$

где C_1 — произвольная константа. Верхний предел выбран бесконечным для того, чтобы обеспечить соответствующее поведение φ на бесконечности.

Когда ξ становится весьма большим, R_{ξ} приближается к $\xi^{\frac{3}{2}}$ и

$$\varphi \cong \frac{2C_1}{\sqrt{\xi}} \quad (\xi \rightarrow \infty). \quad (4)$$

С другой стороны, уравнение эллипсоида может быть написано в виде:

$$\frac{x^2}{1 + \frac{a^2}{\xi}} + \frac{y^2}{1 + \frac{b^2}{\xi}} + \frac{z^2}{1 + \frac{c^2}{\xi}} = \xi. \quad (5)$$

Если $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ — расстояние от начала координат до какой-либо точки на эллипсоиде ξ , то очевидно, что по мере того, как ξ становится очень большим, $\xi \rightarrow r^2$ и, следовательно, на больших расстояниях от начала

$$\varphi \cong \frac{2C_1}{r}. \quad (6)$$

Следовательно, решение (3) в бесконечности регулярно. Соотношение (6) позволяет нам кроме того тотчас же определить значение константы C_1 . Действительно, выше было показано, что каково бы ни было распределение для удалённых точек, главный член разложения представляет собой потенциал точечного заряда, расположенного в начале координат и равного полному распределённому заряду, в данном случае q . Следовательно, $C_1 = \frac{q}{8\pi\epsilon_2}$, и потенциал в любой точке будет:

$$\varphi(\xi) = \frac{q}{8\pi\epsilon_2} \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\xi}{R_{\xi}}. \quad (7)$$

Эквипотенциальные поверхности — эллипсоиды $\xi = \text{const.}$ Уравнение (7) является эллиптическим интегралом, значения которого табулированы ¹⁾.

Чтобы получить нормальную производную, мы должны вспомнить, что расстояние вдоль криволинейной координаты u^1 измеряется не величиной du^1 , а $h_1 du^1$ (раздел 1.16). В эллипсоидальных координатах:

$$h_1 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)}}{R_{\xi}}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_2} \frac{1}{\sqrt{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)}}. \quad (9)$$

Плотность заряда на поверхности $\xi = 0$ будет:

$$\omega = -\epsilon_2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{\xi=0} = \frac{q}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{\eta\zeta}}. \quad (10)$$

Если теперь в трёх уравнениях (132), стр. 61, определяющих x , y , z через ξ , η , ζ , мы положим $\xi = 0$, то без труда убедимся, что

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{\eta\zeta}{a^2 b^2 c^2} \quad (\xi = 0). \quad (11)$$

¹⁾ См. например, J a h n k e — E m d e, Tables of Functions, 2 изд., Teubner, 1933.

Следовательно, плотность заряда на поверхности эллипсоида в прямоугольных координатах будет:

$$\omega = \frac{q}{4\pi abc} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}. \quad (12)$$

Интересны несколько частных случаев. Если две оси одинаковы, то тело превращается в сфероид и выражение (7) может быть проинтегрировано в элементарных функциях. Например, если $a = b > c$, то мы имеем сплюснутый сфероид и

$$\varphi = \frac{q}{8\pi\epsilon_2} \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi + a^2) \sqrt{\xi + c^2}} = \frac{q}{4\pi \sqrt{a^2 - c^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{\xi + c^2}}. \quad (13)$$

При $c = 0$ сфероид вырождается в плоский диск. С другой стороны, если $a > b = c$, то мы имеем вытянутый сфероид и для потенциала получаем:

$$\varphi = \frac{1}{8\pi\epsilon_2} \frac{q}{\sqrt{a^2 - b^2}} \ln \frac{\sqrt{\xi + a^2} + \sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{\xi + a^2} - \sqrt{a^2 - b^2}}. \quad (14)$$

Эксцентриситет вытянутого сфероида равен $e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$. По мере того как $e \rightarrow 1$, сфероид вырождается в тонкий длинный стержень.

3.26. Проводящий эллипсоид в параллельном поле. Мы предположим сначала, что постоянное параллельное поле E_0 направлено вдоль оси x , т. е. вдоль главной оси эллипсоида. Потенциал этого поля равен:

$$\varphi_0 = -E_0 x = -E_0 \left\{ \frac{(\xi + a^2)(\eta + a^2)(\zeta + a^2)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (15)$$

где значение x в эллипсоидальных координатах подставлено из уравнения (132), стр. 61. Ясно, что этот первичный потенциал является решением уравнения Лапласа и имеет вид произведения трёх функций:

$$\varphi_0 = C_1 F_1(\xi) F_2(\eta) F_3(\zeta), \quad C_1 = -\frac{E_0}{\sqrt{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}}. \quad (16)$$

Однако на бесконечности он не регулярен.

Если мы хотим удовлетворить граничным условиям, то потенциал индуцированных зарядов φ_1 должен на каждой из поверхностей $\xi = \text{const.}$ меняться таким же точно образом, как и φ_0 . От φ_0 он отличается регулярным поведением на бесконечности. Мы предположим поэтому, что φ_1 является функцией вида

$$\varphi_1 = C_2 G_1(\xi) F_2(\eta) F_3(\zeta), \quad (17)$$

где

$$F_2(\eta) = \sqrt{\eta + a^2}, \quad F_3(\zeta) = \sqrt{\zeta + a^2}. \quad (18)$$

Для того чтобы найти уравнение, которому удовлетворяет функция $G(\xi)$, мы должны только подставить (17) и (18) в (1), в результате чего получим:

$$R_{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(R_{\xi} \frac{dG_1}{d\xi} \right) - \left(\frac{b^2 + c^2}{4} + \frac{\xi}{2} \right) G_1 = 0. \quad (19)$$

Уравнение (19) — обыкновенное уравнение второго порядка, имеющее два независимых решения. Одно из них, как мы уже знаем, будет $F_1 = \sqrt{\xi + a^2}$,

Известна теорема¹⁾, которая гласит, что если одно решение линейного дифференциального уравнения второго порядка известно, то второе независимое решение может быть определено из него посредством квадратур. Если y_1 — решение уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = 0, \quad (20)$$

то независимое решение y_2 будет:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p dx}}{y_1^2} dx. \quad (21)$$

В нашем случае:

$$p(\xi) = \frac{1}{R_\xi} \frac{dR_\xi}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \ln R_\xi; \quad (22)$$

откуда

$$G_1(\xi) = F_1 \int \frac{d\xi}{F_1^2 R_\xi}. \quad (23)$$

Пределы интегрирования произвольны, но легко показать, что $G_1(\xi)$ убывает в бесконечности должным образом, если верхний предел выбран бесконечным. Потенциал индуцированных зарядов будет, следовательно:

$$\varphi_1 = \varphi_0 \frac{C_2}{C_1} \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi + a^2) R_\xi}. \quad (24)$$

Наконец, константа C_2 определяется из условия, что на эллипсоиде $\xi = 0$ потенциал постоянен и равен нулю:

$$0 = \varphi_0 \left\{ 1 + \frac{C_2}{C_1} \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi + a^2) R_\xi} \right\}. \quad (25)$$

В любой внешней точке потенциал будет:

$$\varphi = \varphi_0 \left\{ 1 - \frac{1}{\int_0^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi + a^2) R_\xi}} \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi + a^2) R_\xi} \right\}. \quad (26)$$

Интеграл, с которым мы встретились в (26), называется *эллиптическим интегралом второго рода*²⁾.

В случае поля, параллельного одной из малых осей, необходимо только заменить выше параметр a^2 на b^2 или c^2 . Таким путём потенциал вокруг проводящего эллипсоида, ориентированного произвольным образом относительно однородного параллельного поля E_0 , может быть определён разложением поля E_0 на три компоненты, параллельные главным осям эллипсоида, и сложением трёх получающихся в результате решений типа (26).

3.27. Диэлектрический эллипсоид в параллельном поле. Теперь не представит труда подсчитать то изменение, которое вносит в однородное

¹⁾ См. например: Ince, Ordinary Differential Equations, стр. 122, Longmans, 1927. Также Степанов, Курс дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1945, стр. 183. Прим. ред.

²⁾ См. например, Е. Т. Уиттекер и Г. Н. Ватсон, Курс современного анализа. Л. — М., ГТТИ, 1933, т. II, стр. 366 и след.

параллельное поле диэлектрический эллипсоид. Предположим, что диэлектрическая проницаемость эллипсоида равна ϵ_1 , и что он помещён в однородную среду с диэлектрической проницаемостью ϵ_2 . Поле E_0 направлено произвольно по отношению к системе отсчёта и имеет компоненты вдоль осей эллипсоида, равные E_{0x} , E_{0y} , E_{0z} .

Рассмотрим прежде всего компоненту E_{0x} . Вне эллипсоида результирующий потенциал должен представляться в общем виде теми же функциями, что и в предыдущем примере, и отличаться только значением константы C_2 . Следовательно, в этой области

$$\varphi^+ = \varphi_0 + \varphi_1^+ = F_1(\xi) F_2(\eta) F_3(\zeta) \left\{ C_1 + C_2 \int_{\xi}^{\infty} \frac{ds}{(s+a^2) R_s} \right\}. \quad (27)$$

Под знаком интеграла переменная ξ заменена на s для того, чтобы не путать её с нижним пределом.

Внутренняя область эллипсоида соответствует значениям $-c^2 \leq \xi \leq 0$, если $a \geq b \geq c$. В этой области φ^- должен меняться с изменением η и ξ , как это определяется функцией $F_2(\eta) F_3(\zeta)$, и, поскольку уравнение (19) имеет только два независимых решения, зависимость от ξ , чтобы удовлетворить уравнению Лапласа, должна представляться либо функцией $F_1(\xi)$, либо $G_1(\xi)$. Но функция $G_1(\xi)$ обращается в бесконечность при $\xi = -c^2$, в то время как $F_1(\xi)$ конечна во всех точках внутри поверхности $\xi = 0$. Таким образом, потенциал внутри этой области должен иметь вид:

$$\varphi^- = C_3 F_1(\xi) F_2(\eta) F_3(\zeta), \quad (28)$$

где C_3 — некоторая постоянная¹⁾.

Константы C_2 и C_3 должны быть подобраны так, чтобы удовлетворить граничным условиям:

$$\varphi^+ = \varphi^-, \quad \epsilon_2 \left[\frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi^+}{\partial \xi} \right]_{\xi=0} = \epsilon_1 \left[\frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi^-}{\partial \xi} \right]_{\xi=0}. \quad (29)$$

Первое из них даёт:

$$C_3 = C_1 + C_2 \int_0^{\infty} \frac{ds}{(s+a^2) R_s}; \quad (30)$$

а второе:

$$C_2 = \frac{abc}{2} \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{\epsilon_2} C_3. \quad (31)$$

Поскольку $\varphi_0 = -E_{0x}x$, мы находим, что потенциал во внутренних точках эллипсоида равен:

$$\varphi^- = -\frac{E_{0x}x}{1 + \frac{abc}{2\epsilon_2} (\epsilon_1 - \epsilon_2) A_1}, \quad A_1 = \int_0^{\infty} \frac{ds}{(s+a^2) R_s}, \quad (32)$$

а напряжённость поля:

$$E_x^- = \frac{E_{0x}}{1 + \frac{abc}{2\epsilon_2} (\epsilon_1 - \epsilon_2) A_1}. \quad (33)$$

¹⁾ Выбор $F_1(\xi)$ вместо $G_1(\xi)$ в тех случаях, когда поле не параллельно оси z , диктуется требованием конечности внутри эллипсоида напряжённости поля, а не потенциала φ . Прим. ред.

Компоненты вдоль двух других осей находятся точно таким же способом. Полный потенциал приложенного поля равен

$$\varphi_0 = -E_{0x}x - E_{0y}y - E_{0z}z, \quad (34)$$

и результирующий потенциал во внутренних точках эллипсоида

$$\varphi^- = - \left\{ \frac{E_{0x}x}{1 + \frac{abc}{2\varepsilon_2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)A_1} + \frac{E_{0y}y}{1 + \frac{abc}{2\varepsilon_2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)A_2} + \frac{E_{0z}z}{1 + \frac{abc}{2\varepsilon_2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)A_3} \right\}, \quad (35)$$

где константы A_2 и A_3 определяются выражениями:

$$A_2 = \int_0^\infty \frac{ds}{(s+b^2)R_s}, \quad A_3 = \int_0^\infty \frac{ds}{(s+c^2)R_s}. \quad (36)$$

Остальные компоненты изменённого поля равны:

$$E_y^- = \frac{E_{0y}}{1 + \frac{abc}{2\varepsilon_2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)A_2}, \quad E_z^- = \frac{E_{0z}}{1 + \frac{abc}{2\varepsilon_2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)A_3}. \quad (37)$$

Мы приходим к выводу, имеющему большое практическое значение: *если приложенное поле первоначально однородно и параллельно, то результирующее поле внутри эллипсоида также однородно и параллельно, независимо от ориентации осей эллипсоида.* Однако E^- вектор в общем случае не параллелен вектору E_0 , так как константы A_1 , A_2 , A_3 равны между собой только в случаях вырождения.

Вне эллипсоида результирующий потенциал, связанный с первичной компонентой E_{0x} , даётся соотношением (27)

$$\varphi^+ = \varphi_0 \frac{1 + \frac{abc}{2} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \int_0^\infty \frac{ds}{(s+a^2)R_s}}{1 + \frac{abc}{2} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \int_0^\infty \frac{ds}{(s+a^2)R_s}}, \quad (38)$$

с соответствующими потенциалами для полей E_{0y} и E_{0z} . Если в (38) мы положим $\varepsilon_1 \rightarrow \infty$, то найдём, что φ^+ сведётся к (26). Потенциал вне тела с бесконечной диэлектрической проницаемостью точно такой же, как и вне заземлённого проводника той же формы.

Индукцированная поляризация P_1 внутри эллипсоида стремится уменьшить приложенное поле. Коэффициенты деполяризации L_1 , L_2 , L_3 определяются соотношениями

$$E_x^- = E_{0x} - L_1 P_{1x}, \quad E_y^- = E_{0y} - L_2 P_{1y}, \quad E_z^- = E_{0z} - L_3 P_{1z}. \quad (39)$$

Полагая $P_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)E^-$ и вводя компоненты E^- из (33) и (37), получаем:

$$L_j = \frac{abc}{2\varepsilon_2} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 - 1} A_j \quad (j=1, 2, 3). \quad (40)$$

Чаще всего средой вне эллипсоида является свободное пространство, $\varepsilon_2 = 1$.

В этом случае коэффициенты деполяризации зависят только от формы эллипсоида:

$$L_j = \frac{abc}{2\epsilon_0} A_j \quad (j = 1, 2, 3). \quad (41)$$

Поляризация может быть тогда определена из простой формулы:

$$P_x = \frac{E_0}{L_1 + \frac{1}{\epsilon_1 - \epsilon_0}} \quad (42)$$

и соответствующих выражений для P_y и P_z .

3.28. Определение E и D с помощью полостей. Поле внутри эллипсоидальной полости даётся уравнениями (33) и (37) при $\epsilon_1 = \epsilon_0$. Два случая представляют значительный интерес: дискообразная полость, плоскость которой нормальна к направлению приложенного поля, и иглообразная полость, параллельная полю.

Рассмотрим сначала случай внешнего поля, направленного вдоль оси z . Тогда, по мере того, как c становится очень малым, эллипсоид вырождается в диск, изображённый на рис. 38, *a*. Мы не уменьшим общности, если положим, что диск круглый, т. е. $a = b$; в этом случае эллиптический интеграл A_3 сведётся к более элементарной функции:

$$A_3 = \int_0^\infty \frac{ds}{(s+a^2)(s+c^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{(a^2-c^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{c} - \arctg \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{c} \right). \quad (43)$$

Предел произведения $a^2 c A_3$ при $c \rightarrow 0$ равен 2. Поле внутри полости чисто поперечное, и так как $\kappa_1 = 1$, равно:

$$E^- = \kappa_2 E_0 = \frac{1}{\epsilon_0} D_0. \quad (44)$$

С точностью до постоянного множителя ϵ_0 , напряжённость поля E^- внутри дискообразной полости равна вектору D_0 первоначального поля в диэлектрике.

На рисунке 38, *b* поле направлено вдоль главной оси вытянутого сфероида $a > b = c$;

$$A_1 = \int_0^\infty \frac{ds}{(s+b^2)(s+a^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{a^2 e^3} \left(2e + \ln \frac{1+e}{1-e} \right), \quad (45)$$

где $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ — эксцентриситет. При

$e \rightarrow 1$ сфероид вырождается в длинную, иглообразную полость, а произведение $ab^2 A_1$ стремится к нулю. В каждой точке внутри полости $E^- = E_0$: напряжённость поля E^- точно такая же, какая первоначально была в диэлектрике.

Такого рода определение векторов E и D с помощью полостей в весоной среде было предложено лордом Кельвином. Очевидно, прямые измерения E или D путём определения сил или вращающих моментов, действующих на малое пробное тело, в твёрдом диэлектрике невыполнимы, а если сделать

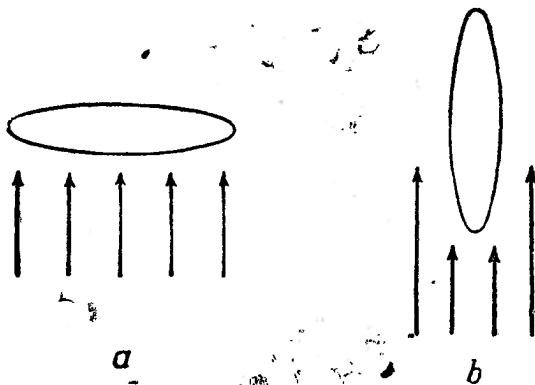


Рис. 38. Иллюстрация к определению векторов E и D с помощью полостей. Стрелки показывают направление приложенного поля.

полость, то поле внутри неё будет зависеть от её формы. Наш подсчёт показывает, однако, что напряжённость электрического поля в диэлектрике совпадает с напряжённостью, измеренной в иглообразной полости, показанной на рис. 38, б, в то время как поле, измеряемое в плоской щели рис. 38, а, отличается от D в диэлектрике только на постоянный множитель.

3.29. Вращающие моменты, действующие на эллипсоид. Напряжённость электростатического поля может быть измерена наблюдением вращающего момента, действующего на малое пробное тело известной формы и известной диэлектрической проницаемости, подвешенное в поле на нити. Обратно, если напряжённость поля известна, то подобный эксперимент может быть использован для определения диэлектрической проницаемости или восприимчивости образца диэлектрического вещества. В общем случае, поле и поляризация внутри образца неоднородны, и точные вычисления трудны или невозможны. С другой стороны, преимущества для этой цели пробного тела эллипсоидальной формы очевидны. Поляризация всего образца одинакова, и действующий вращающий момент зависит только от объёма и диэлектрической проницаемости его.

Согласно уравнению (49), стр. 108, энергия диэлектрического тела во внешнем поле равна:

$$U = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{2} \int_V E - E_0 dv, \quad (46)$$

где, как и выше, E обозначает результирующее поле внутри тела, а E_0 — первоначальное поле. Если тело имеет эллипсоидальную форму и поле E_0 однородно, то, согласно (33) и (37), имеем:

$$E - E_0 = \frac{E_{0x}^2}{1 + \frac{abc}{2} \left(\frac{x_1 - x_2}{x_2} \right) A_1} + \frac{E_{0y}^2}{1 + \frac{abc}{2} \left(\frac{x_1 - x_2}{x_2} \right) A_2} + \frac{E_{0z}^2}{1 + \frac{abc}{2} \left(\frac{x_1 - x_2}{x_2} \right) A_3} \quad (47)$$

и так как объём эллипсоида равен $\frac{4}{3} \pi abc$, то

$$U = \frac{2}{3} \pi abc (\epsilon_2 - \epsilon_1) E - E_0. \quad (48)$$

Эта энергия зависит не только от напряжённости первоначального поля, но и от ориентации главных осей по отношению к полю. Пусть вектор $\delta\omega$ представляет собой виртуальный поворот эллипсоида вокруг его центра, а T — результирующий вращающий момент, действующий со стороны поля. Как T , так и $\delta\omega$ являются аксиальными векторами (стр. 68), и компоненты $\delta\omega_x$, $\delta\omega_y$, $\delta\omega_z$ представляют собой углы поворота соответственно относительно осей x , y и z . Работа, совершённая при таком повороте, равна:

$$\delta W = T \delta\omega = T_x \delta\omega_x + T_y \delta\omega_y + T_z \delta\omega_z. \quad (49)$$

Эта работа должна компенсироваться уменьшением потенциальной энергии U . В силу однородности и квадратичности (47) мы можем написать:

$$\delta U = \frac{2}{3} \pi abc (\epsilon_2 - \epsilon_1) \delta(E - E_0) = \frac{4}{3} \pi abc (\epsilon_2 - \epsilon_1) E - \delta E_0. \quad (50)$$

Оси отсчёта были взяты совпадающими с главными осями эллипсоида. Относительно этой системы, фиксированной в теле, изменение E_0 , соответствующее виртуальному повороту $\delta\omega$, будет:

$$\delta E_0 = [E_0, \delta\omega], \quad (51)$$

откуда для баланса энергии получаем:

$$\begin{aligned}\delta U &= \frac{4}{3} \pi abc (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) E^- [E_0, \delta \omega] = \\ &= \frac{4}{3} \pi abc (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) [E^-, E_0] \delta \omega = -\delta W.\end{aligned}\quad (52)$$

Так как компоненты виртуального поворота произвольны, то вращающий момент, действующий со стороны поля, равен, следовательно:

$$T = \frac{4}{3} \pi abc (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) [E^-, E_0]. \quad (53)$$

Компоненты этого вращающего момента:

$$\left. \begin{aligned}T_x &= \frac{2}{3} \pi (abc)^2 \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2} E_{0y} E_{0z} \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{A_3 - A_2}{\left(1 + \frac{abc}{2} \frac{x_1 - x_2}{x_2} A_2\right) \left(1 + \frac{abc}{2} \frac{x_1 - x_2}{x_2} A_3\right)} \right\}, \\ T_y &= \frac{2}{3} \pi (abc)^2 \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2} E_{0z} E_{0x} \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{A_1 - A_3}{\left(1 + \frac{abc}{2} \frac{x_1 - x_2}{x_2} A_3\right) \left(1 + \frac{abc}{2} \frac{x_1 - x_2}{x_2} A_1\right)} \right\}, \\ T_z &= \frac{2}{3} \pi (abc)^2 \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_2} E_{0x} E_{0y} \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{A_2 - A_1}{\left(1 + \frac{abc}{2} \frac{x_1 - x_2}{x_2} A_1\right) \left(1 + \frac{abc}{2} \frac{x_1 - x_2}{x_2} A_2\right)} \right\}.\end{aligned}\right\} \quad (54)$$

Для исследования устойчивости эллипсоида мы должны выяснить относительную величину констант A_1 , A_2 и A_3 . Прежде всего, из их определения (32) и (36) ясно, что все они положительны при любых значениях a , b , c . Легко показать, кроме того, что порядок их относительных величин обратен порядку величин этих трёх параметров. Таким образом, если $a > b > c$, то $A_1 < A_2 < A_3$. Далее находим, что сумма этих трёх интегралов может быть приведена к более простому интегралу, который, если ввести новую переменную $u = R_s^2$, даёт:

$$A_1 + A_2 + A_3 = \frac{2}{abc}. \quad (55)$$

Поскольку все три константы положительны, отсюда следует, что

$$0 \leq A_j \leq \frac{2}{abc} \quad (j = 1, 2, 3), \quad (56)$$

$$1 + \frac{abc}{2} \frac{x_1 - x_2}{x_2} A_j > 0 \quad (j = 1, 2, 3). \quad (57)$$

Таким образом, знаменатели в (54) положительны и при $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, и при $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, и направление компонент вращающего момента не зависит от соотношения величин ε_1 и ε_2 . Если приложенное поле параллельно какой-либо из трёх главных осей эллипсоида, то все эти компоненты равны нулю, так что эти три направления являются положениями равновесия.

Устойчивость равновесия зависит от направления вращающего момента, а последнее, как мы видели, зависит только от знака $A_j - A_k$, который, в свою очередь, определяется относительной величиной осей a , b и c . Так,

например, $A_3 - A_2$ положительно, если $b > c$, и отрицательно, если $c > b$. Компоненты вращающего момента таковы, что стремятся повернуть большую ось в направлении поля кратчайшим путём. Эллипсоид, большая ось которого направлена вдоль приложенного поля, находится в состоянии устойчивого равновесия; положения равновесия вдоль малых осей неустойчивы.

ЗАДАЧИ

1. Координаты ξ, η, ζ получаются из прямоугольных координат преобразованием:

$$\xi + i\eta = f(x + iy), \quad \zeta = z,$$

где f — какая-либо аналитическая функция комплексного переменного $x + iy$. Показать следующие свойства этого преобразования:

а. Дифференциал линейного элемента равен:

$$ds^2 = h^2 (d\xi^2 + d\eta^2) + d\zeta^2,$$

где $h = 1/|f'|$, а f' обозначает производную по переменному $x + iy$.

б. Система ξ, η, ζ ортогональна.

с. Преобразование конформно, так что любая бесконечно малая фигура в плоскости xu преобразуется в геометрически подобную бесконечно малую фигуру на плоскости $\xi\eta$.

Показать, что в этих координатах лапласиан скалярной функции φ принимает вид:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{h^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

и найти выражения для дивергенции и ротора вектора.

2. Как и в задаче 1, рассмотреть координаты, определяемые следующими преобразованиями:

$$\xi + i\eta = \ln(x + iy), \quad (1)$$

$$x + iy = a \operatorname{ch}(\xi + i\eta), \quad (2)$$

$$x + iy = (\xi + i\eta)^2, \quad (3)$$

$$\xi + i\eta = (x + iy)^2, \quad (4)$$

$$\xi + i\eta = \ln \frac{x + iy + a}{x + iy - a}, \quad (5)$$

$$x + iy = ia \operatorname{ctg} \frac{(\xi + i\eta)}{2}. \quad (6)$$

3. Система кольцевых или тороидальных координат λ, μ, ψ определяется соотношениями:

$$x = r \cos \psi, \quad y = r \sin \psi, \quad z = \frac{\sin \mu}{\operatorname{ch} \lambda + \cos \mu}$$

где

$$r = \frac{\operatorname{sh} \lambda}{\operatorname{ch} \lambda + \cos \mu}.$$

Показать, что поверхности $\psi = \text{const.}$ являются меридиональными плоскостями, проходящими через ось z , поверхности $\lambda = \text{const.}$ — торами, меридианальные сечения которых — круги:

$$x^2 + z^2 - 2x \operatorname{cth} \lambda + 1 = 0,$$

а поверхности $\mu = \text{const.}$ — сферы, меридиональные сечения которых — круги:

$$x^2 + z^2 + 2z \operatorname{tg} \mu - 1 = 0.$$

Показать, что система ортогональна, за исключением некоторых особых точек, и найти эти точки. Найти выражение для дифференциала линейного элемента, и показать, что:

$$\Delta\varphi = \frac{\operatorname{sh}^2 \lambda}{r^3} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \right) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right) + \frac{r}{\operatorname{sh}^2 \lambda} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} \right\}$$

Разделяются ли переменные в уравнении Лапласа в этих координатах?

4. Пусть $F(x, y, z) = \lambda$ представляет семейство поверхностей, и пусть F имеет непрерывные частные производные первого и второго порядков. Показать, что необ-

ходимым и достаточным условием для того, чтобы эти поверхности могли быть эквипотенциальными, является

$$\frac{\Delta F}{(\text{grad } F)^2} = f(\lambda),$$

где $f(\lambda)$ — функция только λ . Показать, что если это условие выполнено, то потенциал имеет вид:

$$\varphi = c_1 \int e^{-\int f(\lambda) d\lambda} d\lambda + c_2,$$

где c_1 и c_2 — константы.

5. Показать, что $\psi = F(z + ix \cos u + iy \sin u)$ является решением уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$$

в трёх измерениях для всех значений параметра u и для любой аналитической функции F . Показать далее, что любая линейная комбинация из $2n + 1$ независимых частных решений может быть выражена в виде интеграла

$$\psi = \int_{-\pi}^{+\pi} (z + ix \cos u + iy \sin u)^n f_n(u) du,$$

где $f_n(u)$ — рациональная функция от e^{iu} , и, наконец, что любое решение уравнения Лапласа, аналитическое в некоторой сферической области, может быть выражено в виде интеграла

$$\psi = \int_{-\pi}^{\pi} f(z + ix \cos u + iy \sin u, u) du.$$

(См. Е. Т. Уиттекер и Г. Н. Ватсон, Курс современного анализа, гл. XVIII.)

6. Заряд распределён вдоль бесконечной прямой линии с постоянной плотностью q кулонов/метр. Показать, что напряжённость поля в любой точке, расстояние которой от этой линии равно r , будет:

$$E_r = \frac{1}{2\pi\epsilon} \frac{q}{r},$$

и что это поле является отрицательным градиентом потенциальной функции:

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi\epsilon} q \ln \frac{r_0}{r},$$

где r_0 — произвольная константа, представляющая собою радиус цилиндра, на котором $\varphi = 0$.

Исходя из этих результатов, показать, что если заряд распределён в двумерном пространстве с плотностью $\omega(x, y)$, то потенциал в любой точке плоскости x, y будет

$$\varphi(x', y') = \frac{1}{2\pi\epsilon} \int \omega \ln \frac{r_0}{r} da,$$

где $r = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$, и что $\varphi(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{1}{\epsilon} \omega(x, y).$$

Показать далее, что эта потенциальная функция в общем случае нерегулярна в бесконечности, и что если полный заряд равен нулю, т. е. $\int \omega da = 0$, то при $r \rightarrow \infty$ произведение $r\varphi$ ограничено.

7. Заряд распределён в двумерном пространстве по площади конечных размеров с плотностью $\omega(x, y)$. Дать выражение потенциала в точке x', y' , расположенной вне этой площади в виде ряда по степеням r — расстояния от произвольного начала отсчёта до фиксированной точки x', y' . Показать, что последовательные члены являются потенциалами ряда двумерных диполей.

8. Пусть C — какой-либо замкнутый контур в плоскости xu , ограничивающий площадь S , и пусть φ — двумерная скалярная потенциальная функция. Показать с помощью теоремы Грина, что

$$2\pi u(x', y') = \int_S \ln r \Delta \varphi da - \int_C \left(\ln r \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \ln r \right) ds,$$

где $u = \varphi(x', y')$, если x', y' — внутренняя точка, и $u = 0$, если x', y' — внешняя точка. В этой формуле

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad r = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$$

и n — внешняя нормаль к контуру C .

9. В двумерном пространстве проведена окружность радиуса a . Положение на окружности определяется углом θ' . Потенциал на круге является заданной функцией $\varphi(a, \theta')$. Показать, что в любой точке с полярными координатами r, θ , лежащей вне окружности, потенциал будет:

$$\varphi(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(a, \theta') \frac{r^2 - a^2}{r^2 + a^2 - 2ar \cos(\theta - \theta')} d\theta'.$$

Этот интеграл был получен Пуассоном.

10. Бесконечная прямая линия с плотностью заряда q кулонов на единицу длины идёт параллельно проводящему цилиндру. Показать, что индуцированное поле совпадает с полем соответствующим образом расположенного изображения. Найти распределение заряда на цилиндре.

11. Радиусы двух бесконечно длинных проводящих цилиндров кругового сечения равны соответственно a и b , а расстояние между их осями есть c , причём $c > a + b$. Внешняя среда — жидкость с диэлектрической проницаемостью ϵ . Разность потенциалов между цилиндрами V вольт. Получить выражения для плотности зарядов и для механической силы, действующей на единицу длины одного цилиндра со стороны другого. Решить задачу, введя в уравнение Лапласа биполярные координаты и снова применяя метод изображений.

12. Бесконечный диэлектрический цилиндр помещён в параллельное однородное поле E_0 , перпендикулярное к его оси. Подсчитать индуцированный на единице длины дипольный момент и коэффициент деполяризации L (стр. 188).

13. Два точечных заряда помещены в бесконечную однородную диэлектрическую жидкость. Показать, что кулоновы силы, действующие со стороны одного заряда на другой, могут быть найдены вычислением интеграла

$$L[F = \int \left\{ \epsilon E(E_n) - \frac{\epsilon}{2} E^2 n \right\} da$$

(уравнение (72), стр. 141) по любой бесконечной плоскости, пересекающей прямую, соединяющую эти два заряда.

14. Два жидких диэлектрика с диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 соприкасаются вдоль бесконечной плоскости. Два заряда q_1 и q_2 расположены по разные стороны от этой поверхности на расстоянии a от неё, причём соединяющая их прямая перпендикулярна этой плоскости. Рассчитать силы, действующие на заряды q_1 и q_2 , учитывая, что они не равны между собой.

15. Проводящий шар радиуса r_1 с зарядом Q расположен в поле точечного заряда q того же знака. Пусть $q \ll Q$. Начертить график силы, действующей со стороны шара на заряд q в функции расстояния от центра шара, и найти точку, в которой направление силы меняется на обратное.

16. Заряд q расположен внутри проводящей полый сферы радиуса b , в точке, расстояние которой от центра полости равно a , причём $a < b$. Рассчитать потенциал сферы, плотность зарядов на внутренней её поверхности и силу, действующую на заряд q . Предполагается, что сфера изолирована и не заряжена.

17. Найти распределение зарядов, двумерное поле которого в любой точке плоскости xu имеет потенциал

$$\varphi = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left(\operatorname{arctg} \frac{1+x}{y} + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{y} \right).$$

18. Показать, что электростатический потенциал φ однозначно определяется значениями φ или $\partial\varphi/\partial n$ на поверхности проводников, помещённых в изотропный неоднородный диэлектрик.

19. Система из n проводящих тел помещена в изотропную, но необязательно однородную диэлектрическую среду. Показать, что если при сообщении этим проводникам зарядов $q_1, q_2, \dots, q_n$ их потенциалы будут $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, а при сообщении зарядов $q'_1, q'_2, \dots, q'_n$ соответственно $\varphi'_1, \varphi'_2, \dots, \varphi'_n$, то

$$\sum_{i=1}^n q_i \varphi'_i = \sum_{i=1}^n q'_i \varphi_i$$

20. Найти в кулонах величину заряда, который необходимо сообщить металлической сфере радиуса a метров, чтобы повысить её потенциал по отношению к бесконечности на один вольт.

21. Бесконечная плоскость делит пространство на две части: одну, занятую диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ , и другую — воздухом. Заряд q расположен со стороны воздуха на расстоянии a от плоскости. Получить выражение для потенциала во всех точках в воздухе и в диэлектрике и показать, что потенциал в каждой из частей пространства может быть представлен с помощью соответствующих изображений.

Какова плотность ω' индуцированных или связанных зарядов на поверхности диэлектрика?

Рассчитать силу, действующую на заряд q , и работу, совершаемую при удалении заряда в бесконечность.

22. Радиусы двух металлических сфер равны соответственно a и b , а расстояние между их центрами c , причём $c > a + b$. При помещении заряда q_a на первую из них, потенциал её принимает определённое значение φ_a . Потенциал второй сферы φ_b посредством её заземления поддерживается равным нулю. Получить выражения для зарядов q_a и q_b и найти их распределения на сферах путём построения последовательности изображений во взаимных точках сфер (стр. 185).

Метод этот принадлежит лорду Кельвину. См. дискуссию у F. Noether в Riemann — Weber, Differential und Integralgleichungen der Physik, т. II, стр. 281, 1927.

23. Две бесконечные параллельные проводящие поверхности совпадают с плоскостями $x = 0$ и $x = a$. Поверхности эти заземлены. Заряд q расположен на оси x в точке $x = c$, причём $0 < c < a$. Показать, что плотность индуцированных на плоскости $x = 0$ зарядов будет

$$\omega(y, z) = \frac{q}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{2na - c}{\{(2na - c)^2 + r^2\}^{\frac{3}{2}}} - \frac{2na + c}{\{(2na + c)^2 + r^2\}^{\frac{3}{2}}} \right\},$$

где r — расстояние от начала координат до точки y, z на этой плоскости. Какова плотность зарядов на плоскости $x = a$? Показать, что полный заряд на двух плоскостях равен $-q$. (Келлог.)

24. Доказать, что поверхностная плотность заряда в любой точке заряженного эллипсоидального проводника пропорциональна расстоянию от центра эллипсоида до плоскости, касающейся поверхности эллипсоида в этой точке.

25. Уравнение (14), стр. 190, даёт потенциал вытянутого заряженного сфероида. Показать, что по мере того, как длина $\rightarrow \infty$, а эксцентриситет $\rightarrow 1$, эта функция стремится к логарифмической потенциальной функции двумерного пространства. Применить теорему к задаче 24 и найти величину заряда на единицу длины.

26. Заряд распределён с постоянной плотностью внутри эллипсоидальной полости, ограниченной двумя подобными эллипсоидальными поверхностями с главными осями a, b, c и $a\left(1 + \frac{\delta}{2}\right), b\left(1 + \frac{\delta}{2}\right), c\left(1 + \frac{\delta}{2}\right)$. Показать, что поле равно нулю во всех внутренних точках, и найти выражение для потенциала во внешних точках.

27. Большая ось проводящего вытянутого сфероида равна 20 см, а его эксцентриситет есть e . Сфероид подвешен в воздухе и несёт полный заряд q кулонов. Максимальная напряжённость поля у поверхности сфероида ни в одной точке не должна превышать 3×10^6 вольт/метр. Дать график зависимости наибольшей величины заряда, который может быть помещён на сфероиде при выполнении этого условия, от эксцентриситета.

28. Действие громоотводов было изучено Лармором (Proc. Roy. Soc. A, 90, 312, 1914) на следующей задаче. Полусфероидальный стержень возвышается над плоской проводящей поверхностью. Потенциал φ_0 заряженного облака над ним постоянен в окрестности стержня. Найти потенциальную функцию φ , постоянную на поверхно-

сти сфероиды и на плоскости. Нарисовать график отношения градиента потенциала на конце стержня к напряжённости приложенного поля в зависимости от эксцентриситета стержня. Предполагается, что длина стержня (большая полуось) фиксирована и равна одному метру. Рассмотреть влияние поперечных размеров стержня на поле как функцию эксцентриситета.

29. Очень тонкий круглый металлический диск радиуса a несёт заряд q . Показать, что плотность заряда на единицу площади равна.

$$\omega = \frac{q}{2\pi a} \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}}$$

где r — расстояние по радиусу от центра диска.

Подсчитать напряжённость поля на поверхности диска в вольтах на метр на кулон в зависимости от отношения r/a и начертить соответствующий график. Предполагается, что диск находится в воздухе.

30. Сфероидальное диэлектрическое тело подвешено в однородном электростатическом поле. Большая ось сфероиды вдвое длиннее его малой оси, а диэлектрическая проницаемость равна 4. Внешняя среда — воздух. При какой ориентации приложенного поля по отношению к осям вращающий момент максимален? Подсчитать величину этого наибольшего вращающего момента на единицу объёма материала и на вольт напряжённости приложенного поля.

31. В изотропной, но необязательно однородной среде поддерживается стационарное распределение токов. Показать, что в общем случае в среде появится объёмное распределение зарядов с плотностью:

$$\rho = -\frac{1}{\sigma} (\sigma \operatorname{grad} \varepsilon - \varepsilon \operatorname{grad} \sigma) \operatorname{grad} \varphi,$$

где σ и ε — соответственно проводимость и диэлектрическая проницаемость среды.

32. Две однородные изотропные среды, характеризующиеся константами ε_1, σ_1 и ε_2, σ_2 , соприкасаются по поверхности S . Поверхность S пересекают стационарные токи из одной среды в другую. Если φ_1 и φ_2 — углы между линиями тока и нормалью к поверхности в точке пересечения, то показать, что каждая линия тока преломляется по закону

$$\sigma_2 \operatorname{ctg} \varphi_2 = \sigma_1 \operatorname{ctg} \varphi_1.$$

Показать также, что на поверхности S появится заряд с поверхностной плотностью

$$\omega = \left(\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1} \right) J_n.$$

33. Во многих практических задачах, касающихся распределения токов, можно положить, что система идеально проводящих электродов помещена в плохо проводящую среду, которая либо однородна, либо имеет разрывы только на определённых заданных поверхностях. Потенциалы электродов поддерживаются постоянными и либо эти потенциалы, либо токи на электродах заданы. Показать, что распределение токов однозначно определяется потенциальной функцией, удовлетворяющей следующим условиям:

(а) $\Delta \varphi = 0$ во всех обыкновенных точках среды;

(б) $\varphi = \varphi_i$ — константа для i -го электрода;

(с) на поверхностях разрыва непрерывности среды условия перехода определяются соотношениями:

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \sigma_2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_2 = \sigma_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_1;$$

(d) регулярности в бесконечности

(е) условие (b) может быть заменено следующим:

$$I_i = - \oint_{S_i} \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n} da,$$

где σ — проводимость среды непосредственно у поверхности электрода, граничная поверхность которого есть S_i , и где I_i — полный ток, стекающий с электрода.

34. Система электродов помещена в проводящую среду. Потенциалы $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ на электродах поддерживаются неизменными, а $I_1, I_2, \dots, I_n$ — токи, стекающие с электродов. Показать, что полное джоулево тепло, выделяющееся в среде, равно:

$$Q = \sum_{i=1}^n \varphi_i I_i.$$

35. Доказать, что в системе стационарных токов, поддерживаемых электродвижущими силами, токи распределяются таким образом, что выделяющееся тепло будет наименьшим для действительного распределения по сравнению со всеми другими, совпадающими с действительным в области, где действуют электродвижущие силы, и соленоидальными во всём остальном пространстве. Среда предполагается изотропной, и соотношение между напряжённостью поля и плотностью тока линейным.

36. Электрод в виде круглого диска радиуса a соприкасается с бесконечным полупространством с проводимостью σ (например, поверхность земли). Расстояние до всех других электродов велико по сравнению с радиусом a . Показать, что распределение токов определяется условиями:

(а) $\Delta\varphi = 0$ внутри проводящего полупространства;

(б) $\partial\varphi/\partial n = 0$ на всей границе, за исключением места соприкосновения с диском;

(с) $\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{I}{2\pi\sigma a \sqrt{a^2 - r^2}}$ в месте соприкосновения с диском, где r — расстояние по радиусу от центра диска.

37. Стационарный ток течёт по тонкому изогнутому листу постоянной толщины. Предполагается, что лист настолько тонкий, что распределение токов по существу двумерное. Если ξ и η — криволинейные координаты на поверхности листа, то геометрические свойства поверхности определяются выражением для элемента дуги:

$$ds^2 = g_{11}d\xi^2 + 2g_{12}d\xi d\eta + g_{22}d\eta^2,$$

где свойства g_{ik} были определены в разделе 1.14. Скалярный потенциал, определяющий распределение токов, удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{g_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - g_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{g_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - g_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} = 0.$$

Определить сопряжённую функцию ψ из соотношения

$$d\psi = -\frac{g_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - g_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} d\xi + \frac{g_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - g_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} d\eta$$

и показать, что ψ удовлетворяет тому же уравнению, что и φ . Функции φ и ψ являются потенциальной и токовой функциями на поверхности, а функция $\Phi = \varphi + i\psi$ называется комплексной потенциальной функцией на той же поверхности. Выберем теперь ξ и η так, чтобы $\zeta = \xi + i\eta$ само было такой функцией. Показать, что в этом случае φ удовлетворяет простому уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = 0$$

и что φ и ψ связаны соотношением

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi^2} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi},$$

тогда как линейный элемент сводится к $ds^2 = g_{11}(d\xi^2 + d\eta^2)$. Таким образом, комплексные функции на поверхности являются аналитическими функциями друг от друга, и преобразование $\xi + i\eta = x + iy$ отображает конформно поверхность листа на комплексную z -плоскость. Если конформное отображение поверхности на плоскость известно, то задача нахождения распределения токов сводится к решению уравнения Лапласа в прямоугольных координатах. Обратно, если распределение токов на изогнутой поверхности может быть определено экспериментально, то тем самым мы найдём конформное отображение поверхности на плоскость. (Кирхгоф.)

38. Используя задачу 37, показать, что

$$z = ae^{i\beta} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$$

является конформной стереографической проекцией сферы радиуса a на комплексную плоскость, где $z = x + iy$ и β — экваториальный угол или долгота, а θ — широта на сфере. Показать далее, что

$$\Phi = \varphi + i\psi = f\left(2ae^{i\beta} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}\right) = f(z)$$

будет комплексной потенциальной функцией на сфере, где f — любая аналитическая функция z .

39. Постоянный ток I втекает на проводящую полую сферу радиуса a с поверхностной проводимостью σ в некоторой точке на поверхности и покидает поверхность в диаметрально противоположной точке. Найти потенциал в любой точке и уравнение линий тока.

40. Цилиндрический конденсатор образован двумя концентрическими металлическими трубками. Пространство между трубками заполнено твёрдым диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ , но этот диэлектрик непосредственно с трубками не соприкасается, а отделён от них тонкими слоями непроводящей жидкости с диэлектрической проницаемостью ϵ' . Концы металлических трубок находятся настолько далеко за концами твёрдого диэлектрика, что полем рассеяния можно пренебречь. Между металлическими электродами поддерживается постоянная разность потенциалов. Получить выражение для относительного удлинения диэлектрика. (Kemble, *Phys. Rev.* 7, 614, 1916.)

ГЛАВА IV

МАГНИТОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Методы, развитые для исследования электростатического поля, широко применимы и к магнитостатическому полю. Любое магнитостатическое поле может быть заменено тождественным по структуре электростатическим полем, создаваемым соответствующим распределением диполей и фиктивных двойных слоёв. Однако эта эквивалентность чисто формальная. В магнитостатике нет величины, соответствующей свободному заряду, и особые поверхности, возникающие при введении двойных электрических слоёв, в действительности не существуют. Двойной слой приводит фактически к многозначности потенциала и соответственно к неконсервативности поля. Каковы бы ни были аналитические преимущества электростатической аналогии, необходимо помнить, что физическая структура поля, создаваемого стационарным распределением токов, принципиально отличается от строения поля любой конфигурации электрических зарядов.

ОБЩИЕ СВОЙСТВА МАГНИТОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

4.1. Уравнения поля и векторный потенциал. Уравнения, которым должны удовлетворять магнитные векторы стационарного поля, получаются из уравнений Максвелла, если в них положить производные по времени равными нулю:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (\text{I}), \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (\text{II})$$

К ним надо добавить уравнение непрерывности, которое в этом случае имеет вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0. \quad (\text{III})$$

В стационарном поле распределение токов соленоидально; все линии тока либо замыкаются сами на себя, либо начинаются и кончаются в бесконечности. Из (II) следует также, что линии вектора $\mathbf{B}$ — линии магнитного потока, как их обычно называют, — также замыкаются сами на себя. Предположим, что плотность потока поля, создаваемого нитью тока I_1 , есть $\mathbf{B}_1$. Все линии этого поля пронизывают контур I_1 . Часть потока $\mathbf{B}_1$ может, однако, пронизывать и вторую нить тока I_2 . Понятие «связи через поток», часто используемое при практическом исследовании электромагнитных вопросов, основано на соленоидальных свойствах тока и магнитного потока в стационарном состоянии. Распространение этого понятия на медленно меняющиеся поля (квазистационарное состояние) законно лишь до тех пор, пока $\partial \rho / \partial t$ остаётся исчезающе малым по сравнению с $\operatorname{div} \mathbf{J}$.

Применяя теорему Стокса к уравнению (I), мы получаем эквивалентное интегральное уравнение

$$(\text{Ia}) \quad \int_C \mathbf{H} d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{J} n d\mathbf{a} = I,$$

где S — любая поверхность, опирающаяся на контур C , а I — полный ток, пронизывающий эту поверхность. Линейный интеграл от $\mathbf{H}$ по замкнутому контуру равен охватываемому этим контуром току; это означает, что *магнитное поле неконсервативно*.

Любое соленоидальное поле может быть представлено с помощью векторного потенциала. Как и в разделе 1.9, уравнение (II) тождественно удовлетворяется, если мы положим:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (1)$$

Вектор $\mathbf{A}$ нужно теперь выбрать так, чтобы удовлетворить уравнению (I), и, следовательно, должно быть дано соотношение $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{B})$ между магнитными векторами. Если среда неферромагнитная, то это соотношение линейно; если, кроме того, среда однородна и изотропна, то мы можем положить $\mathbf{B} = \mu \cdot \mathbf{H}$ и придём тогда к следующему уравнению для векторного потенциала:

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \mu \mathbf{J}. \quad (2)$$

В разделе 1.9 было показано, что к вектору $\mathbf{A}$ можно прибавить градиент произвольной скалярной функции ψ , не изменяя соотношения (1). Соответствующим выбором ψ дивергенцию $\mathbf{A}$ всегда можно сделать равной нулю. Векторный потенциал однозначно определяется уравнением (2) и условием

$$\text{div } \mathbf{A} = 0. \quad (3)$$

В прямоугольных координатах уравнение (2) сводится тогда к такому:

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}, \quad (4)$$

которое надо понимать в том смысле, что оператор Лапласа действует на каждую из *прямоугольных* компонент $\mathbf{A}$.

4.2. Скалярный потенциал. Существование потенциальной функции, связанной с электростатическим полем, является прямым следствием безвихревого характера поля вектора $\mathbf{E}$. Если распределение зарядов в виде двойных слоёв исключено, то ротор $\mathbf{E}$ всюду равен нулю; отсюда мы можем выразить $\mathbf{E}$ как отрицательный градиент скаляра ϕ . Кроме того, поскольку циркуляция вектора $\mathbf{E}$ равна нулю по *любому* замкнутому пути в рассматриваемой области, потенциал будет однозначной функцией координат.

Область пространства, ограниченная определёнными граничными поверхностями, называется связной, если можно пройти из одной точки области в любую другую бесконечным числом путей, каждый из которых полностью расположен в рассматриваемой области. Любые два пути, которые могут быть совмещены непрерывной деформацией, не выводящей за пределы области, называются взаимно совместимыми. Любая замкнутая кривая или поверхность называется приводимой, если непрерывной деформацией, не выводящей за пределы области, она может быть стянута в точку. Два взаимно совместимых пути вместе образуют приводимый контур. Если, наконец, область такова, что все пути, соединяющие любые две точки, взаимно совместимы, или такова, что все замкнутые контуры, проведённые внутри неё, приводимы, то она называется односвязной. Электростатическое поле объёмно распределённых зарядов образует односвязную область пространства, внутри которой любой замкнутый путь является приводимым.

Геометрические свойства магнитного поля стационарного распределения токов совершенно противоположны геометрическим свойствам электростатического поля. Обозначим область, занятую токами, через V_1 , а область,

в которой $\mathbf{J} = 0$, обозначим через V_2 . На рис. 39 изображено плоское сечение поля; заштрихованные участки изображают, например, поперечные сечения проводников, по которым протекают токи. В области V_1 ротор $\mathbf{H}$ не равен нулю и, соответственно, скалярного потенциала не существует. В области V_2 имеем:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \quad (5)$$

и, следовательно, в этой области $\mathbf{H}$ может быть выражено в виде отрицательного градиента скалярной функции $\varphi^*(x, y, z)$

$$\mathbf{H} = -\operatorname{grad} \varphi^*. \quad (6)$$

Линейный интеграл от $\mathbf{H}$ по какому-либо контуру, соединяющему две точки P и Q и расположенному целиком в области V_2 , будет:

$$\int_P^Q \mathbf{H} ds = - \int_P^Q \operatorname{grad} \varphi^* ds = \varphi^*(P) - \varphi^*(Q). \quad (7)$$

Однако не все пути, по которым можно из точки P прийти в точку Q , являются взаимно совместимыми. Замкнутая кривая, состоящая из двух отрезков, подобных PEQ и QFP неприводима, так как при стягивании в точку она неизбежно должна пересечь область V_1 .

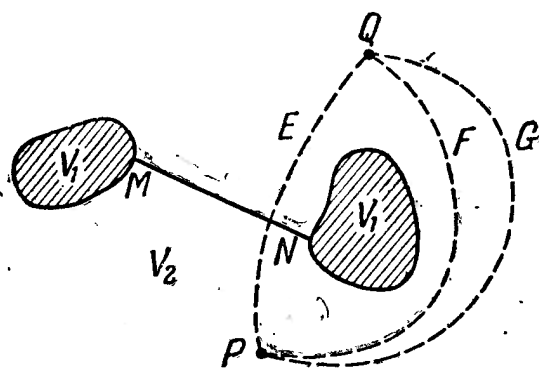


Рис. 39. Иллюстрация к понятию двусвязной области.

Таким образом, область V_2 , занятая магнитным полем и внешняя по отношению к областям, в которых распределены токи, является многосвязной. Скалярный потенциал φ^* — многозначная функция положения, поскольку к её значению в любой точке P можно прибавить в результате n полных обходов вокруг тока I член nI . Область V_2 может быть, однако, превращена в односвязную, а потенциал —

в однозначную функцию, введением сечений или перегородок, предотвращающих образование таких замкнутых контуров, которые охватывали бы токи. Эти воображаемые перегородки, конечно, могут быть проведены бесконечным числом способов. Но если ток состоит из пучка нитей, образующих одну замкнутую петлю, то проще всего представлять себе перегородку в виде поверхности, затягивающей эту петлю. Линия MN на рис. 39 изображает след подобной поверхности. В таком «разгороженном» пространстве линейный интеграл от $\mathbf{H}$ по любому замкнутому пути равен нулю, поскольку барьер исключает контуры, охватывающие токи. Соответственно, потенциальная функция φ^* является однозначной. В точках, лежащих по разные стороны от барьера, но бесконечно близко к нему, значения φ^* отличаются на I . Таким образом, мы имеем скачок потенциальной функции, равный

$$\varphi_+^* - \varphi_-^* = I, \quad (8)$$

где индексы $+$ и $-$ относятся к положительной и отрицательной сторонам поверхности. Согласно разделу 3.16, скачок φ^* при переходе через барьер эквивалентен скачку при переходе через поверхностный дипольный слой с постоянным моментом I на единицу площади. Только в том случае, когда все токи равны нулю и источниками поля являются постоянные магниты, потенциал становится однозначной функцией положения.

4.3. Исследование Пуассона. В любой точке, в которой плотность токов равна нулю, в частности во внутренних точках постоянных магнитов,

мы имеем:

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \operatorname{grad} \varphi^* + \mu_0 (\mathbf{M} + \mathbf{M}_0). \quad (9)$$

Поскольку дивергенция вектора $\mathbf{B}$ равна нулю, скалярный потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta \varphi^* = -\rho^*, \quad \rho^* = -\operatorname{div} (\mathbf{M} + \mathbf{M}_0). \quad (10)$$

Величина ρ^* является магнитным аналогом плотности «связанных зарядов», и в старой литературе её часто называли «магнитным флюидом» Пуассона¹⁾.

При переходе через какую-либо поверхность разрыва в среде магнитные векторы, согласно разделу 1.13, удовлетворяют условиям

$$n(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0, \quad [n, \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1] = 0. \quad (11)$$

Эквивалентные условия, налагающиеся на скалярный потенциал, будут, следовательно:

$$\left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial n}\right)_2 - \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial n}\right)_1 = -\omega^*, \quad \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial t}\right)_2 - \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial t}\right)_1 = 0, \quad (12)$$

$$\omega^* = n \{ (\mathbf{M} + \mathbf{M}_0)_1 - (\mathbf{M} + \mathbf{M}_0)_2 \}. \quad (13)$$

Внутри любой замкнутой области, в которой содержатся постоянные магниты и поляризующееся вещество, но плотность тока в проводимости $\mathbf{J}$ равна нулю, магнитоэстатическая задача математически эквивалентна электростатической.

Вычисление потенциала φ^* по плотностям ρ^* и ω^* было описано в предыдущей главе. Мы имеем:

$$\varphi^*(x', y', z') = \frac{1}{4\pi} \int \rho^*(x, y, z) \frac{1}{r} dv + \frac{1}{4\pi} \int \omega^*(x, y, z) \frac{1}{r} da. \quad (14)$$

где, как обычно, $r = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}$. Для того чтобы вычислить интеграл, мы должны знать как постоянное намагничение $\mathbf{M}_0$, так и индуцированное намагничение $\mathbf{M}$; однако индуцированное намагничение само является функцией напряжённости поля, а значит и функцией φ^* . Однако если постоянно намагниченные тела расположены не слишком близко друг к другу, то индуцированным намагничеством можно обычно пренебречь по сравнению с $\mathbf{M}_0$. Затем делаются некоторые предположения относительно $\mathbf{M}_0$ и постоянное или первичное поле источников подсчитывается с помощью (14). В окружающих поляризующихся телах, например мягком железе, это первичное поле индуцирует намагничество $\mathbf{M}$. Расчёт индуцированного или вторичного поля представляет собой краевую задачу, которую мы рассмотрим позже.

Подсчитаем теперь магнитный момент намагниченного образца вещества. По аналогии с электростатикой (раздел 3.11) этот момент выражается интегралом

$$\mathbf{m} = \int_V \mathbf{r}_1 \rho^*(\xi, \eta, \zeta) dv + \int_S \mathbf{r}_1 \omega^*(\xi, \eta, \zeta) da, \quad (15)$$

где $\mathbf{r}_1 = i\xi + j\eta + k\zeta$ (рис. 30, стр. 163) является вектором, проведённым из начала координат к элементу «магнитного заряда», а S — поверхность, ограничивающая тело, объём которого есть V . Заменяя ρ^* и ω^* их значениями согласно (10) и (13) и выполняя затем преобразование посредством тождества

$$\xi \operatorname{div} \mathbf{M} = \operatorname{div} (\xi \mathbf{M}) - \mathbf{M} \operatorname{grad} \xi,$$

¹⁾ В оригинале — ideal magnetic matter. Прим. ред.

применяемого к каждой из компонент r_1 , мы найдём, что (15) принимает вид:

$$m = \int_V (M + M_0) dv. \quad (16)$$

Магнитный момент тела равен объёмному интегралу от его намагничивания.

Наконец, если уравнение (14) преобразовать по формуле (9), стр. 168, заменив ρ^* и ω^* из (10) и (13), то для потенциала φ^* мы получим:

$$\varphi^*(x', y', z') = \frac{1}{4\pi} \int_V (M + M_0) \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right) dv. \quad (17)$$

Если размеры намагниченного тела достаточно малы по сравнению с расстоянием до наблюдателя в точке (x', y', z') , то изменением $\operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right)$ в объёме V можно пренебречь, и мы получаем выражение для скалярного потенциала магнитного диполя

$$\varphi^*(x', y', z') = \frac{1}{4\pi} m \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right) = - \frac{1}{4\pi} m \operatorname{grad}' \left(\frac{1}{r} \right). \quad (18)$$

РАСЧЁТ ПОЛЯ ДАННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТОКОВ

4.4. Закон Био и Савара. Выше было показано, что в однородной изотропной среде с постоянной магнитной проницаемостью μ векторный потенциал удовлетворяет системе уравнений

$$\Delta A_j = -\mu J_j, \quad \operatorname{div} A = 0 \quad (j = 1, 2, 3), \quad (1)$$

где A_j — прямоугольная компонента вектора A , но ограничение прямоугольными координатами не должно обязательно распространяться на скалярный оператор Δ . Рассматривая A_j и J_j как вариантыные скаляры, мы можем непосредственно применить к уравнению (1) теорию интегрирования уравнения Пуассона, развитую в разделе 3.4. Если область распределения токов может быть ограничена сферой конечного радиуса, то каждая компонента векторного потенциала может быть выражена в виде интеграла

$$A_j(x', y', z') = \frac{\mu}{4\pi} \int J_j(x, y, z) \frac{1}{r} dv \quad (j = 1, 2, 3), \quad (2)$$

распространённого по всему пространству. Эти компоненты можно теперь соединить в вектор

$$A(x', y', z') = \frac{\mu}{4\pi} \int J(x, y, z) \frac{1}{r} dv, \quad (3)$$

где $r = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}$. Кроме того, из раздела 3.7 следует, что если J — ограниченная и интегрируемая функция, то A — непрерывная функция координат (x', y', z') , имеющая непрерывные первые производные в каждой точке как внутри распределения токов, так и вне его. Если J и все производные порядка ниже n конечны и непрерывны, то векторная функция A имеет непрерывные производные всех порядков ниже $n + 1$.

Векторный потенциал, определённый выражением (3), удовлетворяет условию $\operatorname{div} A = 0$ только тогда, когда распределение токов пространственно ограничено. Интеграл регулярен и, следовательно, допускает дифференцирование под знаком интеграла:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}' A &= \frac{\mu}{4\pi} \int J(x, y, z) \operatorname{grad}' \left(\frac{1}{r} \right) dv = \\ &= - \frac{\mu}{4\pi} \int J(x, y, z) \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right) dv. \end{aligned} \quad (4)$$

$$J \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right) = \operatorname{div} \frac{J}{r} - \frac{1}{r} \operatorname{div} J = \operatorname{div} \frac{J}{r}, \quad (5)$$

в силу условия $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$. Следовательно:

$$\operatorname{div}' \mathbf{A} = -\frac{\mu}{4\pi} \int \operatorname{div} \frac{\mathbf{J}}{r} dv = -\frac{\mu}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{J} \mathbf{n}}{r} da = 0, \quad (6)$$

ибо все линии тока замыкаются сами на себя в конечной области пространства, и поверхность S может быть выбрана так, чтобы нормальная компонента тока на ней отсутствовала.

Обратим внимание на то, что слагаемое $d\mathbf{A}$ векторного потенциала параллельно элементу тока $\mathbf{J} dv$. Уравнение (3) может быть упрощено в случае токов в линейных проводниках, т. е. в проводниках, поперечные сечения которых da настолько малы по сравнению с расстоянием r , что вектор плотности тока на этом сечении можно считать постоянным и направленным вдоль проводника:

$$\mathbf{J} dv = \mathbf{J} da ds = I ds, \quad (7)$$

где I — полный ток, протекающий по проводнику, а ds — элемент длины проводника. Поскольку стационарный ток I должен быть постоянен во всём контуре, выражение (3) принимает вид:

$$\mathbf{A}(x', y', z') = \frac{\mu I}{4\pi} \int_C \frac{1}{r} ds, \quad (8)$$

где интеграл должен быть распространён по всему контуру C .

Поле может быть получено непосредственно из (3) подсчётом ротора $\mathbf{A}$ в точке (x', y', z') . В силу сходимости интеграла и непрерывности его первой производной, дифференциальный оператор может быть введён под знак интеграла:

$$\mathbf{H}(x', y', z') = \frac{1}{4\pi} \int \operatorname{rot}' \left\{ \frac{\mathbf{J}(x, y, z)}{r} \right\} dv. \quad (9)$$

Разложение подинтегрального выражения в соответствии с элементарными правилами даёт:

$$\operatorname{rot}' \frac{\mathbf{J}(x, y, z)}{r} = \frac{1}{r} \operatorname{rot}' \mathbf{J}(x, y, z) + \left[\operatorname{grad}' \frac{1}{r}, \mathbf{J}(x, y, z) \right]. \quad (10)$$

Но плотность тока является функцией текущих координат x, y, z , в то время как дифференцирование производится по координатам x', y', z' ; соответственно первый член в правой части равен нулю, и для вектора поля получаем:

$$\mathbf{H}(x', y', z') = \frac{1}{4\pi} \int \left[\operatorname{grad}' \left(\frac{1}{r} \right), \mathbf{J}(x, y, z) \right] dv = \frac{1}{4\pi} \int \left[\mathbf{J}(x, y, z), \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \right] dv. \quad (11)$$

Если $\mathbf{r}^0$ — единичный вектор, направленный от элемента тока к точке наблюдения, то уравнение (11) эквивалентно уравнению

$$\mathbf{H}(x', y', z') = \frac{1}{4\pi} \int \frac{[\mathbf{J}, \mathbf{r}^0]}{r^2} dv, \quad (12)$$

которое для линейного контура принимает вид:

$$\mathbf{H}(x', y', z') = \frac{I}{4\pi} \int_C \frac{[\mathbf{s}^0, \mathbf{r}^c]}{r^2} ds, \quad (13)$$

где $\mathbf{s}^0$ — единичный вектор, направленный вдоль элемента тока I . Закон, выраженный соотношением (13), часто формулируется в виде утверждения,

что каждый элемент тока вносит в полное поле слагаемое, равное

$$dH = \frac{1}{4\pi} \frac{[\mathbf{s}^0, \mathbf{r}^0]}{r^2} Ids. \quad (14)$$

По существу это и есть тот вывод, который сделали из опытов Био и Савар в 1820 году. Нельзя привести неоспоримых доводов, заставляющих отвергнуть формулу (14), кроме того факта, что такое разложение (13) на дифференциальные элементы неоднозначно, так как к (14) можно прибавить любую векторную функцию, интеграл которой по замкнутому контуру равен нулю. Все стационарные токи состоят из замкнутых нитей, так что трудно представить себе опыт, который позволил бы определить слагаемое от отдельного элемента. Очевидно, при применении соотношения (14) для исследования поля не может получиться никакой ошибки в результате, если подразумевать, что эти слагаемые должны быть впоследствии просуммированы по замкнутому контуру.

В то время как векторный потенциал от бесконечно малого элемента тока направлен параллельно элементу, вектор поля $\mathbf{H}$ направлен нормально к плоскости, в которой расположены элемент тока и линия, соединяющая его с точкой наблюдения, т. е. к плоскости, определяемой единичными векторами $\mathbf{s}^0$ и $\mathbf{r}^0$. Если θ — угол, который образует вектор $\mathbf{r}^0$ с вектором $\mathbf{s}^0$, то напряжённость поля будет:

$$dH = \frac{I}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r^2} ds. \quad (15)$$

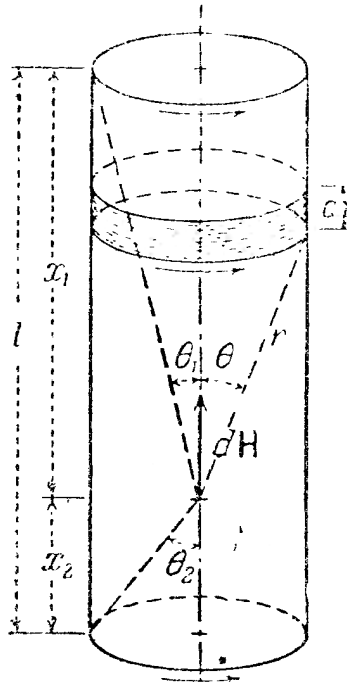


Рис. 40. Соленоидальное распределение токов.

Поле вдоль оси соленоида может быть, например, приближённо подсчитано, если мы заменим действительное распределение токов эквивалентными листками тока пренебрежимо малой толщины (рис. 40).

Если мы имеем n витков на метр, по которым течёт ток в I ампер, то плотность тока в листке будет $K = In$. Слагаемое от соленоидального элемента радиуса a и длины dx на расстоянии x по оси от точки наблюдения будет:

$$dH = \frac{nI}{2} \frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}} dx = \frac{nI}{2} d(\cos \theta). \quad (16)$$

Эти слагаемые направлены вдоль оси. В любой точке на оси поле будет:

$$H = \frac{nI}{2} \left(\frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + a^2}} - \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + a^2}} \right) = \frac{nI}{2} (\cos \theta_2 + \cos \theta_1). \quad (17)$$

В центре оно равно:

$$H = nI \frac{l}{\sqrt{l^2 + 4a^2}}. \quad (18)$$

Другой простой случай, представляющий некоторый интерес, это прямой провод бесконечной длины и кругового сечения. Предположим, что ток I распределён по сечению провода равномерно. Проще всего получить решение, воспользовавшись преимуществом цилиндрической симметрии поля при применении интегрального закона $\oint \mathbf{H} ds = I$. Если r — расстояние от оси по радиусу,

а a — радиус провода, то очевидно

$$\begin{aligned} 2\pi r H &= \pi r^2 J = \frac{r^2}{a^2} I, \quad H = \frac{I}{2\pi a^2} r, \quad (r < a), \\ 2\pi r H &= I, \quad H = \frac{I}{2\pi r}, \quad (r > a). \end{aligned} \quad (19)$$

Поле вне провода, не зависящее от его радиуса, может быть получено также и из закона Био и Савара. Если, однако, мы попытаемся подсчитать векторный потенциал с помощью соотношения (8), то увидим, что интеграл расходится, так как в рассматриваемом случае распределение токов не ограничивается областью конечной протяжённости. В действительности векторный потенциал будет:

$$A_r = A_\theta = 0, \quad A_z = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{1}{r}, \quad (r > a), \quad (20)$$

что можно проверить, подсчитав ротор в цилиндрических координатах (стр. 56). При $r \rightarrow \infty$ эта функция становится бесконечной.

4.5. Разложение векторного потенциала. Следуя примеру раздела 3.11 для случая скалярного потенциала, мы найдём разложение векторного потенциала стационарного распределения токов по координатам точки относительно заданного начала отсчёта. Чтобы обеспечить регулярность на бесконечности, мы предположим, что вся область распределения токов может быть окружена сферой конечного радиуса R , с центром в начале координат. Мы будем рассматривать здесь только точки наблюдения вне этой сферы. Распределение токов может быть совершенно произвольным, но необходимо предположить, что магнитная проницаемость μ всюду одинакова и постоянна. Практически мы исключаем тем самым только ферромагнитные вещества, допуская проводники любой другой природы и формы, помещённые в диэлектрик любого вида.

Обозначения в основном будут те же, какие были приняты в разделе 3.11 и показаны на рис. 30. Для удобства суммирования мы будем обозначать координаты точки P через x_1, x_2, x_3 , а координаты элемента тока через ξ_1, ξ_2, ξ_3 . Расстояние от начала O до точки P равно $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, а от элемента $J(\xi_1, \xi_2, \xi_3) dv$ до P :

$$r_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^3 (x_j - \xi_j)^2}.$$

В точке P векторный потенциал равен, следовательно:

$$A(x_j) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{J(\xi_j)}{r_2} dv, \quad (21)$$

где интеграл распространён по всему объёму V , ограниченному сферой радиуса R . Если $\mathbf{r}_1$ — вектор, компоненты которого ξ_j , то разложение $1/r_2$ в ряд Тэйлора около точки O даёт:

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} - \sum_{j=1}^3 \xi_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \xi_j \xi_k \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \left(\frac{1}{r} \right) - \dots \quad (22)$$

Соответственно, векторный потенциал может быть представлен в виде разложения:

$$\begin{aligned} A(x_j) &= \sum_{n=0}^{\infty} A^{(n)} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{r} \int J(\xi_j) dv - \frac{\mu}{4\pi} \int \left(\mathbf{r}_1 \text{grad} \frac{1}{r} \right) J(\xi_j) dv + \\ &+ \frac{\mu}{4\pi} \int \left\{ \mathbf{r}_1 \text{grad} \left(\mathbf{r}_1 \text{grad} \frac{1}{r} \right) \right\} J(\xi) dv - \dots \end{aligned} \quad (23)$$

Заметим, что $\mathbf{J}$ и $\mathbf{r}_1$ являются функциями ξ_j , по которым должно производиться интегрирование; функция $\frac{1}{r}$ зависит только от x_j и оператор grad действует только на эти координаты.

В силу своего стационарного характера, распределение токов может быть разложено на нити, причём все они замыкаются сами на себя в пределах области V . Выделим одну из этих нитей. Предположим, что da_1 — бесконечно малое сечение этой нити, а ток, протекающий по этому линейному контуру, пусть будет $I = |\mathbf{J}| da_1$. Положение точки на контуре определяется вектором $\mathbf{r}_1$, проведённым из начала координат (рис. 41), а элемент длины вдоль контура в направлении тока будет $d\mathbf{r}_1$. Тогда для каждой нити или трубки:

$$A^{(0)} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I}{r} \int_C d\mathbf{r}_1 = 0, \quad (24)$$

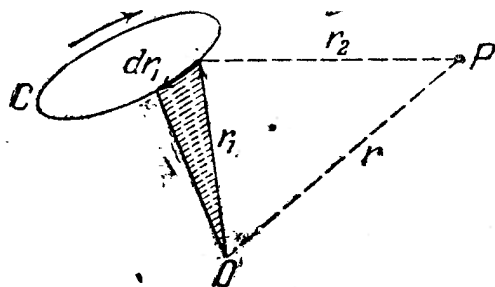
где C — замкнутая нить тока (если V содержит только часть токов, то $A^{(0)}$ не обязательно равно нулю).

Таким образом, главным членом разложения будет второй, который мы преобразуем следующим образом:

$$\left(\mathbf{r}_1 \text{grad} \frac{1}{r}\right) d\mathbf{r}_1 = \frac{1}{2} [\mathbf{r}_1, d\mathbf{r}_1] \text{grad} \frac{1}{r} + \frac{1}{2} d \left\{ \left(\mathbf{r}_1 \text{grad} \frac{1}{r}\right) \mathbf{r}_1 \right\}. \quad (25)$$

Полный дифференциал при интегрировании по замкнутой нити исчезает, а член $\frac{1}{2} [\mathbf{r}_1, d\mathbf{r}_1] = n da$ является вектором площади бесконечно малого тре-

угольника, заштрихованного на рис. 41. Следовательно:



$$A^{(1)} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \int \left[n da, \text{grad} \frac{1}{r} \right]. \quad (26)$$

Величина

$$m = I \int n da = \frac{I}{2} \int_C [\mathbf{r}_1, d\mathbf{r}_1], \quad (27)$$

Рис. 41. Замкнутая нить тока, образующая контур C .

по определению, есть *магнитный дипольный момент* замкнутого тока. Поскольку поверхностный интеграл может быть распространён

на любую регулярную поверхность, опирающуюся на контур, постольку магнитный момент зависит только от силы тока и формы контура.

Дипольный потенциал всего распределения получается суммированием по всем нитям тока. По определению, магнитный дипольный момент объёмного распределения токов по отношению к началу отсчёта O есть:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int_V [\mathbf{r}_1, \mathbf{J}] dv. \quad (28)$$

Намагничение $\mathbf{M}$ области с током точно также может быть определено, как *магнитный момент единицы объёма*:

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{m}}{dv} = \frac{1}{2} [\mathbf{r}_1, \mathbf{J}]. \quad (29)$$

Очевидно, намагничение по отношению к данному началу отсчёта будет получаться всякий раз, когда плотность тока имеет компоненту, перпендикулярную к вектору $\mathbf{r}_1$, т. е. когда заряды обладают вращательным движением вокруг точки O как центра. Если ρ — заряд единицы объёма, а $\mathbf{v}$ — скорость,

так что $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$, то намагничение $\mathbf{M}$ будет:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2} [\mathbf{r}_1, \rho \mathbf{v}], \quad (30)$$

что тождественно с плотностью момента количества движения, если ρ интерпретировать как плотность массы.

Остающиеся члены разложения (23) представляют собой векторные потенциалы магнитных мультиполей высшего порядка. Таким образом, мы дали два различных определения магнитного момента: через эквивалентные магнитные заряды Пуассона — в полном соответствии с электростатическим случаем (раздел 4.3), и через распределение токов. Теперь мы должны показать тождественность двух этих точек зрения.

4.6. Магнитный диполь. Согласно разделу 4.3, намагниченный кусок вещества имеет дипольный момент, определяемый соотношением (15), стр. 207, скалярный потенциал которого на достаточно большом расстоянии даётся формулой (18) того же раздела. Наша первая задача состоит в том, чтобы определить эквивалентный векторный потенциал, векторную функцию, ротор которой даёт то же поле, что и градиент скалярной функции φ^* . Снова будем считать (x', y', z') точкой наблюдения и помещать диполь в (x, y, z) . Тогда:

$$\mathbf{H}(x', y', z') = -\text{grad}' \varphi^* = \frac{1}{4\pi} \text{grad}' (m \text{grad}' \frac{1}{r}). \quad (31)$$

и, следовательно:

$$\text{rot}' \mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \text{grad}' (m \text{grad}' \frac{1}{r}). \quad (32)$$

Чтобы раскрыть правую часть (32), мы учтём, что m — постоянный вектор, или в крайнем случае функция (x, y, z) , тогда как rot' и grad' действуют лишь на координаты (x', y', z') . Кроме того,

$$\text{rot}' \text{grad}' \left(\frac{1}{r} \right) = 0, \quad \text{div}' \text{grad}' \left(\frac{1}{r} \right) = 0. \quad (33)$$

Можно без труда убедиться в том, что

$$\text{grad}' \left(m \text{grad}' \frac{1}{r} \right) = -\text{rot}' \left[m, \text{grad}' \frac{1}{r} \right], \quad (34)$$

откуда

$$\text{rot}' \mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \text{rot}' \left[m, \text{grad}' \frac{1}{r} \right]. \quad (35)$$

Следовательно:

$$\mathbf{A} + \frac{\mu}{4\pi} \left[m, \text{grad}' \frac{1}{r} \right] = \text{grad}' f(x', y', z'), \quad (36)$$

где f — произвольная скалярная функция. Дивергенция правой части должна быть равна нулю, и следовательно f может быть любым решением уравнения Лапласа. Однако f ничего не добавляет к полю $\mathbf{H}$, и мы вправе положить её равной нулю. Векторный потенциал магнитного диполя будет поэтому

$$\mathbf{A}(x', y', z') = -\frac{\mu}{4\pi} \left[m, \text{grad}' \frac{1}{r} \right] = \frac{\mu}{4\pi} \left[m, \text{grad}' \frac{1}{r} \right]. \quad (37)$$

Уравнение (37) совпадает с выражением для векторного потенциала, который мы связали в предыдущем разделе с дипольным моментом тока. На достаточно больших расстояниях поле любого источника — намагниченного вещества, или стационарного тока — сводится к полю магнитного диполя.

Это представляет собой не более, чем новое выражение того обстоятельства, что намагниченная область полностью эквивалентна распределению токов с плотностью $\mathbf{J}' = \text{rot } \mathbf{M}$ и даёт нам математическое подтверждение амперовской интерпретации магнетизма с помощью бесконечно малых круговых токов.

4.7. Магнитные листки. Пока что мы показали, что потенциал любого замкнутого линейного тока может быть разложен в ряд мультипольных потенциалов. Стягивая замкнутый контур тока около некоторой точки (x, y, z) до бесконечно малых размеров, мы можем представить этот потенциал всюду, за исключением самой этой особой точки, одним лишь дипольным членом. Магнитный момент получающегося в результате *элементарного линейного тока* равен:

$$d\mathbf{m} = \mathbf{J} n da, \quad (38)$$

где $\mathbf{n}$ — положительная нормаль к бесконечно малой плоской площадке da . Элементарный момент зависит от величины тока и от охватываемой контуром площади, но не от формы контура.

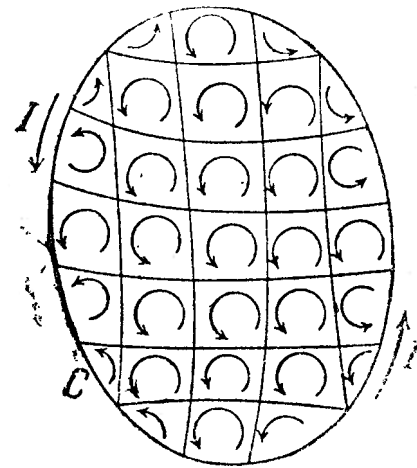


Рис. 42. Разложение тока I , циркулирующего по контуру C , на элементарные токи.

Любой линейный ток произвольного размера и формы может быть разложен на систему элементарных токов. Пусть S (рис. 42) будет какой-либо регулярной поверхностью, опирающейся на замкнутый контур C ; построим сетку из пересекающихся линий, оканчивающихся на контуре C . Представим себе теперь, что по контуру каждой элементарной площадки протекает ток I , равный по величине току, протекающему по контуру C , и направленный в ту же

сторону. Магнитное поле от подобной сети токов всюду совпадает с магнитным полем тока I в простом контуре C , так как токи, текущие по общим границам соприкасающихся элементов поверхности, всюду взаимно компенсируются, за исключением внешнего контура. По мере увеличения густоты подразделения, поле каждой ячейки всё более приближается к полю диполя, ось которого направлена по положительной нормали. Очевидно, в пределе поле сетки и, соответственно, поле тока I в контуре C будет совпадать с полем диполей, распределённых по поверхности S , т. е. с полем *двойного слоя* на поверхности S . Плотность или момент единицы площади эквивалентного поверхностного распределения постоянна и равна:

$$\tau = \frac{d\mathbf{m}}{da} = I\mathbf{n}. \quad (39)$$

Таким образом, всякий линейный замкнутый ток действует как *намагниченный листок*. Скалярный потенциал такого листка был определён в разделе 3.16 в связи с двойными слоями зарядов:

$$\varphi^*(x', y', z') = -\frac{1}{4\pi} \int \tau d\Omega = -I\Omega, \quad (40)$$

где Ω — телесный угол, под которым поверхность S видна из точки (x', y', z') . Кроме того, как было показано, потенциал двойного слоя многозначен. Скачок φ^* при переходе через поверхность S , согласно (17), стр. 173, равен

$$\varphi_+^* - \varphi_-^* = \tau = I, \quad (41)$$

в соответствии с тем, что линейный интеграл от $\mathbf{H}$ по какому-либо замкнутому контуру, пересекающему поверхность S один раз, есть

$$\oint \mathbf{H} ds = - \oint d\varphi^* = I. \quad (42)$$

Поверхность S , несущая двойной слой или магнитный листок, совершенно произвольна и, очевидно, математически эквивалентна «перегородке», посредством которой магнитное поле в разделе 4.2 превращалось в односвязную область.

ОТСТУПЛЕНИЕ ПО ПОВОДУ ЕДИНИЦ И РАЗМЕРНОСТЕЙ

4.8. Основные системы. В разделе 1.8 анализ размерностей электромагнитных величин был основан непосредственно на уравнениях Максвелла, и выбор системы единиц MKS оправдывался тем, что она является одновременно и «абсолютной» и практической системой. Исторически развитие различных систем шло иным путём. До тех пор, пока электростатические и магнитостатические явления рассматривались как совершенно независимые друг от друга, было естественно, что для измерения электрических и магнитных величин должны были существовать две независимые абсолютные системы. Открытие Фарадеем закона индукции и последовавшее много позднее доказательство того, что токи представляют собой не что иное, как движущиеся заряды, установило связь между этими двумя группами явлений и наложило определённые условия на выбор некоторых констант, которые до этого были произвольны.

Выбор единиц и их размерностей для электростатических величин обычно основывался на законе Кулона: сила, действующая между двумя зарядами, прямо пропорциональна произведению их величин и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$F = k_1 \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (1)$$

Так как наличие вещества не влияет на размерность заряда, то мы будем далее предполагать, что все силы измеряются в свободном пространстве. В системе «рациональных» единиц коэффициент пропорциональности k_1 выбран равным $1/4\pi\epsilon_0$; в «нерациональных» системах множитель 4π опущен. Константа эта совершенно произвольна и не обязательно безразмерна, так что размерность заряда может быть выражена только через ϵ_0 . Из (1) мы получаем:

$$[q] = \epsilon_0^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}. \quad (2)$$

Из уравнения непрерывности ясно, что размерность тока равна размерности заряда, делённого на время:

$$[I] = \epsilon_0^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}. \quad (3)$$

Вывести из этих соотношений размерности всех остальных чисто электрических величин не представляет труда.

Более естественным образом свойства магнитного вещества могут быть описаны с помощью магнитного момента $\mathbf{m}$, а не с помощью фиктивных «магнитных зарядов». Вращающий момент, испытываемый магнитом или витком тока с моментом $\mathbf{m}_2$, помещёнными в поле $\mathbf{B}$, создаваемое источником с моментом $\mathbf{m}_1$, равен:

$$\mathbf{T} = [\mathbf{m}_2, \mathbf{B}], \quad (4)$$

а вектор $\mathbf{B}$ выражается через магнитный момент источника $\mathbf{m}_1$ посредством (31), стр. 213. Из этих двух соотношений мы легко можем вывести, что размерность магнитного момента есть:

$$[\mathbf{m}] = \mu_0^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{5}{2}} T^{-1}. \quad (5)$$

Соотношение (5) выведено непосредственно из выражения для взаимных вращающих моментов двух магнитных диполей, являющегося по существу магнитным аналогом закону Кулона. Однако, это не единственный экспериментальный закон, в который входит магнитный момент. То, что магнитный момент $\mathbf{m}$ небольшого витка или катушки с током I пропорционален току и площади витка, также известно, как опытный факт. Коэффициент пропорциональности, который мы будем обозначать через $1/\gamma$, подобно ϵ_0 и μ_0 произволен по величине и размерности, так что размерность $\mathbf{m}$ должна также выражаться уравнением

$$[\mathbf{m}] = \gamma^{-1} [I] L^2 = \gamma^{-1} \epsilon_0^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{7}{2}} T^{-2}. \quad (6)$$

Связь магнитного момента с током и тока с электрическим зарядом накладывает, таким образом, условие на произвольные константы ϵ_0 , μ_0 и γ . Каков бы ни был выбор этих трёх коэффициентов, их размерности должны быть таковы, чтобы соотношения (5) и (6) были совместны. Приравнявая (5) и (6), получаем, что

$$\frac{\gamma}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{L}{T} = c. \quad (7)$$

Величина характеристической скорости c должна быть определена из опыта. В главе I она фигурировала как скорость распространения полей и потенциалов в свободном пространстве; теперь она встретила нам в качестве отношения электрических и магнитных единиц. Для того чтобы определить величину c , не обращаясь к непосредственным измерениям скорости, выбирают такую величину, которая может быть подсчитана в одной системе единиц, а измерена в другой. Сравнительно просто, например, подсчитать ёмкость конденсатора, исходя из его геометрической формы, а электростатическая ёмкость любого другого конденсатора может быть измерена с помощью этого первичного эталона и ёмкостного моста. С другой стороны, баллистический гальванометр измеряет заряд на обкладках конденсатора благодаря магнитным действиям, которые производит ток при разряде конденсатора через гальванометр. Можно показать, что отношение полученных таким образом двух значений ёмкости есть

$$\frac{C_e}{C_m} = \frac{\gamma^2}{\epsilon_0 \mu_0} = c^2, \quad (8)$$

где C_e — расчётное электростатическое значение ёмкости, а C_m — значение, измеренное в электромагнитных единицах. Принятое для c значение равно примерно $3 \cdot 10^8$ метров/сек.

Разнообразные системы размерностей, которые в то или иное время применялись в литературе по электромагнитной теории, получались в результате того, что двум из трех констант ϵ_0 , μ_0 и γ приписывались произвольные значения, а значение третьей определялось тогда из соотношения (7). Мы дадим краткий обзор наиболее важных из этих систем.

1. *Электростатическая система.* Если $\epsilon_0 = 1$, $\gamma = 1$, то все величины и электрические, и магнитные выражаются в электростатических единицах. Из соотношения (7) мы получаем для μ_0 значение

$$\mu_0 = 1/9 \cdot 10^{-20} \text{ (сек/см)}^2. \quad (9)$$

Единицы CGS в этой системе основываются на определении заряда из закона Кулона: два единичных точечных заряда, расположенных на расстоянии 1 см друг от друга, взаимодействуют с силой в 1 дину.

2. *Электромагнитная система* получится в том случае, если мы положим:

$$\mu_0 = 1, \quad \gamma = 1, \quad \varepsilon_0 = 1/9 \cdot 10^{-20} \text{ (сек/см)}^2. \quad (10)$$

Отношение значений заряда, измеренного в этих двух системах, равно:

$$\frac{q_e}{q_m} = c, \quad (11)$$

где q_e — величина заряда, измеренного в электростатических единицах, а q_m — величина того же самого заряда, измеренного в электромагнитных единицах.

3. Система MKS, подробно описанная в разделе 1.8, является по существу электромагнитной системой, в которой единицы массы и длины подобраны таким образом, чтобы единицы электрических и магнитных величин были пригодны для практических измерений. В том виде, в каком эта система принята в настоящей книге, кулон введён в качестве независимой единицы, что приводит к значениям:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ генри/метр}, \quad \gamma = 1, \\ \varepsilon_0 &= 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ фарад/метр}. \end{aligned} \quad (12)$$

В другом варианте системы MKS полагают:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}, \quad \gamma = 1, \quad \varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ (сек/метр)}^2, \quad (13)$$

что в отношении размерностей тождественно с электромагнитной системой.

4. *Гауссова система* до последнего времени применялась в научной литературе наиболее широко. Она представляет собой смесь из электростатической и электромагнитной систем, которая получается, если положить:

$$\varepsilon_0 = 1, \quad \mu_0 = 1, \quad \gamma = c. \quad (14)$$

Коэффициенты ε_0 и μ_0 из всех уравнений выпадают, электрические величины выражаются в электростатических единицах, а магнитные — в электромагнитных. Однако преимущества всего этого сомнительны. Вспомнить, в каком месте надо написать коэффициент c , входящий в электромагнитные уравнения, написанные в гауссовой системе, не проще, чем с самого начала сохранять коэффициенты ε_0 и μ_0 . Система MKS столь же «абсолютна» и «научна», как и Гауссова, и едва ли для многих единицы системы CGS более предпочтительны, чем вольты, омы и амперы. В общем, нам кажется, что чем скорее излюбленная ранее система будет оставлена, тем скорее придёт конец совершенно излишнему поводу для путаницы.

Любое уравнение, содержащееся в этой книге, может быть переписано в гауссовой системе единиц заменой ε_0 и μ_0 на $1/c$, а J и ρ — соответственно на J/c и ρ/c .

4.9. **Закон Кулона для магнитных зарядов.** В старой литературе магнитная система единиц обычно основывалась на законе сил, действующих между магнитными «полюсами». «Заряд», или сила полюса q^* определялась так, чтобы произведение q^* на длину диполя l равнялось моменту диполя m . Согласно (5), размерность q^* равна тогда:

$$[q^*] = \mu_0^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}, \quad (15)$$

в то время как для закона сил, соответствующего закону Кулона, мы получаем:

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1^* q_2^*}{r^2}. \quad (16)$$

Это выражение отличается от обычно принятого тем, что μ_0 находится в числителе, а не в знаменателе¹⁾. В основе этого странного результата лежит то обстоятельство, что выводимая из уравнений Максвелла сила, действующая на элемент тока (раздел 2.4), равна $[\mathbf{J}, \mathbf{B}]$, а не $[\mathbf{J}, \mathbf{H}]$. Соответственно вращающий момент, действующий на диполь, равен $[\mathbf{m}, \mathbf{B}]$, а сила, действующая на магнитный «заряд», будет $\mathbf{F} = q^* \mathbf{B}$.

Для того чтобы (16) в точности соответствовало электростатической модели, принято обычно писать μ в знаменателе, и определять вектор $\mathbf{H}$ с помощью соотношения $\mathbf{F} = q^* \mathbf{H}$. Однако этот способ, пока μ_0 считается отвлечённым числом, приводит к неувязкам в размерностях в уравнениях поля и в его пользу можно сказать немного. Сходство в природе векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ и векторов $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ было осознано более поздними авторами.

МАГНИТНАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ

4.10. Эквивалентное распределение токов. Эквивалентность намагниченного тела и соответствующим образом распределённых токов уже неоднократно отмечалась выше. Посмотрим теперь, как подобное распределение может быть найдено в общем виде для тела объёма V , ограниченного поверхностью S .

Мы предположим, что величина намагничения, или поляризация $\mathbf{M}$, содержит и постоянное намагничение $\mathbf{M}_0$, если таковое имеется. Согласно (37), стр. 213, векторный потенциал в любой точке вне тела равен:

$$A(x', y', z') = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[\mathbf{M}(x, y, z), \text{grad} \frac{1}{r} \right] dv. \quad (1)$$

В силу векторного тождества

$$\left[\mathbf{M}, \text{grad} \frac{1}{r} \right] = \frac{\text{rot} \mathbf{M}}{r} - \text{rot} \frac{\mathbf{M}}{r} \quad (2)$$

и основной формулы о преобразовании объёмного интеграла от ротора вектора в поверхностный интеграл от тангенциальной компоненты этого вектора:

$$\int_V \text{rot} \frac{\mathbf{M}}{r} dv = \int_S \frac{[\mathbf{n}, \mathbf{M}]}{r} da, \quad (3)$$

мы находим, что правую часть соотношения (1) можно разложить на две части:

$$A(x', y', z') = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\text{rot} \mathbf{M}}{r} dv + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{[\mathbf{M}, \mathbf{n}]}{r} da. \quad (4)$$

Таким образом, векторный потенциал, связанный с намагниченным телом, будет точно таким же, как и векторный потенциал объёмных и поверхностных токов, плотности которых равны соответственно:

$$\mathbf{J}' = \text{rot} \mathbf{M}, \quad \mathbf{K}' = [\mathbf{M}, \mathbf{n}]. \quad (5)$$

Справедливость этого результата как для внутренних точек, так и для внешних легко может быть доказана. Поверхностный интеграл сходится, очевидно, во всех точках, не лежащих на поверхности S , а объёмный интеграл может быть разложен на три скалярных компоненты, каждая из которых эквивалентна скалярному потенциалу соответствующим образом распределённых зарядов.

¹⁾ Sommerfeld, Ueber die elektromagnetischen Einheiten, стр. 161, Zeeman, Verhandelingen, Martinus Nijhoff, The Hague, 1935.

Напомним, что магнитная поляризация была введена первоначально в разделе 1.6 как разность векторов $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{H}. \quad (6)$$

На поверхности разрыва между двумя магнитными средами векторы поля удовлетворяют граничным условиям раздела 1.13, а именно:

$$n(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0, \quad [n, \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1] = \mathbf{K}, \quad (7)$$

в которых в случае конечной проводимости плотность поверхностных токов равна нулю. В соответствии с (6), эти условия эквивалентны таким:

$$n(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0, \quad [n, \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1] = \mu_0 (\mathbf{K} + \mathbf{K}'), \quad (8)$$

где

$$\mathbf{K}' = [\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2, n]. \quad (9)$$

4.11. Поле намагниченного стержня и шара. В качестве примера мы рассмотрим стальной стержень или цилиндр кругового сечения, равномерно намагниченный вдоль оси. Длина цилиндра пусть будет l , радиус сечения a , а намагничение M_0 . Так как мы предполагаем, что намагничение однородно, следовательно, M_0 постоянно, объёмная плотность эквивалентных токов $\mathbf{J}'$ равна нулю. Плотность токов на поверхности цилиндра есть $\mathbf{K}' = [\mathbf{M}_0, n]$. Таким образом, намагниченный стержень эквивалентен соленоиду тех же размеров. Векторный потенциал и поле в любой внутренней или внешней точке могут быть теперь подсчитаны из разложений в ряд, выведенных в разделе 4.5. Значение $\mathbf{B}$ вдоль оси уже было подсчитано в разделе 4.4. В частности, мы нашли, что в центре:

$$\mathbf{B} = \mu_0 M_0 \frac{l}{\sqrt{l^2 + 4a^2}}. \quad (10)$$

Наше предположение о постоянстве намагничения для реальных магнитов довольно сомнительно, особенно вблизи концов. Если, однако, длина цилиндра либо очень велика, либо очень мала по сравнению с радиусом, такое приближение оказывается обычно хорошим. Так, например, если $l \gg a$, так что магнит имеет иглообразную форму, то поле в центре будет:

$$\mathbf{B} = \mu_0 M_0. \quad (11)$$

В случае $l \ll a$ магнит вырождается в диск, и поле будет:

$$\mathbf{B} = 0. \quad (12)$$

Если цилиндр сделан не из стали, а из мягкого железа и помещён во внешнее поле $\mathbf{H}_0$, то постоянное намагничение M_0 должно быть заменено индуцированным намагничением $\mathbf{M}$ и (10) должно быть интерпретировано, как индуцированное поле $\mathbf{B}_1$. В центре длинной иглы в параллельном поле $\mathbf{H}_0$ результирующее поле будет:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_0 + \mu_0 \mathbf{M}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} = \mathbf{H}_0; \quad (13)$$

таким образом, поле $\mathbf{H}$ внутри иглы точно такое же, какое имело место первоначально. В случае диска:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 - \mathbf{M}. \quad (14)$$

Очевидно, предположение об однородном намагничении цилиндра из мягкого железа со срезанными под прямым углом торцами является прямым нарушением граничных условий для векторов $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$. С другой стороны,

индуцированное намагничение сферы или эллипсоида в параллельном внешнем поле должно быть однородным, поскольку магнитная задача совершенно аналогична электростатической, рассмотренной в разделах 3.24 и 3.27. Индуцированное или вторичное поле B_1 может быть теперь приписано поверхностным токам, которые циркулируют по зонам, concentричным оси намагничения, но плотность которых, очевидно, меняется с широтой. Если θ — угол между внешней нормалью и намагничением M , то

$$K' = |[M, n]| = M \sin \theta. \quad (15)$$

По закону Био и Савара компонента B_1^- в направлении M равна:

$$dB_1^- = \frac{\mu_0 K}{2} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\mu_0 M}{2} \sin^3 \theta d\theta. \quad (16)$$

После интегрирования это даёт для результирующего поля в центре выражение

$$B_1^- = \frac{\mu_0 M}{2} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{2}{3} \mu_0 M, \quad (17)$$

в то время как для полного поля получается:

$$\left. \begin{aligned} B^- &= B_0 + B_1^- = \mu_0 \left(H_0 + \frac{2}{3} M \right), \\ H^- &= H_0 - \frac{1}{3} M. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Важным следствием этого результата является значение поля в центре сферической полости, вырезанной внутри *жёстко и однородно* намагниченной среды. Поверхностное распределение токов будет точно таким же, но так как нормаль направлена теперь внутрь сферы, токи будут циркулировать в противоположном направлении. Индуцированное поле в центре будет $-\frac{2}{3} \mu_0 M_0$, а полное поле будет:

$$\left. \begin{aligned} B^- &= B_0 - \frac{2}{3} \mu_0 M_0 = \mu_0 \left(H_0 + \frac{1}{3} M_0 \right), \\ H^- &= H_0 + \frac{1}{3} M_0, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где H_0 и B_0 — первоначальные значения полей *в среде*. Очевидно, эти поля не удовлетворяют обычным граничным условиям для нормальных и тангенциальных компонент, и осуществимы только в том случае, если полость сделана *после того*, как вещество получило жёсткое намагничение.

РАЗРЫВЫ НЕПРЕРЫВНОСТИ ВЕКТОРОВ A И B

4.12. Поверхностное распределение токов. Из раздела 3.14 непосредственно следует, что векторы A и B являются всюду непрерывными функциями точки при условии, что токи распределены объёмно и что их плотность является всюду ограниченной и кусочно непрерывной. Если, однако, мы допускаем бесконечную проводимость тела, или хотим представить намагниченное состояние тела в виде эквивалентного распределения токов, то становится необходимым учитывать также и поверхностные токи, на которых вектор B испытывает разрыв непрерывности. Представим себе ток конечной объёмной плотности J , заключённой в слое толщины t . Предположим теперь, что толщина слоя уменьшается, но так что полная сила

тока, проходящего через поперечное сечение слоя, остаётся неизменной. При $t \rightarrow 0$ объёмная плотность необходимо стремиться к бесконечности. Поверхностная плотность тока определяется как предел произведения:

$$K = \lim tJ \text{ при } t \rightarrow 0, J \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Поскольку значение J становится бесконечным, такое распределение образует особую поверхность.

Мы будем предполагать, что K — ограниченная, кусочно непрерывная функция точки на регулярной поверхности S . Векторный потенциал в любой точке (x', y', z') , не лежащей на поверхности S , равен:

$$A(x', y', z') = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{K(x, y, z)}{r} da, \quad (2)$$

Где r , как обычно, отсчитывается от элемента $K(x, y, z)$ до фиксированной точки (x', y', z') . Каждая из прямоугольных компонент A представляет собой интеграл, совпадающий по форме с интегралом, дающим электростатический потенциал поверхностно распределённых зарядов. В параграфе 3.15 было показано, что подобные интегралы являются ограниченными непрерывными функциями координат (x', y', z') во всех точках пространства, включая и точки, лежащие на поверхности S . И нормальная и тангенциальная компоненты векторного потенциала меняются непрерывно при переходе через одиночный слой поверхностных токов.

Обращаясь теперь к вектору $\mathbf{B}$, мы получаем, согласно уравнению (11), стр. 209, что в точках, не лежащих на поверхности S ,

$$\mathbf{B}(x', y', z') = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \left[K(x, y, z), \text{grad} \frac{1}{r} \right] da. \quad (3)$$

Разложив K на его прямоугольные компоненты:

$$K = iK_x + jK_y + kK_z,$$

мы видим, что соотношение (3) эквивалентно

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(x', y', z') = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \left[i, \int_S K_x \text{grad} \frac{1}{r} da \right] + \left[j, \int_S K_y \text{grad} \frac{1}{r} da \right] + \right. \\ \left. + \left[k, \int_S K_z \text{grad} \frac{1}{r} da \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Интеграл вида:

$$E(x', y', z') = \frac{1}{4\pi} \int_S \omega(x, y, z) \text{grad} \frac{1}{r} da \quad (5)$$

с точностью до размерного множителя ϵ_0 может быть интерпретирован, как поле, вызываемое поверхностными зарядами, распределёнными по поверхности S с плотностью ω . В разделе 3.15 было показано, что при переходе точки (x', y', z') через поверхность S этот интеграл испытывает скачок, равный:

$$E_+ - E_- = \omega n, \quad (6)$$

где ω — значение поверхностной плотности в точке перехода. Применяя этот результат к соотношению (4), мы сразу же получаем, что

$$\mathbf{B}_+ - \mathbf{B}_- = \mu_0 [K, n]. \quad (7)$$

При переходе через слой поверхностных токов нормальная компонента вектора $\mathbf{B}$ остаётся непрерывной:

$$n(\mathbf{B}_+ - \mathbf{B}_-) = 0. \quad (8)$$

Тангенциальная компонента вектора В испытывает скачок, определяемый соотношением

$$[n, B_+ - B_-] = \mu_0 [n [K, n]]. \quad (9)$$

С помощью известного тождества правая часть этого соотношения может быть преобразована к виду:

$$[n, [K, n]] = K n^2 - n (nK). \quad (10)$$

Но так как вектор K лежит на поверхности S и, следовательно, ортогонален к единичной нормали n , соотношение (9) сводится к такому:

$$[n, B_+ - B_-] = \mu_0 K. \quad (11)$$

Смысл этого результата станет более ясным, если мы сравним его с граничными условиями, выведенными непосредственно из уравнений Максвелла в разделе 1.13. Согласно разделу 4.10, намагниченная среда эквивалентна токам, распределённым по пространству с объёмной плотностью $J' = \text{rot } M$; разрывы же непрерывности в намагничении должны учитываться слоями поверхностных токов с плотностью $K' = [n, M_+ - M_-]$. Скачок вектора поля при переходе через подобную поверхность равен:

$$[n, B_+ - B_-] = \mu_0 \{K + [n, M_+ - M_-]\} \quad (12)$$

или, поскольку $\frac{1}{\mu_0} B - M = H$,

$$[n, H_+ - H_-] = K. \quad (13)$$

Непрерывность нормальной компоненты вектора B при переходе через границу раздела обеспечивается соотношением (8).

4.13. Поверхностное распределение магнитного момента. Эквивалентность линейного контура тока и поверхности, несущей распределённые на ней магнитные диполи, была показана в разделе 4.7. Мы рассмотрим несколько детальнее разрывы непрерывности, которые испытывают поле и потенциал в окрестности подобных особых поверхностей, не ограничиваясь случаем нормального направления намагничивания. Пусть вектор M представляет теперь плотность поверхностного намагничивания — магнитный момент единицы площади поверхности S . Направление M по отношению к положительной нормали n произвольно.

В любой точке, не лежащей на поверхности S , векторный потенциал такого распределения, согласно уравнению (37), стр. 213, равен:

$$A(x', y', z') = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \left[M(x, y, z), \text{grad} \frac{1}{r} \right] da. \quad (14)$$

Нам достаточно только заметить внешнее сходство этого выражения с соотношением (3), чтобы заключить, что при переходе через поверхность, по которой распределён магнитный момент, векторный потенциал испытывает скачок. Величина скачка равна:

$$A_+ - A_- = \mu_0 [M, n]. \quad (15)$$

Нормальная компонента вектора А непрерывна:

$$n(A_+ - A_-) = 0, \quad (16)$$

а тангенциальная компонента непрерывна только в том случае, если намагничение нормально к поверхности. В противном случае:

$$[n, A_+ - A_-] = \mu_0 M - \mu_0 (nM) n. \quad (17)$$

Для того чтобы исследовать разрывы вектора **B** при переходе через поверхностный слой магнитного момента, целесообразно воспользоваться выражением вида (31), стр. 213, которое мы в данном случае запишем так:

$$\mathbf{B}(x', y', z') = -\frac{\mu_0}{4\pi} \text{grad}' \int_S \mathbf{M}(x, y, z) \text{grad} \frac{1}{r} da. \quad (18)$$

Поверхностная поляризация **M** может быть разложена на нормальную и тангенциальную компоненты посредством тождества:

$$\mathbf{M} = (\mathbf{nM}) \mathbf{n} + [\mathbf{n}, \mathbf{M}], \mathbf{n}, \quad (19)$$

так что вместо (18) мы получим:

$$\mathbf{B}(x, y, z) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \text{grad}' \int_S (\mathbf{n}, \mathbf{M}) \mathbf{n} \text{grad} \frac{1}{r} da - \frac{\mu_0}{4\pi} \text{grad}' \int_S [[\mathbf{n}, \mathbf{M}], \mathbf{n}] \text{grad} \frac{1}{r} da. \quad (20)$$

Из сравнения с соотношением (16), стр. 173, ясно, что первый интеграл может быть интерпретирован как скалярный потенциал двойного слоя с моментом $\tau = (\mathbf{Mn}) \mathbf{n}$, тогда как отрицательный градиент от этого потенциала в точке (x, y, z') даёт напряжённость поля. В разделе 3.16 было показано, что по обе стороны от такого слоя нормальная компонента напряжённости поля при приближении к нему стремится к одному и тому же пределу, а тангенциальная компонента при переходе через слой испытывает скачок, выражаемый уравнением (21), стр. 175, и равный в данном случае

$$B_{t+} - B_{t-} = -\mu_0 \frac{d}{dl} (\mathbf{Mn}). \quad (21)$$

Таким образом, компонента вектора **B** вдоль любого касательного к поверхности направления испытывает при переходе через слой поверхностно распределённого магнитного момента скачок, величина которого пропорциональна степени изменения нормальной компоненты поляризации в этом самом направлении.

Обращаясь теперь к слагаемому, даваемому вторым интегралом в (20), мы приведём его к более привычному виду путём некоторых преобразований подынтегрального выражения. Легко убедиться в справедливости тождества:

$$[[\mathbf{n}, \mathbf{M}], \mathbf{n}] \text{grad} \frac{1}{r} = [\mathbf{n}, \mathbf{M}] \left[\mathbf{n}, \text{grad} \frac{1}{r} \right]. \quad (22)$$

Разложим далее $[\mathbf{n}, \mathbf{M}]$ на его скалярные компоненты:

$$[\mathbf{n}, \mathbf{M}] = i f_1 + j f_2 + k f_3.$$

Мы имеем тогда:

$$\begin{aligned} [[\mathbf{n}, \mathbf{M}], \mathbf{n}] \text{grad} \frac{1}{r} &= i \left[\mathbf{n}, f_1 \text{grad} \frac{1}{r} \right] + j \left[\mathbf{n}, f_2 \text{grad} \frac{1}{r} \right] + k \left[\mathbf{n}, f_3 \text{grad} \frac{1}{r} \right] = \\ &= i \left[\mathbf{n}, \text{grad} \frac{f_1}{r} \right] + j \left[\mathbf{n}, \text{grad} \frac{f_2}{r} \right] + k \left[\mathbf{n}, \text{grad} \frac{f_3}{r} \right] - \\ &\quad - i \left[\mathbf{n}, \frac{\text{grad} f_1}{r} \right] - j \left[\mathbf{n}, \frac{\text{grad} f_2}{r} \right] - k \left[\mathbf{n}, \frac{\text{grad} f_3}{r} \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Если $f(x, y, z)$ — функция, непрерывная на поверхности S и на ограничивающем её контуре C вместе со своими первыми и вторыми производными, то

$$\int_S [\mathbf{n}, \text{grad} f] da = \int_C f ds. \quad (24)$$

Отсюда следует, что если тангенциальные компоненты $\mathbf{M}$ удовлетворяют на поверхности S поставленным условиям, то три поверхностных интеграла, подинтегральные выражения которых имеют вид $\mathbf{i} \left[\mathbf{n}, \text{grad} \frac{f_1}{r} \right]$, могут быть преобразованы в интегралы по любому замкнутому контуру, лежащему на поверхности S , так что:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \int_S \left[\mathbf{n}, \text{grad} \frac{f_1}{r} \right] da + \mathbf{j} \int_S \left[\mathbf{n}, \text{grad} \frac{f_2}{r} \right] da + \mathbf{k} \int_S \left[\mathbf{n}, \text{grad} \frac{f_3}{r} \right] da = \\ = \int_C \left(\mathbf{i} \frac{f_1}{r} + \mathbf{j} \frac{f_2}{r} + \mathbf{k} \frac{f_3}{r} \right) ds = \int_C \frac{[\mathbf{n}, \mathbf{M}]}{r} ds. \end{aligned} \quad (25)$$

Оставшиеся три члена подинтегрального выражения могут быть преобразованы с помощью соотношения

$$\begin{aligned} -\mathbf{i} \left[\mathbf{n}, \frac{\text{grad} f_1}{r} \right] - \mathbf{j} \left[\mathbf{n}, \frac{\text{grad} f_2}{r} \right] - \mathbf{k} \left[\mathbf{n}, \frac{\text{grad} f_3}{r} \right] = \\ = \frac{\mathbf{n}}{r} \{ [\mathbf{i}, \text{grad} f_1] + [\mathbf{j}, \text{grad} f_2] + [\mathbf{k}, \text{grad} f_3] \} = -\frac{\mathbf{n} \text{rot} [\mathbf{n}, \mathbf{M}]}{r}. \end{aligned} \quad (26)$$

Таким образом, второй член правой части соотношения (20) преобразован нами в сумму контурного и поверхностного интегралов:

$$\begin{aligned} -\frac{\mu_0}{4\pi} \text{grad}' \int_S [[\mathbf{n}, \mathbf{M}], \mathbf{n}] \text{grad} \frac{1}{r} da = \\ = -\frac{\mu_0}{4\pi} \text{grad}' \int_C \frac{[\mathbf{n}, \mathbf{M}]}{r} ds + \frac{\mu_0}{4} \text{grad}' \int_S \frac{\mathbf{n} \text{rot} [\mathbf{n}, \mathbf{M}]}{r} da. \end{aligned} \quad (27)$$

Контурный интеграл является непрерывной и непрерывно дифференцируемой функцией точек, лежащих на поверхности S внутри контура. С другой стороны, последний член соотношения (27) может быть интерпретирован как напряжённость поля в точке (x', y', z') от зарядов, распределённых по поверхности с плотностью:

$$-\mathbf{n} \text{rot} [\mathbf{n}, \mathbf{M}].$$

Мы должны, следовательно, заключить, что тангенциальная компонента поверхностного намагничивания приводит к скачку нормальной компоненты вектора $\mathbf{B}$ на поверхности S , равному по величине:

$$B_{n+} - B_{n-} = -\mu_0 \mathbf{n} \text{rot} [\mathbf{n}, \mathbf{M}]. \quad (28)$$

Дифференцирование ограничено направлениями, касательными к поверхности. Следовательно, вектор $\text{grad} (\mathbf{Mn})$ касателен к поверхности, в то время как вектор $\text{rot} [\mathbf{nM}]$ нормален к ней. Скачок непрерывности, испытываемый вектором $\mathbf{B}$, при переходе через поверхность с распределённым по ней магнитным моментом может быть выражен в виде единой формулы:

$$\mathbf{B}_+ - \mathbf{B}_- = -\mu_0 \{ \text{grad} (\mathbf{nM}) + \text{rot} [\mathbf{n}, \mathbf{M}] \}. \quad (29)$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ $\text{rot rot } \mathbf{A} = \mu \mathbf{J}$

4.14. Векторный аналог теоремы Грина. Классический способ нахождения векторного потенциала основывается на разложении его на прямоугольные компоненты. В предположении $\text{div } \mathbf{A} = 0$ можно показать, что каждая из компонент удовлетворяет уравнению Пуассона, и для решения задачи могут быть применены методы, развитые при рассмотрении электростатического потенциала.

Возможность непосредственного интегрирования уравнения $\text{rot rot } \mathbf{A} = \mu \mathbf{J}$ путём применения ряда векторных тождеств, совершенно аналогичных тождествам Грина для скалярных функций, повидимому, осталась незамеченной. Пусть V — замкнутая область пространства, ограниченная регулярной поверхностью S ; пусть $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ — две векторные функции точки, непрерывные в области V и на поверхности S вместе со своими первыми и вторыми производными. Если теперь применить теорему о дивергенции к вектору $[\mathbf{P}, \text{rot } \mathbf{Q}]$, то получим:

$$\int_V \text{div} [\mathbf{P}, \text{rot } \mathbf{Q}] dv = \int_S [\mathbf{P}, \text{rot } \mathbf{Q}] n da. \quad (1)$$

Развёртывая подинтегральное выражение объёмного интеграла, мы получаем векторный аналог первого тождества Грина (стр. 153):

$$\int_V (\text{rot } \mathbf{P} \text{ rot } \mathbf{Q} - \mathbf{P} \text{ rot rot } \mathbf{Q}) dv = \int_S [\mathbf{P}, \text{rot } \mathbf{Q}] n da. \quad (2)$$

Аналог второго тождества Грина получается переменной местами $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ и вычитанием из (2). В результате имеем:

$$\int_V (\mathbf{Q} \text{ rot rot } \mathbf{P} - \mathbf{P} \text{ rot rot } \mathbf{Q}) dv = \int_S \{[\mathbf{P}, \text{rot } \mathbf{Q}] - [\mathbf{Q}, \text{rot } \mathbf{P}]\} n da. \quad (3)$$

4.15. Применение к векторному потенциалу. Мы предположим, что объёмная плотность тока $\mathbf{J}(x, y, z)$ является ограниченной, а в остальных отношениях произвольной функцией точки. Регулярная поверхность S , ограничивающая область V , не обязательно должна полностью охватывать все источники поля или какую-либо часть их. Как и в разделе 3.4, мы выберем точку O в качестве произвольного начала отсчёта, а через $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$ будем обозначать координаты точки внутри объёма V .

Пусть $\mathbf{P}$ является теперь векторным потенциалом $\mathbf{A}$, который подчинён условиям:

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \mu \mathbf{J}, \quad \text{div } \mathbf{A} = 0, \quad (4)$$

где μ — магнитная проницаемость среды, которая предполагается однородной и изотропной. $\mathbf{Q}$ можно выбрать двумя способами. Напомним, что в скалярном случае функция Грина ψ удовлетворяла уравнению Лапласа $\Delta \psi = 0$ и могла быть интерпретирована как потенциал в точке (x', y', z') от заряда $4\pi\epsilon$, расположенного в точке (x, y, z) . Точно так же векторная функция Грина $\mathbf{Q}$ может быть выбрана так, чтобы представлять в точке (x', y', z') векторный потенциал от тока с плотностью $4\pi/\mu$, расположенного в точке (x, y, z) и ориентированного произвольно, вдоль направления, определяемого единичным вектором $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{Q}(x, y, z; x', y', z') = \frac{\mathbf{a}}{r}, \quad r = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}. \quad (5)$$

Однако дивергенция этой функции не равна нулю, и, следовательно, (5) не удовлетворяет условию $\text{rot rot } \mathbf{Q} = 0$. С другой стороны было показано, что векторный потенциал некоторого распределения магнитных моментов всюду удовлетворяет уравнению $\text{rot rot } \mathbf{A} = 0$, так что для теперешней нашей задачи подходящей функцией Грина будет также:

$$\mathbf{Q} = \left[\text{grad } \frac{1}{r}, \mathbf{a} \right] = \text{rot } \frac{\mathbf{a}}{r}. \quad (6)$$

Очевидно, (6) можно интерпретировать как векторный потенциал диполя с моментом $\frac{4\pi}{\mu} \mathbf{a}$.

Для интегрирования уравнения (4) можно применить как (5), так и (6), но необходимые преобразования оказываются более простыми в случае применения (5), несмотря на то, что дивергенция (5) не равна нулю. Действительно, мы имеем в случае (5):

$$\operatorname{rot} \mathbf{Q} = \left[\operatorname{grad} \frac{1}{r}, \mathbf{a} \right], \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{Q} = \operatorname{grad} \left(\mathbf{a} \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right), \quad (7)$$

$$\mathbf{P} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{Q} = \mathbf{A} \operatorname{grad} \left(\mathbf{a} \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) = \operatorname{div} \left\{ \left(\mathbf{a} \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) \mathbf{A} \right\}. \quad (8)$$

При всех этих преобразованиях, а также и при последующих, мы должны иметь в виду, что $\mathbf{a}$ — постоянный вектор. Левая часть тождества (3) может быть теперь записана в виде:

$$\begin{aligned} \int_V \left(\frac{\mathbf{a}}{r} \mathbf{J} - \operatorname{div} \left\{ \left(\mathbf{a} \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) \mathbf{A} \right\} \right) dv = \\ = \mathbf{a} \int_V \frac{\mathbf{J}}{r} dv - \mathbf{a} \int_S (\mathbf{A}, \mathbf{n}) \operatorname{grad} \frac{1}{r} da. \end{aligned} \quad (9)$$

Переходя к преобразованию поверхностных интегралов, имеем:

$$[\mathbf{P}, \operatorname{rot} \mathbf{Q}] \mathbf{n} = \left[\mathbf{A} \left[\operatorname{grad} \frac{1}{r}, \mathbf{a} \right] \right] \mathbf{n} = \mathbf{a} \left[\operatorname{grad} \frac{1}{r} [\mathbf{A}, \mathbf{n}] \right], \quad (10)$$

$$[\mathbf{Q}, \operatorname{rot} \mathbf{P}] \mathbf{n} = \left[\frac{\mathbf{a}}{r}, \operatorname{rot} \mathbf{A} \right] \mathbf{n} = \mathbf{a} \frac{[\mathbf{B}, \mathbf{n}]}{r}, \quad (11)$$

где вместо $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ написано $\mathbf{B}$. Тождество (3) принимает вид:

$$\mathbf{a} \int_V \frac{\mathbf{J}}{r} dv = \int_S (\mathbf{A} \mathbf{n}) \operatorname{grad} \frac{1}{r} da + \int_S \left[\operatorname{grad} \frac{1}{r} [\mathbf{A}, \mathbf{n}] \right] da + \int_S \frac{[\mathbf{n}, \mathbf{B}]}{r} da. \quad (12)$$

Справедливость этого соотношения установлена только для тех областей, в которых обе функции $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ являются непрерывными и обладают непрерывными первыми и вторыми производными. Однако $\mathbf{Q}$ имеет особенность в точке $r=0$ и эта точка должна быть, следовательно, исключена. Опишем вокруг точки (x', y', z') небольшую сферу радиуса r_1 . Область V ограничена теперь поверхностью сферы S_1 и ограничивающей её извне поверхностью S , как показано на рис. 25, стр. 153. Поскольку $\operatorname{grad} \frac{1}{r} = \frac{\mathbf{r}^0}{r^2}$, поверхностный интеграл по S_1 может быть написан в виде:

$$\frac{1}{r_1^2} \int_{S_1} \mathbf{r}^0 (\mathbf{A} \mathbf{n}) da + \frac{1}{r_1^2} \int_{S_1} [\mathbf{r}^0 [\mathbf{A}, \mathbf{n}]] da + \frac{1}{r_1} \int_{S_1} [\mathbf{n}, \mathbf{B}] da.$$

Подынтегральное выражение среднего члена преобразуется так:

$$[\mathbf{r}^0 [\mathbf{A}, \mathbf{n}]] = (\mathbf{r}^0 \mathbf{n}) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \mathbf{n}) \mathbf{r}^0 + [\mathbf{A} [\mathbf{r}^0, \mathbf{n}]] \quad (13)$$

и, поскольку на поверхности сферы $\mathbf{r}^0 \mathbf{n} = 1$, а $[\mathbf{r}^0, \mathbf{n}] = 0$ интеграл по поверхности S_1 сводится к выражению:

$$\frac{1}{r_1^2} \int_{S_1} \mathbf{A} da + \frac{1}{r_1} \int_{S_1} [\mathbf{n}, \mathbf{B}] da.$$

Если через $\bar{\mathbf{A}}$ и $[\bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{B}}]$ мы обозначим средние значения векторов $\mathbf{A}$ и $[\mathbf{n}, \mathbf{B}]$ на поверхности сферы, то интегралы эти будут иметь значение

$$\frac{\bar{\mathbf{A}}}{r_1^2} 4 \pi r_1^2 + \frac{[\bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{B}}]}{r_1} 4 \pi r_1^2,$$

которые в пределе, при $r_1 \rightarrow 0$, сведутся к $4\pi \mathbf{A}(x', y', z')$. Внося этот результат в (12) и переставив члены, мы найдём значение векторного потенциала в любой данной точке, выраженное через объёмный интеграл и через поверхностные интегралы по внешней граничной поверхности, поперечно обозначаемой через S :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(x', y', z') = & \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(x, y, z)}{r} d\mathbf{v} - \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{[\mathbf{n}, \mathbf{B}]}{r} da - \\ & - \frac{1}{4\pi} \int_S \left[[\mathbf{n}, \mathbf{A}] \text{grad} \frac{1}{r} \right] da - \frac{1}{4\pi} \int_S (\mathbf{n}, \mathbf{A}) \text{grad} \frac{1}{r} da. \end{aligned} \quad (14)$$

Доказательство того, что дивергенция (14) в точке (x', y', z') равна нулю, мы предоставляем читателю. Очевидно, поверхностные интегралы представляют собой слагаемые векторного потенциала от всех источников, внешних по отношению к поверхности S . Во всех точках внутри области V вектор $\mathbf{A}(x', y', z')$, определённый соотношением (14), является непрерывным и имеет непрерывные производные всех порядков. Из вида поверхностных интегралов следует, однако, что при переходе через поверхность S вектор $\mathbf{A}$ и его производные будут испытывать разрыв непрерывности. Действительно, мы покажем, что вне поверхности S вектор $\mathbf{A}$ всюду равен нулю.

Первый из поверхностных интегралов в (14) может быть интерпретирован как векторный потенциал поверхностных токов:

$$\mathbf{K} = -\frac{1}{\mu} [\mathbf{n}, \mathbf{B}_-], \quad (15)$$

где индекс «-» у $\mathbf{B}$ обозначает, что значение $\mathbf{B}$ берётся непосредственно внутри у поверхности S . В разделе 4.12 было показано, что слой поверхностных токов не влияет на векторный потенциал, но вызывает скачок вектора $\mathbf{B}$, равный

$$[\mathbf{n}, \mathbf{B}_+ - \mathbf{B}_-] = \mu \mathbf{K}. \quad (16)$$

После замены $\mathbf{K}$ его значением из (15) получаем, очевидно, что непосредственно снаружи у поверхности S

$$[\mathbf{n}, \mathbf{B}_+] = 0. \quad (17)$$

Аналогично, второй поверхностный интеграл эквивалентен векторному потенциалу поверхностной магнитной поляризации с плотностью:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\mu} [\mathbf{A}_-, \mathbf{n}]. \quad (18)$$

Нормальная компонента $\mathbf{A}$ остаётся непрерывной при переходе через подобный слой, в то время как тангенциальная компонента скачком обращается в нуль, как это видно после подстановки (18) в (17), стр. 222.

$$[\mathbf{n}, \mathbf{A}_+ - \mathbf{A}_-] = -[\mathbf{n}, \mathbf{A}_-] + \{\mathbf{n} [\mathbf{n}, \mathbf{A}_-]\} \mathbf{n}, \quad (19)$$

откуда

$$[\mathbf{n}, \mathbf{A}_+] = 0. \quad (20)$$

Математическое значение последнего члена в соотношении (14) совершенно ясно, но представить себе распределение токов или магнитных моментов требуемого типа трудно. Интегралы подобного вида мы связывали с напряжённостью поля поверхностных зарядов, распределённых с плотностью $\mathbf{A}_- \mathbf{n}$

и дающих скачок нормальной составляющей, определяемый соотношением:

$$n(A_+ - A_-) = nA_-, \quad (21)$$

вследствие чего мы заключаем, что:

$$nA_+ = 0. \quad (22)$$

Пока что мы показали, что на положительной стороне поверхности S тангенциальная и нормальная компоненты вектора A и тангенциальная компонента вектора B всюду равны нулю. Отсюда тотчас же следует, однако, что и нормальная компонента вектора B должна быть равна нулю на положительной стороне поверхности S , поскольку в нормальную компоненту ротора A входят частные производные от компонент вектора A только по направлениям, касательным к поверхности. Далее нам нужно лишь применить само соотношение (14) к области, внешней по отношению к поверхности S , чтобы доказать, что A , а значит и B , равны нулю всюду. Вне области V токи и магнитная поляризация отсутствуют, так как их действие представлено соответствующими поверхностными интегралами. Следовательно, поскольку $[n, B_+]$, $[n, A_+]$ и nA_+ все равны нулю, из (14) следует, что $A(x', y', z')$ должен равняться нулю во всех точках вне области V .

Если вместо (5) мы возьмём в качестве функции Грина $Q = \left[\text{grad } \frac{1}{r}, a \right]$, то легко показать, что:

$$B(x', y', z') = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \left[J, \text{grad } \frac{1}{r} \right] d\tau - \frac{1}{4\pi} \int_S \left[[n, B] \text{grad } \frac{1}{r} \right] da - \\ - \frac{1}{4\pi} \int_S (nB) \text{grad } \frac{1}{r} da. \quad (23)$$

Это представляет собой распространение закона Био и Савара на область конечной протяжённости, ограниченную поверхностью S . Доли, вносимые в поле токами и магнетиками, расположенными вне поверхности S , учитываются двумя поверхностными интегралами.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

4.16. Формулировка задачи магнитостатики. Пусть однородное изотропное тело вносится в постоянное поле неподвижных заданных токов или постоянных магнитов. Наша задача состоит в том, чтобы найти получающееся в результате полное поле как внутри тела, так и вне его. В том случае, когда плотность тока во всех точках внутри тела равна нулю, вторичное поле, появляющееся от индуцированного намагничивания, может быть всюду представлено однозначным потенциалом φ_1^* , так что методы, развитые при решении задач электростатики, могут быть полностью применены и в этом случае. Схема решения может быть записана следующим образом.

Пусть скалярный потенциал первичного поля равен φ_0^* . Если источниками первичного поля являются токи, то потенциал φ_0^* неоднозначен; однако это никак не повлияет на определение индуцированного поля φ_1^* . Результирующий полный потенциал будет $\varphi^* = \varphi_0^* + \varphi_1^*$. Магнитную проницаемость тела мы будем обозначать через μ_1 , а магнитную проницаемость однородной среды, в которую оно помещено, — через μ_2 . Тогда функция φ_1^* должна быть построена таким образом, чтобы выполнялись условия:

- 1) $\Delta \varphi_1^* = 0$ во всех точках, не расположенных на границе тела;
- 2) φ_1^* конечна и непрерывна всюду, включая и границу;

3) При переходе через границу нормальные производные от полного потенциала φ^* удовлетворяют условию

$$\nu_2 \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial n} \right)_+ - \nu_1 \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial n} \right)_- = 0,$$

где индексы «+» и «-» означают, что производные должны быть подсчитаны соответственно для внешней и внутренней поверхностей границы. Индуцированный потенциал φ_1^* подчинён условию:

$$\nu_2 \left(\frac{\partial \varphi_1^*}{\partial n} \right)_+ - \nu_1 \left(\frac{\partial \varphi_1^*}{\partial n} \right)_- = (\nu_1 - \nu_2) \frac{\partial \varphi_0^*}{\partial n} = f_1,$$

где f — известная функция точки на границе, удовлетворяющая условию:

$$4) \quad \int_S f \, da = 0.$$

5) В бесконечности φ_1^* должна стремиться к нулю по меньшей мере как $1/r^2$ с тем, чтобы $r^2 \varphi_1^*$ оставалось конечным при $r \rightarrow \infty$, поскольку свободных магнитных зарядов нет и φ_1^* должна исчезать, следовательно, как потенциал диполя или мультиполя высшего порядка.

В том случае, когда по телу протекают токи, внутреннее поле не может быть представлено скалярным потенциалом и краевая задача должна решаться с помощью векторного потенциала. Подобный случай имеет место, например, когда железный провод, по которому протекает ток, вносится во внешнее магнитное поле. В стационарном случае магнитное поле не влияет на распределение тока. Нахождение последнего фактически является электростатической задачей. Пусть векторный потенциал первичных источников будет A_0 ; а потенциал индуцированного и постоянного намагничивания тела и токов, которые могут по нему протекать, мы будем обозначать через A_1 . Функция A_1 подчинена следующим условиям:

1) $\text{rot rot } A_1 = \nu_1 J$ во всех точках внутри тела, в которых плотность тока равна J .

2) $\text{rot rot } A_1 = 0$ во всех других точках, не лежащих на границе S ;

3) $\text{div } A_1 = 0$ во всех точках, не лежащих на границе S ;

4) A_1 конечен и непрерывен всюду и меняется при переходе через граничную поверхность непрерывно (разделы 4.10 и 4.12).

5) При переходе через границу нормальные производные от потенциала A_1 , равно как и производные от полного потенциала A , удовлетворяют условию:

$$\left(\frac{\partial A_1}{\partial n} \right)_+ - \left(\frac{\partial A_1}{\partial n} \right)_- = \nu_0 [M_+ - M_-, n],$$

где n — внешняя нормаль, M_- — поляризация тела, а M_+ — поляризация среды, причём обе берутся непосредственно у границы раздела.

Поскольку M_+ и M_- определяются по крайней мере частично самим полем, это соотношение обычно не помогает в определении A_1 . Вместо него применяют обычное граничное условие для тангенциальных компонент полного поля:

$$6) \quad [n, H_+ - H_-] = \left[n, B_+ - \frac{\mu_2}{\mu_1} B_- \right] = 0,$$

которое даёт соотношение между производными от A в данной конкретной системе координат;

7) При $r \rightarrow \infty$ произведение $r A_1$ остаётся конечным.

4.17. Однозначность решения. Доказательство того, что только одна функция φ_1^* удовлетворяет условиям, перечисленным выше, было дано в разделе 3.20. Соответствующая теорема об однозначности для векторного потенциала может быть выведена из тождества (2), стр. 225. Положим $\mathbf{P} = \mathbf{Q} = \mathbf{A}$ и предположим сначала, что в области V_1 , ограниченной поверхностью S , плотность токов равна нулю. Тогда $\text{rot rot } \mathbf{A} = 0$ и

$$\int_V (\text{rot } \mathbf{A})^2 dv = - \int_S \mathbf{A} [\mathbf{n} \text{ rot } \mathbf{A}] da. \quad (1)$$

Из того, что подынтегральное выражение слева существенно положительно, следует, что если вектор $\mathbf{A}$ равен нулю на поверхности S , то вектор $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ равен нулю всюду в области V_1 . Следовательно, $\mathbf{A}$ либо постоянен, либо в крайнем случае равен градиенту от некоторого скаляра ψ . Однако поскольку $\mathbf{A}$ на поверхности S равен нулю, нормальная производная $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ на поверхности S также равна нулю, а этих условий, как было показано в разделе 3.20, достаточно для того, чтобы функция ψ имела постоянное значение во всей области V_1 . Следовательно, если $\mathbf{A}$ равен нулю на какой-либо замкнутой поверхности, то он равен нулю также и во всех точках внутренней области этой поверхности. Отсюда ясно также, что векторная функция $\mathbf{A}$ определяется в области V_1 однозначно своими значениями на границе S этой области, ибо, если мы имеем какие-либо два вектора $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$, удовлетворяющие заданным условиям на границе, то разность их должна быть равна нулю не только на поверхности S , но и во всей области V_1 .

То, что в области V_1 $\text{rot } \mathbf{A} = 0$ и $\mathbf{A} = \text{grad } \psi$, можно установить также и из того обстоятельства, что на поверхности S равен нулю $\text{rot } \mathbf{A}$ или тангенциальный вектор $[\mathbf{n}, \text{rot } \mathbf{A}]$. Однако в этом случае не обязательно следует, что и $\mathbf{A}$ равен нулю всюду: если две функции $\text{rot } \mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_1$ и $\text{rot } \mathbf{A}_2 = \mathbf{B}_2$ совпадают на поверхности S , то $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$ совпадают во всех внутренних точках, а $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ могут различаться самое большое на градиент от скалярной функции.

В случае наличия в области V_1 токов, потенциал $\mathbf{A}$ разлагается на часть $\mathbf{A}'$, вызываемую этими токами, и на часть $\mathbf{A}''$, зависящую от внешних источников. Вектор $\mathbf{A}'$ однозначно определяется распределением токов, в то время как значения $\mathbf{A}''$ или ротора $\mathbf{A}''$ во всех внутренних точках определяются через их значения на поверхности S .

Поскольку векторный потенциал регулярен на бесконечности, доказательство непосредственно применимо и к области V_2 , внешней по отношению к поверхности S . В любой области вектор $\mathbf{B}$ однозначно определяется значениями тангенциальной составляющей $[\mathbf{n}, \mathbf{B}]$ на границе этой области.

ЗАДАЧА ОБ ЭЛЛИПСОИДЕ

4.18. Поле однородно намагниченного эллипсоида. Пусть имеется постоянно и однородно намагниченный эллипсоид с главными полуосями a , b и c . Направление намагничивания может быть произвольным, но так как мы всегда можем разложить вектор намагничивания на три компоненты, параллельные главным осям, то нам достаточно будет рассмотреть только тот случай, когда намагничение $\mathbf{M}_0$ постоянно и параллельно оси a .

Ввиду однородности намагничивания $\rho^* = -\text{div } \mathbf{M}_0 = 0$ во всех точках внутри эллипсоида. Следовательно, потенциал нашего магнита обусловлен «поверхностными зарядами», имеющими плотность $\omega^* = \mathbf{n} \mathbf{M}_0$. В качестве

внешней среды мы берём свободное пространство. Задача полностью эквивалентна задаче о поляризованном диэлектрическом эллипсоиде, рассмотренной в разделе 3.27. Из уравнений (27), (32) и (42) потенциал φ_1 , создаваемый поляризацией P_x , может быть выражен через P_x и параметры эллипсоида. Вычёркивая коэффициент ε_0 и заменяя P_x на M_{0x} , мы получаем для скалярного магнитного потенциала в точках внутри эллипсоида:

$$\varphi_-^* = \frac{abc}{2} A_1 M_{0x} x, \quad A_1 = \int_0^\infty \frac{ds}{(s+a^2) R_s}. \quad (1)$$

Во внешних точках

$$\varphi_+^* = \frac{abc}{2} M_{0x} x \int_\varepsilon^\infty \frac{ds}{(s+a^2) R_s}. \quad (2)$$

Поле внутри эллипсоида будет:

$$H_x = -\frac{\partial \varphi_-^*}{\partial x} = -\frac{abc}{2} A_1 M_{0x}. \quad (3)$$

Таким образом, если намагничение эллипсоида параллельно главной оси, то поле $\mathbf{H}$ внутри эллипсоида однородно и параллельно той же оси, но по направлению противоположно намагничению.

4.19. Эллипсоид из магнетика в параллельном поле. Пусть эллипсоид из однородного изотропного вещества вносится в заданное однородное параллельное поле $\mathbf{H}_0$. Пусть остаточное намагничение в эллипсоиде отсутствует и пусть далее можно предположить, что в достаточно слабых полях магнитная проницаемость μ_1 эллипсоида, равно как и магнитная проницаемость μ_2 среды, постоянны.

Обращаясь к разделу 4.16, мы замечаем, что условия, которым должен удовлетворять φ^* , в точности те же, что и условия для φ , если только ε заменить на μ . Следовательно, выражение для поля мы можем заимствовать из электростатической задачи. Полный магнитный потенциал во внутренних точках эллипсоида будет, следовательно:

$$\varphi_-^* = -\frac{H_{0x}x}{1 + \frac{abc}{2\mu_2} (\mu_1 - \mu_2) A_1} - \frac{H_{0y}y}{1 + \frac{abc}{2\mu_2} (\mu_1 - \mu_2) A_2} - \frac{H_{0z}z}{1 + \frac{abc}{2\mu_2} (\mu_1 - \mu_2) A_3}; \quad (4)$$

φ_+ вне эллипсоида мы получим из выражения (38), стр. 193, заменив ε на μ и прибавив слагаемые, индуцируемые H_{0y} и H_{0z} .

Вращающий момент, действующий со стороны поля на эллипсоид, также может быть определён непосредственно из уравнения (54), стр. 196, после аналогичной замены. Результаты эти имеют фундаментальное значение. Существуют экспериментальные методы для очень точного определения малых вращающих моментов. Магнитное поле в центре длинного соленоида весьма близко к параллельному и однородному и его напряжённость можно вычислить, зная токи; таким образом можно с большой точностью определять магнитную проницаемость или восприимчивость различных образцов.

ЦИЛИНДР В ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПОЛЕ

4.20. Подсчёт поля. В качестве примера применения векторного потенциала рассмотрим следующую простую задачу. Цилиндр или провод круглого сечения с магнитной проницаемостью μ_1 помещён в среду с магнитной проницаемостью μ_2 . Пусть провод будет бесконечно длинным, радиус его пусть

будет a ; по проводу протекает ток I . Внешнее поле B_0 направлено перпендикулярно к оси провода и всюду параллельно и однородно. Прежде всего определим полное поле в точках внутри и вне цилиндра.

Ось x системы отсчёта мы выберем параллельно вектору B_0 , а ось z совместим с осью цилиндра и направим по направлению тока (рис. 43). Надо найти векторный потенциал, удовлетворяющий следующим условиям:

$$\text{rot rot } A = 0 \quad (r > a), \quad (1)$$

$$\text{rot rot } A = \mu_1 J \quad (r < a). \quad (2)$$

Плотность тока имеет только z -компоненту:

$$J_x = J_y = 0, \quad J_z = \frac{I}{\pi a^2} \quad (r < a). \quad (3)$$

Векторный потенциал может быть разложен на две части: потенциал A_0 внешнего заданного поля и вторичный потенциал A_1 , вызываемый частично

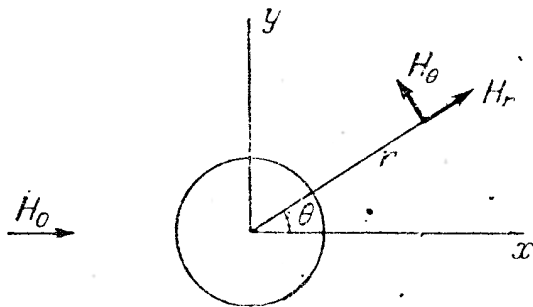


Рис. 43. Цилиндр в однородном магнитостатическом поле.

током I , а частично индуцированным намагничиванием проводника. Очевидно, B_0 можно получить из векторного потенциала, направленного вдоль оси z . Если i_z — единичный вектор в направлении оси z , то

$$A_0 = i_z B_0 y = i_z B_0 r \sin \theta. \quad (4)$$

Более того, так как намагничение может быть представлено эквивалентными объёмными и поверхностными токами, векторный потенциал A_1 также направлен вдоль той же оси: вектор индуцированного намагничения лежит, очевидно, в плоскости, перпендикулярной к оси z , а эквивалентные токи $J' = \text{rot } M_1$ и $K' = [n, M_2 - M_1]$ (раздел 4.10) направлены, следовательно, вдоль оси цилиндра. Так как векторный потенциал всегда параллелен токам, то $A_{1x} = A_{1y} = 0$. Теперь легко разложить (2) на компоненты. Из соотношения (85), стр. 55, мы имеем:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} = -\mu_1 J, \quad (5)$$

где индекс z опущен.

Прежде всего должно быть найдено общее решение однородного уравнения, которое мы получим, положив правую часть (5) равной нулю. Разделение переменных в подобном уравнении было рассмотрено в разделе 3.21 и так как векторный потенциал является однозначной функцией θ , то мы сразу же можем написать:

$$A' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) r^n + \sum_{n=0}^{\infty} (c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta) r^{-n}. \quad (6)$$

Кроме того, векторный потенциал должен быть конечен во всех точках пространства и, следовательно, внутри цилиндра коэффициенты c_n и d_n равны нулю.

Общее решение уравнения (5) получается обычным способом путём прибавления к (6) какого-либо частного решения (5). Поскольку $r^2 J$ зависит только от r , мы можем предположить, что это частное решение A''

не зависит от θ :

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} A'' \right) = -\mu_1 r J = -\frac{\mu_1 I}{\pi a^2} r, \quad (7)$$

$$A'' = -\frac{\mu_1 I}{4\pi} \left(\frac{r}{a} \right)^2. \quad (8)$$

Следовательно, во внутренних точках полный векторный потенциал будет

$$A^- = -\frac{\mu_1 I}{4\pi} \left(\frac{r}{a} \right)^2 + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) r^n. \quad (9)$$

Так как векторный потенциал индуцированного намагничивания регулярен на бесконечности, мы положим в (6) вне проводника $a_n = b_n = 0$. К этому выражению мы должны прибавить векторный потенциал тока I , равный, как мы показали (уравнение (20), стр. 211), $\frac{\mu_2 I}{2\pi} \ln \frac{1}{r}$, и, наконец, должны прибавить само внешнее поле (4). Результирующий векторный потенциал в любой точке вне цилиндра равен поэтому:

$$A^+ = B_0 r \sin \theta + \frac{\mu_2 I}{2\pi} \ln \frac{1}{r} + \sum_{n=0}^{\infty} (c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta) r^{-n}. \quad (10)$$

Коэффициенты разложения в ряд определяются из того условия, что векторный потенциал и тангенциальные компоненты $\mathbf{H}$ должны быть непрерывны на границе $r = a$. Из выражения для ротора в цилиндрических координатах (стр. 56), мы имеем:

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta}, \quad B_\theta = -\frac{\partial A_z}{\partial r}, \quad (11)$$

так что граничные условия, налагаемые на векторный потенциал, будут:

$$A^- = A^+, \quad \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial A^+}{\partial r} = \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial A^-}{\partial r} \quad (r = a). \quad (12)$$

В результате приравнивания коэффициентов при подобных членах (9) и (10) мы получаем:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 0, & c_0 &= (2\mu_2 \ln a - \mu_1) \frac{I}{4\pi}, \\ b_1 &= \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} B_0, & d_1 &= \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} a^2 B_0, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

все же другие коэффициенты равны нулю. Таким образом:

$$\left. \begin{aligned} A^+ &= \frac{\mu_2}{2\pi} I \ln \frac{a}{r} - \frac{\mu_1 I}{4\pi} + \left(r + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \frac{a^2}{r} \right) B_0 \sin \theta \quad (r > a); \\ A^- &= -\frac{\mu_1 I}{4\pi} \left(\frac{r}{a} \right)^2 + \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} B_0 r \sin \theta \quad (r < a). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

С помощью соотношений (11) можно подсчитать и поле

$$\left. \begin{aligned} H_r^+ &= \left(1 + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \frac{a^2}{r^2} \right) \cdot H_0 \cos \theta \\ H_\theta^+ &= \frac{I}{2\pi r} - \left(1 - \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \frac{a^2}{r^2} \right) H_0 \sin \theta, \end{aligned} \right\} \quad (r > a), \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} H_r^- &= \frac{2}{\mu_1 + \mu_2} B_0 \cos \theta \\ H_\theta^- &= \frac{I}{2\pi a^2} r - \frac{2}{\mu_1 + \mu_2} B_0 \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (r < a) \quad (16)$$

Характер поля внутри цилиндра становится более ясным, если перейти к прямоугольным координатам:

$$\left. \begin{aligned} H_x &= H_r \cos \theta - H_\theta \sin \theta, \\ H_y &= H_r \sin \theta + H_\theta \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} H_x &= \frac{2B_0}{\mu_1 + \mu_2} - \frac{I}{2\pi a^2} y, \\ H_y &= \frac{I}{2\pi a^2} x. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Намагничение цилиндра даётся выражением

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_0} H, \\ M_x &= \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_1 + \mu_2} \frac{2}{\mu_0} B_0 - \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_0} \frac{I}{2\pi a^2} y, \\ M_y &= \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_0} \frac{I}{2\pi a^2} x. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Очевидно, намагничение, индуцированное приложенным полем B_0 , направлено в положительную сторону оси x . На него накладывается намагничение, индуцированное током I .

4.21. Силы, действующие на цилиндр. Если среда, в которой находится провод, является жидкостью или немагнитным твёрдым телом, то сила, действующая на единицу длины провода, может быть подсчитана с помощью уравнения (15), стр. 144. Будучи разложено на прямоугольные компоненты, оно даёт:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= \int_0^{2\pi} \mu_2 \left(H_x H_r - \frac{1}{2} H^2 \cos \theta \right) r d\theta, \\ F_y &= \int_0^{2\pi} \mu_2 \left(H_y H_r - \frac{1}{2} H^2 \sin \theta \right) r d\theta. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Из (15) и (17) можно подсчитать прямоугольные компоненты поля вне цилиндра:

$$\left. \begin{aligned} H_x^+ &= H_0 + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \frac{a^2}{r^2} H_0 \cos 2\theta - \frac{I}{2\pi r} \sin \theta, \\ H_y^+ &= \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \frac{a^2}{r^2} H_0 \sin 2\theta + \frac{I}{2\pi r} \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

H^2 равно сумме квадратов этих двух компонент:

$$\begin{aligned} H^2 &= H_0^2 + 2 \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 H_0^2 \cos 2\theta + \left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \right)^2 \left(\frac{a}{r} \right)^4 H_0^2 + \\ &+ \left\{ \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 - 1 \right\} \frac{IH_0}{\pi r} \sin \theta + \frac{I^2}{4\pi^2 r^2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Подставляя (21) и (22) в (20) и вычисляя интегралы, мы получаем полную силу, действующую со стороны поля на провод и на ток, который течёт по нему:

$$F_x = 0, \quad F_y = \mu_2 H_0 I. \quad (23)$$

Таким образом, индуцированный магнитный момент провода ничего не прибавляет к полной силе, что является результатом однородности приложен-

ного поля. Если это поле создаётся током, протекающим по находящемуся поблизости проводнику, то распределение индуцированного намагничивания уже не будет симметричным и сила будет действовать на цилиндр даже в отсутствие тока I .

ЗАДАЧИ

1. Бесконечно длинный прямой проводник ограничен извне круглым цилиндром радиуса a , а изнутри круглым цилиндром радиуса b . Расстояние между центрами цилиндров равно c , причём $a > b + c$. Внутренний цилиндр полый. По проводнику протекает постоянный ток I , равномерно распределённый по поперечному сечению. Показать, что поле внутри цилиндрической полости равно:

$$H = \frac{cI}{2\pi(a^2 - b^2)}$$

и направлено перпендикулярно к диаметру, соединяющему центры цилиндров.

2. По двум прямым, бесконечным параллельным проводам, протекают в противоположных направлениях постоянные токи I . Проводимость проводов конечна. Радиус каждого из проводов равен a , расстояние между центрами — b .

а) Пользуясь биполярной системой координат, найти выражение для электростатического потенциала и для продольной и поперечной компонент напряжённости электрического поля внутри и вне проводника;

б) Найти выражения для соответствующих компонент напряжённости магнитного поля;

с) Рассмотреть поток энергии в этом поле.

3. Круглый виток проволоки радиуса a , по которому течёт постоянный ток I , лежит в плоскости xu так, что его центр совпадает с началом координат. Точка пространства задаётся цилиндрическими координатами r, φ, z , где $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Показать, что векторный потенциал в любой точке поля будет:

$$A_\varphi = \frac{\mu I}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \alpha \, d\alpha}{(a^2 + r^2 + z^2 - 2ar \cos \alpha)^{1/2}} = \frac{\mu}{\pi k} I \left(\frac{a}{r}\right)^{1/2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2}k^2\right) K - E \right\},$$

где $k^2 = 4ar / \{(a+r)^2 + z^2\}$, а K и E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

Показать, что при $(r^2 + z^2)^{1/2} \gg a$ это выражение сводится к уравнению (37), стр. 213, для векторного потенциала магнитного диполя.

4. Из выражения для векторного потенциала кругового витка, полученного в задаче 3, показать, что компоненты напряжённости магнитного поля будут:

$$H_r = \frac{\mu I}{2\pi} \frac{z}{r \{(a+r)^2 + z^2\}^{1/2}} \left\{ -K + \frac{a^2 + r^2 + z^2}{(a-r)^2 + z^2} E \right\},$$

$$H_z = \frac{\mu I}{2\pi} \frac{1}{\{(a+r)^2 + z^2\}^{1/2}} \left\{ K + \frac{a^2 - r^2 - z^2}{(a-r)^2 + z^2} E \right\}.$$

5. Поле двух коаксиальных катушек Гельмгольца, радиусы которых равны a и расстояние между центрами которых также равно a , приблизительно однородно вблизи оси посередине между ними. Предположим, что каждая из катушек имеет n витков, что поперечное сечение катушки мало по сравнению с a , и что по обеим катушкам течёт один и тот же ток. Воспользовавшись результатами задачи 4, написать выражения для продольной и радиальной компонент вектора $\mathbf{H}$ в точках, лежащих на оси и в любой точке плоскости, нормальной к оси и расположенной посередине между катушками. Какова напряжённость поля в средней точке оси? Найти разложение продольной компоненты H_z в ряд по степеням z/a , справедливое на оси в окрестности средней точки, и соответствующие разложения для H_r и H_z по степеням r/a , справедливые на перпендикулярной плоскости, проходящей через среднюю точку оси.

6. По линейным контурам C_1 и C_2 протекают постоянные токи соответственно I_1 и I_2 . Показать, что магнитная энергия системы равна

$$T_{12} = \frac{\mu}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{s}_2}{r_{12}},$$

где ds_1 и ds_2 — векторные элементы длины вдоль контуров, а r_{12} — расстояние между этими элементами. Магнитную проницаемость μ считать постоянной.

Коэффициент взаимной индукции определяется соотношением

$$T_{12} = L_{12} I_1 I_2, \quad L_{12} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{ds_1 ds_2}{r_{12}}.$$

7. Показать, что коэффициент взаимной индукции двух круговых коаксиальных витков в среде с постоянной магнитной проницаемостью равен

$$L_{12} = \mu \sqrt{ab} \left\{ \left(\frac{2}{k} - k \right) K - \frac{2}{k} E \right\},$$

где a и b — радиусы витков, c — расстояние между центрами, K и E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода, а k определяется соотношением:

$$k^2 = \frac{4ab}{(a+b)^2 + c^2};$$

Показать, что если расстояние между центрами c мало по сравнению с радиусами a и b , и радиусы эти одного порядка, то формула сводится к такой:

$$L_{12} \cong \mu a \left(\ln \frac{8a}{d} - 2 \right),$$

где

$$d = \sqrt{(a-b)^2 + c^2}.$$

8. Коэффициент самоиндукции L_{11} контура, по которому протекает постоянный ток I_1 , определяется соотношением

$$T_1 = \frac{1}{2} L_{11} I_1^2,$$

где T_1 — магнитная энергия контура. Следовательно, L_{11} может быть вычислен с помощью любого из выражений:

$$L_{11} = \frac{1}{I_1^2} \int \mathbf{J} \mathbf{A} dv = \frac{1}{I_1^2} \int \mu H^2 dv$$

при условии, что $\mathbf{B}$ является линейной функцией $\mathbf{H}$. В первом случае объёмный интеграл распространяется на область, занятую токами, а во втором случае — на всё пространство. Та часть L_{11} , которая связана с энергией поля внутри проводника, называется *внутренней самоиндукцией* L'_{11} .

Показать, что внутренняя самоиндукция длинного прямого проводника с постоянной магнитной проницаемостью μ_1 равна:

$$L'_{11} = \frac{\mu_1}{8\pi} \text{ генри/метр.}$$

9. Показать, что самоиндукция кругового витка радиуса R и радиуса поперечного сечения r равна.

$$L = R \left\{ \mu_2 \left(\ln \frac{8R}{r} - 2 \right) + \frac{1}{4} \mu_1 \right\},$$

где μ_1 — магнитная проницаемость провода, а μ_2 — магнитная проницаемость окружающей среды; μ_1 и μ_2 предполагаются постоянными.

10. Торoidalная катушка навита равномерно однослойной обмоткой из n витков на поверхность, образованную вращением круга радиуса r метров вокруг оси, расположенной на расстоянии R метров от центра круга. Показать, что самоиндукция катушки равна:

$$L = \mu n^2 (R - \sqrt{R^2 - r^2}) \text{ генри.}$$

11. Круговой виток проволоки помещён в плоскости, параллельной плоской поверхности полубесконечной среды с постоянной магнитной проницаемостью. Найти увеличение самоиндукции витка, вызванное наличием магнетика.

Показать, что если плоскость витка совпадает с поверхностью магнетика, то увеличение самоиндукции витка определяется коэффициентом, не зависящим от его формы.

12. Найти выражение для изменения самоиндукции кругового витка проволоки, вызванного наличием другого кругового витка коаксиального с первым.

13. Бесконечно длинный полый цилиндр с постоянной магнитной проницаемостью μ_1 помещён в заданное однородное магнитное поле, направленное перпендикулярно к образующей цилиндра. Потенциал этого первичного поля равен $\varphi_0^* = -H_0 r \cos \theta$, где r и θ — цилиндрические координаты в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра, которая служит началом отсчёта. Поперечное сечение цилиндра ограничено двумя окружностями: наружной радиуса a и внутренней радиуса b . Магнитная проницаемость внешней и внутренней среды постоянна и равна μ_2 . Показать, что потенциал в любой точке внутри полости равен

$$\varphi^* = - \left\{ 1 - \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}{\left(\frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}\right)^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \right\} H_0 r \cos \theta \quad (r < b).$$

14. Полая сфера с наружным радиусом a и внутренним радиусом b , с постоянной магнитной проницаемостью μ_1 помещена в заданное однородное магнитное поле H_0 . Внешняя и внутренняя среды имеют постоянную магнитную проницаемость μ_2 . Показать, что поле внутри полости однородно и даётся выражением

$$H = \left\{ 1 - \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^3}{\frac{(\mu_1 + 2\mu_2)(2\mu_1 + \mu_2)}{2(\mu_1 - \mu_2)^2} - \left(\frac{b}{a}\right)^3} \right\} H_0 \quad (r < b).$$

Рассмотреть относительную эффективность магнитного экранирования с помощью поллой сферы и полого цилиндра.

15. Магнитное поле, наблюдаемое у земной поверхности, может быть вызвано либо токами или магнетиками, расположенными внутри земли, либо же токами, циркулирующими на её поверхности. Измерения показывают, что поле внешних источников составляет не более нескольких процентов полного поля. Показать, как путём измерения горизонтальной и вертикальной компонент напряжённости магнитного поля на земной поверхности можно отличить поле внешних источников от поля источников, находящихся внутри земли.

16. Предположим, что магнитное поле земли вызывается стационарными токами или намагниченным веществом, расположенным внутри земли. Скалярный потенциал во внешних точках может быть тогда представлен в виде разложения по сферическим функциям. Показать, что коэффициенты при первых четырёх функциях могут быть определены измерением компонент напряжённости магнитного поля в восьми точках на поверхности земли.

17. Обмотка из тонкой проволоки должна быть намотана на сфероидальную поверхность так, чтобы поле катушки было таким же, как и поле сфероида, однородно намагниченного вдоль большой оси. Как должна быть распределена обмотка по поверхности сфероида?

18. Заряды равномерно распределены по поверхности медного шара радиуса a . Шар вращается вокруг своего диаметра с постоянной угловой скоростью. Подсчитать векторный потенциал и магнитное поле в точках внутри и вне шара.

19. Твёрдый незаряженный проводящий шар вращается с постоянной угловой скоростью ω в однородном магнитном поле $\mathbf{B}$ так, что ось вращения совпадает с направлением поля. Найти плотность объёмных и поверхностных зарядов и электростатический потенциал в точках внутри и вне шара. Предполагается, что магнитным полем вращающихся зарядов можно пренебречь.

20. Поляризация $\mathbf{P}$ неподвижного изотропного диэлектрика в электростатическом поле $\mathbf{E}$ выражается формулой

$$\mathbf{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \mathbf{E}.$$

Если каждый элемент диэлектрика перемещается в магнитном поле со скоростью $\mathbf{v}$, то поляризация с точностью до членов первого порядка относительно $1/c = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ будет:

$$\mathbf{P} = (\epsilon - \epsilon_0) (\mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}]).$$

Диэлектрический цилиндр радиуса a вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω в однородном статическом магнитном поле. Поле параллельно оси цилиндра. Найти поляризацию цилиндра, связанные заряды, появляющиеся на его поверхности, и электростатический потенциал внутри и вне цилиндра.

21. Диэлектрическая сфера радиуса a вращается в однородном статическом магнитном поле с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, параллельной направлению поля. Пользуясь выражением для поляризации, данным в задаче 20, найти плотность связанных объёмных и поверхностных зарядов и потенциал внутри и вне сферы.

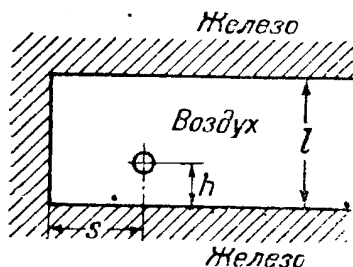
22. Показать, что сила взаимодействия между двумя линейными элементами токов ds_1 и ds_2 равна:

$$dF = \frac{\mu}{4\pi} I_1 I_2 \frac{[ds_2, [ds_1, r^0]]}{r^2} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{r^2} \left\{ (ds_2 r^0) ds_1 - (ds_1 ds_2) r^0 \right\},$$

где r^0 — единичный вектор, направленный вдоль линии r , соединяющей ds_1 и ds_2 от элемента ds_1 к элементу ds_2 .

23. Длинный прямой провод, по которому протекает постоянный ток, помещён в полубесконечную массу железа с магнитной проницаемостью μ на расстоянии d от плоской поверхности. Провод отделён от железа изолирующим слоем пренебрежимо малой толщины. Найти выражения для поля внутри и вне железа.

24. Длинный прямой провод, по которому протекает постоянный ток, расположен в воздушном зазоре между двумя параллельными железными стенками с бесконечной проницаемостью. Предполагается, что провод параллелен стенкам и имеет бесконечно малое поперечное сечение. Найти напряжённость поля в любой точке в воздушном зазоре. Начертить график зависимости силы, действующей на единицу длины проводника с током в один ампер, в функции расстояния от одной из стенок.



25. Длинный прямой проводник с бесконечно малым поперечным сечением помещён в бесконечно глубокую щель с параллельными стенками, прорезанную в массе железа с бесконечной проницаемостью. Пусть ширина щели l , а положение проводника определяется параметрами s и h , как показано на рисунке. Рассчитать напряжённость поля в точках внутри щели и силу, действующую на единицу длины проводника с током в один ампер. (См. Hague, *Electromagnetic Problems in Electrical Engineering*, и Linder, *J. Am. Inst. Elec. Engrs.*, 46, 614, 1927.)

26. Бесконечный эллиптический цилиндр из мягкого железа, форма поверхности которого определяется уравнением

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 t^2,$$

помещён в заданное однородное магнитное поле, направленное перпендикулярно к образующей цилиндра. Найти выражения для скалярного магнитного потенциала во внутренних и внешних точках и подсчитать силу и вращающий момент, действующие на единицу длины цилиндра. Рассмотреть случай эксцентриситета, равного единице, когда цилиндр вырождается в тонкую пластинку.

27. Частица с массой m и зарядом q влетает в поле магнитного диполя.

а) Написать дифференциальные уравнения движения частицы в сферической системе координат, начало которой совпадает с центром диполя.

б) Показать, что компонента момента количества движения в направлении оси диполя остаётся постоянной.

с) Рассмотреть траекторию для того случая, когда частица первоначально влетает в экваториальной плоскости.

28. Небольшой магнитный стержень помещён вблизи плоской поверхности очень большой массы мягкого железа с магнитной проницаемостью μ . Даны расстояние от магнита до плоскости и угол между осью магнита и перпендикуляром к плоскости. Рассматривая только дипольный момент магнита, найти силу и вращающий момент, действующие на магнит благодаря индуцированному намагничиванию железа.

29. Два небольших магнитных стержня, дипольные моменты которых равны соответственно m_1 и m_2 , лежат на идеально гладком столе. Расстояние между центрами магнитов велико по сравнению с их длиной. ϑ_1 и ϑ_2 — углы между осями диполей и линией, соединяющей их центры.

а) Рассчитать силу, действующую на диполь m_2 со стороны m_1 , и вращающий момент, действующий на диполь m_2 относительно вертикальной оси, проходящей через его центр.

б) Рассчитать силу, действующую на диполь m_1 со стороны m_2 , и вращающий момент, действующий на диполь m_1 относительно вертикальной оси, проходящей через его центр.

с) Найти полный угловой момент системы относительно точки, лежащей в плоскости стола. Является ли он постоянным?

30. Показать, что сила, действующая между небольшими стержневыми магнитами, обратно пропорциональна четвертой степени расстояния между ними, независимо от их ориентации в пространстве.

31. Статическое магнитное поле создаётся некоторым распределением намагниченного вещества. Нигде нет никаких токов. Показать, что распространённый по всему полю интеграл

$$\frac{1}{2} \int \mathbf{B} \mathbf{H} dv = 0.$$

32. Показать, что если $\mathbf{J}(x, y, z)$ — плотность тока в какой-либо точке области V , ограниченной замкнутой поверхностью S , то магнитное поле в любой внутренней точке (x', y', z') будет:

$$\mathbf{B}(x', y', z') = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \left[\mathbf{J}, \text{grad} \frac{1}{r} \right] dv - \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ \left[\mathbf{n}, \mathbf{B} \right] \text{grad} \frac{1}{r} \right\} + (\mathbf{n} \mathbf{B}) \text{grad} \frac{1}{r} \Big\} da;$$

где $r = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}$, и что для внешних точек поверхностный интеграл равен нулю.

33. Определить поле магнитного квадрупольа, воспользовавшись разложением векторного потенциала, данным на стр. 211, уравнение (23). Дать геометрическую интерпретацию квадрупольного момента с помощью бесконечно малых линейных токов.

ГЛАВА V

ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Каждое решение уравнений Максвелла, конечное, непрерывное и однозначное во всех точках однородной и изотропной области, представляет возможное электромагнитное поле. Не считая стационарных полей, исследованных в предыдущих главах, самыми простыми решениями уравнений поля являются решения, зависящие от времени и одной пространственной координаты. Факторы, характеризующие распространение этих элементарных одномерных полей, определяют в значительной мере и распространение тех сложных полей, которые встречаются в практических задачах. Мы будем изучать свойства плоских волн в безграничном изотропном пространстве, не интересуясь пока теми распределениями токов и зарядов, которые необходимы для возникновения плоских волн.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛОСКИХ ВОЛН

5.1. Уравнения одномерного поля. Будем пока предполагать, что среда однородна, изотропна и безгранична. Предположим, кроме того, что соотношения

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (1)$$

линейны, так что среда в отношении её электромагнитных свойств может быть охарактеризована тремя константами: ϵ , μ и σ . Если проводимость отлична от нуля, то любое начальное распределение свободных зарядов в среде должно самопроизвольно исчезать (раздел 1.7). В последующем ρ будет полагаться равным нулю как в диэлектриках, так и в проводниках. Тогда уравнения Максвелла, которым удовлетворяют векторы поля, будут:

$$\text{rot } \mathbf{E} + \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0, \quad (\text{I}) \quad \text{div } \mathbf{H} = 0, \quad (\text{III})$$

$$\text{rot } \mathbf{H} - \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \sigma \mathbf{E} = 0, \quad (\text{II}) \quad \text{div } \mathbf{E} = 0. \quad (\text{IV})$$

Мы ищем теперь решения этой системы, которые зависят от времени и от расстояния, отсчитываемого лишь вдоль одной пространственной оси. Это выделенное направление не обязательно должно совпадать с координатной осью системы отсчёта. Предположим поэтому, что поле является функцией координаты ζ , измеренной вдоль линии, направление которой определено единичным вектором $\mathbf{n}$. Прямоугольные компоненты этого единичного вектора n_x, n_y, n_z являются, очевидно, направляющими косинусами новой координатной оси ζ . В нашем предположении подразумевается, что в каждый момент времени векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ постоянны по направлению и величине на плоскостях, нормальных к $\mathbf{n}$. Эти плоскости определяются уравнением

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = \text{const.}, \quad (2)$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведённый из начала координат к любой точке плоскости, как показано на рис. 44.

Так как поля зависят лишь от ζ и t :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\zeta, t), \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}(\zeta, t), \quad (3)$$

то частные производные по прямоугольным координатам могут быть выражены в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= n_x \frac{\partial}{\partial \zeta}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= n_y \frac{\partial}{\partial \zeta}, \\ \frac{\partial}{\partial z} &= n_z \frac{\partial}{\partial \zeta}. \end{aligned} \quad (4)$$

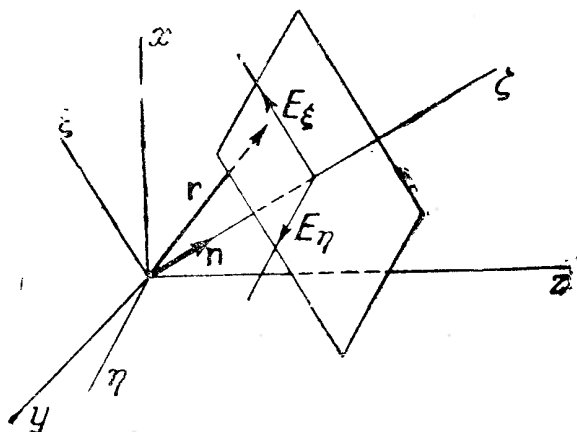


Рис. 44. Однородная плоская волна, распространяющаяся в направлении вектора $\mathbf{n}$.

Из этих выражений мы построим оператор grad и получим таким образом упрощённые выражения для rot и div:

$$\text{grad} = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} = (\mathbf{i} n_x + \mathbf{j} n_y + \mathbf{k} n_z) \frac{\partial}{\partial \zeta} = \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad (5)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = \left[\mathbf{n}, \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \zeta} \right] = \frac{\partial}{\partial \zeta} [\mathbf{n}, \mathbf{E}], \quad (6)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = \mathbf{n} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial \zeta} (\mathbf{n} \mathbf{E}). \quad (7)$$

В силу этих соотношений уравнения поля принимают следующий вид:

$$\left[\mathbf{n}, \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \zeta} \right] + \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0, \quad (\text{I}) \quad \mathbf{n} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \zeta} = 0, \quad (\text{III})$$

$$\left[\mathbf{n}, \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \zeta} \right] - \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \sigma \mathbf{E} = 0, \quad (\text{II}) \quad \mathbf{n} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \zeta} = 0. \quad (\text{IV})$$

Теперь решаем совместно эту систему: дифференцируя сначала уравнение (I) по ζ , а затем умножая его векторно на $\mathbf{n}$ и дифференцируя уравнение (II) по t , мы получаем:

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{n}, \left[\mathbf{n}, \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \zeta^2} \right] \right] &= \mathbf{n} \left(\mathbf{n} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \zeta^2} \right) - (\mathbf{n}, \mathbf{n}) \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \zeta^2} = -\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \zeta^2} = -\mu \left[\mathbf{n}, \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t \partial \zeta} \right], \\ \left[\mathbf{n}, \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t \partial \zeta} \right] &= \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (8)$$

Исключая члены с $\mathbf{H}$, находим, что вектор $\mathbf{E}$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \zeta^2} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0. \quad (9)$$

Исключение $\mathbf{E}$, проводимое аналогичным путём, приводит к такому же уравнению для $\mathbf{H}$:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial \zeta^2} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0. \quad (10)$$

Так как $\mathbf{n} \left[\mathbf{n}, \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \zeta} \right]$ тождественно равно нулю, то, как следует из (I), $\mathbf{n} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0$. Совместно с (III) это даёт:

$$\mathbf{n} \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} dt + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \zeta} d\zeta \right) = \mathbf{n} d\mathbf{H} = 0. \quad (11)$$

Таким образом мы заключаем, что изменение ζ -компоненты вектора $\mathbf{H}$, свя-

занное с изменением ζ или t , несовместимо с предположением о постоянстве поля вдоль плоскостей, нормальных к оси ζ в каждый момент времени. Уравнение (11) допускает лишь статические поля в направлении ζ , но так как здесь мы интересуемся переменными полями, то мы положим $H_\zeta = 0$.

Таким же образом из (II) следует:

$$\operatorname{div} \left(\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} \right) = 0, \quad (12)$$

что, совместно с (IV), приводит к равенству:

$$\operatorname{div} \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} dt + \frac{\sigma}{\epsilon} \mathbf{E} dt + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \zeta} d\zeta \right) = \operatorname{div} \left(d\mathbf{E} + \frac{\sigma}{\epsilon} \mathbf{E} d \right) = 0. \quad (13)$$

Компонента E_ζ , нормальная к семейству плоскостей, удовлетворяет поэтому уравнению

$$\frac{dE_\zeta}{dt} + \frac{\sigma}{\epsilon} E_\zeta = 0, \quad (14)$$

которое после интегрирования даёт:

$$E_\zeta = E_{0\zeta} e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (15)$$

где $E_{0\zeta}$ — продольная компонента $\mathbf{E}$ в момент $t=0$, а $\tau = \frac{\epsilon}{\sigma}$ — время релаксации, определённое на стр. 27. Если проводимость конечна, то продольная компонента $\mathbf{E}$ экспоненциально затухает: статическое электрическое поле не может поддерживаться внутри проводника. Согласно (15), возможна компонента E_ζ в идеальной диэлектрической среде, но тогда этот частный интеграл не содержит времени.

Уравнения (11) и (13) доказывают поперечность поля. В любом электромагнитном поле, имеющем вид (3), векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ лежат в плоскостях, нормальных к координатной оси ζ .

Введём вторую систему прямоугольных координат ξ, η, ζ , у которой начало координат совпадает с началом фиксированной системы x, y, z , а ось ζ ориентирована в направлении, определяемом $\mathbf{n}$. В этой новой системе вектор $\mathbf{E}$ имеет компоненты E_ξ, E_η и $E_\zeta = 0$. Обе компоненты E_ξ и E_η удовлетворяют уравнению (9), которое решается разделением переменных.

Пусть

$$E_\xi = f_1(\zeta) f_2(t), \quad (16)$$

тогда

$$\frac{1}{f_1} \frac{d^2 f_1}{d\zeta^2} = \frac{\mu\epsilon}{f_2} \frac{d^2 f_2}{dt^2} + \frac{\mu\sigma}{f} \frac{df_2}{dt} = -k^2, \quad (17)$$

где $-k^2$ — постоянная разделения. Общее решение уравнения для f_1 имеет вид:

$$f_1(\zeta) = A e^{ik\zeta} + B e^{-ik\zeta}, \quad (18)$$

где A и B — комплексные постоянные. Для f_2 мы возьмём частное решение:

$$f_2(t) = C e^{-pt}. \quad (19)$$

Тогда p должно удовлетворять характеристическому уравнению:

$$p^2 - \frac{\sigma}{\epsilon} p + \frac{k^2}{\mu\epsilon} = 0. \quad (20)$$

Таким образом p и постоянная k^2 связаны определённым соотношением. Значение одной из них может быть задано; но тогда другая будет уже определена.

Из (18) и (19) может быть построено частное решение следующего вида:

$$E_\xi = E_{1\xi} e^{ik\zeta - pt} + E_{2\xi} e^{-ik\zeta - pt}; \quad (21)$$

так же как и для другой прямоугольной компоненты:

$$E_{\eta} = E_{1\eta} e^{ik\eta - pt} + E_{2\eta} e^{-ik\eta - pt}. \quad (22)$$

Четыре комплексные постоянные $E_{1\xi}$, $E_{2\xi}$, $E_{1\eta}$, $E_{2\eta}$ являются комплексными векторными амплитудами, лежащими в плоскости ξ , η . Комбинируя (21) и (22), получим:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 e^{ik\xi - pt} + \mathbf{E}_2 e^{-ik\xi - pt}. \quad (23)$$

Это векторное решение уравнения (9) в свою очередь подставляется в уравнения поля для того, чтобы получить соответствующий магнитный вектор $\mathbf{H}$. Так как $\mathbf{H}$ должно иметь ту же функциональную зависимость от ξ и t , то мы можем написать:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 e^{ik\xi - pt} + \mathbf{H}_2 e^{-ik\xi - pt} \quad (24)$$

и затем определить постоянные $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$ через $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$.

Дифференцируя (23), имеем:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} = ik \mathbf{E}_1 e^{ik\xi - pt} - ik \mathbf{E}_2 e^{-ik\xi - pt}, \quad (25)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -p \mathbf{H}.$$

Эти производные, подставленные в (I), приводят к соотношению:

$$([ikn, \mathbf{E}_1] - p\mu \mathbf{H}_1) e^{ik\xi - pt} - ([ikn, \mathbf{E}_2] + p\mu \mathbf{H}_2) e^{-ik\xi - pt} = 0. \quad (26)$$

Коэффициенты при экспонентах должны каждый в отдельности равняться нулю и, следовательно,

$$\mathbf{H}_1 = \frac{ik}{p\mu} [n, \mathbf{E}_1], \quad \mathbf{H}_2 = -\frac{ik}{p\mu} [n, \mathbf{E}_2], \quad (27)$$

или в прямоугольных компонентах:

$$\begin{aligned} H_{1\xi} &= -\frac{ik}{p\mu} E_{1\eta}, & H_{1\eta} &= \frac{ik}{p\mu} E_{1\xi}, \\ H_{2\xi} &= \frac{ik}{p\mu} E_{2\eta}, & H_{2\eta} &= -\frac{ik}{p\mu} E_{2\xi}. \end{aligned} \quad (28)$$

Так как $\mathbf{E} [n, \mathbf{E}] = 0$, то, следовательно, $\mathbf{E} \mathbf{H} = 0$. В поле вида (3) электрический и магнитный векторы ортогональны к направлению n и друг к другу. Взаимное расположение этих векторов иллюстрирует рис. 45.

5.2. Плоские волны, гармонические во времени. В зависимости от выбора p и k имеется два подлежащих рассмотрению случая; их удобно рассмотреть отдельно.

Допустим сначала, что поле является гармоническим во времени и что поэтому p чисто мнимое. Постоянная разделения определяется тогда из (20):

$$p = i\omega, \quad k^2 = \mu\epsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega. \quad (29)$$

В проводящей среде k^2 , а значит и само k — комплексно. Знак корня мы будем выбирать таким образом, чтобы мнимая часть k всегда была положительна. Положим

$$k = \alpha + i\beta. \quad (30)$$

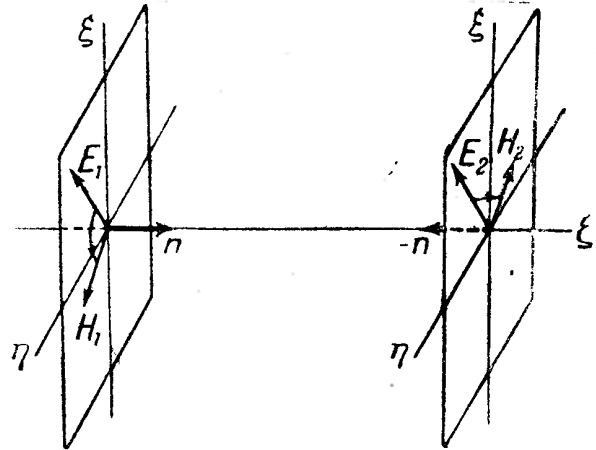


Рис. 45. Относительное расположение электрического и магнитного векторов в волнах, распространяющихся в положительном и отрицательном направлениях.

Амплитуды $E_{1\xi}, \dots, E_{2\eta}$ тоже комплексны и мы запишем их теперь в виде:

$$\begin{aligned} E_{1\xi} &= a_1 e^{i\theta_1}, & E_{2\xi} &= a_2 e^{i\theta_2}, \\ E_{1\eta} &= b_1 e^{i\psi_1}, & E_{2\eta} &= b_2 e^{i\psi_2}, \end{aligned} \quad (31)$$

где новые постоянные $a_1, \dots, b_2, \theta_1, \dots, \psi_2$ действительны. В силу этих определений для ξ -компоненты вектора $\mathbf{E}$ — мы имеем:

$$E_\xi = a_1 e^{-\beta\zeta + i(\alpha\zeta - \omega t + \theta_1)} + a_2 e^{\beta\zeta - i(\alpha\zeta + \omega t - \theta_2)}. \quad (32)$$

Так как (32) есть решение линейного уравнения с действительными коэффициентами, то его действительная и мнимая части также должны быть решениями. Действительная часть (32) равна:

$$E_\xi = a_1 e^{-\beta\zeta} \cos(\omega t - \alpha\zeta - \theta_1) + a_2 e^{\beta\zeta} \cos(\omega t + \alpha\zeta - \theta_2). \quad (33)$$

Фазовые углы θ_1 и θ_2 произвольны и, следовательно, выбор мнимой части уравнения (32) не может привести к решению независимому от (33).

Тем же способом из (22) получается η -компонента $\mathbf{E}$:

$$E_\eta = b_1 e^{-\beta\zeta} \cos(\omega t - \alpha\zeta - \psi_1) + b_2 e^{\beta\zeta} \cos(\omega t + \alpha\zeta - \psi_2). \quad (34)$$

Компоненты соответствующего магнитного поля получаются из (28). Мы имеем теперь:

$$\frac{ik}{\rho\mu} = \frac{\alpha + i\beta}{\mu\omega} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\mu\omega} e^{i\gamma}, \quad \gamma = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}. \quad (35)$$

Комплексная ξ -компонента $\mathbf{H}$ равна:

$$H_\xi = H_{1\xi} e^{-\beta\zeta + i(\alpha\zeta - \omega t)} + H_{2\xi} e^{\beta\zeta - i(\alpha\zeta + \omega t)}. \quad (36)$$

Подставив соответствующие значения $H_{1\xi}$ и $H_{2\xi}$, мы получим для действительной части

$$\begin{aligned} H_\xi = & -b_1 \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\mu\omega} e^{-\beta\zeta} \cos(\omega t - \alpha\zeta - \psi_1 - \gamma) + \\ & + b_2 \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\mu\omega} e^{\beta\zeta} \cos(\omega t + \alpha\zeta - \psi_2 - \gamma). \end{aligned} \quad (37)$$

Аналогично для η -компоненты:

$$\begin{aligned} H_\eta = & a_1 \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\mu\omega} e^{-\beta\zeta} \cos(\omega t - \alpha\zeta - \theta_1 - \gamma) - \\ & - a_2 \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\mu\omega} e^{\beta\zeta} \cos(\omega t + \alpha\zeta - \theta_2 - \gamma). \end{aligned} \quad (38)$$

Очевидно, эти решения соответствуют плоским волнам, распространяющимся в положительном и отрицательном направлениях вдоль оси ζ . Рассмотрим сначала наиболее простой случай, когда среда является непроводящей и все амплитуды за исключением a_1 равны нулю. Тогда σ , а следовательно, и β равны нулю, и поле описывается уравнениями:

$$E_\xi = a_1 \cos(\omega t - \alpha\zeta - \theta_1), \quad (39)$$

$$H_\eta = \frac{\alpha}{\mu\omega} a_1 \cos(\omega t - \alpha\zeta - \theta_1).$$

Это поле периодически в пространстве и во времени. Частота равна $\omega/2\pi = \nu$, а период по времени равен $\frac{2\pi}{\omega} = T$. Пространственный период называется длиной волны и определяется соотношением

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}; \quad \lambda = \frac{2\pi}{\alpha}. \quad (40)$$

Аргумент периодической функции $\varphi_1 = \omega t - \alpha \zeta - \theta_1$ называется *фазой*, а угол θ_1 , который определяется из начальных условий, называется *фазовым углом*. В каждый момент векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ постоянны в плоскостях $\zeta = \text{const.}$ Выберем теперь плоскость, на которой в момент $t = 0$ фаза имеет некоторое заданное значение, и займёмся вопросом, как эта плоскость должна перемещаться вдоль оси ζ для того, чтобы её фаза не изменялась с течением времени. Так как на любой такой плоскости фаза постоянна, то мы имеем:

$$\varphi_1 = \omega t - \alpha \zeta - \theta_1 = \text{const.}, \quad d\varphi_1 = \omega dt - \alpha d\zeta = 0. \quad (41)$$

В поле, описываемом уравнениями (39), поверхностью постоянной фазы является плоскость, перемещающаяся в направлении *положительной* оси ζ с постоянной скоростью

$$v = \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\omega}{\alpha}. \quad (42)$$

v называется *фазовой скоростью* волны. Она представляет собой всего лишь скорость распространения фазы или состояния и не обязательно совпадает со скоростью, с которой распространяется энергия волны или сигнал. В сущности v может превышать критическую скорость c , ни в малейшей степени не нарушая постулата относительности.

В непроводящей среде

$$\alpha = \omega \sqrt{\mu \epsilon}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\chi_e \chi_m}}, \quad (43)$$

где c — скорость света в свободном пространстве, а χ_e , χ_m — относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости. В оптике отношение $n = \frac{c}{v} = \frac{\alpha c}{\omega}$ называется *показателем преломления*. Так как во всех материалах, кроме ферромагнитных, χ_m очень близко к единице, то показатель преломления равен корню квадратному из χ_e . Этот результат впервые был получен Максвеллом и послужил основой для его утверждения, что свет — электромагнитное явление. Максвеллу были известны значительные отклонения от ожидаемых значений n . Эти отклонения были объяснены позже, тогда, когда было обнаружено, что диэлектрическая проницаемость при высоких частотах не обязательно имеет значения, полученные из измерений в статических или квазистатических условиях. Функциональная зависимость n от частоты приводит к соответствующей зависимости для фазовой скорости, т. е. к явлениям, известным под названием дисперсии.

При данной частоте длина волны определяется свойствами среды:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{\lambda_0}{n}, \quad (44)$$

где λ_0 — длина волны в свободном пространстве при той же частоте. Во всех неионизованных средах $n > 1$ и, следовательно, в веществе фазовая скорость уменьшается, а длина волны укорачивается.

Обращаясь опять к выражениям (39), мы видим, что соотношение между магнитным и электрическим векторами таково, что векторное произведение $[\mathbf{E}, \mathbf{H}]$ направлено в сторону распространения волны. Магнитный вектор распространяется в том же направлении и с той же скоростью, что и электрический вектор и в непроводящей среде они находятся точно в фазе, а их амплитуды отличаются множителем

$$\frac{\alpha}{\mu \omega} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} = 2,654 \cdot 10^{-3} \sqrt{\frac{\chi_e}{\chi_m}} \quad (\sigma = 0). \quad (45)$$

Если в уравнениях (33) — (38) положить равными нулю все амплитуды, кроме a_2 , то получится другое частное решение, которое в непроводящей среде принимает вид:

$$\begin{aligned} E_\xi &= a_2 \cos(\omega t + \alpha \zeta - \theta_2), \\ H_\eta &= a_2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cos(\omega t + \alpha \zeta - \theta_2). \end{aligned} \quad (46)$$

Это поле отличается от предыдущего лишь направлением своего распространения. Фаза равна $\varphi_2 = \omega t + \alpha \zeta - \theta_2$ и поверхность постоянной фазы распространяется в направлении *отрицательной* оси ζ со скоростью $v = -\frac{\omega}{\alpha}$.

Два частных решения с амплитудами b_1 и b_2 представляют вторую пару волн, распространяющихся в положительном и отрицательном направлениях. Обе эти волны имеют электрический вектор, параллельный оси η .

Не будем теперь ограничиваться идеальной диэлектрической средой и исследуем явления, возникающие вследствие конечной проводимости. Тогда магнитный и электрический векторы экспоненциально уменьшаются в направлении распространения. Волны, распространяющиеся в отрицательном направлении, умножаются на $e^{+\beta \zeta}$, но так как ζ уменьшается в этом направлении, то это также приводит к ослаблению. Проводимость среды вызывает не только затухание волн, но влияет и на их скорость. Константы α и β могут быть вычислены из значений μ , ϵ и σ . Возводя (30) в квадрат и приравнявая действительную и мнимую части соответственно действительному и мнимому членам в (29), получаем:

$$\alpha^2 - \beta^2 = \mu \epsilon \omega^2, \quad \alpha \beta = \frac{\mu \sigma \omega}{2}. \quad (47)$$

Решая эти уравнения совместно, находим:

$$\alpha = \omega \left[\frac{\mu \epsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}} + 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (48)$$

$$\beta = \omega \left[\frac{\mu \epsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (49)$$

Неопределённость в выборе знака, которая возникает при извлечении первого корня, устраняется требованием действительности α и β .

Плоскости постоянной фазы распространяются со скоростью

$$v = c \left[\frac{\chi_m \chi_e}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}} + 1 \right) \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (50)$$

которая *увеличивается с частотой*, если постоянные χ_e , χ_m и σ от частоты не зависят.

Уменьшение амплитуды на поверхности постоянной фазы определяется коэффициентом затухания β , который также *увеличивается с увеличением частоты*. Комплексный коэффициент k мы будем называть *постоянной распространения*; его действительная часть может быть названа *фазовой константой*, хотя этот термин применяется также к углам θ и ψ .

Влияние частоты и проводимости на распространение плоских волн проще всего выявляется при рассмотрении двух предельных случаев. Из формул (48) и (49) непосредственно видно, что поведение коэффициентов α и β существенно зависит от величины $\frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}$. Полная плотность тока в любой точке среды есть

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = (\sigma - i\omega\epsilon) \mathbf{E}. \quad (51)$$

Отсюда видно, что $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$ равно отношению плотностей тока проводимости к току смещения.

Случай I. $\frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2} \ll 1$. Ток смещения значительно сильнее тока проводимости. Это может иметь место либо в недостаточно проводящей среде, либо в относительно хорошем проводнике (таком, как морская вода), если в нём распространяются волны очень высокой частоты. Разложение (48) и (49) в ряд по $\frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}$ даёт:

$$\alpha = \omega \sqrt{\mu\epsilon} \left(1 + \frac{1}{8} \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2} + \dots \right), \quad (52)$$

$$\beta = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = 188,3 \sigma \sqrt{\frac{\chi_m}{\chi_e}}. \quad (53)$$

Заметим, что в этом приближении коэффициент затухания не зависит от частоты. В подобных средах, по мере увеличения частоты, затухание асимптотически приближается к максимальному значению (53).

Случай II. $\frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2} \gg 1$. Ток проводимости значительно превышает ток смещения. Это всегда имеет место в металлах, в которых σ порядка 10^7 1/ом·метр. О диэлектрической проницаемости металлов известно немного, но нет никаких оснований принимать её значения большими. Так как величина ϵ , вероятно, порядка 10^{-11} , то ток смещения не может равняться току проводимости при частотах, меньших 10^{17} , лежащих в области атомных явлений, к которым, очевидно, настоящее рассмотрение неприменимо. Для α и β мы получаем приближённую формулу

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = 1,987 \cdot 10^{-8} \sqrt{\nu\chi_m}. \quad (54)$$

Увеличение частоты, магнитной проницаемости или проводимости одинаковым образом способствует увеличению затухания. Фазовая скорость увеличивается также при возрастании частоты, но уменьшается с увеличением σ или χ_m . Таким образом, в сложной периодической волне гармоники высшего порядка всё время убегают вперёд относительно низших гармоник.

Амплитуды электрического и магнитного векторов плоской волны связаны соотношением:

$$|H| = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\mu\omega} |E|, \quad (55)$$

$$\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\mu} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left(1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2} \right)^{1/4}. \quad (56)$$

Для плохо проводящей среды разложение (56) даёт:

$$\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\mu\omega} \cong 2,654 \cdot 10^{-8} \sqrt{\frac{\chi_e}{\chi_m}} \left(1 + 0,807 \cdot 10^{20} \frac{\sigma^2}{k_e^2 \nu^2} \right), \quad (57)$$

тогда как в хороших проводниках:

$$\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\mu\omega} \cong \sqrt{\frac{\sigma}{\mu\omega}} = 355,8 \sqrt{\frac{\sigma}{\nu\chi_m}} \quad \left(\frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2} \gg 1 \right). \quad (58)$$

В идеальном диэлектрике электрический и магнитный векторы колеблются в фазе; если же среда проводит, то магнитный вектор отстаёт

на угол γ , причём:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\beta}{\alpha} = \left(\frac{\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}} - 1}{\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2}} + 1} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (59)$$

Если $\frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2} \gg 1$, то это отношение обращается в единицу, т. е. магнитный вектор плоской волны, проникающей в металл, отстаёт от электрического вектора на угол 45° .

5.3. Плоские волны, гармонические в пространстве. Предположение, что p в уравнении (20) чисто мнимое, приводит к комплексным значениям k и к электромагнитным полям, которые являются простыми гармоническими функциями времени. Поле, которое в любой данной точке на оси ζ является известной периодической функцией t , может быть разложено с помощью теоремы Фурье на гармонические компоненты, распространяющиеся вдоль оси ζ , так как это только что было описано. Изменение во времени в любой другой фиксированной точке может быть тогда найдено посредством суммирования этих компонент в исследуемой точке. Вместо изменения поля с течением времени t в некоторой точке ζ может быть задано распределение поля в зависимости от ζ при определённом значении t и задача заключается в том, чтобы определить поле в любой последующий момент. Теорема Фурье может быть тогда применена относительно переменной ζ .

Пусть постоянная разделения k^2 действительна. Тогда p — комплексная величина, выражающаяся формулой:

$$p = \frac{\sigma}{2\epsilon} \pm i \sqrt{\frac{k^2}{\mu\epsilon} - \frac{\sigma^2}{4\epsilon^2}}. \quad (60)$$

Если на время обозначить $q = \sqrt{\frac{k^2}{\mu\epsilon} - \frac{\sigma^2}{4\epsilon^2}}$, то электрический вектор, определённый в (23), примет вид:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 e^{-\frac{\sigma}{2\epsilon} t + i(k\zeta - qt)} + \mathbf{E}_2 e^{-\frac{\sigma}{2\epsilon} t - i(k\zeta + qt)}. \quad (61)$$

Если $\frac{\sigma^2}{4\epsilon^2} < \frac{k^2}{\mu\epsilon}$, то величина iq чисто мнимая и поле представляет собой плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси ζ с фазовой скоростью

$$v = \frac{d\zeta}{dt} = \pm \frac{q}{k}. \quad (62)$$

Амплитуда колебаний в любой точке экспоненциально уменьшается с ростом t ; скорость убывания определяется временем релаксации $\tau = \frac{\epsilon}{\sigma}$.

Если $\sigma^2/4\epsilon^2 > k^2/\mu\epsilon$, то величина iq действительна и нет никакого распространения в указанном выше смысле. Поле периодически по ζ , но монотонно затухает со временем. Начальная форма волны совершенно не смещается вдоль пространственной оси: волновое явление вырождается в *диффузию*.

5.4. Поляризация. Так как волны, распространяющиеся вправо или влево, отличаются лишь знаком скорости, мы ограничимся теперь волной, распространяющейся в положительном направлении (направо). Кроме того, эффект затухания из-за конечной проводимости однородной изотропной среды, описываемый экспоненциальным множителем, общим для всех компонент поля, не играет роли в поляризации и не будет нами учитываться.

Предположим далее, что амплитуды и фазовые константы прямоугольных компонент E уже определены и исследуем геометрическое место $|E| = \sqrt{E_\xi^2 + E_\eta^2}$ в плоскости $\zeta = \text{const}$.

Чтобы определить это геометрическое место, нужно исключить из уравнений

$$E_\xi = a \cos(\varphi + \theta), \quad E_\eta = b \cos(\varphi + \psi), \quad E_\zeta = 0 \quad (63)$$

переменную, составляющую фазы $\varphi = \alpha\zeta - \omega t$. Для этой цели перепишем (63) в виде:

$$\frac{E_\xi}{a} = \cos(\varphi + \theta),$$

$$\frac{E_\eta}{b} = \cos(\varphi + \theta) \cos \delta - \sin(\varphi + \theta) \sin \delta, \quad (64)$$

где $\delta = \psi - \theta$. Возведением в квадрат можно исключить периодический множитель $\cos(\varphi + \theta)$ и тогда получается, что прямоугольные компоненты должны удовлетворять соотношению

$$\left(\frac{E_\xi}{a}\right)^2 - 2 \frac{E_\xi}{a} \frac{E_\eta}{b} \cos \delta + \left(\frac{E_\eta}{b}\right)^2 = \sin^2 \delta. \quad (65)$$

Дискриминант этой квадратичной формы отрицателен:

$$\frac{4 \cos^2 \delta}{a^2 b^2} - \frac{4}{a^2 b^2} = -\frac{4}{a^2 b^2} \sin^2 \delta \leq 0, \quad (66)$$

и поэтому геометрическое место конца вектора с компонентами E_ξ , E_η является эллипсом на плоскости (ξ, η) .

В этом случае говорят, что волна *эллиптически поляризована*.

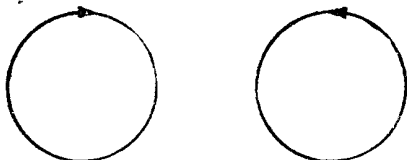


Рис. 47. Круговая поляризация. Окружности изображают траекторию конца вектора E . Волна распространяется нормально к рисунку по направлению к читателю.

Точки касания эллипса с описанным прямоугольником определяются из (65) и равны $(\pm a, \pm b \cos \delta)$ и $(\pm a \cos \delta, \pm b)$. В общем случае главные оси эллипса не совпадают с координатными осями ξ, η , но их можно совместить поворотом координатной системы около оси ζ на угол θ , определенный из соотношения

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2ab}{a^2 - b^2} \cos \delta. \quad (67)$$

Если амплитуды прямоугольных компонент равны, а фазы отличаются на $\pi/2$, умноженное на нечетное число, то эллипс вырождается в окружность:

$$E_\xi^2 + E_\eta^2 = a^2 \quad (a = b, \delta = \frac{m\pi}{2}, m = \pm 1, \pm 3, \dots). \quad (68)$$

В этом случае говорят, что волна *поляризована по кругу*. Различают два случая в соответствии с положительным или отрицательным направлением вращения электрического вектора вокруг оси ζ . Обычно принято называть правополяризованным лучом тот, в котором E вращается по часовой стрелке, если наблюдать против направления распространения, глядя на источник.

Наиболее важным из всех частных случаев является тот, при котором эллипс вырождается в прямую линию. Он осуществляется при $\delta = \pm m\pi$, где m — любое целое число. Геометрическое место E в плоскости (ξ, η) превращается в прямую линию, составляющую с осью ξ угол ϑ , определяемый

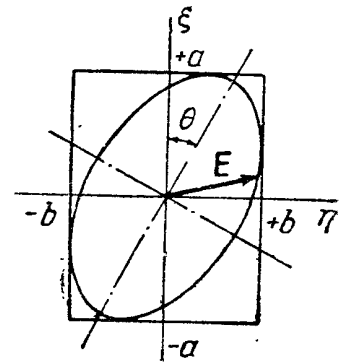


Рис. 46. Эллипс поляризации.

из соотношения:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{E_{\eta}}{E_{\xi}} = (-1)^m \frac{b}{a}. \quad (69)$$

Такая волна *линейно поляризована*. Магнитный вектор плоской волны нормален к электрическому вектору и поэтому $\mathbf{H}$ колеблется вдоль линии, с тангенсом угла наклона $(-1)^m \frac{a}{b}$. Обычно поляризацию определяют по $\mathbf{E}$ и считают линией (69) направлением линейной поляризации. Однако в оптике по традиции определяют ориентацию векторов по «плоскости поляризации», являющейся плоскостью, нормальной к $\mathbf{E}$, содержащей $\mathbf{H}$ и направление распространения.

5.5. Поток энергии. В электромагнитном поле скорость, с которой энергия протекает через поверхность, определяется вектором Пойнтинга $\mathbf{S} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$, введенным в разделе 2.19. Так как, согласно (27), $\mathbf{H} = \pm \frac{ik}{p\mu} [\mathbf{n}, \mathbf{E}]$ (знак зависит от направления распространения), то, очевидно, поток энергии нормален к плоскостям постоянной фазы и параллелен направлению распространения.

Вычисление мгновенных значений потока энергии нужно производить, оперируя с действительными частями комплексных волновых функций. С другой стороны, усредненные значения потока энергии могут быть быстро определены при помощи комплексного вектора $\mathbf{S}^+ = \frac{1}{2} [\mathbf{E}, \mathbf{H}^*]$, как это было показано в разделе 2.20. Для простоты рассмотрим плоскую волну, линейно поляризованную вдоль оси x и распространяющуюся в направлении положительных z . Тогда

$$\left. \begin{aligned} E_x &= ae^{-z + i(\alpha z - \omega t + \theta)}, \\ H_y^* &= a \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\mu\omega} e^{-\beta z - i(\alpha z - \omega t + \theta + \gamma)}, \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

и комплексный вектор потока энергии равен:

$$\mathbf{S}^+ = \frac{1}{2} E_x H_y^* = a^2 \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2\mu\omega} e^{-2\beta z - i\gamma}. \quad (71)$$

Его действительная часть представляет, в среднем, энергию, проходящую в секунду через единицу площади плоскости x, y :

$$\bar{S}_z = \frac{a^2}{2} \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\mu\omega} e^{-2\beta z} \cos \gamma. \quad (72)$$

Коэффициент $\cos \gamma$, появившийся из-за смещения фаз между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, может быть выражен через α и β :

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \cos \gamma = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad (73)$$

$$\bar{S} = \frac{a^2}{2\mu\omega} e^{-2\beta z}. \quad (74)$$

Согласно теореме Пойнтинга, дивергенция от вектора усредненного потока энергии даёт энергию, превращающуюся в тепло в единице объёма за секунду. В данном случае

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{S}} = \frac{\partial \bar{S}_z}{\partial z} = -\frac{\alpha\beta}{\mu\omega} a^2 e^{-2\beta z} = -\frac{\sigma}{2} a^2 e^{-2\beta z}, \quad (75)$$

что, в свою очередь, очевидно, равно проводимости, умноженной на среднее квадратичное значение электрического вектора поля $\mathbf{E}$.

5.6. Импеданс. В мире, в котором внешне всё так несхоже, утешительно обнаруживать иной раз единство и заманчиво размышлять о его значении. Неискушённому человеку представляется, что система колеблющихся грузов, подвешенных на пружинной сетке, имеет мало общего с колебаниями токов в системе, состоящей из катушек и конденсаторов. Но эта электрическая цепь может быть сконструирована так, что её поведение и колебания некоторой механической системы будут выражаться одной и той же системой дифференциальных уравнений. Между ними имеется взаимно однозначное соответствие. Току соответствует скорость, напряжение — силе, а масса и упругие свойства пружины изображаются самоиндукцией и ёмкостью конденсатора. Если осмелиться думать о таких вещах, то представляется, что «абсолютная реальность» — это *свойство инерции*, а *масса и самоиндукция* являются лишь его представлениями или названиями.

Каков бы ни был философский смысл эквивалентности механических, электрических и химических явлений, физик успешно использовал её для облегчения своих исследований. Техника анализа электрических цепей, развитая за последние тридцать лет, была с успехом применена к механическим системам, исследование которых не так давно представлялось весьма трудным. Механические задачи самого сложного характера представляются электрическими аналогами, которые могут быть легко исследованы в лаборатории. Не только методы, но и понятия из области электрических цепей распространились в другие разделы физики. Конечно, самым важным из них является понятие *импеданса*, связывающего напряжение и ток по амплитуде и фазе. Это понятие применяется в механике для выражения соотношения между силой и скоростью, в гидродинамике, и особенно в акустике — для измерения отношения давления к потоку.

Распространение понятия импеданса на электромагнитные поля, в общем, не ново, но недавно это понятие было вновь пересмотрено и развито в очень интересной статье Щелкунова¹⁾. Импеданс для данной среды и волн данного типа тесно связан с потоком энергии, но для того, чтобы уяснить его сложную природу, лучше всего начать с аналогии, именно, с одномерной передаточной линией, как это и делает Щелкунов.

Пусть z — длина, измеряемая вдоль электрической передающей линии и пусть $V = V_0 e^{-i\omega t}$, $I = I_0 e^{-i\omega t}$ — соответственно, напряжение между проводами и ток в линии в какой-то точке z . Величины V_0 и I_0 являются функциями только от z . R — сопротивление единицы длины линии, а L — индуктивность, отнесённая к единице длины линии. Утечка между проводами в каждой точке описывается проводимостью G и шунтирующей ёмкостью C . Импеданс Z и шунтовой адмитанс Y запишутся поэтому так:

$$Z = R - i\omega L, \quad Y = G - i\omega C. \quad (76)$$

Напряжение и ток удовлетворяют соотношениям²⁾:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -ZI, \quad \frac{\partial I}{\partial z} = -YV. \quad (77)$$

Эти уравнения имеют два независимых решения, представляющих волны, которые распространяются в положительном и отрицательном направлениях:

$$\begin{aligned} I_1 &= A_1 e^{ikz - i\omega t}, & V_1 &= Z_0 I_1, \\ I_2 &= A_2 e^{-ikz - i\omega t}, & V_2 &= -Z_0 I_2, \end{aligned} \quad (78)$$

¹⁾ Schelkunoff, *Bell. System Tech. J.*, 17, 17, January, 1938.

²⁾ Смотри, например, Guillemin, *Communication Networks*, том II, гл. II, Wiley, 1935.

где

$$k = i\sqrt{YZ}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}}. \quad (79)$$

k — постоянная распространения, Z_0 — характеристический импеданс линии¹⁾.

Рассмотрим теперь плоскую электромагнитную волну, распространяющуюся в направлении, определяемом единичным вектором $\mathbf{n}$. Расстояние в этом направлении мы опять будем измерять координатой ζ и предположим, что время входит лишь в виде множителя $e^{-i\omega t}$. В то время, как напряжение и ток являются скалярными величинами, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, конечно, векторы. Для того чтобы установить постоянное правило для определения знака, уравнения поля будут написаны таким образом, чтобы связать вектор $\mathbf{E}$ с вектором $[\mathbf{H}, \mathbf{n}]$, который параллелен $\mathbf{E}$ и направлен в ту же сторону. Имеем:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \zeta} = i\omega\mu [\mathbf{H}, \mathbf{n}]; \quad \frac{\partial}{\partial \zeta} [\mathbf{H}, \mathbf{n}] = i(\omega\epsilon + i\sigma)\mathbf{E}. \quad (80)$$

По аналогии с (77):

$$Z = -i\omega\mu, \quad Y = -i(\omega\epsilon + i\sigma). \quad (81)$$

Постоянная распространения k равна

$$k = i\sqrt{YZ} = \sqrt{\omega^2\epsilon\mu + i\omega\mu\sigma}, \quad (82)$$

как и в (29), стр. 243, в то время как внутренний импеданс среды для плоских волн определяется Щелкуновым как величина

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\omega\epsilon + i\sigma}} = \frac{\mu\omega}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} e^{-i\gamma}. \quad (83)$$

В свободном пространстве этот импеданс принимает вид:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376,6 \text{ ома}. \quad (84)$$

Так как мы приняли, что $\mathbf{n}$ направлена в сторону распространения, различие положительного и отрицательного направлений становится ненужным и соотношения между электромагнитными векторами принимают вид:

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}] = Z_0\mathbf{H}, \quad \mathbf{E} = Z_0[\mathbf{H}, \mathbf{n}]. \quad (85)$$

Между внутренним импедансом и комплексным вектором Пойнтинга имеется тесная связь:

$$\mathbf{S}^+ = \frac{1}{2} [\mathbf{E}, \mathbf{H}^*] = \frac{1}{2} \left[\mathbf{E}, \frac{[\mathbf{n}, \mathbf{E}^*]}{Z_0^*} \right] = \frac{(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*) \mathbf{n}}{2Z_0^*} \quad (86)$$

и, следовательно,

$$Z_0^* = \frac{1}{2} \frac{E^2}{|\mathbf{S}^+|}. \quad (87)$$

¹⁾ Наши формулы отличаются знаком при мнимой компоненте от обычно приводимых в литературе по электротехнике, так как мы употребляем $e^{-i\omega t}$ вместо $e^{i\omega t}$. Очевидно, выбор знака совершенно произволен. Хотя в электротехнике удобнее использовать $e^{i\omega t}$, в волновой теории мы всё-таки будем чаще интересоваться пространственным множителем, чем временным. Распространение выводов на криволинейные координаты, которое будет дано в следующей главе, оправдывает выбор $e^{-i\omega t}$.

ОБЩИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Мы рассматривали в этой главе некоторые частные решения уравнений поля, которые были функциями от одной пространственной координаты и от времени. Благодаря линейности уравнений, их общее решение может быть получено суммированием частных решений, умноженных на произвольные постоянные. Поскольку мы имеем в своём распоряжении бесконечный ряд констант, постольку должна существовать возможность строить решения, удовлетворяющие любым заданным начальным условиям. Мы покажем, например, что вектор поля может быть задан в определённый момент $t = t_0$, как функция от ζ и тем самым поле однозначно определяется для всех последующих моментов времени, или же вектор поля может быть задан как функция времени в какой-то одной плоскости $\zeta = \zeta_0$ и тогда поле определится во всех других точках пространства и времени. Методы, которыми мы располагаем для исследования общих интегралов дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, распадаются, в основном, на два класса: методы Фурье и Коши и методы Римана и Вольтерра. В последние годы методы Римана и Вольтерра сделались наиболее общим подходом к теории дифференциальных уравнений в частных производных; их применение к теории распространения волн развито в ряде блестящих исследований Адамаром¹⁾. Хотя метод характеристик, впервые предложенный Риманом, даёт более глубокое проникновение в суть задачи, но пока он менее приспособлен для целей практического решения, чем методы гармонического анализа, которые будут занимать наше внимание в этой части главы.

5.7. Элементы гармонического анализа (теорема Фурье). Для удобства читателя, знакомого до некоторой степени с предметом, элементарные сведения, касающиеся ряда Фурье и интеграла Фурье, мы изложим здесь без доказательства.

Рассмотрим тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \dots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \dots \quad (1)$$

с известными коэффициентами a_n и b_n и предположим, что ряд равномерно сходится в области $0 \leq x \leq 2\pi$. В таком случае ряд (1) равномерно сходится для всех значений x и изображает периодическую функцию $f(x)$ с периодом 2π :

$$f(x + 2\pi) = f(x). \quad (2)$$

Коэффициенты ряда могут быть выражены через $f(x)$. В силу предположения о равномерной сходимости ряд (1) может быть умножен либо на $\cos nx$, либо на $\sin nx$ и почленно проинтегрирован. В области $0 \leq x \leq 2\pi$ тригонометрические функции ортогональны, т. е.

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx \, dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx \, dx = 0 \quad (m \neq n), \quad (3)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \sin mx \, dx = 0.$$

¹⁾ Hadamard, *Leçons sur la propagation des ondes*; A. Hermann, Paris, 1903; *Lectures on Cauchy's Problem*, Yale University Press, 1923.

Так как

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 nx \, dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 mx \, dx = \pi, \quad (4)$$

то

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx. \end{aligned} \right\} \quad (m=0, 1, 2, \dots), \quad (5)$$

Предположим обратное, т. е. предположим, что дана функция $f(x)$. Тогда чисто формальным путём можно сопоставить функции $f(x)$ «ряд Фурье»:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (6)$$

коэффициенты которого определяются из (5). Однако правая часть (6) будет сходиться к $f(x)$ в области $0 \leq x \leq 2\pi$, только в том случае, если $f(x)$ удовлетворяет некоторым условиям. Вопрос о сходимости рядов Фурье, взятый в целом, является весьма тонким; даже непрерывность $f(x)$ недостаточна для обеспечения сходимости. К счастью, оказывается, что при определённых условиях ряд всё же может быть просуммирован и точно представляет функцию внутри определённого интервала ¹⁾. Нахождение наименее жёстких условий, которые должны быть наложены на функцию для того, чтобы она могла быть разложена в сходящийся или суммируемый тригонометрический ряд, потребовали бы длинного и сложного изложения. Так как мы интересуемся лишь функциями, встречающимися в физических исследованиях, мы можем удовлетвориться некоторыми *достаточными* (но отнюдь не необходимыми) условиями. Мы потребуем только, чтобы в интервале $0 \leq x \leq 2\pi$ функция и её первая производная были кусочно непрерывны. Про функцию $f(x)$ говорят, что она кусочно непрерывна в данном интервале, если она непрерывна во всём этом интервале за исключением конечного числа точек. Если x_0 такая точка, то функция стремится к конечному значению $f(x_0 + 0)$, если подходить к x_0 справа, и к значению $f(x_0 - 0)$, если подходить слева. В точках разрыва в качестве значения функции берут среднее арифметическое

$$\frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}.$$

Разложение Фурье особенно хорошо приспособлено для представления функций, которые не могут быть выражены в замкнутой аналитической форме, и которые состоят из ветвей или кусков аналитических кривых, не обязательно соединяющихся на концах друг с другом. В виду допущенных нами разрывов функции или её производной, то обстоятельство, что два ряда Фурье представляют в некотором частичном интервале одну и ту же функцию, вообще говоря, ещё не означает, что эти ряды представляют одну и ту же функцию вне этого частичного интервала. Это и есть то существенное, что отличает функцию от её *представления*. Разложение в тригонометрический ряд, записанный в правой части уравнения (6), эквивалентно кусочно непре-

¹⁾ Е. Т. Уиттекер и Г. Н. Ватсон, Курс современного анализа, Л.—М., ГТТИ, 1933, глава 9.

рывной функции $f(x)$ в области $0 \leq x \leq 2\pi$. Вне этой области значения, принимаемые рядом, повторяются периодически по x с периодом 2π , в то время как функция $f(x)$ может вести себя произвольным образом. Только в том случае, если $f(x)$ удовлетворяет дополнительному условию (2), она будет совпадать с её Фурье-представлением во всей области $-\infty < x < +\infty$.

Если внутри некоторой области ряд Фурье функции $f(x)$ равномерно сходится, то он может быть почленно проинтегрирован и полученный таким путём ряд равен в каждой точке интегралу от $f(x)$ взятому в тех же пределах. Для того чтобы ряд Фурье можно было почленно дифференцировать и полученный ряд приравнять $\frac{df}{dx}$ ещё недостаточно равномерной сходимости. Если, кроме того, $f(x)$ имеет разрыв в некоторой точке внутри интервала, то её ряд Фурье не сходится равномерно внутри всего интервала и, следовательно, разложения Фурье для интеграла и производной $f(x)$ требуют особого внимания¹⁾.

Обычно бывает удобно заменять ряд (6) эквивалентным комплексным рядом с экспоненциальными членами следующего вида:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}. \quad (7)$$

Коэффициенты определяются из соотношения

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) e^{-in\alpha} d\alpha \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (8)$$

Так как

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx, \quad (9)$$

то ясно, что комплексные коэффициенты c_n выражаются через действительные коэффициенты a_n и b_n уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} 2c_n &= a_n - ib_n & (n > 0), \\ 2c_0 &= a_0 & (n = 0), \\ 2c_n &= a_{-n} + ib_{-n} & (n < 0). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

При помощи подходящей замены переменных разложение Фурье (7) может быть видоизменено так, чтобы изображать функцию в области $-l \leq x \leq +l$:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi}{l}x}, \quad c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{+l} f(\alpha) e^{-\frac{in\pi}{l}\alpha} d\alpha. \quad (11)$$

Это растяжение основного интервала или периода от 2π до $2l$ наталкивает на мысль о возможности такого перехода к пределу, когда основной интервал становится бесконечным и этим достигается представление Фурье непериодической функции для всех действительных значений x , лежащих между $-\infty$ и $+\infty$. Мы предположим, что во всей области $-\infty < x < +\infty$, $f(x)$ и её первая производная кусочно непрерывны, что в точках разрыва значение функции определяется как среднее арифметическое от значений

¹⁾ Эти вопросы подробно разобраны в книге Carslaw Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals, гл. VIII, Macmillan, 1921.

справа и слева и что, кроме того, интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ абсолютно сходится или, другими словами, интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ существует. Пусть $\frac{\pi}{l} = \Delta u$.

Тогда (11) может быть записано в виде:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta u \int_{-l}^{+l} f(\alpha) e^{in \Delta u (x-\alpha)} d\alpha. \quad (12)$$

С другой стороны определённый интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) du$ определяется как предел суммы при $\Delta u \rightarrow 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) du = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(n \Delta u) \Delta u. \quad (13)$$

Если l стремится к бесконечности, то Δu стремится к нулю и мы можем не без основания ожидать, что предел (12) есть

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) e^{iu(x-\alpha)} d\alpha. \quad (14)$$

Это и есть теорема об интеграле Фурье, согласно которой произвольная функция, удовлетворяющая лишь условиям кусочной непрерывности и существования интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$, может быть выражена через двойной интеграл¹⁾. Следует заметить, что результат получен чисто формальным переходом к пределу, что делает существование такого представления вероятным, но не доказывает его. Строгое доказательство выходит за пределы этих вводных замечаний.

Если $f(x)$ действительна, то мнимая часть интеграла Фурье должна равняться нулю и, следовательно, (14) принимает вид:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) \cos u(x-\alpha) d\alpha. \quad (15)$$

Так как

$$\cos u(x-\alpha) = \cos ux \cos u\alpha + \sin ux \sin u\alpha, \quad (16)$$

то интеграл Фурье для действительной чётной функции $f(-x) = f(x)$, очевидно, равен:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos ux \int_0^{\infty} f(\alpha) \cos u\alpha d\alpha du, \quad (17)$$

¹⁾ Читатель может иметь в виду, как общий справочник по данному вопросу книгу Е. Тичмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, ГТТИ, 1947.

а, для действительной нечётной функции $f(-x) = -f(x)$

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin ux \int_0^{\infty} f(\alpha) \sin u\alpha d\alpha du. \quad (18)$$

Из этих формул мы видим, что интеграл Фурье некоторой функции может быть интерпретирован, как её разложение по гармоническим компонентам частоты $u/2\pi$ в непрерывном спектре частот, лежащих между нулём и бесконечностью. Например, в (18) можно рассматривать функцию

$$g(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\alpha) \sin u\alpha d\alpha \quad (19)$$

как амплитуду или *спектральную плотность* $f(x)$ в интервале частот от u до $u+du$. Тогда

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} g(u) \sin ux du. \quad (20)$$

Соотношение между $f(x)$ и $g(u)$ взаимно. Про $g(u)$ говорят, что она является *представлением Фурье* $f(x)$, а $f(x)$ представлением Фурье $g(u)$.

В более общем случае уравнения (14) спектральную плотность для функции $f(x)$ можно записать в виде:

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iux} dx, \quad (21)$$

откуда для $f(x)$ получится обратное выражение:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{iux} du. \quad (22)$$

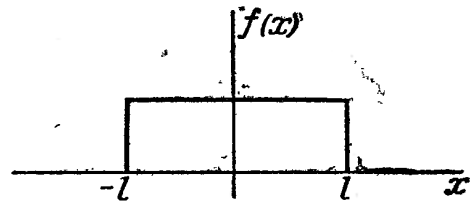


Рис. 48. Ступенчатая функция.

Обширные таблицы преобразований Фурье были опубликованы Кэмпбеллом и Фостером¹⁾.

Применение интеграла Фурье может быть проиллюстрировано несколькими примерами, имеющими практический интерес. Рассмотрим сначала разрывную ступенчатую функцию, определённую следующим образом:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1, & \text{при } |x| < l, \\ f(x) &= \frac{1}{2}, & \text{при } |x| = l, \\ f(x) &= 0, & \text{при } |x| > l. \end{aligned} \quad (23)$$

Так как функция чётная и действительная, то можно применить (17). Представление Фурье есть

$$g(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \cos ux dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ul}{u}, \quad (24)$$

¹⁾ Campbell and Foster, Fourier Integrals for Practical Applications, Bell Telephone System Tech. Pub., Monograph B-584, 1931. Ранее опубликовано в Bell Syst Tech. J., Oktober, 1928, стр. 639—707.

а интеграл Фурье

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} g(u) \cos ux \, du = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin ul \cos ux}{u} \, du. \quad (25)$$

Возьмём далее в качестве $f(x)$ «кривую ошибок»:

$$f(x) = e^{-\frac{a^2 x^2}{2}}. \quad (26)$$

Для того чтобы найти её представление Фурье, мы должны вычислить интеграл

$$g(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{a^2 x^2}{2}} \cos ux \, dx, \quad (27)$$

который равен, очевидно, действительной части комплексного интеграла

$$g(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{a^2 x^2}{2} + iux} \, dx. \quad (28)$$

После дополнения показателя до квадрата, (28) можно записать так:

$$\begin{aligned} g(u) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{u^2}{2a^2}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{a^2}{2} \left(x - \frac{i u}{a^2}\right)^2} \, dx = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{u^2}{2a^2}} \int_{-\frac{i u}{a^2}}^{\infty} e^{-\frac{a^2 \beta^2}{2}} \, d\beta. \end{aligned} \quad (29)$$

Путь интегрирования идёт по мнимой оси от $-iu/a^2$ к 0, а затем вдоль действительной оси от 0 до ∞ . Мнимая часть интеграла получится лишь на интервале $-\frac{i u}{a^2} \leq \beta < 0$, а так как мы интересуемся только действительной частью, то нижний предел можно положить равным нулю. В результате имеем определённый интеграл с хорошо известным значением:

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{a^2 \beta^2}{2}} \, d\beta = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad (30)$$

а значит представлением функции $e^{-\frac{a^2 x^2}{2}}$ является

$$g(u) = \frac{1}{a} e^{-\frac{u^2}{2a^2}}. \quad (31)$$

Тогда $f(x)$, как представление Фурье функции $g(u)$, имеет вид:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{u^2}{2a^2}}}{a} \cos ux \, du = e^{-\frac{a^2 x^2}{2}} \quad (32)$$

В частном случае $a=1$, уравнение (32) становится однородным интегральным уравнением, которому удовлетворяет функция $e^{-\frac{x^2}{2}}$. Пара функций,

определённых посредством (31) и (32), обладает ещё другим свойством, более важным для нас в данный момент. Изменим немного (31), чтобы получить функцию

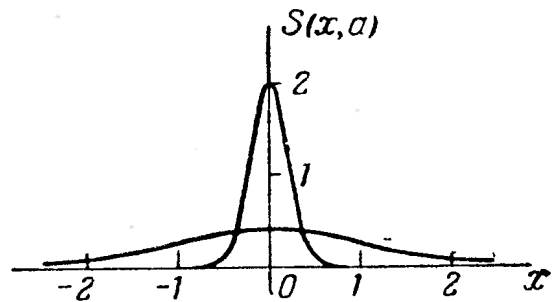
$$S(x, a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2a^2}}}{a}. \quad (33)$$

Площадь, расположенная между этой кривой и осью x , равна единице при всех значениях параметра a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(a, x) dx = 1, \quad (34)$$

как это непосредственно следует из (30). Пусть теперь a становится всё меньше и меньше. Тогда в окрестности $x=0$ ширина пика кривой всё уменьшается, в то время как высота его растёт так, что площадь сохраняется неизменной, как это показано на рис. 49. В пределе при $a \rightarrow 0$ кривая сжимается к прямой $x=0$, на которой она обращается в бесконечность.

Таким образом получилась особая функция — *дельта-функция*¹⁾, ограничивающая единичную площадь в ближайшей окрестности точки $x=0$. Дельта-функция, исчезающая всюду, кроме точки $x=x_0$, где она обращается в бесконечность, изображается следующим образом:



$$S_0(x - x_0) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{(x - x_0)^2}{2a^2}}}{a}. \quad (35)$$

Рис. 49. Импульсная или дельта-функция $S(x, a)$ для $a=1$ и $a=0,2$

Всякая произвольная функция $F(\xi)$, подчиняющаяся обычным условиям непрерывности, может быть выражена в виде бесконечного интеграла

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} S_0(\xi - x) F(x) dx. \quad (36)$$

Из (32) очевидно, что Фурье-представлением дельта-функции $S_0(x)$ является прямая линия, расположенная на расстоянии $1/2\pi$ от горизонтальной оси.

В качестве последней иллюстрации теоремы об интеграле Фурье рассмотрим гармонический волновой цуг, ограниченный во времени. Такой цуг возникает при включении и выключении рубильника, связывающего электрическую цепь с генератором переменного тока; такой цуг представляет собой излучение света атомами, во время перехода их на другой энергетический уровень. Пусть

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= 0, & \text{при } |t| > \frac{T}{2}, \\ f(t) &= \cos \omega_0 t, & \text{при } |t| < \frac{T}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

¹⁾ В оригинале — «impulse function», т. е. «импульсная функция». В переводе применён принятый в русской литературе термин «дельта-функция», введённый Дираком. Следует отметить, что представление дельта-функции как предела гауссовой функции ошибок, конечно, является совершенно специальным. Существенны лишь нормировка к 1 и возникновение особенности в одной точке. Укажем, например, на $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)}$. Прим. ред.

Для того чтобы облегчить интегрирование, мы положим, что $f(t)$ равна действительной части $e^{i\omega_0 t}$ в области $|t| < \frac{T}{2}$, и используем уравнения (21) и (22):

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \frac{(\omega_0 - \omega)T}{2}}{\omega_0 - \omega}. \quad (38)$$

Но интеграл Фурье для $f(t)$ соответствует действительной части (22), т. е.:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \frac{(\omega_0 - \omega)T}{2}}{\omega_0 - \omega} \cos \omega t d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{\sin \frac{(\omega_0 - \omega)T}{2}}{\omega_0 - \omega} + \frac{\sin \frac{(\omega_0 + \omega)T}{2}}{\omega_0 + \omega} \right] \cos \omega t d\omega. \end{aligned} \quad (39)$$

Уравнение (39) можно интерпретировать, как спектральное разложение функции, которая представляет собой синусоиду частоты ω_0 в течение конечного интервала T . Амплитуда возмущения в окрестности какой-либо частоты ω даётся функцией

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \frac{(\omega_0 - \omega)T}{2}}{\omega_0 - \omega}. \quad (40)$$

Амплитуда обращается в нуль в точках

$$\omega = \omega_0 - \frac{2\pi n}{T} \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (41)$$

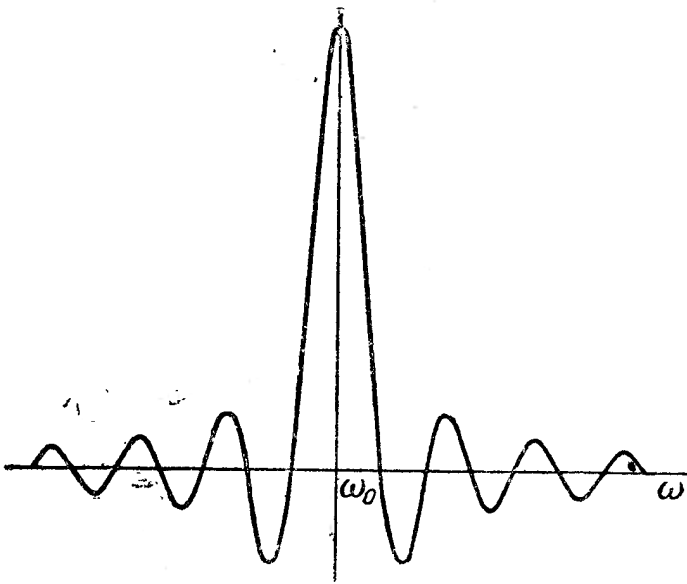


Рис. 50. Амплитудная функция

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \frac{(\omega_0 - \omega)T}{2}}{\omega_0 - \omega}.$$

как это показано на рис. 50, и имеет максимальное значение при $\omega = \omega_0$. Если продолжительность волнового цуга T увеличивается, то амплитудная функция

сжимается в горизонтальном направлении, пока в пределе, при $T \rightarrow \infty$, всё возмущение не стягивается к одной линии спектра $\omega = \omega_0$. Простые гармонические колебания, которые так часто используются нами, представляют собою математическую идеализацию; колебания реальных механических или электрических систем имеют конечную длительность и соответствующие волны периодичны лишь приближённо. Мы обнаружим скоро, что при наличии диспергирующей среды весь характер распространения может зависеть от продолжительности волнового цуга.

5.8. Общее решение одномерного волнового уравнения в непоглощающей среде. Для того чтобы в дальнейшем облегчить себе пользование интегралом Фурье, полезно остановиться на элементарной задаче нахождения общего решения волнового уравнения в непроводящей среде. Пусть ψ есть x - или y -компонента любого из электромагнитных векторов. Тогда ψ удо-

влетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad v^2 = \frac{1}{\mu \epsilon}. \quad (42)$$

Согласно разделу 5.2, частное решение уравнения (42) представляется функцией

$$\psi = (Ae^{i\frac{\omega}{v}z} + Be^{-i\frac{\omega}{v}z})e^{-i\omega t}. \quad (43)$$

Коэффициенты A и B произвольны и могут зависеть от частоты ω ; можно сказать, что мы сопоставляем каждой гармонической компоненте соответствующую амплитуду, которая может быть записана как $A(\omega)$ и $B(\omega)$. Общее решение уравнения (42) можно получить теперь суммированием по ω . В том случае, когда ψ — периодическая функция, суммирование происходит по дискретному ряду частот. В общем случае волновая функция аperiодична в пространстве и во времени, и поэтому её частотный спектр непрерывен:

$$\psi(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} [A(\omega)e^{i\frac{\omega}{v}z} + B(\omega)e^{-i\frac{\omega}{v}z}]e^{-i\omega t}d\omega. \quad (44)$$

Предположим, что в плоскости $z=0$ значения функции ψ и её производной по направлению распространения волн — известные функции времени:

$$\psi(0, t) = f(t), \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)_{z=0} = F(t). \quad (45)$$

Задача состоит в том, чтобы найти коэффициенты $A(\omega)$ и $B(\omega)$, удовлетворяющие этим двум условиям, и таким образом показать, что задание функции и её производной в некоторой точке пространства (или времени) достаточно для определения $\psi(z, t)$ всюду.

Если мы допустим пока, что интеграл в правой части (44) равномерно сходится, то мы можем дифференцировать под знаком интеграла по параметру z и получим:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{i}{v} \int_{-\infty}^{\infty} \omega [A(\omega)e^{i\frac{\omega}{v}z} - B(\omega)e^{-i\frac{\omega}{v}z}]e^{-i\omega t}d\omega. \quad (46)$$

Положив $z=0$ в (44) и (46), получим:

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} [A(\omega) + B(\omega)]e^{-i\omega t}d\omega, \\ F(t) &= \frac{i}{v} \int_{-\infty}^{\infty} \omega [A(\omega) - B(\omega)]e^{-i\omega t}d\omega. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Из сравнения с (21) и (22) очевидно, что коэффициенты при множителе $e^{-i\omega t}$ в подинтегральных выражениях (47) являются представлениями Фурье функций $f(t)$ и $F(t)$:

$$\left. \begin{aligned} A + B &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt, \\ \frac{i\omega}{v}(A - B) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{i\omega t}dt. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Разрешая совместно эти два соотношения относительно A и B и заменяя¹⁾ переменную интегрирования t через α , мы получаем:

$$\left. \begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [f(\alpha) - \frac{iv}{\omega} F(\alpha)] e^{i\omega\alpha} d\alpha, \\ B(\omega) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [f(\alpha) + \frac{iv}{\omega} F(\alpha)] e^{i\omega\alpha} d\alpha; \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

что, после подстановки в (44), даёт:

$$\begin{aligned} \psi(z, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) [e^{i\omega(\alpha + \frac{z}{v} - t)} + e^{i\omega(\alpha - \frac{z}{v} - t)}] d\alpha - \\ &\quad - \frac{iv}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\alpha)}{\omega} (e^{i\frac{\omega}{v}z} - e^{-i\frac{\omega}{v}z}) e^{i\omega(\alpha - t)} d\alpha. \end{aligned} \quad (50)$$

Первый из этих двойных интегралов является разложением Фурье функции, которая, если учесть (14), может быть сразу написана. Во втором интеграле изменим порядок интегрирования:

$$\begin{aligned} \psi(z, t) &= \frac{1}{2} f(t - \frac{z}{v}) + \frac{1}{2} f(t + \frac{z}{v}) + \\ &\quad + \frac{v}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \sin \frac{\omega}{v} z e^{i\omega(\alpha - t)} \frac{d\omega}{\omega}. \end{aligned} \quad (51)$$

Мнимая часть последнего интеграла равна нулю, так как

$$\frac{1}{\omega} \sin \frac{\omega z}{v} \sin \omega(\alpha - t)$$

есть нечётная функция ω . Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \sin \frac{\omega z}{v} e^{i\omega(\alpha - t)} \frac{d\omega}{\omega} &= \int_{-\infty}^{\infty} \sin \frac{\omega z}{v} \cos \omega(\alpha - t) \frac{d\omega}{\omega} = \\ &= \int_0^{\infty} \left[\sin \omega \left(\alpha + \frac{z}{v} - t \right) - \sin \omega \left(\alpha - \frac{z}{v} - t \right) \right] \frac{d\omega}{\omega}. \end{aligned} \quad (52)$$

Путём незначительного изменения условий, которые определяют ступенчатую функцию (23), легко показать, что каждый из двух последних интегралов представляет функцию с простым разрывом. Действительно:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin px}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{при } p > 0, \\ 0, & \text{при } p = 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{при } p < 0. \end{cases} \quad (53)$$

¹⁾ Переменные α и β , фигурирующие на нескольких следующих страницах, очевидно никак не связаны с действительной и мнимой частями числа $k = \alpha + i\beta$, определённого на стр. 243.

Следовательно, (52) обращается в нуль всякий раз, когда аргументы $\alpha + \frac{z}{v} - t$ и $\alpha - \frac{z}{v} - t$ имеют одинаковый знак. Изменения знака происходят при $\alpha = t - \frac{z}{v}$ и $\alpha = t + \frac{z}{v}$. Поэтому интеграл (52) отличен от нуля лишь в интервале $t - \frac{z}{v} < \alpha < t + \frac{z}{v}$, в котором он равен π . Общее решение (42) выражено теперь через заданные начальные условия:

$$\psi(z, t) = \frac{1}{2} f\left(t - \frac{z}{v}\right) + \frac{1}{2} f\left(t + \frac{z}{v}\right) + \frac{v}{2} \int_{t - \frac{z}{v}}^{t + \frac{z}{v}} F(\alpha) d\alpha. \quad (54)$$

Определим функцию $h(\beta)$ следующим соотношением:

$$h(\beta) = -v \int_0^\beta F(\alpha) d\alpha. \quad (55)$$

Тогда

$$\frac{dh}{d\beta} = h'(\beta) = -v F(\beta). \quad (56)$$

Вместо (54) можно написать:

$$\psi(z, t) = \frac{1}{2} f\left(t - \frac{z}{v}\right) + \frac{1}{2} f\left(t + \frac{z}{v}\right) + \frac{1}{2} h\left(t - \frac{z}{v}\right) - \frac{1}{2} h\left(t + \frac{z}{v}\right). \quad (57)$$

Когда $z = 0$, то $\psi(0, t)$ переходит, очевидно, в $f(t)$, а $\left(\frac{d\psi}{dz}\right)_{z=0} = \frac{1}{v} h'$ или $F(t)$. Можно убедиться также путём дифференцирования и подстановки, что (42) удовлетворяется любой функцией, имеющей аргумент вида $t \pm \frac{z}{v}$. Замена переменной t в $f(t)$ на $t - \frac{z}{v}$ означает смещение или распространение направо вдоль оси z со скоростью v без искажения функции. Начальное возмущение разделяется, таким образом, на две волны; одна движется направо, другая — налево. На эти две волны накладываются h -волны, выбранные таким образом, что при $z = 0$ они взаимно уничтожаются, а производная от ψ принимает заданное значение $F(t)$.

Задания двух функций $f(t)$ и $F(t)$ в плоскости $z = 0$ достаточно для того, чтобы полностью определить электромагнитное поле. Предположим, например, что электрический вектор плоской волны поляризован вдоль оси x . Тогда уравнения Максвелла имеют вид:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} + \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial H_y}{\partial z} + \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0. \quad (58)$$

Пусть E_x изображается функцией $\psi(z, t)$ в виде (54) или (57). Дифференцируя затем по t и по z , мы найдём с помощью (58) выражения для $\frac{\partial H_y}{\partial t}$ и $\frac{\partial H_y}{\partial z}$; в свою очередь из них несложно вывести выражение для H_y

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \frac{1}{2} \left[f\left(t - \frac{z}{v}\right) + f\left(t + \frac{z}{v}\right) + h\left(t - \frac{z}{v}\right) - h\left(t + \frac{z}{v}\right) \right], \\ H_y &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left[f\left(t - \frac{z}{v}\right) - f\left(t + \frac{z}{v}\right) + h\left(t - \frac{z}{v}\right) + h\left(t + \frac{z}{v}\right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Эти поля, очевидно, таковы, что на плоскости $z=0$

$$\left. \begin{aligned} E_x &= f(t), \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = F(t) \\ H_y &= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} h(t) = -\frac{1}{\mu} \int_0^t F(t) dt, \quad \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\epsilon \frac{df}{dt} \end{aligned} \right\} (z=0) \quad (60)$$

Поэтому электромагнитное поле определено, если на плоскости $z=0$ заданы как независимые функции времени любые две из величин (60), содержащих как $f(t)$, так и $F(t)$. Таким образом могут быть заданы либо электрическое поле и его нормальная производная, либо электрические и магнитные поля без наложения ограничений на их производные.

5.9. Поглощающая среда; заданное распределение во времени. Мы перейдём теперь к более трудной задаче определения электромагнитного поля в *проводящей* среде, которое обращается на плоскости $z = \text{const.}$ в заданные функции времени. Мы опять допускаем, что ψ есть какая-нибудь прямоугольная компонента электромагнитного вектора, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0. \quad (61)$$

Для дальнейшего удобно ввести две новые константы:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}, \quad b = \frac{\sigma}{2\epsilon}, \\ k &= \sqrt{\mu \epsilon \omega^2 + i \mu \sigma \omega} = \frac{1}{a} \sqrt{\omega^2 + 2b\omega i}. \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Заметим, что в поглощающей среде a отличается от фазовой скорости $v=c/n$ гармонической компоненты. В этих обозначениях волновое уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + 2b \frac{\partial \psi}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0. \quad (63)$$

Частные решения (63), гармонические во времени, были исследованы в разделе 5.2; они имеют вид:

$$\psi = (Ae^{ikz} + Be^{-ikz}) e^{-i\omega t}. \quad (64)$$

Допуская, что коэффициенты A и B равно как и комплексная величина k являются функциями частоты, мы составим общее решение, просуммировав гармонические компоненты:

$$\psi(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} [A(\omega) e^{ikz} + B(\omega) e^{-ikz}] e^{-i\omega t} d\omega. \quad (65)$$

Предположим вновь, что на плоскости $z = \text{const.}$ волновая функция и её нормальная производная — заданные функции времени. Для удобства поместим начало системы отсчёта в этой плоскости, так что константа равна нулю.

$$\psi(0, t) = f(t), \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_{z=0} = F(t). \quad (66)$$

В физических задачах характер функции $\psi(z, t)$ обычно таков, что интеграл (65) сходится равномерно. Допустив такую сходимость, можно дифференцировать интеграл по параметру z ¹⁾.

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \int_{-\infty}^{\infty} ik [A(\omega) e^{ikz} - B(\omega) e^{-ikz}] e^{-i\omega t} d\omega. \quad (67)$$

На плоскости $z = 0$ (65) и (67) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} [A(\omega) + B(\omega)] e^{-i\omega t} d\omega; \\ F(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} ik [A(\omega) - B(\omega)] e^{-i\omega t} d\omega. \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Коэффициенты при $e^{-i\omega t}$ опять могут рассматриваться как представления Фурье соответственно $f(t)$ и $F(t)$.

$$\left. \begin{aligned} A + B &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) e^{i\omega\alpha} d\alpha, \\ A - B &= -\frac{i}{2\pi k} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{i\omega\alpha} d\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Разрешая относительно A и B , находим:

$$\left. \begin{aligned} A(\omega) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(\alpha) - \frac{i}{k} F(\alpha) \right] e^{i\omega\alpha} d\alpha, \\ B(\omega) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(\alpha) + \frac{i}{k} F(\alpha) \right] e^{i\omega\alpha} d\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Если подставить эти значения в (65), то после изменения порядка интегрирования получим выражение

$$\begin{aligned} \psi(z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha f(\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} \cos kz e^{i\omega(\alpha-t)} d\omega + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha F(\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin kz}{k} e^{i\omega(\alpha-t)} d\omega. \end{aligned} \quad (71)$$

До сих пор вычисления формально не отличались от вычислений для случая непоглощающей среды. Однако теперь мы сталкиваемся с трудностью из-за того, что k комплексно, и мы должны будем отвлечься на время для того, чтобы рассмотреть представление функции $\frac{\sin kz}{k}$ при помощи определённого интеграла. Основой этого представления является интеграл Гегенбауера²⁾,

¹⁾ Смотри, например, Carslaw, Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals, главы IV и VI, Macmillan, 1921.

²⁾ Watson, A. Treatise on the Theory of Bessel Functions, стр. 379, Cambridge University Press, 1922. Уравнение (72) является частным случаем уравнения (69), стр. 362, выведенного в разделе 7.7 этой книги.

который в рассматриваемом простейшем случае имеет вид

$$\frac{\sin u}{u} = \frac{1}{2} \int_0^\pi J_0(u \sin \varphi \sin \theta) e^{iu \cos \varphi \cos \theta} \sin \theta d\theta. \quad (72)$$

$J_0(u \sin \varphi \sin \theta)$ обозначает функцию Бесселя нулевого порядка от аргумента $u \sin \varphi \sin \theta$.

Сделаем подстановку:

$$u = v \sqrt{(p + \lambda)(p + \mu)}, \quad (73)$$

где λ и μ — действительные или комплексные постоянные.

$$\left. \begin{aligned} u \cos \varphi &= v \left(p + \frac{\lambda + \mu}{2} \right), & u \sin \varphi &= i \frac{v}{2} (\lambda - \mu), & \cos \theta &= \frac{\beta}{v}, \\ \sin \theta &= \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{v^2}}, & \sin \theta d\theta &= -\frac{d\beta}{v}. \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

Тогда (72) принимает вид

$$\frac{\sin v \sqrt{(p + \lambda)(p + \mu)}}{\sqrt{(p + \lambda)(p + \mu)}} = \frac{1}{2} \int_{-v}^{+v} J_0 \left(\frac{\lambda - \mu}{2} \sqrt{\beta^2 - v^2} \right) e^{i\beta \left(p + \frac{\lambda + \mu}{2} \right)} d\beta. \quad (75)$$

Заметим, что функция в левой части уравнения (75) является представлением Фурье функции $g(\beta)$, определённой следующим образом ¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} g(\beta) &= 0 \text{ при } |\beta| > v, \\ g(\beta) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} J_0 \left(\frac{\lambda - \mu}{2} \sqrt{\beta^2 - v^2} \right) e^{i\beta \frac{\lambda + \mu}{2}} \text{ при } |\beta| < v. \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

Наконец, дадим параметрам в этой формуле значения:

$$v = \frac{z}{a}, \quad p = \omega, \quad \lambda = 2bi, \quad \mu = 0.$$

Искомое соотношение будет тогда:

$$\frac{\sin kz}{k} = \frac{a \sin \frac{z}{a} \sqrt{\omega^2 + 2b\omega i}}{\sqrt{\omega^2 + 2b\omega i}} = \frac{a}{2} \int_{-\frac{z}{2}}^{+\frac{z}{2}} J_0 \left(\frac{b}{a} \sqrt{z^2 - a^2 \beta^2} \right) e^{i\beta \omega - b\beta} d\beta. \quad (77)$$

После этого небольшого отступления вернёмся снова к уравнению (71). Во второй интеграл правой части, который для удобства может быть обозначен через ψ_2 , мы подставим (77), а затем изменим порядок интегрирования:

$$\psi_2 = \frac{a}{2} \int_{-\frac{z}{a}}^{\frac{z}{a}} d\beta e^{-b\beta} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha, \beta) e^{i\omega(\alpha + \beta - t)} d\alpha \right], \quad (78)$$

где

$$\varphi(\alpha, \beta) = F(\alpha) J_0 \left(\frac{b}{a} \sqrt{z^2 - a^2 \beta^2} \right). \quad (79)$$

¹⁾ Campbell and Foster, *loc. cit.*, No. 872.2.

Двойной интеграл внутри скобок является разложением Фурье функции $\varphi(t-\beta, \beta)$; следовательно,

$$\psi_2 = \frac{a}{2} \int_{-\frac{z}{a}}^{\frac{z}{a}} F(t-\beta) J_0\left(\frac{b}{a} \sqrt{z^2 - a^2 \beta^2}\right) e^{-b\beta} d\beta, \quad (80)$$

или после замены переменных:

$$\psi_2 = \frac{a}{2} \int_{t-\frac{z}{a}}^{t+\frac{z}{a}} F(\beta) J_0\left(\frac{b}{a} \sqrt{z^2 - a^2 (t-\beta)^2}\right) e^{-b(t-\beta)} d\beta. \quad (81)$$

Для того чтобы вычислить первый интеграл правой части уравнения (71), который мы обозначим через ψ_1 , нам нужно только заменить $F(\alpha)$ в ψ_2 на $f(\alpha)$ и произвести частное дифференцирование по z . Так как пределы интегрирования в (81) являются функциями z , то это дифференцирование должно быть произведено по формуле

$$\frac{\partial}{\partial z} \int_{x_1(z)}^{x_2(z)} f(x, z) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial z} dx + f(x_2, z) \frac{\partial x_2}{\partial z} - f(x_1, z) \frac{\partial x_1}{\partial z}, \quad (82)$$

откуда

$$\begin{aligned} \psi_1 = & \frac{e^{\frac{b}{a}z}}{2} f\left(t + \frac{z}{a}\right) + \frac{e^{-\frac{b}{a}z}}{2} f\left(t - \frac{z}{a}\right) + \\ & + \frac{a}{2} e^{-bt} \int_{t-\frac{z}{a}}^{t+\frac{z}{a}} f(\beta) e^{b\beta} \frac{\partial}{\partial z} J_0\left(\frac{b}{a} \sqrt{z^2 - a^2 (t-\beta)^2}\right) d\beta. \end{aligned} \quad (83)$$

Волновая функция, которая в поглощающей среде в плоскости $z=0$ обращается в $f(t)$, а её нормальная производная в $F(t)$, определена всюду выражением:

$$\begin{aligned} \psi(z, t) = & \frac{e^{\frac{b}{a}z}}{2} f\left(t + \frac{z}{a}\right) + \frac{e^{-\frac{b}{a}z}}{2} f\left(t - \frac{z}{a}\right) + \\ & + \frac{a}{2} e^{-bt} \int_{t-\frac{z}{a}}^{t+\frac{z}{a}} f(\beta) e^{b\beta} \frac{\partial}{\partial z} J_0\left(\frac{b}{a} \sqrt{z^2 - a^2 (t-\beta)^2}\right) d\beta + \\ & + \frac{a}{2} e^{-bt} \int_{t-\frac{z}{a}}^{t+\frac{z}{a}} F(\beta) e^{b\beta} J_0\left(\frac{b}{a} \sqrt{z^2 - a^2 (t-\beta)^2}\right) d\beta. \end{aligned} \quad (84)$$

Из (84) очевидно, что характер распространения существенно изменяется при наличии даже небольшой проводимости. При $z=0$ интеграл равен нулю из-за равенства пределов интегрирования. Затем начальное возмущение $f(t)$

распадается на две волны с амплитудами, равными половине начальной, как и в непоглощающей среде. Эти отдельные волны распространяются направо и налево со скоростью a , во всех случаях не зависящей от частоты, а также и от проводимости. Кроме того, как это можно было предвидеть, они экспоненциально затухают в направлении распространения. Заметим, что в случае гармоничной волны коэффициент затухания в пределе при $\sigma^2/\varepsilon^2\omega^2 \rightarrow \infty$ приближается к значению

$$\frac{b}{a} = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = 188,36 \sigma \sqrt{\frac{\chi_m}{\chi_e}}, \quad (85)$$

которое совпадает с (53) на стр. 247. Начальная функция уже не распространяется без изменения формы, так как члены с интегралами представляют добавки, остающиеся отличными от нуля в течение бесконечного времени в точках, уже пройденных волновым фронтом. *Волна тащит теперь в своём кильватере остаток или шлейф, экспоненциально убывающий со временем.*

Характер этих добавок будет разъяснён численным примером, который мы рассмотрим в разделе 5.11.

5.10. Поглощающая среда; заданное распределение в пространстве. Начальные условия часто задаются другим способом. Предположим, что в момент $t=0$ поле ψ и его производная по времени $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ заданы как функции пространственной координаты z :

$$\psi(z, 0) = g(z), \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_{t=0} = G(z). \quad (86)$$

Гармонический анализ в пространстве применяется чаще, чем во времени, и общее решение может быть составлено из частных решений, рассмотренных в разделе 5.3:

$$\psi = e^{-\frac{\sigma}{2\varepsilon}t} (Ae^{iqt} + Be^{-iqt}) e^{ikz}, \quad (87)$$

где

$$q = \sqrt{\frac{k^2}{\mu\varepsilon} - \frac{\sigma^2}{4\varepsilon^2}} = \sqrt{a^2k^2 - b^2}. \quad (88)$$

Константы a и b определены так же, как и в разделе 5.9, но k теперь — действительная переменная. Для того чтобы исключить общий экспоненциальный множитель, удобно положить:

$$\psi = u(z, t) e^{-bt}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} - bu\right) e^{-bt}. \quad (89)$$

Общее решение составляется в предположении, что амплитуды A и B зависят от k , путём суммирования по всем положительным и отрицательным значениям k :

$$u(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} [A(k)e^{iqt} + B(k)e^{-iqt}] e^{ikz} dk. \quad (90)$$

Для производной имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} iq [A(k)e^{iqt} - B(k)e^{-iqt}] e^{ikz} dk. \quad (91)$$

Дальнейшие шаги в основном те же, что и в предыдущем параграфе.

При $t=0$

$$\left. \begin{aligned} g(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} [A(k) + B(k)] e^{ikz} dk, \\ G(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \{iq[A(k) - B(k)] - b[A(k) + B(k)]\} e^{ikz} dk, \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

и коэффициенты легко определяются по теореме о преобразовании Фурье

$$\left. \begin{aligned} A(k) &= \frac{1}{4\pi q} \int_{-\infty}^{\infty} [(q - ib)g(\alpha) - iG(\alpha)] e^{-ik\alpha} d\alpha, \\ B(k) &= \frac{1}{4\pi q} \int_{-\infty}^{\infty} [(q + ib)g(\alpha) + iG(\alpha)] e^{-ik\alpha} d\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

Подстановка этих формул в (90) приводит после простых преобразований к выражению

$$\begin{aligned} u(z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha g(\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} \cos qt e^{ik(z-\alpha)} dk + \\ &+ \frac{b}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha g(\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin qt}{q} e^{ik(z-\alpha)} dk + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha G(\alpha) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin qt}{q} e^{ik(z-\alpha)} dk. \end{aligned} \quad (94)$$

На основании (75) функция $\frac{\sin qt}{q} \equiv \frac{\sin at \sqrt{k^2 - \frac{b^2}{a^2}}}{a \sqrt{k^2 - \frac{b^2}{a^2}}}$ может быть выражена

определённым интегралом. Придадим параметрам в (75) значения

$$v = at, \quad q = -k, \quad \lambda = \frac{b}{a}, \quad \mu = -\frac{b}{a},$$

что даёт

$$\frac{\sin at \sqrt{k^2 - \frac{b^2}{a^2}}}{a \sqrt{k^2 - \frac{b^2}{a^2}}} = \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} J_0\left(\frac{b}{a} \sqrt{\beta^2 - a^2 t^2}\right) e^{-ik\beta} d\beta. \quad (95)$$

Обозначим три члена на правой части (94) соответственно через u_1 , u_2 , u_3 . Тогда

$$u_3 = \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} d\beta \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha, \beta) e^{ik(z-\alpha-\beta)} d\alpha \right], \quad (96)$$

где

$$\varphi(\alpha, \beta) = G(\alpha) J_0\left(\frac{b}{a} \sqrt{\beta^2 - a^2 t^2}\right). \quad (97)$$

По теореме Фурье двойной интеграл внутри скобок представляет разложение $\varphi(z - \beta, \beta)$ и, следовательно,

$$u_3 = \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} G(z - \beta) J_0\left(\frac{b}{a} \sqrt{\beta^2 - a^2 t^2}\right) d\beta, \quad (98)$$

или, после замены переменных:

$$u_3 = \frac{1}{2a} \int_{z-at}^{z+at} G(\beta) J_0\left(\frac{b}{a} \sqrt{(z - \beta)^2 - a^2 t^2}\right) d\beta. \quad (99)$$

Подобным же образом получаем:

$$u_2 = \frac{b}{2a} \int_{z-at}^{z+at} g(\beta) J_0\left(\frac{b}{a} \sqrt{(z - \beta)^2 - a^2 t^2}\right) d\beta, \quad (100)$$

откуда u_1 получается дифференцированием по t :

$$u_1 = \frac{1}{2} g(z + at) + \frac{1}{2} g(z - at) + \\ + \frac{1}{2a} \int_{z-at}^{z+at} g(\beta) \frac{\partial}{\partial t} J_0\left(\frac{b}{a} \sqrt{(z - \beta)^2 - a^2 t^2}\right) d\beta. \quad (101)$$

Волновая функция, которая в проводящей среде обращается в момент $t = 0$ в $g(z)$ и которая имеет производную по времени в этот же момент, равную $G(z)$, определена в любой момент времени выражением

$$\psi(z, t) = e^{-bt} \left\{ \frac{1}{2} g(z + at) + \frac{1}{2} g(z - at) + \right. \\ + \frac{1}{2a} \int_{z-at}^{z+at} [bg(\beta) + G(\beta)] J_0\left(\frac{b}{a} \sqrt{(z - \beta)^2 - a^2 t^2}\right) d\beta + \\ \left. + \frac{1}{2a} \int_{z-at}^{z+at} g(\beta) \frac{\partial}{\partial t} J_0\left(\frac{b}{a} \sqrt{(z - \beta)^2 - a^2 t^2}\right) d\beta \right\}. \quad (102)$$

По своим основным свойствам это решение не отличается существенно от решения, выведенного в предположениях, сделанных в разделе 5.9. Начальное поле, распределённое вдоль оси z , разделяется на две волны, распространяющиеся соответственно направо и налево. Если проводимость отлична от нуля, то после прохождения волнового фронта получается остаток или шлейф, и поле спадает экспоненциально со временем.

5.11. Дискуссия численного примера. Физический смысл полученных результатов может быть проще всего разъяснён на частном примере. Пресная вода — удобная среда для такого рассмотрения, так как при радиочастотах она занимает среднее место между хорошим проводником и хорошим диэлектриком. Возьмём следующие константы:

$$\kappa_m = 1, \quad \kappa_e = 81, \quad \sigma = 2 \cdot 10^{-4} \text{ 1/ом} \cdot \text{м}.$$

Тогда находим:

$$a = \frac{1}{3} \cdot 10^8 \text{ м/сек}, \quad b = 1,4 \cdot 10^5 \text{ 1/сек}, \quad \frac{b}{a} = 4,2 \cdot 10^{-3} \text{ 1/м}.$$

Обычно легче представить себе распределение и распространение вдоль пространственной оси, чем во времени; по этой причине мы рассмотрим сначала решение (102). Предположим, что при $t=0$ поле равно нулю всюду, за исключением области $-25 < z < 25$, где его амплитуда равна единице:

$$\begin{aligned} g(z) &= 1 && \text{при } |z| < 25, \\ g(z) &= 0 && \text{при } |z| > 25, \\ G(z) &= 0 && \text{для всех значений } z. \end{aligned}$$

На рис. 51, а $\frac{1}{2}[g(z+at) + g(z-at)]$ изображено как функция z для различных значений t , а на рис. 51, б то же выражение изображено как функция t для различных значений z . Эти два рисунка изображают рас-

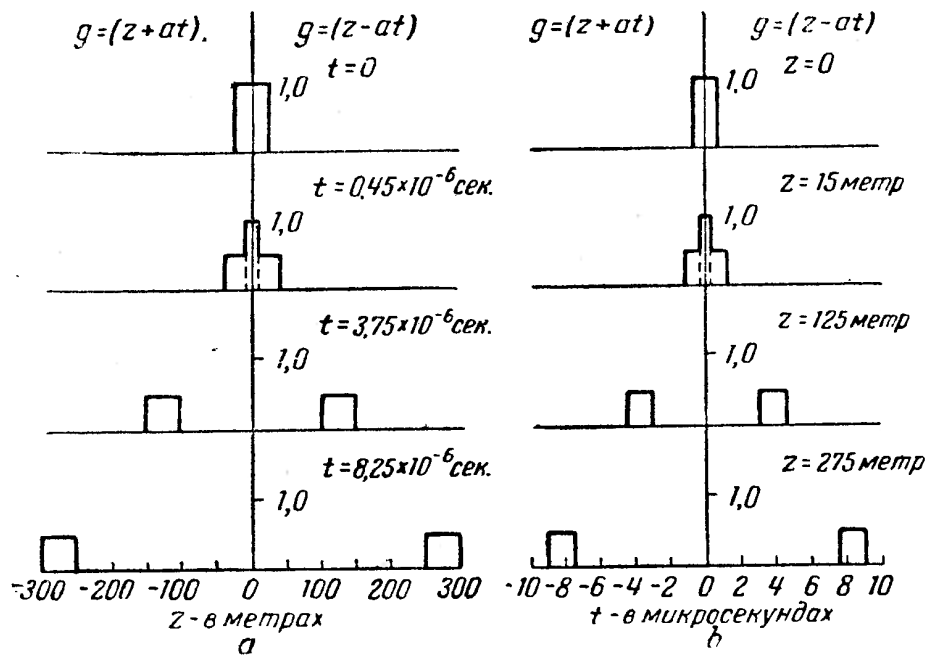


Рис. 51.

пространение начального возмущения во времени и в пространстве в среде с проводимостью, равной нулю. Функция $f(z-at)$ равна нулю либо при

$$z < at - 25 \quad \text{или} \quad z > at + 25,$$

либо при

$$t < \frac{1}{a}(z - 25) \quad \text{или} \quad t > \frac{1}{a}(z + 25).$$

Аналогично волна, распространяющаяся налево, $g(z+at)$ равна нулю во всех точках, в которых

$$z < -at - 25 \quad \text{или} \quad z > -at + 25,$$

или

$$t < -\frac{1}{a}(25 + z) \quad \text{или} \quad t > \frac{1}{a}(25 - z).$$

На рис. 52, а и 52, б те же самые функции умножаются на затухающий множитель e^{-bt} . Мы ничего не говорили о происхождении рассматриваемого поля, но предполагали, что оно было вызвано некоторое время тому назад системой соответствующим образом расположенных источников, от которых поле распространялось и затухало так, что при $t=0$ его распределение соответствовало верхнему рисунку 52, а. В данном примере очевидно, что волна

возникла в виде двух импульсов в некоторый момент $t < -10 \cdot 10^{-6}$ сек; один из них возник в отдалённой точке на положительной оси z и двигался налево, другой — в некоторой точке на отрицательной оси и двигался направо. В окрестности $t = 0$, $z = 0$ они встречаются, проходят друг через друга, соответственно складываясь, а затем продолжают своё движение. Их последовательные продвижения показаны при $t = 0,45$, $t = 3,75$ и $t = 8,25$ микросекунд. Картина, имеющая место в определённой точке пространства, иллюстрирована серией чертежей на рис. 52, б. Рассмотрим, например, $z = 275$ м. Фронт волны, распространяющейся налево, достигает

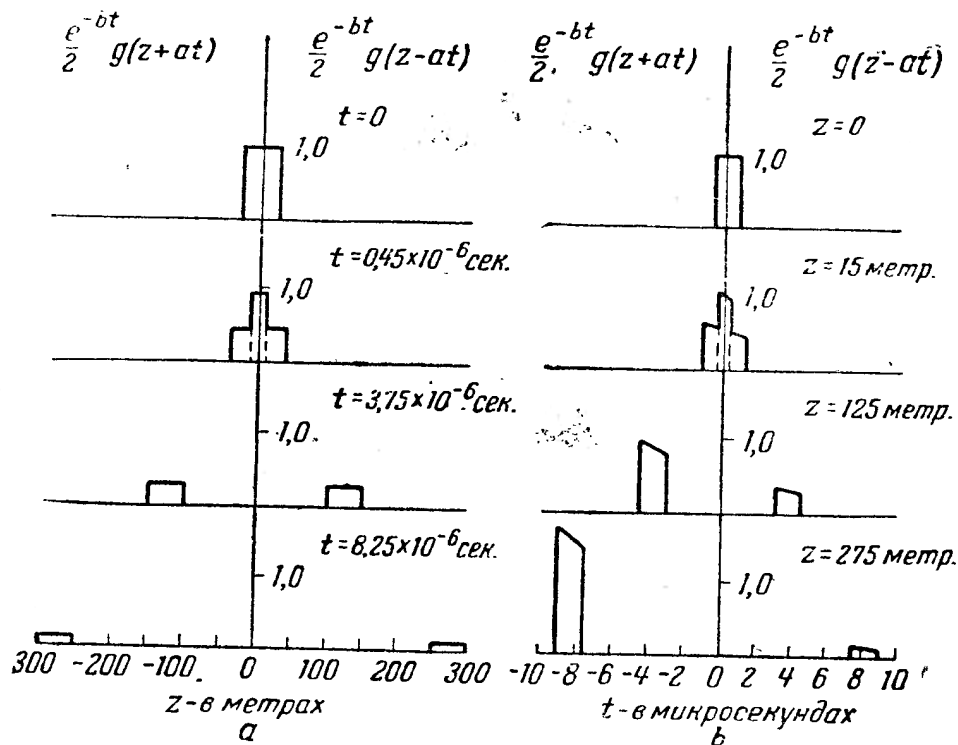


Рис. 52.

этой точки при $t = -9$ микросекунд и продвигается далее к меньшим значениям z . Требуется интервал в 1,5 микросекунды для того, чтобы волна прошла рассматриваемую точку. Всё это время она экспоненциально уменьшается. От $t = -7,5$ до $t = +7,5$ микросекунды всё спокойно, затем приходит фронт волны, распространяющейся направо, с сильно уменьшенной амплитудой, так как амплитуда волны прошла уже через своё единичное значение в начале координат и волна продолжает распространение в сторону положительных точек наблюдений.

Эта простая история поля должна быть видоизменена, если мы примем во внимание добавки от интегральных членов в уравнении (102). В большинстве случаев оценка этих членов требует численного или механического интегрирования, но, благодаря простому виду функции $g(z)$ в данном примере, интегрирование может быть проведено аналитически для достаточно малых значений z и t . Из теории функций Бесселя мы займемся следующие соотношения:

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots,$$

$$\frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x), \quad J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3 \cdot 2!} + \frac{x^5}{2^5 \cdot 2! 3!} - \dots$$

Подстановка соответствующих значений x даёт:

$$J_0\left(\frac{b}{a} \sqrt{(z-\beta)^2 - a^2 t^2}\right) = 1 - \frac{1}{4} \left(\frac{b}{a}\right)^2 [(z-\beta)^2 - a^2 t^2] + \\ + \frac{1}{64} \left(\frac{b}{a}\right)^4 [(z-\beta)^2 - a^2 t^2]^2 - \dots, \\ \frac{\partial}{\partial t} J_0\left(\frac{b}{a} \sqrt{(z-\beta)^2 - a^2 t^2}\right) = \frac{b^2 t}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{8} \left(\frac{b}{a}\right)^2 [(z-\beta)^2 - a^2 t^2] + \dots \right\}.$$

Исследование сходимости этих рядов показывает, что в данном примере мы не делаем большой ошибки, если ограничимся двумя членами разложения, при условии, что z не достигает 300 м. Функции Бесселя приближённо выражаются поэтому так:

$$J_0\left(\frac{b}{a} \sqrt{(z-\beta)^2 - a^2 t^2}\right) = 1 + \frac{1}{4} b^2 t^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{b}{a}\right)^2 (z-\beta)^2, \\ \frac{\partial}{\partial t} J_0\left(\frac{b}{a} \sqrt{(z-\beta)^2 - a^2 t^2}\right) = \frac{b^2 t}{2} \left[1 + \frac{1}{8} b^2 t^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{b}{a}\right)^2 (z-\beta)^2 \right].$$

Эти функции нужно умножить теперь на $g(\beta)$ и проинтегрировать по β . Относительно пределов интегрирования заметим следующее. Предположим,

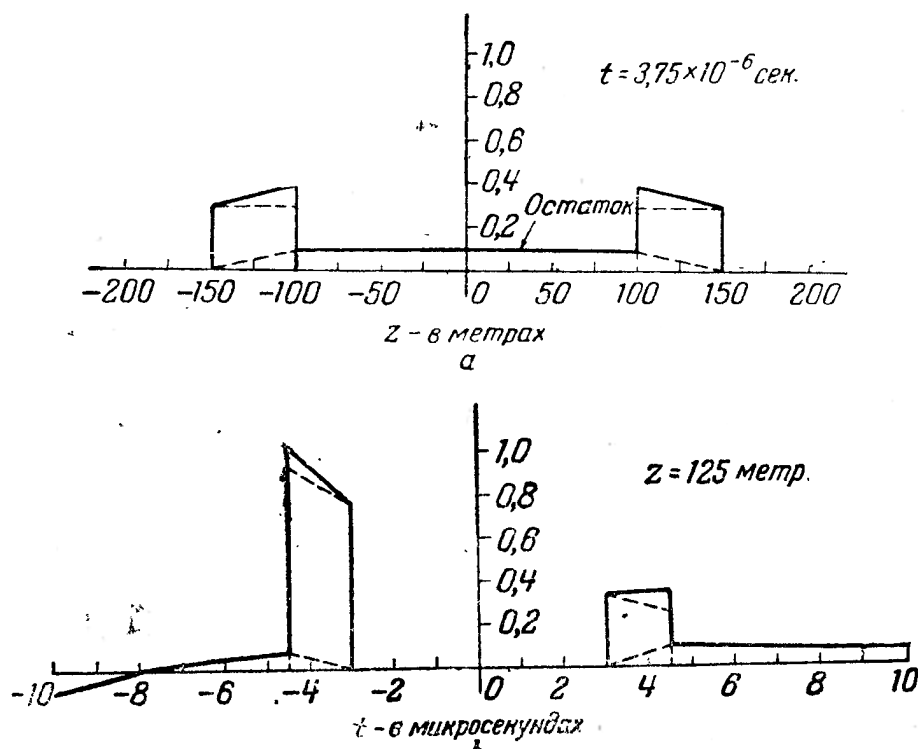


Рис. 53.

что t положительно. Если $z - at > 25$ или $z + at < -25$, то результирующее поле $\psi(z, t)$ равно нулю. Если $-at + 25 < z < at - 25$, то части поля, описываемые $g(z + at)$ и $g(z - at)$, равны нулю, но интегралы не исчезают, вне зависимости от того, как велико t . Остаточное поле задерживается в области, пройденной ранее волновым импульсом. Если $z + at > 25$ и $z - at < -25$, то пределы интегрирования могут быть положены равными ± 25 , так как вне этих значений $g(\beta)$ равно нулю. Поэтому такие пределы годны для всей области между импульсами $-at + 25 < z < at - 25$.

Результаты интегрирования изображены на рис. 53, а, и 53, б. Эффективное поле $\psi(z, t)$ изображено сплошной толстой линией; частичные поля, описываемые различными членами в (102), показаны пунктиром. Рис. 53, а изображает распределение поля вдоль оси z в момент $t = 3,75$ микро-

секунды. Мы замечаем начало деформации первоначально прямоугольного импульса, верх наклоняется вперёд, а сзади тянется шлейф. Во время распро-

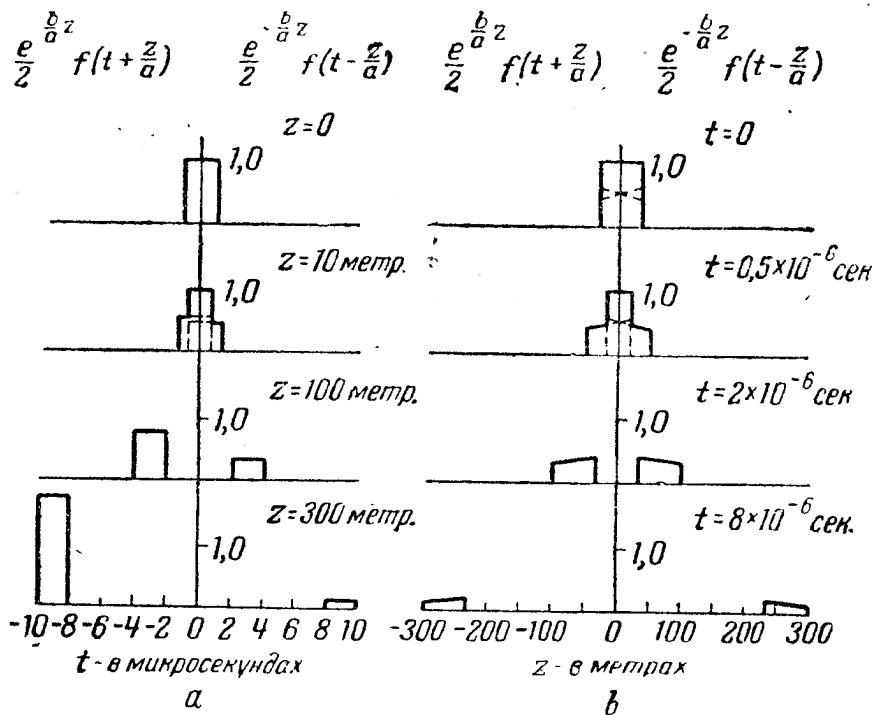


Рис. 54.

Основная разница между решениями, данными в (84) и (102), обусловлена переменной ролей пространства и времени. Для того чтобы иллюстриро-

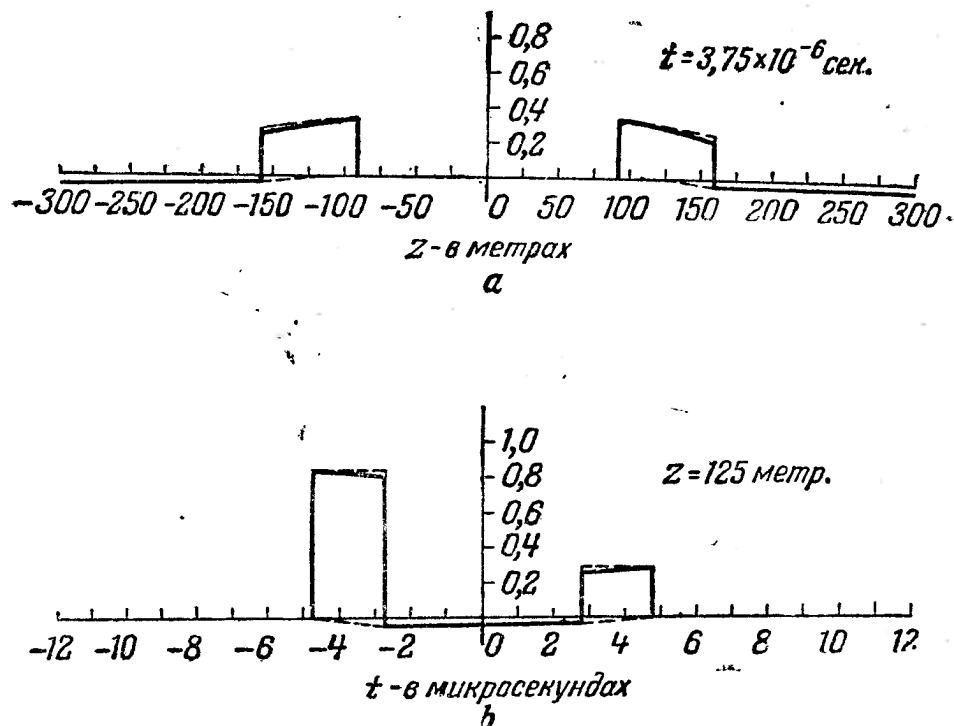


Рис. 55, а и б.

вать поведение поля, допустим, что начальной функцией времени $f(t)$ в уравнении (84) является прямоугольный импульс, определённый следующим образом:

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 \quad \text{при } |t| < 1 \cdot 10^{-6} \text{ сек,} \\ f(t) &= 0 \quad \text{при } |t| > 1 \cdot 10^{-6} \text{ сек,} \\ F(t) &= 0 \quad \text{для всех значений } t. \end{aligned}$$

странения волны высота её переднего фронта уменьшается, так что, в конце концов, импульс и шлейф сливаются в сплошной контур. На рис. 53, б наблюдения сделаны в фиксированной точке $z = 125$ м. До $t = -3$ микросекунд здесь существовало поле, которое было погашено прохождением импульса,двигающегося налево. При $t = 3$ микросекунд прибывает волна,двигающаяся направо, за ней следует её шлейф, остающийся после прохождения импульса.

Функции $\frac{e^{\frac{b}{a}z}}{2} f\left(t + \frac{z}{a}\right)$ и $\frac{e^{-\frac{b}{a}z}}{2} f\left(t - \frac{z}{a}\right)$ изображены при различных значениях z и t на рис. 54, a и 54, b . В силу определения $f(\beta)$ ясно, что третий член в правой части (84) ничего не даёт, если $t - \frac{z}{a} > 1$ или $t + \frac{z}{a} < -1$. Если $1 - \frac{z}{a} < t < \frac{z}{a} - 1$, то функции $f\left(t + \frac{z}{a}\right)$ и $f\left(t - \frac{z}{a}\right)$ равны нулю, но интеграл отличен от нуля. В этом интервале, лежащем на оси t между импульсами, пределы интегрирования будут ± 1 . На рис. 55, a и 55, b показана обусловленная шлейфом волны деформация импульса (вначале прямоугольного) в определённой точке пространства и времени.

При изучении этих рисунков следует всё время помнить предположение о двух *предсуществующих* волнах, приходящих от источников, расположенных в бесконечности, так что интерференция этих волн даёт правильное распределение при $t=0$ или при $z=0$. Отдельная волна с нулевой амплитудой для всех значений t и z , меньших нуля, может быть вызвана лишь источником в начале координат, являющимся особенностью поля, — задача, которую мы ещё не рассматривали.

5.12. Элементарная теория преобразования Лапласа. Преобразование Лапласа является одним из самых старых и наиболее важных методов решения линейных дифференциальных уравнений. Если в уравнении

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + p(z) \frac{dw}{dz} + q(z) w = 0 \quad (103)$$

произвести преобразование искомой функции w :

$$w(z) = \int u(t) e^{-zt} dt, \quad (104)$$

то во многих случаях оказывается, что $u(t)$ удовлетворяет более простому дифференциальному уравнению, чем (103). Фактически $u(t)$ часто оказывается элементарной функцией, в то время как $w(z)$, вообще говоря, не может быть непосредственно выражена через элементарные трансцендентные функции¹⁾. Если коэффициенты $p(z)$ и $q(z)$ являются функциями независимой переменной z , то необходимо соответствующим образом выбрать путь интегрирования в комплексной плоскости, для того чтобы (104) было решением (103); независимые решения отличаются тогда выбором пути интегрирования. Результатом является представление частных решений в виде контурных интегралов. Если же коэффициенты p и q постоянны, то уравнение не имеет никаких других особенностей, кроме существенной особенности в бесконечности, и путь интегрирования может быть выбран вдоль действительной оси. Тогда решения выражаются через интегралы в бесконечных пределах, тесно связанные, если не эквивалентные, интегралам Фурье.

В последние годы физики и инженеры с растущим интересом стали рассматривать применение преобразования Лапласа к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами; повидимому, последовательные и точные рецепты такого решения быстро заменяют квазиэмпирические методы операторного исчисления Хевисайда. Хотя методы Лапласа и не приводят к результатам, которые не могли бы быть получены непосредственным применением интеграла Фурье, однако, с точки зрения удобства они обладают некото-

¹⁾ Ince, Ordinary Differential Equations, главы VIII и XVIII, Longmans, London, 1927.

рыми несомненными преимуществами. В частности, они хорошо приспособлены к оперированию с функциями, которые не обращаются в нуль в $+\infty$ и, следовательно, не удовлетворяют условию абсолютной сходимости; кроме того, они прямым и простым способом приводят к решению уравнения, выраженному через его начальные условия. Однако, с другой стороны, методы Лапласа могут быть применены лишь к задачам, в которых функции для всех отрицательных значений независимой переменной могут быть положены равными нулю; короче говоря, интеграл Лапласа применим к задачам, в которых важно будущее, а прошедшее не представляет интереса.

Мы подойдём к теории преобразования Лапласа с точки зрения интеграла Фурье и лишь наметим доказательства наиболее важных теорем. Рассмотрим функцию $f(t)$, которая равна нулю для всех отрицательных значений t . Тогда, если не считать множителя $1/\sqrt{2\pi}$, представлением Фурье $f(t)$ будет функция

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (105)$$

при том условии, что интеграл $\int_0^{\infty} |f(t)| dt$ существует. Если $f(t)$ должным образом не стремится к нулю на бесконечности, то интеграл не сходится, но при некоторых обстоятельствах абсолютная сходимость может быть восстановлена путём введения множителя $e^{-\gamma t}$. Тогда представление Фурье для $e^{-\gamma t} f(t)$ будет:

$$F(\gamma + i\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(\gamma + i\omega)t} dt. \quad (106)$$

Если существует действительное число γ , такое, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T |e^{-\gamma t} f(t)| dt < \infty, \quad (107)$$

то говорят, что $f(t)$ является преобразуемой функцией.

Нижняя граница γ_a всех γ , которые удовлетворяют (107), называется абсциссой абсолютной сходимости. Предположим, например, что $f(t) = e^{bt}$ при $t \geq 0$ и $f(t) = 0$ при $t < 0$. Тогда $f(t)$ — преобразуемая функция в смысле (106) и $\gamma > b = \gamma_a$. С другой стороны, $f(t) = e^{t^2}$ не является преобразуемой функцией, так как для неё не существует действительного числа γ , приводящего к сходимости (106).

Обратное преобразование следует из свойства обратимости преобразований Фурье [уравнения (21) и (22)]

$$f(t) e^{-\gamma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\gamma + i\omega) e^{it\omega} d\omega, \quad (108)$$

где $\gamma > \gamma_a$. Функция, которую определяет интеграл с правой стороны, равна $f(t) e^{-\gamma t}$ только для положительных значений t и равна нулю при $t < 0$. Для того чтобы явно выразить это обстоятельство, мы введём единичную

ступенчатую функцию $u(t)$, равную нулю при $t < 0$ и равную единице при $t > 0$. Тогда обратное преобразование может быть записано так:

$$f(t)u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\gamma + i\omega) e^{(\gamma + i\omega)t} d\omega. \quad (109)$$

Если $\gamma_a \leq 0$, то после выполнения интегрирования, указанного в (106) или (109), можно перейти к пределу $\gamma \rightarrow 0$ и таким образом определить представление Фурье для функций, которые другим способом не могут быть проинтегрированы. Такой приём в наших расчётах не является существенным, и преобразование Лапласа содержит этот множитель, обеспечивающий сходимость, неявно. Введём комплексную переменную $s = \gamma + i\omega$. Тогда преобразование Лапласа, которое в дальнейшем будет обозначаться через оператор $L[f(t)]$, будет:

$$L[f(t)] = \left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = F(s), \\ \operatorname{Re}(s) > \gamma_a \end{aligned} \right\} \quad (110)$$

где $\operatorname{Re}(s)$ — обычное сокращение для слов «действительная часть s », а γ_a определяется каждый раз из свойств функции $f(t)$. Обратное преобразование представляется интегралом, взятым вдоль прямой в комплексной плоскости s :

$$L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F(s) e^{ts} ds = f(t)u(t), \quad (111)$$

где $\gamma > \gamma_a$. Преобразование Лапласа может быть интерпретировано как отображение точек положительной действительной оси t на ту часть комплексной плоскости s , которая лежит справа от абсциссы γ_a . Область $f(t)$ и её отображение $F(s)$ показаны на рис. 56.

Из линейности операторов следует, что если $L[f_1(t)] = F_1(s)$, $L[f_2(t)] = F_2(s)$, то

$$L[f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s). \quad (112)$$

Если, кроме того, a — какой-либо параметр, не зависящий от t и s , то

$$L[af(t)] = aL[f(t)] = aF(s). \quad (113)$$

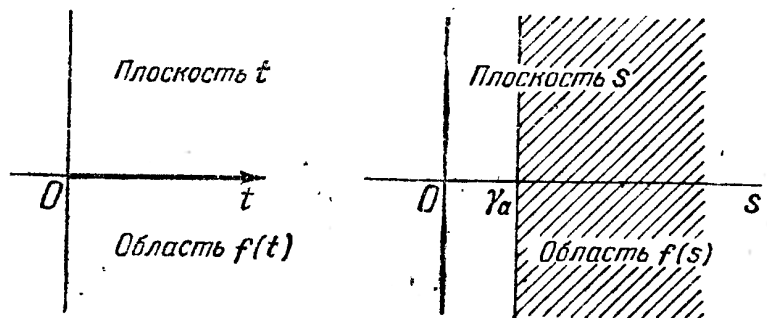


Рис. 56. Преобразование Лапласа отображает положительную часть действительной оси t на заштрихованную часть плоскости.

Применение преобразования Лапласа к решению дифференциальных уравнений основывается на теореме о преобразовании производной. Предположим, что $f(t)$ и её производная $\frac{d}{dt}f(t)$ — преобразуемые функции в смысле (107) и что $f(t)$ непрерывна при $t = 0$.

Тогда, интегрируя по частям, получаем:

$$\int_0^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt = f(t)e^{-st} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t) \frac{de^{-st}}{dt} dt;$$

следовательно, если $L[f(t)] = F(s)$, то

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0). \quad (114)$$

Эта теорема важна потому, что она вводит начальное значение $f(0)$ функции $f(t)$. Повторное интегрирование по частям приведёт нас к теореме о преобразовании второй производной, которое содержит не только начальное значение $f(0)$, но также начальное значение производной $\left(\frac{df}{dt}\right)_{t=0}$.

$$L\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = s^2 F(s) - sf(0) - \left(\frac{df}{dt}\right)_{t=0}. \quad (115)$$

Таким образом, преобразование зависимого переменного в дифференциальном уравнении второго порядка выражается через его начальные значения. Эти результаты не имеют никакой аналогии в теории преобразований Фурье.

Faltung-теорема, или теорема «умножения», является одним из применений хорошо известного свойства интеграла Фурье ¹⁾. Предположим опять, что $L[f_1(t)] = F_1(s)$, $L[f_2(t)] = F_2(s)$; пусть мы хотим определить преобразование Лапласа для произведения функций $f_1(t)f_2(t)$. Имеем:

$$\begin{aligned} L[f_1(t)f_2(t)] &= \int_0^\infty f_1(t)f_2(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty f_1(t) \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2 - i\infty}^{\gamma_2 + i\infty} F_2(\sigma) e^{\sigma t} d\sigma \right] e^{-st} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2 - i\infty}^{\gamma_2 + i\infty} d\sigma F_2(\sigma) \int_0^\infty f_1(t) e^{-(s-\sigma)t} dt; \end{aligned} \quad (116)$$

отсюда вытекает первая теорема

$$L[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2 - i\infty}^{\gamma_2 + i\infty} F_1(s - \sigma) F_2(\sigma) d\sigma, \quad \left. \begin{array}{l} \gamma_2 > \gamma_{a2}, \text{ Re}(s - \sigma) > \gamma_{a1}. \end{array} \right\} \quad (117)$$

Чаще используется вторая Faltung-теорема об обратном преобразовании произведения функций. Мы хотим определить функцию, преобразование Лапласа которой даёт произведение $F_1(s)F_2(s)$.

$$\begin{aligned} L^{-1}[F_1(s)F_2(s)] &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F_1(s) F_2(s) e^{st} ds = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F_1(s) \left[\int_0^\infty f_2(\tau) e^{-s\tau} d\tau \right] e^{st} ds = \int_0^\infty d\tau f_2(\tau) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} F_1(s) e^{s(t-\tau)} ds = \\ &= \int_0^\infty f_2(\tau) f_1(t - \tau) u(t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (118)$$

Так как единичная ступенчатая функция равна нулю для отрицательных значений аргумента, то верхний предел τ может быть положен

¹⁾ См. например, B ö c h n e r, Vorlesungen über Fouriersche Integrale и W i e n e r, The Fourier Integral, стр. 45, Cambridge University Press, 1933.

равным t и, следовательно,

$$L^{-1} [F_1(s) F_2(s)] = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau, \quad (119)$$

или

$$L \left[\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau \right] = F_1(s) F_2(s). \quad (120)$$

Геометрически произведение $F_1(s) F_2(s)$ представляет собой преобразование площади, образованной следующим образом: функция $f_1(\tau)$ сначала переводится на отрицательную полуплоскость путём замены τ на $-\tau$, а затем передвигается направо на величину t . Вслед за этим ордината $f_1(t-\tau)$ умножается на $f_2(\tau) d\tau$ и площадь интегрируется от 0 до t .

Ряд операций, применённых нами ранее при обсуждении свойств интеграла Фурье, может быть отнесён к операциям смещения. Пусть a — параметр, не зависящий от s и t . Тогда

$$L [e^{at} f(t)] = \int_0^\infty f(t) e^{-(s-a)t} dt = F(s-a). \quad (121)$$

Уравнение (121), очевидно, справедливо как для положительных, так и для отрицательных значений a . Рассмотрим далее преобразование $f(t-a)$:

$$L [f(t-a)] = \int_0^\infty f(t-a) e^{-st} dt = e^{-as} \int_{-a}^\infty f(\tau) e^{-s\tau} d\tau. \quad (122)$$

Но мы постулировали, что $f(t)$ равна нулю для всех отрицательных значений аргумента, и, следовательно, нижний предел a может быть заменён нулём. Как следствие мы получаем:

$$L [f(t-a)] = e^{-as} F(s), \quad a > 0, f(t) = 0 \quad \text{при } t < 0. \quad (123)$$

Аналогично мы можем написать:

$$L [f(t+a)] = e^{as} F(s), \quad a > 0, f(t) = 0 \quad \text{при } t < a. \quad (124)$$

Следует, однако, из осторожности отметить, что последний результат применим лишь к функциям, которые по определению равны нулю при $t < a$. Замена t на $t-a$ или $t+a$ означает смещение $f(t)$ на расстояние a соответственно направо или налево.

В добавление к предыдущим основным теоремам имеется некоторое количество элементарных, но полезных соотношений, которые могут быть выведены непосредственно из (110). Следующие формулы выписаны для справок; их доказательство представляется читателю:

$$L \left[f \left(\frac{t}{a} \right) \right] = a F(as), \quad (125)$$

$$L [tf(t)] = - \frac{dF(s)}{ds}, \quad (126)$$

$$L \left[\frac{1}{t} f(t) \right] = \int_s^\infty F(\sigma) d\sigma, \quad (127)$$

$$L \left[\frac{df(t,a)}{da} \right] = \frac{dF(s,a)}{da}, \quad (128)$$

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s), \quad (129)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s). \quad (130)$$

Вычисление контурных интегралов, встречающихся при обратных преобразованиях, легче всего производится с помощью теории вычетов. Функции $f(t)$, с которыми приходится иметь дело, являются аналитическими функциями комплексного переменного t , за исключением конечного числа полюсов. Напомним, что в окрестности полюса, скажем $t=a$, функция может быть разложена в ряд вида

$$f(t) = \frac{b_{-m}}{(t-a)^m} + \frac{b_{-m+1}}{(t-a)^{m-1}} + \dots + \frac{b_{-1}}{t-a} + \varphi(t), \quad (131)$$

где $\varphi(t)$ — функция, аналитическая в точке a и в её окрестности и поэтому содержит только положительные степени $(t-a)$. Говорят, что особенность является полюсом m -го порядка, если m — конечное целое число. Если же необходимо бесконечное число отрицательных степеней для представления $f(t)$, (т. е. m бесконечно), то говорят, что особенность является существенной. Если функцию $f(t)$ проинтегрировать в плоскости t по любому замкнутому контуру C , который окружает полюс a , но не содержит другой особенности, то можно показать, что в разложении (131) обратятся в нуль все члены, за исключением члена с коэффициентом b_{-1} . В результате получим

$$\int_C f(t) dt = 2\pi i b_{-1}. \quad (132)$$

Коэффициент b_{-1} называется вычетом в этом полюсе. В том случае, когда контур окружает несколько полюсов, значение интеграла равняется $2\pi i$, умноженному на сумму вычетов. В частности, если $f(t)$ — функция, аналитическая во всей области, ограниченной контуром C , то интеграл равен нулю. Эти результаты являются следствием основных теорем теории функций комплексного переменного. Если $f(t)$ — аналитическая внутри и на контуре C , т. е. $f(t)$ может быть разложена в ряд лишь по положительным степеням, то значение $f(t)$ в любой внутренней точке a может быть выражено так:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{t-a} dt. \quad (133)$$

Это — известная теорема Коши.

Если функция $f(t)$ обращается должным образом в нуль на бесконечности, то контур интегрирования, который является [как в (111)] бесконечной прямой, может быть замкнут окружностью бесконечного радиуса, и таким образом задача сводится к теоремам предыдущего параграфа. Ограничения, которым подчинено применение теории вычетов к вычислению интегралов в бесконечных пределах, выражаются так называемой леммой Жордана, гласящей:

Если $Q(z) \rightarrow 0$ равномерно относительно $\arg z$, когда $|z| \rightarrow \infty$ в области $0 \leq \arg z \leq \pi$, и если $Q(z)$ аналитическая при $|z| > C$ (C — постоянная) и $0 \leq \arg z \leq \pi$, то

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} e^{miz} Q(z) dz = 0,$$

где Γ — полуокружность радиуса ρ , лежащая над действительной осью и с центром в начале координат¹⁾.

¹⁾ Е. Т. Уиттекер и Г. Н. Ватсон, *loc. cit.*, стр. 154. В главах V и VI этой книги читатель найдёт всё, что является существенным для применения теории функций к решению физических задач.

Как уже было упомянуто, эта лемма применяется к вычислению интегралов, распространённых вдоль действительной оси от $-\infty$ до $+\infty$, но она может быть видоизменена с тем, чтобы включить и интегрирование вдоль мнимой оси; при подходящих заменах переменной окружность может быть перемещена из верхней полуплоскости в нижнюю или из правой полуплоскости в левую.

Если $Q(z)$ имеет полюсы внутри замкнутого контура на расстоянии $|z| < C$ от начала координат, то значение интеграла отлично от нуля и равно сумме вычетов.

Отношение этих теорем к теории преобразования Лапласа может быть иллюстрировано с помощью двух элементарных примеров. Сначала рассмотрим ступенчатую функцию

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= 0 & \text{при } t < 0, \\ f(t) &= 1 & \text{при } t > 0. \end{aligned} \right\} \quad (134)$$

Заметим попутно, что (134) не входит в круг функций, к которым применима теорема Фурье, так как интеграл $\int_0^{\infty} |f(t)| dt$ расходится. Преобразование Лапласа для (134) имеет вид:

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} 1 e^{-st} dt = \frac{1}{s} = F(s). \quad (135)$$

Мы проверим этот результат, применив обратное преобразование (111):

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{1}{s} e^{st} ds. \quad (136)$$

$F(s)$ имеет полюс первого порядка при $s = 0$. Абсцисса абсолютной сходимости равна нулю, а значит, необходимо $\operatorname{Re}(s) > 0$. Интегрирование должно быть распространено вдоль любой прямой, параллельной мнимой оси и находящейся от неё направо. Подынтегральное выражение (136) удовлетворяет условиям леммы Жордана, и путь интегрирования может быть замкнут бесконечной окружностью. Если $t > 0$, то путь интегрирования может быть деформирован налево так, что $\operatorname{Re}(s) \rightarrow -\infty$. Замкнутый контур от $\gamma - i\infty$ до $\gamma + i\infty$ далее до $-\infty + i\infty$ затем до $-\infty - i\infty$ и обратно до $\gamma - i\infty$ содержит полюс в $s = 0$. Вычет равен единице, и следовательно, по (132) правая часть (136) для $t > 0$ тоже равна единице. Так как $F(s)$ определена только в правой полуплоскости, то может возникнуть вопрос, насколько допустимо распространение интегрирования на левую полуплоскость. Следует тщательно различать функцию и её представление в ограниченной области. $1/s$ является представлением $F(s)$ при $\operatorname{Re}(s) > 0$, но ввиду возможных разрывов $F(s)$ эти две функции не обязательно всюду совпадают при $\operatorname{Re}(s) < 0$. Вдоль линии $\gamma - i\infty$, $\gamma + i\infty$ мы интегрируем функцию $1/s$; для интегрирования мы можем использовать любое из её аналитических свойств. Мы пользуемся аналитическим продолжением на левую полуплоскость функции $1/s$, а не $F(s)$.

Если $t < 0$, то обращение в нуль подынтегрального выражения может быть обеспечено деформацией контура направо. Внутри замкнутого контура от $\gamma - i\infty$ до $\gamma + i\infty$ далее до $\infty + i\infty$, затем до $\infty - i\infty$ и обратно

Мы убедились, что единичная ступенчатая функция может быть аналитически выражена следующим образом:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{1}{s} e^{st} ds, \quad \gamma > 0. \quad (137)$$

Представляет интерес применить к этому результату теорему смещения (123), положив $a = \frac{z}{v}$:

$$L\left[u\left(t - \frac{z}{v}\right)\right] = e^{-\frac{z}{v}s} F(s) = \frac{1}{s} e^{-\frac{z}{v}s}, \quad (138)$$

или

$$u\left(t - \frac{z}{v}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{1}{s} e^{s\left(t - \frac{z}{v}\right)} ds. \quad (139)$$

Из предыдущего изложения очевидно, что (139) обращается в нуль при $t - \frac{z}{v} < 0$ и равно единице при $t - \frac{z}{v} > 0$. На рис. 57, *a* и 57, *b* величина $u\left(t - \frac{z}{v}\right)$ изображена как функция t и z соответственно.

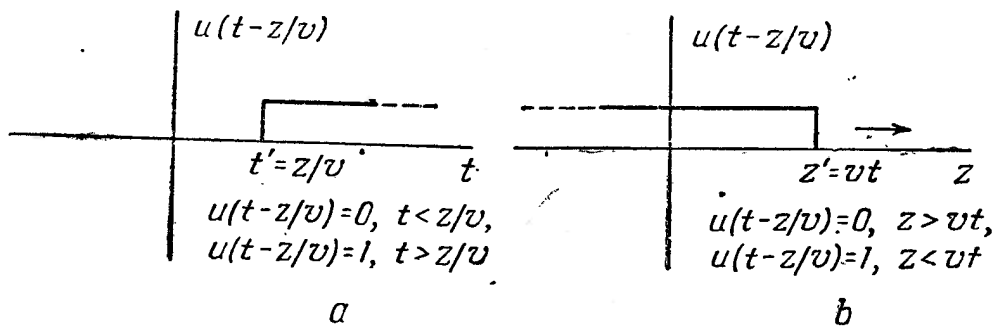


Рис. 57.

В качестве второго примера представим себе, что при $t = 0$ мгновенно возникает гармоническая волна, продолжающаяся потом неограниченное время:

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= 0 & \text{при } t < 0, \\ f(t) &= e^{-i\omega t} & \text{при } t > 0; \end{aligned} \right\} \quad (140)$$

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-i\omega t - st} dt = \frac{1}{s + i\omega}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0. \quad (141)$$

Как и в предыдущем случае, мы можем проверить (141), применив обратное преобразование

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s + i\omega}\right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{st}}{s + i\omega} ds, \quad \omega \geq 0. \quad (142)$$

Если $t > 0$, то контур опять деформируется налево. Окружённый полюс находится в точке $s = -i\omega$; применив теорему Коши, мы увидим, что (142) действительно равно $e^{-i\omega t}$. С другой стороны, если $t < 0$, то контур дефор-

мируется направо и интеграл обращается в нуль. В общем случае

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{s(t-\frac{z}{v})}}{s+i\omega} ds = \begin{cases} 0 & \text{при } t - \frac{z}{v} < 0, \\ e^{-i\omega(t-\frac{z}{v})} & \text{при } t - \frac{z}{v} > 0. \end{cases} \quad (143)$$

5.13. Применение преобразования Лапласа к уравнениям Максвелла. Пусть $E_x = f(z, t)$, $H_y = g(z, t)$ являются компонентами плоского электромагнитного поля. Предположим, что $f(z, t)$ и $g(z, t)$ преобразуемы в смысле (107) и обращаются в нуль для всех отрицательных значений t ; они связаны, кроме того, друг с другом уравнениями поля

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \mu \frac{\partial g}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial t} + \sigma f = 0. \quad (144)$$

Если рассматривать z как параметр, то преобразование Лапласа этой системы относительно t будет:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F(z, s)}{\partial z} + \mu s G(z, s) - \mu g(z, 0) &= 0, \\ \frac{\partial G(z, s)}{\partial z} + \varepsilon s F(z, s) + \sigma F(z, s) - \varepsilon f(z, 0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (145)$$

После исключения $G(z, s)$ получим для $F(z, s)$ обыкновенное неоднородное уравнение, в которое s входит лишь как параметр:

$$\frac{d^2 F}{dz^2} - (\mu \varepsilon s^2 + \mu \sigma s) F = \mu \left[\frac{\partial g(z, t)}{\partial z} \right]_{t=0} - \varepsilon \mu s f(z, 0). \quad (146)$$

Так как производная от $g(z, t)$ по z в момент времени $t=0$ может быть выражена через $f(z, 0)$, а $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{t=0}$ из (144), то последнее уравнение эквивалентно такому:

$$\frac{d^2 F}{dz^2} - (\mu \varepsilon s^2 + \mu \sigma s) F = -(\varepsilon \mu s + \mu \sigma) f(z, 0) - \mu \varepsilon \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{t=0}; \quad (147)$$

$f(z, 0)$ означает, строго говоря, предел $f(z, t)$ при $t \rightarrow 0$. Функции

$$f_1(z) = \lim_{t \rightarrow 0} f(z, t), \quad f_2(z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial f(z, t)}{\partial t} \quad (148)$$

представляют начальное состояние поля и предполагаются известными. Обозначив $h^2 = \mu \varepsilon s^2 + \mu \sigma s$, получим окончательно:

$$\frac{d^2 F}{dz^2} - h^2 F = -\frac{h^2}{s} f_1(z) - \mu \varepsilon f_2(z) = Z(z, s). \quad (149)$$

Общее решение (149) является суммой решения однородного уравнения

$$\frac{d^2 F}{dz^2} - h^2 F = 0, \quad (150)$$

содержащего две произвольные постоянные, и частного решения уравнения (149). Можно легко убедиться, что уравнению (149) действительно удовлетворяет функция

$$F(s, z) = A e^{hz} + B e^{-hz} + \frac{e^{hz}}{2h} \int e^{-hz} Z(z, s) dz - \frac{e^{-hz}}{2h} \int e^{hz} Z(z, s) dz, \quad (151)$$

в которой h есть тот корень $\sqrt{h^2}$, который положителен, когда h^2 действительно и положительно. Константы A и B выбираются так, чтобы удовле-

творить *граничным условиям* в точках $z=z_1$ и $z=z_2$. После того как A и B рассчитаны через s , обратное преобразование вернёт нас от (151) к решению $f(z, t)$ уравнения (144), удовлетворяющему как начальным, так и граничным условиям.

Для иллюстрации рассмотрим сначала элементарный случай, когда поле в начальный момент $t=0$ везде равно нулю. Тогда $Z=0$, и мы имеем дело лишь с решением однородного уравнения. Предположим, что в $z=0$ имеется источник, включающийся в момент $t=0$ и излучающий волны в положительном направлении z , интенсивность которых в начале координат равна $f(0, t)=f_3(t)$. Таким образом, в этом примере второе граничное условие в $z=z_2$ заменено требованием, чтобы поле распространялось вдоль оси z направо. Преобразование граничных условий изображается так:

$$F(0, s) = F_3(s) = L[f_3(t)]. \quad (152)$$

Так как волна распространяется направо, то константу A следует положить равной нулю. Это ясно при $\sigma=0$, так как тогда $h = \frac{s}{a}$ и по теореме смещения на стр. 279

$$F(z, s) = F_3(s) e^{-\frac{z}{a}s} = L\left[f_3\left(t - \frac{z}{a}\right)\right] \quad (153)$$

$$f(z, t) = f_3\left(t - \frac{z}{a}\right), \quad (t \geq 0, z > 0). \quad (154)$$

Если проводимость не равна нулю, то решение является более трудным. В этом случае мы напомним $h^2 = \left(s \sqrt{\mu\epsilon} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sigma\right)^2 - \frac{\mu\sigma^2}{4\epsilon^2}$ и применим интеграл¹⁾

$$\frac{e^{-hz}}{h} = \int_0^\infty J_0\left(\frac{i}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sigma \beta\right) e^{-\left(\sqrt{\mu\epsilon} s + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sigma\right) \sqrt{\beta^2 + z^2}} \beta d\beta. \quad (155)$$

После подстановки $\sqrt{\beta^2 + z^2} = at$, он приводится к виду

$$\frac{e^{-hz}}{h} = a \int_{\frac{z}{a}}^\infty e^{-bt} J_0\left(\frac{b}{a} \sqrt{z^2 - a^2 t^2}\right) e^{-st} dt, \quad (156)$$

где $a = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$, $b = \frac{\sigma}{2\epsilon}$, как они определены на стр. 264. После дифференцирования получим окончательно:

$$e^{-hz} = e^{-\frac{b}{a}z} e^{-s\frac{z}{a}} - a \int_{\frac{z}{a}}^\infty e^{-bt} \frac{\partial}{\partial z} J_0\left(\frac{b}{a} \sqrt{z^2 - a^2 t^2}\right) e^{-st} dt, \quad (157)$$

или

$$e^{-hz} = e^{-\frac{b}{a}z} e^{-s\frac{z}{a}} - aL[\varphi(z, t)], \quad (158)$$

¹⁾ Е. Т. Уиттекер и Г. Н. Ватсон, гл. XVII, стр. 204.

где $\varphi(z, t)$ — функция, определяемая соотношениями

$$\varphi(z, t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < t < \frac{z}{a}, \\ e^{-bt} \frac{\partial}{\partial z} J_0\left(\frac{b}{a} \sqrt{z^2 - a^2 t^2}\right) & \text{при } t \geq \frac{z}{a}. \end{cases} \quad (159)$$

Располагая этим преобразованием, мы можем написать:

$$F(z, s) = F_3(s) e^{-hz} = L[f_3(t)] e^{-\frac{b}{a} z} e^{-s \frac{z}{a}} - a L[f_3(t)] L[\varphi]. \quad (160)$$

К этому выражению мы применим теорему смещения и Faltung-теорему, стр. 278, вместе с обратным преобразованием неоднородного уравнения

$$f(z, t) = e^{-\frac{b}{a} z} f_3\left(t - \frac{z}{a}\right) - a \int_{\frac{z}{a}}^t f_3(t - \tau) e^{-b\tau} \frac{\partial}{\partial z} J_0\left(\frac{b}{a} \sqrt{z^2 - a^2 \tau^2}\right) d\tau, \quad (161)$$

или, после замены переменной интегрирования:

$$f(z, t) = e^{-\frac{b}{a} z} f_3\left(t - \frac{z}{a}\right) - a e^{-bt} \int_0^{t - \frac{z}{a}} f_3(\beta) e^{b\beta} \frac{\partial}{\partial z} J_0\left(\frac{b}{a} \sqrt{z^2 - a^2 (t - \beta)^2}\right) d\beta. \quad (162)$$

Читатель может убедиться, что эта функция удовлетворяет волновому уравнению в поглощающей среде и изображает волну, распространяющуюся в положительном направлении и обращающуюся в точку $z = 0$ в $f_3(t)$ для всех значений $t > 0$.

ДИСПЕРСИЯ

5.14. Дисперсия в диэлектриках. Импульс или «сигнал» любой заданной формы может быть образован суперпозицией гармонических волновых цугов бесконечной длины и продолжительности. Скорости, с которыми распространяются поверхности постоянной фазы этих составляющих волн, зависят, как это было показано, от параметров ϵ , μ и σ . В частности, если среда непроводящая, а величины ϵ и μ не зависят от частоты приложенного поля, то фазовая скорость оказывается постоянной и сигнал распространяется без искажения. С другой стороны, наличие проводимости приводит к зависимости фазовой скорости, равно как и коэффициента затухания, от частоты. Следовательно, гармонические составляющие сигнала смещаются по фазе относительно друг друга в направлении распространения, и сигнал прибывает в некоторую отдалённую точку в изменённом и возможно даже неузнаваемом виде. Среду, в которой фазовая скорость зависит от частоты, называют *диспергирующей*.

При достаточно высоких частотах вещество может обнаруживать дисперсионные свойства даже тогда, когда проводимостью σ , обусловленной свободными зарядами, можно полностью пренебречь. В диэлектриках фазовая скорость связана с показателем преломления n соотношением $v = \frac{c}{n}$, где $n = \sqrt{\epsilon_e \epsilon_m}$. При частотах, меньших 10^8 циклов/сек, диэлектрические проницаемости большинства материалов в основном не зависят от частоты, но эта зависимость становится совершенно явной в области, которая зачастую начинается при ультравысоких радиочастотах и простирается в инфракрасную область и ниже. Именно поэтому показатель преломления воды, равный

при частотах, меньших 10^8 , примерно 9, испытывает колебания в области частот около 10^{10} циклов/сек и, в конце концов, падает до значения 1,32 в инфракрасной области. За исключением растворов или кристаллов ферромагнитных солей, дисперсия непроводников может быть полностью приписана зависимости κ_e от частоты.

Все современные теории дисперсии учитывают молекулярное строение вещества и рассматривают молекулы как динамические системы, обладающие собственными нормальными частотами, которые возбуждаются приходящим полем. Простая механическая модель, которая привела к удивительно удачной дисперсионной формуле, была предложена Максвеллом и независимо Зельмейером. Дальнейший успех в этой области связан с именем Лоренца, который развил теорию вещества, состоящего из собрания большого числа молекулярных осцилляторов; Лоренц смог, по крайней мере качественно, объяснить большое число электрических и оптических явлений. Однако, согласно Лоренцу, эти молекулярные системы подчиняются законам классической механики; в настоящее время известно, что они подчиняются законам квантовой механики. Вслед за быстрыми успехами наших знаний о структуре атомов и молекул был проведен пересмотр теории дисперсии, которая в настоящее время может рассматриваться как весьма удовлетворительная.

Как классическая, так и квантовая теории дисперсии рассчитывают смещение заряда от центра масс атомной системы в зависимости от частоты и интенсивности возмущающего поля. После усреднения по всем атомам, содержащимся внутри соответствующим образом выбранного элемента объема, получают выражение для поляризации среды, т. е. для дипольного момента единицы объема. Классический результат весьма близок по виду к квантово-механической формуле и приводит в большинстве случаев к правильному выражению для показателя преломления в зависимости от частоты. Поэтому мы ограничим наше рассмотрение случаем, когда электрическая поляризация в окрестности резонансной частоты может быть приближенно выражена действительной частью следующего выражения ¹⁾:

$$P = \frac{a^2}{\bar{\omega}_0^2 - \omega^2 - i\omega} \epsilon_0 E. \quad (1)$$

Под интенсивностью электрического поля мы понимаем теперь действительную часть комплексного вектора

$$E = E_0 e^{-i\omega t}. \quad (2)$$

Константа a^2 прямо пропорциональна числу осцилляторов с собственной частотой ω_0 в единице объема. Константа $\bar{\omega}_0$ связана с этой собственной частотой равенством

$$\bar{\omega}_0^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{3} a^2 \quad (3)$$

так, что при достаточно малой плотности среды $\bar{\omega}_0 \rightarrow \omega_0$. Константа g учитывает диссипативные силы, имеющие характер трения и обусловленные столкновениями молекул. Константы ω_0 и g , которые характеризуют молекулы рассматриваемой среды, могут быть определены из экспериментальных данных.

¹⁾ Вывод этой формулы смотри у Лоренца, Теория электронов, или в любом учебнике по физической оптике, какими являются, например, книги М. Борна, Оптика (Харьков — Киев ГНТИ, 1937), Försterling, Lehrbuch der Optik, Hirzel, 1928. К. Шеффер, Теоретическая физика, т. III, ч. 2, стр. 315.

При достаточно малых частотах поля поляризация P приближается, согласно (1), к постоянному значению

$$P = \frac{a^2}{\omega_0^2} \epsilon_0 E, \quad (4)$$

и, так как относительная диэлектрическая постоянная связана с поляризацией соотношением

$$P = (\kappa - 1) \epsilon_0 E, \quad (5)$$

то можно выразить κ через молекулярные константы

$$\kappa = 1 + \frac{a^2}{\omega_0^2}. \quad (6)$$

Но если частота поля увеличивается, то пренебрежение двумя другими членами в знаменателе становится недопустимым. В этом случае, по аналогии, мы определим *комплексную относительную диэлектрическую проницаемость* κ' с помощью какого-либо из уравнений

$$P = (\kappa' - 1) \epsilon_0 E, \quad D = \kappa' \epsilon_0 E. \quad (7)$$

Отсюда и из (1) мы получаем:

$$\kappa' = 1 + \frac{a^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega g}. \quad (8)$$

С этим комплексным параметром уравнения Максвелла для среды с магнитной проницаемостью μ_0 будут:

$$\text{rot } E + \mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} = 0; \quad \text{rot } H - \epsilon_0 \kappa' \frac{\partial E}{\partial t} = 0. \quad (9)$$

Из них следует, что прямоугольные компоненты векторов [поля удовлетворяют волновому уравнению

$$\Delta \psi - \epsilon_0 \mu_0 \kappa' \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (10)$$

Решение (10) в виде плоской волны описывается функцией

$$\psi = \psi_0 e^{ikz - i\omega t}, \quad (11)$$

где

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\kappa'} = \alpha + i\beta, \quad (12)$$

так что

$$\kappa' = \frac{c^2}{\omega^2} (\alpha + i\beta)^2. \quad (13)$$

Волна распространяется со скоростью $v = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{c}{n}$, но α и показатель преломления n являются теперь явными функциями частоты, которые можно получить, подставив (8) в (13).

В газах и парах плотность поляризованных молекул так невелика, что κ' очень мало отличается от единицы. Поэтому мала и константа a^2 , так что ω_0 отличается от собственной частоты ω_0 на пренебрежимо малую величину и корень из κ' может быть вычислен с сохранением лишь двух членов биномиального разложения. Таким образом,

$$\frac{c}{\omega} (\alpha + i\beta) \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega g}. \quad (14)$$

Когда приложенная частота ω достаточно низка, можно пренебречь в знаменателе последними двумя членами, так что

$$\frac{\alpha c}{\omega} = n = 1 + \frac{a^2}{2\omega_0^2}. \quad (15)$$

В этом случае показатель преломления, а следовательно, и фазовая скорость не зависят от частоты; дисперсия отсутствует.

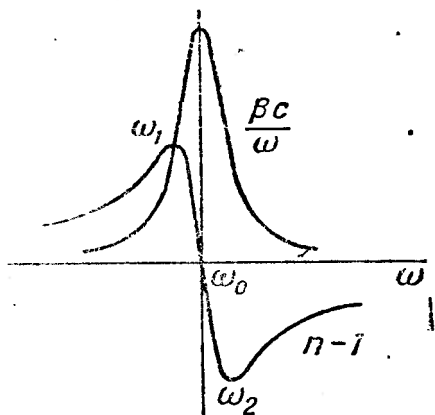
Если приложенная частота ω сравнима с резонансной частотой ω_0 , но не приближается к ней слишком близко, то член, выражающий затухание, можно ещё не учитывать: $|\omega_0^2 - \omega^2| \gg \omega g$ и

$$\frac{\alpha c}{\omega} = n = 1 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (16)$$

Коэффициент поглощения равен нулю и среда прозрачна, но показатель преломления и фазовая скорость являются функциями частоты. Если $\omega < \omega_0$, то n будет больше единицы и увеличение ω приведёт к увеличению n и уменьшению v . Если $\omega > \omega_0$, то показатель преломления меньше единицы, но увеличение ω опять имеет своим результатом увеличение численного значения n .

В этом случае дисперсия называется *нормальной*.

Пусть, наконец, ω приближается к резонансной частоте ω_0 . После деления (14) на действительную и мнимую части, получаем:



$$\left. \begin{aligned} n = \frac{\alpha c}{\omega} &= 1 + \frac{a^2}{2} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 g^2}, \\ \beta &= \frac{a^2}{2c} \frac{g}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 g^2}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Рис. 58. Кривые дисперсии и абсорбции в окрестности резонансной части.

На рис. 58 изображены показатель преломления и коэффициент поглощения $\beta c / \omega$ для газа как функции частоты. Коэффициент поглощения имеет острый максимум при ω_0 , так что в этой области среда непрозрачна для волн. Когда ω возрастает от значений, лежащих ниже ω_0 , коэффициент преломления достигает максимума при ω_1 , а затем быстро спадает до значения, меньшего единицы при ω_2 , после чего он опять увеличивается с ростом ω , приближаясь, в конце концов, к единице. Если (как это имеет место в области $\omega_1 \omega_2$) *увеличение частоты приводит к уменьшению показателя преломления и увеличению фазовой скорости, то дисперсию называют аномальной*. Согласно этому определению, дисперсия, получающаяся из-за проводимости среды и рассмотренная в предыдущих разделах этой главы, является аномальной. Почти всегда можно утверждать, что «аномальный» ход является более обычным, чем «нормальный».

В жидкостях и твёрдых телах наши результаты должны быть в некоторой степени видоизменены, так как уже нельзя предполагать, что среда имеет малую плотность, но сильного влияния на общий ход дисперсионной кривой это не оказывает. Кроме того, наше рассмотрение было ограничено поведением констант распространения в окрестности одной резонансной частоты. В действительности молекула является сложной динамической системой и обладает бесконечным рядом собственных частот, каждая из которых участвует во взаимодействии молекулы с падающим полем. Классическая

теория не может определить значения этих частот. Соответствующей подгонкой констант к экспериментальным данным можно установить эмпирическую дисперсионную формулу, для которой (8) является типичным членом и которая удовлетворяет экспериментальным данным в широкой области частот.

5.15. Дисперсия в металлах. Удивительно точную теорию оптических свойств металлов можно получить из следующей, довольно грубой, модели. Представим себе, что закреплённые положительные ионы проводника образуют область постоянного электростатического потенциала. Внутри этой области облако (или «газ») свободно движущихся электронов достигло статического равновесия, так что средняя сила, действующая на какой-нибудь электрон проводимости, равна нулю, и, помимо обычных флуктуаций, полный заряд внутри любого элемента объёма также равен нулю. Наложение внешнего поля E вызывает общий дрейф свободных электронов в направлении поля. Движению препятствуют постоянно повторяющиеся соударения в узлах решётки, занятых тяжёлыми ионами; получающаяся при этом передача количества движения от дрейфующих электронов к ионам решётки вызывает, с одной стороны, тепловые колебания ионов, с другой, — замедление движения электронов. Вопрос о точном характере локальных (микроскопических) сил, действующих на электрон проводимости, является довольно тонким, но в той мере, в какой можно пренебрегать влиянием связанных электронов кристаллической решётки, оказывается оправданным предположение, что величина действующего поля равна макроскопическому полю E , господствующему внутри проводника.

Пусть r будет смещением из начального положения свободного заряда e с массой m . На заряд действует внешняя сила eE , а движению его препятствует сила $-mg \frac{dr}{dt}$, пропорциональная скорости. Эта сила эмпирически описывает диссипативное действие соударений. Поэтому уравнение для усреднённого движения заряда e имеет вид

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} + mg \frac{dr}{dt} = eE_0 e^{-i\omega t}; \quad (18)$$

его частное решение имеет вид

$$r = \frac{1}{g - i\omega} \frac{ei}{\omega m} E_0 e^{-i\omega t}. \quad (19)$$

Если в единице объёма имеется N свободных электронов, то плотность тока равна:

$$J = Ne \frac{dr}{dt} = \frac{Ne^2/m}{g - i\omega} E. \quad (20)$$

Таким образом, по аналогии со стационарной проводимостью, определяемой из соотношения $J = \sigma E$, мы вводим комплексную проводимость σ' , равную в силу (20):

$$\sigma' = \frac{N \frac{e^2}{m}}{g - i\omega}. \quad (21)$$

Постоянные распространения и затухания плоской волны могут быть получены теперь обычным способом из соотношения $k^2 = \mu \epsilon \omega^2 + i\sigma' \mu \omega$. Известно, что резонансные частоты связанных электронов металлических атомов лежат далеко в фиолетовой или ультрафиолетовой области, так что для видимого красного света, для инфракрасного и, конечно, для радиочастот диэлектрическую проницаемость металла можно с уверенностью положить

равной ϵ_0 . Кроме того, если проводник сделан из неферромагнитного материала, то и μ приближённо равно μ_0 , поэтому

$$k^2 = (\alpha + i\beta)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + \frac{i\sigma'}{\omega\epsilon_0} \right). \quad (22)$$

Подставляя σ' из (21) и отделяя действительную и мнимую части, получаем:

$$\begin{aligned} \alpha^2 - \beta^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega^2 + g^2} \right), \\ 2\alpha\beta &= \frac{\omega^2}{c^2} \frac{Ne^2}{m\epsilon_0\omega} \frac{g}{\omega^2 + g^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

При достаточно малых частотах инерциальная сила $m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ в уравнении (18) пренебрежимо мала по сравнению с силой трения $mg \frac{d\mathbf{r}}{dt}$. В этой области проводимость σ' , определённая по (21), сводится к действительной и постоянной величине

$$\sigma' = \frac{Ne^2}{mg}, \quad (24)$$

которая должна быть, идентична со стационарной проводимостью σ . В ряде фундаментальных исследований Хагеном и Рубенсом ¹⁾ было показано, что значения проводимости, измеренные при стационарных условиях, могут быть использованы без заметной ошибки вплоть до инфракрасной области. Однако при длинах волн короче, чем приблизительно $25 \cdot 10^{-4}$ см, проводимость обнаруживает резкую зависимость от частоты, и наблюдаемая дисперсия может быть грубо рассчитана из соотношений (23).

Итоги изложенных исследований и их содержание показывают, что дисперсионные формулы, выражающие зависимость ϵ , μ и σ от частоты, допускают расширение классической теории электромагнетизма далеко за те пределы, которые были произвольно установлены в первой главе.

5.16. Распространение в ионизованной атмосфере (ионосфере). Недавние исследования распространения радиоволн в ионизованных верхних слоях атмосферы привели к некоторым весьма интересным проблемам. В разреженном газе средняя длина свободного пробега электрона чрезвычайно велика и, следовательно, коэффициент затухания пренебрежимо мал. Таким образом кажущаяся проводимость оказывается чисто мнимой:

$$\sigma' = i \frac{Ne^2}{m\omega}, \quad (25)$$

откуда

$$n^2 = \frac{\alpha^2 c^2}{\omega^2} = 1 - \frac{Ne^2}{m\epsilon_0 \omega^2}; \quad \beta = 0. \quad (26)$$

Электромагнитная волна распространяется в электронном газе без затухания и с фазовой скоростью, *большей* чем скорость света в свободном пространстве. При частотах, меньших некоторого критического значения, определённого выражением

$$\omega_0^2 = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0}, \quad (27)$$

показатель преломления становится мнимым, и можно показать, что от границы такой среды волна будет полностью отражаться.

¹⁾ *Ann. Physik*, 11, 873, 1903. См. главу IX, стр. 447.

В действительности задача о распространении в ионосфере осложнена наличием магнитного поля земли. Предположим, что плоская волна распространяется в направлении положительной оси z прямоугольной системы координат. Для примера мы допустим, что в единице объёма пустого пространства находится лишь N частиц с зарядом e и массой m . Имеется также статическое магнитное поле, которое можно разложить на компоненту, параллельную направлению распространения, и поперечную компоненту. Лишь продольная компонента, величину которой мы будем обозначать H_0 , приводит к эффектам первого порядка.

Уравнения движения частицы таковы:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{e}{m} E_x + \frac{e\mu_0}{m} (\dot{y}H_0 - \dot{z}H_y), \\ \ddot{y} &= \frac{e}{m} E_y + \frac{e\mu_0}{m} (\dot{z}H_x - \dot{x}H_0), \\ \ddot{z} &= \frac{e\mu_0}{m} (\dot{x}H_y - \dot{y}H_x). \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Отношение силы, с которой действует на заряд магнитный вектор распространяющейся волны, к силе, обусловленной электрическим вектором, равно отношению скорости заряда к скорости света. Поэтому в (28) можно пренебречь членами, содержащими H_x и H_y , так что уравнения движения сводятся к более простой системе

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{e}{m} E_x + \frac{e\mu_0 H_0}{m} \dot{y}, \\ \ddot{y} &= \frac{e}{m} E_y - \frac{e\mu_0 H_0}{m} \dot{x}, \\ \ddot{z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Движение частицы происходит целиком в плоскости xu , векторы падающей волны также параллельны этой плоскости, поэтому удобно воспользоваться комплексными величинами. Положим:

$$\left. \begin{aligned} u &= x + iy, \\ E &= E_x + iE_y, \\ H &= H_x + iH_y. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Тогда уравнения движения выражаются посредством одного комплексного уравнения

$$\ddot{u} + i \frac{e\mu_0 H_0}{m} \dot{u} = \frac{e}{m} E. \quad (31)$$

Уравнения же поля принимают вид

$$\frac{\partial E}{\partial z} - i\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial z} + i\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = -iNe\dot{u}, \quad (32)$$

где вместо плотности тока введено произведение заряда единицы объёма на среднюю скорость.

Решение должно быть найдено для этой системы трёх совместных уравнений. Попробуем положить:

$$\left. \begin{aligned} E &= Ae^{\pm i(hz - \omega t)}, \\ H &= Be^{\pm i(hz - \omega t)}, \\ u &= Ce^{\pm i(hz - \omega t)}. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Это — гармонические волны, распространяющиеся в положительном направлении с волновым числом h . В то время как в отсутствие поля H_0 знак в экспонентах не играет никакой роли, в данном примере его выбор позволит, как мы сейчас увидим, определить два различных решения. Действительно, подставив (33) в (31) и (32), получаем:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{e}{m}A + \left(-\omega^2 \pm \frac{e\mu_0 H_0 \omega}{m}\right)C &= 0, \\ hA + i\mu_0 \omega B &= 0, \\ \epsilon_0 \omega A + ihB + Ne\omega C &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Чтобы эта система однородных уравнений для амплитуд A , B , C имела нетривиальное решение, необходимо, чтобы её детерминант обращался в нуль:

$$\begin{vmatrix} -\frac{e}{m} & 0 & -\omega^2 \pm \frac{e\mu_0 H_0 \omega}{m} \\ h & i\mu_0 \omega & 0 \\ \epsilon_0 \omega & ih & Ne\omega \end{vmatrix} = 0. \quad (35)$$

Развёртывание этого детерминанта приводит к уравнению для постоянной распространения h

$$\frac{c^2 h^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}}{\omega^2 \pm \frac{e\mu_0 H_0 \omega}{m}}. \quad (36)$$

Фазовая скорость $v = \frac{\omega}{h}$ и, следовательно, (36) есть квадрат показателя преломления n .

Таким образом, получается, что электронный газ, на который наложено стационарное магнитное поле, действует подобно анизотропному двояко преломляющему кристаллу, в котором существуют два вида бегущих волн с двумя различными скоростями. Кроме того, мы видим, что при подходящем выборе ω показатель преломления среды по отношению к одной из этих волн становится бесконечным:

$$n_-^2 = \chi_- = 1 - \frac{\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}}{\omega^2 - \frac{e\mu_0 H_0 \omega}{m}}. \quad (37)$$

Аналогично, при другой частоте показатель преломления

$$n_+^2 = \chi_+ = 1 - \frac{\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}}{\omega^2 + \frac{e\mu_0 H_0 \omega}{m}}. \quad (38)$$

обращается в нуль. Замечательные оптические свойства слоя Кеннели-Хивисайда могут быть в значительной степени описаны этими формулами. Линейно поляризованная волна, входящая в такую среду, разлагается на право- и левополяризованные по кругу компоненты, одна из которых распространяется

со скоростью v_+ , а другая — со скоростью v_- . Так как отражение от слоя определяется показателем преломления, то поляризация волны, возвращающейся на землю, сильно изменяется, и часто эта волна содержит сильную поляризованную по кругу компоненту, которая способствует явлению фединга ¹⁾.

СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ

5.17. Групповая скорость. Понятие фазовой скорости применимо только к полям, которые периодичны в пространстве и, следовательно, представляют волну, бесконечно продолжающуюся во времени ²⁾. Если состояние среды описывается функцией $\psi(z, t)$, где

$$\psi(z, t) = Ae^{i(kz - \omega t)}, \quad (1)$$

то поверхности постоянной фазы определяются равенством

$$kz - \omega t = \text{const.}, \quad (2)$$

и эти поверхности распространяются со скоростью

$$v = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k}. \quad (3)$$

С другой стороны, волновой пук конечной длины не может быть представлен простой гармонической функцией (1), и фазовая скорость теряет свой точный смысл. Тогда довольно небрежно говорят о «скорости света» или о «скорости волнового фронта». Необходимость точного определения понятия волновой скорости стала очевидной некоторое время тому назад, в связи с некоторыми экспериментами, являющимися основными для теории относительности; в настоящее время этот вопрос имеет важное отношение к вопросу о связи с помощью коротких волн, распространяющихся вдоль проводников. Так как электромагнитное поле никогда не может быть точно локализовано ни в пространстве, ни во времени, то в каждом определении скорости должен содержаться существенный произвол. Наклон и высота волнового фронта изменяются во время его распространения, а понятие «центра тяжести» становится неопределённым, если импульс расплывается. Пожалуй, для читателя представляет большую практическую ценность знать, чего некоторые общепотребительные термины не означают, чем приписывать им слишком точный физический смысл.

После понятия фазовой скорости следующим по важности является понятие групповой скорости. Рассмотрим суперпозицию двух гармонических волн, которые немного отличаются по частоте и волновому числу:

$$\psi_1 = \cos(kz - \omega t), \quad \psi_2 = \cos[(k + \delta k)z - (\omega + \delta \omega)t]. \quad (4)$$

Их сумма

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = 2 \cos \frac{1}{2} [z\delta k - t\delta \omega] \cos \left[\left(k + \frac{\delta k}{2}\right)z - \left(\omega + \frac{\delta \omega}{2}\right)t \right] \quad (5)$$

является хорошо известным выражением явления «биений». Поле изменяется

¹⁾ Более полный расчёт распространения волн в ионизованной среде и библиографию можно найти в статье Мимно, *Rev. mod. Phys.* 9, 1—43, 1937. См. также *Ergebnisse der exakten, Naturwissenschaften*, Vol. 17, Springer, 1938.

(Имеется русский перевод; Мимно. Физика ионосферы, Связьиздат. 1940. Кроме того, см. А. И. Шуккин, Физические основы распространения радиоволн в ионосфере, Связьиздат, 1940. *Прим. ред.*

²⁾ Говоря о поле, периодическом в пространстве, автор имеет здесь в виду синусоидальную (монокроматическую) волну. *Прим. ред.*

с частотой, немного отличающейся от ω , в то время как его амплитуда

$$A = 2 \cos \frac{1}{2} (z\delta k - t\delta\omega) \quad (6)$$

медленно изменяется между суммой амплитуд слагаемых волн и нулём. В результате усиливающей и ослабляющей интерференции распределение поля как вдоль временной, так и вдоль пространственной осей имеет вид ряда периодически повторяющихся «биений» или «групп», подобных тем, что изображены на рис. 59. Поверхность постоянной амплитуды группы A определяется уравнением

$$z\delta k - t\delta\omega = \text{const.}, \quad (7)$$

из которого следует, что сама группа распространяется со скоростью

$$u = \frac{\delta\omega}{\delta k}. \quad (8)$$

Групповая скорость определяется отношением разности частот к разности волновых чисел. Если среда недиспергирующая, то $\delta k = \frac{1}{v} \delta\omega$, и следова-

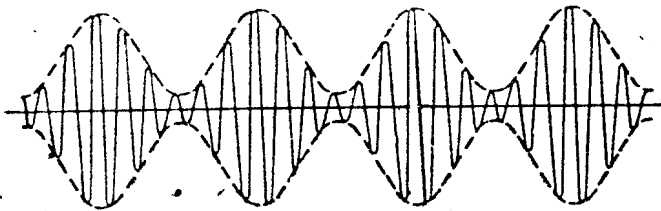


Рис. 59. Биения.

тельно, групповая скорость совпадает с фазовой скоростью v . В диспергирующей среде их значения различны.

В только что приведённом примере суперпозиция двух гармонических волн привела к периодической последовательности

групп. Одна единственная группа или импульс любой желаемой формы может быть составлена, согласно теории интеграла Фурье, подбором амплитуд составляющих гармонических волн в виде подходящей функции частоты или волнового числа и интегрированием:

$$\psi(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{i(kz - \omega t)} dk. \quad (9)$$

Понятие групповой скорости применимо лишь к таким представлениям Фурье, которые ограничены узкой полосой спектра. Если величина амплитудной функции $A(k)$ пренебрежимо мала вне области $k_0 - \delta k \leq k \leq k_0 + \delta k$, то мы можем заменить (9) интегралом

$$\psi = \int_{k_0 - \delta k}^{k_0 + \delta k} A(k) e^{i(kz - \omega t)} dk, \quad (10)$$

который изображает функцию, называемую обычно «волновым пакетом». Мы будем предполагать, что k действительно и что ω — известная функция k . Внутри достаточно малого интервала $2\delta k$ функция $\omega(k)$ будет лишь немного отличаться от её значения при $k = k_0$ и поэтому может быть представлена двумя первыми членами ряда Тейлора

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0} (k - k_0) + \dots \quad (11)$$

Условие, что членами высшего порядка в этом разложении можно пренебречь, накладывает необходимые ограничения на δk . Имеем:

$$kz - \omega t = k_0 z - \omega_0 t + (k - k_0) \left[z - \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0} t \right] + \dots \quad (12)$$

Волновой пакет может быть изображён теперь функцией

$$\psi = \psi_0 e^{i(k_0 z - \omega_0 t)}, \quad (13)$$

где ψ_0 — средняя амплитуда, определённая равенством

$$\psi_0 = \int_{k_0 - \delta k}^{k_0 + \delta k} A(k) e^{i(k - k_0) \left[z - \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0} t \right]} dk. \quad (14)$$

Эта амплитуда постоянна вдоль поверхностей

$$z - \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0} t = \text{const.} \quad (15)$$

Отсюда очевидно, что волновой пакет распространяется с групповой скоростью

$$u = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0}. \quad (16)$$

В случае недиспергирующей среды u совпадает с фазовой скоростью v , но в общем случае u является функцией волнового числа k_0 .

Из соотношений $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\omega = kv$ мы можем вывести несколько эквивалентных выражений для групповой скорости, которые иногда оказываются более удобными, чем (16):

$$u = \frac{d}{dk} vk = v + k \frac{dv}{dk} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} = \frac{dv}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{d\lambda}{dv}\right)}. \quad (17)$$

Из самого способа определения групповой скорости очевидно, что это понятие является вполне точным лишь в случае волнового пакета, составленного из элементарных волн, лежащих внутри бесконечно узкой области спектра. Если интервал δk увеличивается, то разброс в фазовой скорости гармонических компонент в диспергирующей среде становится более заметным; пакет быстро деформируется, и групповая скорость как скорость пакета в целом теряет свой физический смысл. Заметим, что сосредоточение поля в малом участке пространства не только не означает соответствующего сосредоточения частот или длин волн спектра, а наоборот. Рассмотрим, например, гармонический волновой пучок конечной длины

$$\left. \begin{aligned} f(z) &= 0, & \text{при } |z| > \frac{L}{2}, \\ f(z) &= \cos k_0 z & \text{при } |z| < \frac{L}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Амплитуда возмущения в окрестности произвольного волнового числа k даётся формулой (40) на стр. 260

$$A(k) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \frac{k_0 - k}{2} L}{k_0 - k}; \quad (19)$$

вид этой функции изображён на рис. 50. С увеличением L интервал волновых чисел δk , внутри которого $A(k)$ имеет заметную величину, уменьшается. С другой стороны, импульс, образованный при резком включении и выключении генератора, размазан по спектру и не может быть даже приближённо представлен в виде (10). Такой широкий спектральный состав является обычной неприятностью для всякого работника лаборатории, который должен защищать чувствительную электроаппаратуру от атмосферных разрядов или от импульсов, возникающих при включении и выключении мощных машин.

5.18. Волновой фронт и скорость сигнала. Если дисперсия в среде нормальна и не слишком сильна, то импульс или волновой пакет может пройти большое расстояние, заметно не расплываясь. Поскольку считается, что энергия локализована в области, занятой полем, то скорость распространения энергии должна, очевидно, по крайней мере приближённо, равняться групповой скорости. При нормальной дисперсии увеличение длины волны обуславливает увеличение фазовой скорости и, следовательно, согласно (17), групповая скорость при этом всегда меньше фазовой. Если же, наоборот, дисперсия аномальна, как это имеет место в проводящей среде, то производная $\frac{dv}{d\lambda}$ отрицательна, и групповая скорость больше фазовой скорости. И действительно, нет недостатка в примерах, показывающих, что v может превышать скорость света c . Так как одно время вообще считали, что групповая скорость обязательно эквивалентна скорости распространения энергии, то в первые годы после публикации Эйнштейном специальной теории относительности примеры такого рода предлагались как явно противоречащие постулату о невозможности распространения сигнала со скоростью, большей c . Ответ на эти возражения и разъяснение всей проблемы были даны в 1914 г. в прекрасном исследовании, проведённом Зоммерфельдом и Бриллюэном¹⁾, чтение которого сохраняет интерес и поныне.

Зоммерфельд рассмотрел специальную задачу о сигнале, который приходит в точку $z=0$ или возникает в ней в момент времени $t=0$, а затем продолжается бесконечно долго в виде гармонического колебания с частотой ω . Сигнал распространяется направо, в диспергирующей среде, и мы хотим узнать время, необходимое для прохождения заданного расстояния. Мы видели, что интеграл Фурье для неограниченного волнового цуга не сходится, хотя эта трудность и может быть обойдена деформацией пути интегрирования в комплексной области переменной ω . С другой стороны, преобразование Лапласа было введено именно с целью исследования таких функций, и, действительно, можно показать простой заменой переменной, что комплексный интеграл Фурье, применённый Зоммерфельдом, в точности равен представлению исследуемой функции, определённого в уравнении (143) раздела 5.12. Соответственное видоизменение оригинального исследования облегчит наше рассмотрение.

В точке $z=0$ сигнал описывается функцией

$$f(0, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{st}}{s+i\omega} ds = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ e^{-i\omega t} & \text{при } t > 0. \end{cases} \quad (20)$$

Представление этого поля в любой точке z среды получится продолжением (20) в виде решения волнового уравнения, которое согласно (10), стр. 287, имеет вид

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{x'}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0. \quad (21)$$

Уравнению (21) удовлетворяют элементарные функции вида

$$\exp\left(st - s \sqrt{\frac{x'}{c}} z\right),$$

¹⁾ Sommerfeld, *Ann. Phys.* 44, 77—202, 1914; Brillouin, *ibid.*, 203—240. Полное и более современное изложение этой работы было опубликовано Бриллюэном в докладах *Congrès International d'Electricité*, том II, 1^{re} Sec. Paris, 1932.

из которых мы и образуем сигнал

$$f(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{e^{s(t - \sqrt{x'} \frac{z}{c})}}{s + i\omega} ds, \quad \gamma > 0. \quad (22)$$

В недиспергирующей среде x' — константа и (22) совпадает с (143), стр. 283. Если, однако, среда диспергирующая, то x' является функцией s . Мы предположим, что дисперсия может быть описана формулой (8) на стр. 287, и, заменив $-i\omega$ на s , получим

$$\sqrt{x'} = \sqrt{1 + \frac{a^2}{s^2 + sg + \bar{\omega}_0^2}} = \beta(s). \quad (23)$$

Для того чтобы включить в наше рассмотрение проводники, нужно лишь положить $\bar{\omega}_0^2 = 0$. Следовательно, волновая функция, которая при $t > 0$ переходит в гармонические колебания в точке $z = 0$, будет

$$f(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{e^{s[t - \beta(s) \frac{z}{c}]}}{s + i\omega} ds, \quad \gamma > 0. \quad (24)$$

При $s \rightarrow \pm i\infty$ функция $\beta(s) \rightarrow 1$. Если теперь $\tau = t - \frac{z}{c} < 0$, то контур может быть замкнут, согласно лемме Жордана, стр. 280, правой полуокружностью бесконечного радиуса. Такой контур не содержит особенностей подинтегрального выражения и, следовательно, $f(z, t) = 0$. Таким образом мы убедились в том, что в точке z среды поле равно нулю, до тех пор пока $t < \frac{z}{c}$ и, следовательно, в том что *скорость волнового фронта не может превышать константы c* .

Если $\tau = t - \frac{z}{c} > 0$, то контур может быть замкнут лишь слева. Охватываемые при этом особенности суть полюс $s = -i\omega$ и точки ветвления β . Эти последние находятся в точках, где $\beta = 0$ и $\beta = \infty$. Если $\beta(s)$ записать в виде

$$\beta(s) = \sqrt{\frac{s^2 + sg + \bar{\omega}_0^2 + a^2}{s^2 + sg + \bar{\omega}_0^2}}, \quad (25)$$

то легко видеть, что

$$\begin{aligned} \beta = \infty & \quad \text{при} \quad s = -\frac{1}{2}g \pm \frac{i}{2}\sqrt{4\bar{\omega}_0^2 - g^2}, \\ \beta = 0 & \quad \text{при} \quad s = -\frac{1}{2}g \pm \frac{i}{2}\sqrt{4(\bar{\omega}_0^2 + a^2) - g^2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Расположение этих особенностей на комплексной плоскости s показано на рис. 60а, где

$$\left. \begin{aligned} a_{\pm} &= -\frac{1}{2}g \pm \frac{i}{2}\sqrt{4\bar{\omega}_0^2 - g^2}, \\ b_{\pm} &= -\frac{1}{2}g \pm \frac{i}{2}\sqrt{4(\bar{\omega}_0^2 + a^2) - g^2}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Если мы обойдём точки ветвления в плоскости s , то мы вернёмся к начальному значению β , но с противоположным знаком. Этой трудности избегают введением «разрезов» или барьеров вдоль какой-нибудь линии, соединяющей

a_+ и b_+ и линии, соединяющей a_- и b_- . На такой «разрезанной» плоскости, которая в теоретико-функциональном смысле представляет собой один лист римановой поверхности $\beta(s)$, функция $\beta(s)$ однозначна, так как ввиду

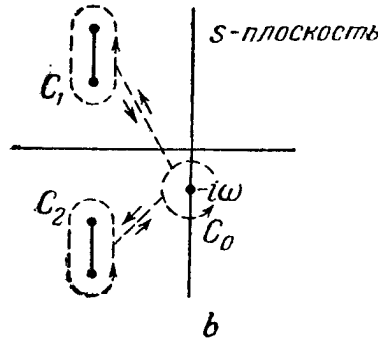
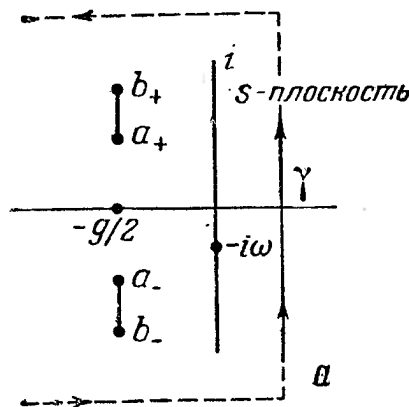


Рис. 60. Пути интегрирования в s -плоскости.

запрещения переходить барьер любой контур должен окружать чётное число точек ветвления. Путь интегрирования в (24), который идёт по прямой от $\gamma - i\infty$ до $\gamma + i\infty$, а затем замыкается слева бесконечной полуокружностью, может быть теперь деформирован любым способом в «разрезанной» плоскости,

без изменения значения интеграла, при единственном условии, что в процессе деформации контур не пересекает полюса в точке $s = -i\omega$ или какого-нибудь из двух барьеров. В частности, путь интегрирования может быть сжат до контура, изображённого на рисунке 60b. Величины интегралов, взятых в прямом и обратном направлении вдоль прямых линий, соединяющих C_0 с C_1 и C_0 с C_2 , взаимно сокращаются, и (24) сводится к трём интегралам, взятым вдоль замкнутых контуров C_0 , C_1 и C_2 .

Первый из этих трёх интегралов

$$f_0(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{e^{s(t - \beta(s) \frac{z}{a})}}{s + i\omega} ds, \quad (28)$$

может быть сразу же вычислен по теореме Коши

$$f_0(z, t) = e^{-i\omega[t - \beta(s) \frac{z}{c}]}_{s = -i\omega}, \quad (29)$$

Согласно (25),

$$\beta(-i\omega) = \sqrt{\frac{\omega^2 + i\omega g - \omega_0^2 - a^2}{\omega^2 + i\omega g - \omega_0^2}} = n + ih, \quad (30)$$

и, следовательно,

$$f_0(z, t) = e^{-\frac{\omega h}{c} z} e^{i(\frac{\omega n}{c} z - \omega t)}. \quad (31)$$

Другие два интеграла, описывающие петли вокруг барьеров, не могут быть вычислены каким-либо столь же простым способом и будут обозначаться далее через

$$f_{12}(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1 + C_2} \frac{e^{s[t - \beta(s) \frac{z}{c}]} }{s + i\omega} ds. \quad (32)$$

Таким образом, результирующее волновое движение в любой точке среды может быть представлено в виде суммы двух членов

$$f(z, t) = f_0(z, t) + f_{12}(z, t). \quad (33)$$

Физически эти две компоненты могут быть интерпретированы как вынужденные и свободные колебания зарядов, из которых состоит среда. Вынужденные колебания, определяемые $f_0(z, t)$, не затухают во времени и имеют ту же самую частоту, что и приходящий волновой цуг. Свободные колебания $f_{12}(z, t)$ в результате тормозящей силы, действующей на колеблющиеся ионы, затухают во времени, и их частота определяется упругими силами связи. Процесс распространения в среде можно обрисовать следующим образом. До момента $t = \frac{z}{c}$ всё находится в покое. Даже, если фазовая скорость v больше c , никакая волна не достигает точки z , раньше чем через время $t = \frac{z}{c}$. При $t = \frac{z}{c}$ интеграл $f_{12}(z, t)$ принимает первоначально значение, отличное от нуля, показывая, что ионы начали колебаться. Если мы под термином «фронт волны» понимаем самое первое прибытие возмущения, то *скорость волнового фронта всегда равна c вне зависимости от среды*. Можно показать, однако, что в это первое мгновение $t = \frac{z}{c}$ вынужденный член $f_0(z, t)$, описывающий установившееся состояние, как раз погашает член $f_{12}(z, t)$, изображающий процесс установления, так что процесс начинается всегда с нулевой амплитуды. Затем стационарное состояние постепенно вырисовывается по мере того, как переходный процесс замирает, точно таким же образом, как при внезапном включении переменной электродвижущей силы в электрическую сеть возникает переходное возмущение, которое, в конце концов, заменяется гармоническими колебаниями.

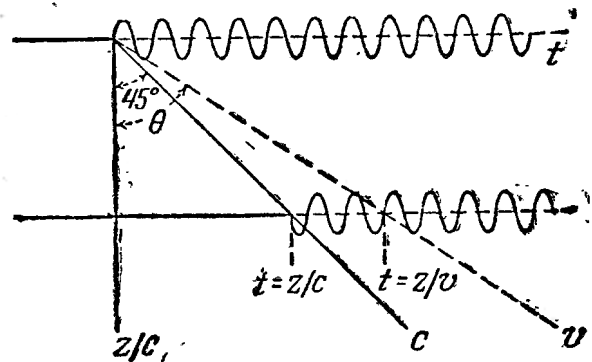


Рис. 61. Определение фазы в стационарном состоянии.

Прибытие волнового фронта и роль скорости v в определении фазы изображены на рис. 61, который, однако, относится лишь к стационарному члену. Ось $\frac{z}{c}$ проведена нормально к оси t . Тогда линия, проведённая под углом в 45° , определяет скорость волнового фронта, так как она проходит через точку z в момент $\frac{z}{c}$. Линия, тангенс наклона которой есть $\operatorname{tg} \vartheta = \frac{c}{v}$, определяет время $t = \frac{z}{v}$ прибытия в точку z волны, имеющей скорость v . В действительности фазовая скорость не имеет ничего общего с распространением; она определяет только фазу, да и то, строго говоря, лишь в случае бесконечного волнового цуга. Фаза вынужденных колебаний измеряется от точки пересечения с пунктирной линией при $t = \frac{z}{v}$, а фаза волнового фронта $t = \frac{z}{c}$ подбирается соответственно. Если $v > c$, то $\vartheta < 45^\circ$. Фаза стационарного состояния опять определяется пересечением с линией $\frac{z}{c}$ в точке

$t = \frac{z}{v}$, но сам фронт волны прибывает позже. Переход от исчезающе малых амплитуд у волнового фронта к относительно большим значениям сигнала был тщательно исследован Бриллюэном. Это исследование является гораздо более тонким, и мы вынуждены ограничиться здесь теми выводами, которые могут быть получены после вычисления (32). Согласно Бриллюэну, сигнал — это цуг колебаний, начинающихся в некоторый момент. В про-

цессе своего распространения сигнал деформируется. Основной части сигнала предшествует первый предвестник, который во всех средах распространяется со скоростью c . Этот первый предвестник прибывает с нулевой амплитудой, а затем его частота и амплитуда медленно растут, как показано на рис. 62а. Затем амплитуда уменьшается, а период приближается к собственному периоду электронов. Теперь начинается новая фаза возмущения, которая может быть названа вторым предвестником, распространяющимся со скоростью $\frac{\bar{\omega}_0}{\sqrt{\bar{\omega}_0^2 + a^2}} c$. Эта скорость получается в предположении, что

в комплексном показателе преломления $\beta(-i\omega)$ в уравнениях (30) и (32) рассматриваемая частота ω мала по сравнению с атомной резонансной частотой $\bar{\omega}_0$.

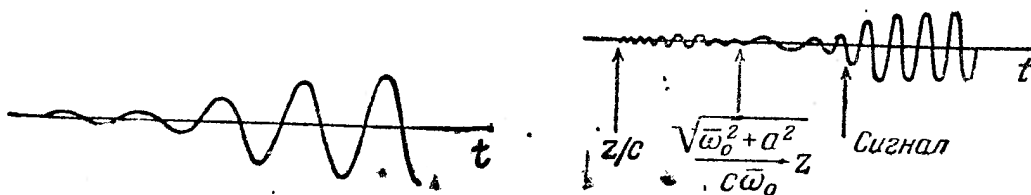


Рис. 62а. Характер изменения амплитуды первого предвестника.

Рис. 62б. Иллюстрация прибытий первого и второго предвестников и сигнала.

той $\bar{\omega}_0$. Период второго предвестника сначала очень велик, а затем уменьшается, в то время как амплитуда растёт и потом падает примерно так же, как и у первого предвестника.

Прибытие основной или главной части возмущения ознаменовывается внезапным ростом амплитуды. Эта главная часть распространяется со скоростью ω , которую Бриллюэн назвал скоростью сигнала. Ясное и простое выражение для ω не может быть дано и её определение включает некоторый произвол, связанный с методом вычисления интеграла (32). Её физический смысл совершенно ясен. На рис. 62б показаны два предвестника и окончательный внезапный рост до установившегося состояния.

В применении к этой третьей и последней части возмущения термин «сигнал» означает ту часть волны, которая способна приводить в действие измерительные приборы. Действительно, при этом предположении измерения должны показать, что скорость распространения приблизительно равна ω . Следует, однако, отметить, что по мере роста чувствительности приёмника скорость, полученная в результате измерения, также будет увеличиваться, пока в пределе, при бесконечной чувствительности, мы не зарегистрируем прибытие фронта первого предвестника, который всегда распространяется со скоростью c . По крайней мере качественно мы можем представить себе среду в виде области пространства, густо усеянной электронами. Бесконечно малое количество энергии проходит сквозь незаполненное пространство, как сквозь сито, распространяясь, конечно, со скоростью c . Каждый последующий слой зарядов приводится в колебание первичной волной и излучает энергию как назад, так и вперёд. Из-за инерции зарядов эти вторичные колебания отстают по фазе от первичной волны, и такое постоянное отставание в процессе прохождения через последовательные слои приводит к уменьшению скорости главной части возмущения.

Определённая выше *скорость фронта волны* таким образом всегда равняется константе c . *Фазовая скорость v* связана лишь с установившимся состоянием и может быть как больше, так и меньше c . *Групповая*

новая скорость u и отличается от фазовой скорости только в диспергирующих средах. Если дисперсия нормальна, то групповая скорость меньше v ; она больше фазовой скорости, если дисперсия аномальна. В окрестности полосы поглощения u может стать бесконечной и даже отрицательной. Скорость сигнала w совпадает с групповой скоростью в области нормальной дисперсии, но заметно отличается от неё всякий раз, когда u ведёт себя аномально. Скорость сигнала всегда меньше c , но в окрестности полосы поглощения довольно трудно дать ей определение, не являющееся до некоторой степени произвольным. На рис. 63 отношения скоростей, характеризующих распространение волнового пучка к скорости c , изображены в окрестности полосы поглощения.

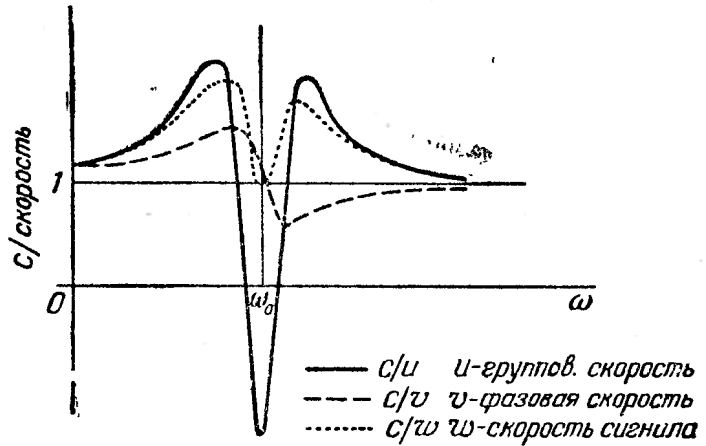


Рис. 63. Поведение групповой, фазовой скоростей и скорости сигнала в окрестности резонансной частоты.

ЗАДАЧИ

1. Пусть E_0 — амплитуда электрического вектора в вольтах на метр, а $\bar{S}$ — средний поток энергии в ваттах на кв. метр для плоской волны, распространяющейся в пустоте. Показать, что

$$\bar{S} = 1,327 \cdot 10^{-3} \cdot E_0^2 \text{ ватт/метр}^2,$$

$$E_0 = 27,45 \sqrt{\bar{S}} \text{ вольт/метр.}$$

2. Пусть E_0 — амплитуда (в вольтах на метр) электрического вектора плоской волны, распространяющейся в пустоте. Показать, что амплитуды магнитных векторов H_0 и B_0 связаны численно с E_0 соотношениями

$$H_0 = 2,654 \cdot 10^{-3} E_0 \text{ ампервитков/метр} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-4} \text{ эрстед,}$$

$$B_0 = \frac{1}{3} \cdot 10^{-8} E_0 \frac{\text{вебер}}{\text{метр}^2} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-4} E_0 \text{ гаусс,}$$

где эрстед — нерационализованная единица в электромагнитной системе CGS. Показать, что если E_0 выражено в электростатической системе, то

$$H_0 = E_0 \text{ эрстед, } B_0 = E_0 \text{ гаусс.}$$

Показать, что если заряд q движется со скоростью v в поле плоской электромагнитной волны, то отношение сил, вызываемых магнитной и электрической компонентами, имеет порядок $\frac{v}{c}$.

3. Теорию однородных плоских волн, развитую в гл. V, можно распространить на неоднородные волны. Если ψ — любая прямоугольная компонента электромагнитного вектора, то за общее определение плоской волны можно принять выражение

$$\psi = \psi_0 e^{i\varphi}, \quad \varphi = -\omega t + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r},$$

в котором ψ_0 — комплексная амплитуда, а φ — комплексная фаза. Коэффициент распространения $\mathbf{k}$ является теперь комплексным вектором, который можно записать в виде

$$\mathbf{k} = k_1 + ik_2 = \alpha \mathbf{n}_1 + i\beta \mathbf{n}_2,$$

где $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ — единичные векторы. Показать, что α — действительная фазовая константа, что поверхности постоянной действительной фазы представляют собой плоскости, нормальные оси $\mathbf{n}_1$, а поверхности постоянной амплитуды — плоскости, нормальные

оси n_2 и что β — коэффициент, являющийся мерой затухания в направлении наиболее быстрого изменения амплитуды. Истинная фазовая скорость v направлена по n_1 .

Показать, что оператор grad можно заменить на ik и что уравнения поля имеют вид

$$\begin{aligned} [kE] - \omega B &= 0, & kB &= 0, \\ [kH] + \omega D &= -iJ, & kD &= 0. \end{aligned}$$

Показать также, что для изотропной среды

$$k^2 = k_1^2 - k_2^2 + 2ik_1k_2 = \omega^2\mu\epsilon + i\omega\mu\sigma.$$

Полагая $k_1k_2 = k_1k_2 \cos \vartheta$, найти выражения для k_1 и k_2 через μ , ϵ , σ и угол ϑ .

4. Продолжая задачу 3, предположим, что электрический вектор линейно поляризован. Показать, что E перпендикулярно k_1 и k_2 , а H лежит в плоскости этих двух векторов. Каково геометрическое место концов магнитного вектора H ? Показать, что если, наоборот, H линейно поляризован, то H перпендикулярен k_1 и k_2 , а E лежит в плоскости (k_1, k_2) . Эти неоднородные плоские волны тесно связаны с так называемыми «Н-волнами» и «Е-волнами» (раздел 9. 18).

5. Теорию плоских волн можно распространить на однородные *анизотропные* диэлектрики. Пусть $\sigma = 0$, $\mu = \mu_0$, а свойства диэлектрика характеризуются тензором с компонентами ϵ_{jk} . Выбирая главные оси в качестве осей координат, получим

$$D_j = \epsilon_0 k_j E_j \quad (j = 1, 2, 3).$$

Уравнения поля для E и D имеют вид

$$[k [kE]] + \omega^2 \mu_0 D = 0, \quad kD = 0.$$

Пусть $k = kn$, где n — единичный действительный вектор, составляющие которого по главным осям равны n_1, n_2, n_3 .

Пусть $v = \frac{\omega}{k}$ и $v_j = \frac{c}{\sqrt{k_j}}$; v_j — главные скорости. Показать, что компоненты E удовлетворяют однородной системе

$$n_j \sum_i n_i E_i + \left(\frac{v^2}{v_j^2} - 1 \right) E_j = 0, \quad (j = 1, 2, 3)$$

и написать уравнения, определяющие фазовую скорость в произвольном направлении, задаваемом вектором n . Показать, что это уравнение имеет три действительных корня, один из которых бесконечен и должен быть отброшен. Поэтому распространение в направлении n может происходить двумя различными способами с фазовыми скоростями v' и v'' . Соответственно имеется два типа линейных колебаний по определенным направлениям, характеризующимся векторами E', D' и E'', D'' . Показать, что эти векторы связаны следующим образом:

$$\begin{aligned} D'E'' &= D'E' = D'D'' = 0, \\ E'E'' &\neq 0, \\ En &\neq 0. \end{aligned}$$

6. Показать, что в однородном анизотропном диэлектрике фазовая скорость удовлетворяет соотношению Френеля

$$\sum_{j=1}^3 \frac{n_j^2}{v_j^2 - v^2} = 0,$$

где n_j — направляющие косинусы волновой нормали n по отношению к главным осям, а v_j — фазовые скорости в направлениях главных осей (см. задачу 5). Показать также, что

$$v^2 = \sum_{j=1}^3 \gamma_j v_j^2$$

где γ_j — направляющие косинусы вектора D по отношению к главным осям.

7. Показать, что если в задаче 6 $v_1 > v_2 > v_3$, то имеются два направления, в которых v имеет единственное значение. Найти эти направления в функции v_1, v_2, v_3 и показать, что в обоих случаях скорость равна v_2 . Определяемые таким образом

направления являются *оптическими осями* среды, которая в этом случае называется *двуосной*. Каковы необходимые условия для того, чтобы была только одна оптическая ось?

8. Показать, что для плоской волны в анизотропном диэлектрике

$$\frac{1}{2} \mathbf{DE} = \frac{1}{2\mu_0 v^2} \{ E^2 - (\mathbf{nE})^2 \} = \frac{1}{2} \mu_0 H^2,$$

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}] = \frac{1}{\mu_0 v^2} \{ \mathbf{nE}^2 - (\mathbf{nE}) \mathbf{E} \},$$

где v — фазовая скорость, определённая в задаче 5.

Векторная скорость распространения энергии $\mathbf{u}$ в направлении $\mathbf{S}$ определяется уравнением

$$\mathbf{S} = h\mathbf{u}.$$

Скорость $\mathbf{u}$ связана с фазовой скоростью v соотношением

$$v = n\mathbf{u}.$$

Показать, что

$$h = \frac{1}{2} \mathbf{ED} + \frac{1}{2} \mu_0 H^2,$$

откуда следует, что поток энергии равен общей плотности энергии, умноженной на скорость $\mathbf{u}$, где

$$\mathbf{u} = \frac{E^2 \mathbf{n} - (\mathbf{nE}) \mathbf{E}}{E^2 - (\mathbf{nE})^2} v,$$

или по величине

$$\left(\frac{v}{u} \right)^2 = 1 - \frac{(\mathbf{nE})^2}{E^2}.$$

9. Показать, исходя из результатов задачи 8, что величина скорости $\mathbf{u}$ распространения энергии в плоской волне может быть найдена в функции постоянных v_1, v_2, v_3 из уравнения

$$\sum_{j=1}^3 \frac{l_j^2}{1 - \left(\frac{v_j}{u} \right)^2} = 1,$$

где l_j — направляющие косинусы вектора $\mathbf{u}$.

Показать также, что в общем случае имеется два конечных значения u , соответствующие каждому направлению. В каких направлениях оба эти корня совпадают? Какова связь этих особых осей с оптическими осями?

10. Непроводящая среда бесконечной протяжённости изотропна, но её относительная диэлектрическая постоянная $\epsilon = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ является функцией точки. Показать, что вектор электрического поля удовлетворяет уравнению

$$\Delta \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = -\text{grad} \left(\mathbf{E} \frac{1}{\epsilon} \text{grad} \epsilon \right),$$

где $k^2 = \omega^2 \epsilon \mu$ и время входит только через множитель

$$\exp(-i\omega t).$$

Предположим теперь, что пространственное изменение ϵ на протяжении длины волны мало, так что $|\text{grad} \epsilon| \lambda \ll 1$. Показать, что членом в правой части можно тогда пренебречь и что распространение волны приближённо определяется уравнением

$$\Delta \psi + k^2 \psi = 0,$$

где ψ — прямоугольная компонента $\mathbf{E}$ или $\mathbf{H}$, а k — медленно меняющаяся функция точки. Пусть далее $\psi = \psi_0 e^{i\varphi}$, где фаза $\varphi = -\omega t + k_0 S$, $k_0 = \frac{\omega}{c}$, а S — функция точки. Показать, что фазовая функция S определяется уравнением

$$(\text{grad} S)^2 + \frac{1}{ik_0} \Delta S = \epsilon,$$

где

$$(\text{grad} S)^2 = \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2.$$

Заметьте, что S , вообще говоря, комплексно, хотя κ и действительно, и что амплитуда волны также является медленно меняющейся функцией времени.

11. Переход от волновой оптики к геометрической можно обосновать результатами задачи 10. Показать, что когда волновое число k становится очень большим, то фазовая функция определяется уравнением первого порядка второй степени

$$(\text{grad } S)^2 = \left(\frac{k}{k_0}\right)^2 = \kappa,$$

а амплитуда удовлетворяет уравнению

$$\text{grad } \ln \psi_0 \cdot \text{grad } S = -\frac{1}{2} \Delta S.$$

Так как теперь S действительно, то фронт волны представляется семейством $S = \text{const.}$, а волновые нормали или лучи определяются в каждой точке выражением $\text{grad } S$. Функция S называется «эйконалом» и тождественна с «характеристической функцией» Гамильтона. Пусть вектор $\mathbf{n}$ равен показателю преломления $\sqrt{\kappa}$, умноженному на единичный вектор в направлении волновой нормали. Тогда

$$\text{grad } S = \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} \cdot \text{grad } \ln \psi_0 = -\frac{1}{2} \text{div } \mathbf{n}.$$

Заметьте, что эти соотношения имеют место лишь в тех областях, где изменение κ на протяжении одной длины волны мало. Поэтому они нарушаются вблизи острых краёв или тел, размеры которых порядка длины волны. В этих случаях следует применять полное волновое уравнение. [Sommerfeld und Runge, *Ann. Phys.* 35, 290 (1911).]

Пусть $d\mathbf{r}$ — элемент длины в направлении луча. Тогда

$$S = \int \mathbf{n} \cdot d\mathbf{r}.$$

S — функция координат x_0, y_0, z_0 фиксированной начальной точки и координат x, y, z конечной точки, достигнутой лучом. Из всех возможных путей между этими двумя точками луч идёт в действительности по тому пути, на котором S минимально, или

$$\delta S = \delta \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} \mathbf{n} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Это — принцип Ферма. Если возмущение начинается при x_0, y_0, z_0 в момент t_0 и приходит в точку x, y, z в момент t , то

$$S(x_0, y_0, z_0; x, y, z) = t - t_0,$$

и путь луча таков, что время прихода луча минимально¹⁾.

12. Плоские волны возбуждены в неоднородной среде, диэлектрическая проницаемость которой меняется в направлении распространения. Примем это направление за ось z и предположим, что поле не зависит от x и y . Тогда волновое уравнение примет вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k_0^2 \chi(z) \psi = 0,$$

где $k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$, а время входит только в множитель

$$\exp(-i\omega t).$$

1) Изложенный (и обычный) способ перехода к приближению геометрической оптики основывается на замене векторных уравнений электромагнитного поля скалярным уравнением для какой-либо компоненты (см. задачу 10). Тем самым в приближении геометрической оптики остаётся в стороне всё, что касается поляризации. Между тем можно последовательно провести переход к случаю больших k , отправляясь непосредственно от уравнений Максвелла, и получить в результате закон изменения вдоль луча не только величины амплитуды, но и поляризации — см. С. М. Рытов, Доклады Акад. Наук СССР, 18, 263, 1938.

В отношении принципа Ферма следует отметить, что он отнюдь не всегда сводится на требование минимума S . Условие экстремума ($\delta S = 0$) не предпрещает того, что $S = S_{\min}$, и можно указать случаи, когда действительному лучу отвечает $S = S_{\max}$. Прим. ред.

Предположим, что $x \rightarrow x_1$ при $z \rightarrow -\infty$ и $x \rightarrow x_2$ при $z \rightarrow \infty$, где x_1 и x_2 — постоянные. Можно построить четыре частных решения, которые асимптотически ведут себя следующим образом:

$$\psi_1 \rightarrow \exp(ik_0 \sqrt{x_1} z) \quad \text{при } z \rightarrow -\infty,$$

$$\psi_2 \rightarrow \exp(-ik_0 \sqrt{x_1} z) \quad \text{при } z \rightarrow -\infty,$$

$$\psi_3 \rightarrow \exp(ik_0 \sqrt{x_2} z) \quad \text{при } z \rightarrow +\infty,$$

$$\psi_4 \rightarrow \exp(-ik_0 \sqrt{x_2} z) \quad \text{при } z \rightarrow +\infty.$$

Таким образом ψ_1 и ψ_3 переходят в плоские волны, бегущие в положительном направлении, а ψ_2 и ψ_4 — в волны в отрицательном направлении. Из этих решений только два являются линейно независимыми, и следовательно, должна существовать аналитическая связь вида

$$\psi_3 = a_1 \psi_1 + a_2 \psi_2, \quad \psi_4 = b_1 \psi_1 + b_2 \psi_2.$$

Математически эта связь представляет собой аналитическое продолжение ψ_3 из одной области в другую, а физически коэффициент отражения дается отношением

$$r = \frac{a_2}{a_1}. \quad \text{Пусть}$$

$$x(z) = x_1 + \frac{[(x_2 - x_1)(e^\zeta + 1) + x_3] e^\zeta}{(e^\zeta + 1)^2},$$

где $\zeta = \frac{k_0 z}{s}$, x_3 — постоянная, а s — дополнительный параметр. Заменяя z новой независимой переменной $u = \exp(\zeta)$, показать, что волновое уравнение приводится к гипергеометрической форме. Выразить $\psi_1 \dots \psi_4$ как гипергеометрические функции и вычислить коэффициенты a_1, a_2, b_1, b_2 и коэффициент отражения. Форма $x(z)$ такова, что она допускает очень широкий выбор вида переходных слоёв [Erstein, Proc. Nat. Acad. Sci. 16, 627 (1930)]¹⁾.

13. Умноженный на 10 десятичный логарифм отношения начального потока энергии к конечному измеряет затухание плоской волны в децибелах. Показать, что для плоской волны в однородной изотропной среде потеря мощности = $8,686 \beta$ децибел/метр, где β — коэффициент затухания, определённый равенством (49), стр. 246.

14. Построить график зависимости затухания плоской волны в децибелах на метр от частоты в интервале от 0 до 10^7 циклов/сек для сред, константы которых приведены в таблице

Среда	Проводимость 1/ом · метр	$\frac{\epsilon}{\epsilon_0}$
Морская вода	4	81
Пресная вода	10^{-3}	81
Влажная почва	10^{-3}	10
Сухая почва	10^{-5}	4

Воспользуйтесь для чертежа полулогарифмической бумагой или же откладывайте по абсциссе логарифм частоты.

¹⁾ Эта задача и работа Эпштейна, на которой она основывается, связана с вопросом о распространении радиоволн в ионосфере. Если отвлечься от поглощения и земного магнитного поля, то вопрос сводится к распространению в среде с переменным показателем преломления. Некоторые библиографические ссылки на работы такого рода, но принимающие другой вид функции $x(z)$, читатель может найти в работе С. М. Рытова и Ф. С. Юдкевича, Об отражении электромагнитных волн от слоя с отрицательной диэлектрической постоянной, ЖЭТФ, 10, 887, 1940. Прим. ред.

15. Функция $f(x)$ определена следующим образом:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-\beta x}, & x > 0, & \beta > 0, \\ f(x) &= e^{\beta x}, & x < 0, & \beta > 0. \end{aligned}$$

Показать, что

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\beta \cos ux}{\beta^2 + u^2} du.$$

16. Получить интегральное представление Фурье для функции $f(t)$, определённой так:

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 & \text{при } t < 0, \\ f(t) &= e^{-bt} \cos \omega t & \text{при } t > 0. \end{aligned}$$

Построить график амплитуд гармонических компонент в функции частоты (спектральная плотность) и исследовать связь между шириной пика и логарифмическим декрементом.

17. Импульсы в линиях передачи, вызываемые грозовыми разрядами, часто воспроизводятся в электротехнике с помощью импульсных генераторов, дающих направленный в одну сторону импульс напряжения вида

$$V = V_0 \frac{\alpha}{\beta} \left[e^{-(\alpha-\beta)t} - e^{-(\alpha+\beta)t} \right],$$

где α и β — постоянные, определяемые параметрами цепи. Эти функции представляют собой импульс, или всплеск, резко поднимающийся до гребня, а затем спадающий более медленно в виде длинного шлейфа. Форму волны можно охарактеризовать двумя константами t_1 и t_2 , где t_1 — время, необходимое для достижения гребня, а t_2 — интервал времени от нулевого напряжения до точки на шлейфе, в которой напряжение равно половине напряжения на гребне. Стандартный набор импульсов характеризуется постоянными

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } t_1 &= 0,5, \quad t_2 = 5, \\ \text{b) } t_1 &= 1,0, \quad t_2 = 10, \\ \text{c) } t_1 &= 1,5, \quad t_2 = 40 \end{aligned} \right\} \text{микросекунд.}$$

По этим величинам можно найти значения констант α и β . Произвести спектральный анализ формы волны и определить частоты, при которых спектральная плотность максимальна, для этих трёх стандартных случаев.

18. «Телеграфное уравнение»

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b^2 u$$

имеет начальные условия

$$u = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = g(x) \quad \text{при } t = 0.$$

Показать, что

$$\begin{aligned} u = \frac{1}{2} [f(x+at) + f(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} f(x+\beta) \frac{\partial}{\partial t} I_0 \left[b \sqrt{t^2 - \left(\frac{\beta}{a}\right)^2} \right] d\beta + \\ + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} g(x+\beta) I_0 \left[b \sqrt{t^2 - \left(\frac{\beta}{a}\right)^2} \right] d\beta, \end{aligned}$$

где

$$I_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \cos \lambda) d\lambda.$$

Это решение было получено независимо Хивисайдом и Пуанкаре.

19. Электромагнитный импульс распространяется в однородной изотропной среде с постоянными ϵ , μ , σ в направлении положительной оси z . В момент $t = 0$

форма импульса задана выражением

$$f_1(z) = \lim_{t \rightarrow 0} f(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2\delta^2}},$$

где δ — параметр. Найти выражение для импульса $f(z, t)$ в любой последующий момент.

20. Там, где можно пренебречь током смещения по сравнению с током проводимости ($\frac{\sigma}{\epsilon\omega} \gg 1$), поле приближённо удовлетворяет уравнениям

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}.$$

Показать, что в том же приближении

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A},$$

$$\Delta \mathbf{A} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{A} = 0$$

и что плотность тока удовлетворяет уравнениям

$$\Delta \mathbf{J} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{J} = 0.$$

Какие граничные условия налагаются на вектор плотности тока? Этим уравнениям подчиняется распределение тока в металлических проводниках при всех радиочастотах или более низких частотах.

21. Уравнение, полученное в задаче 20 для распределения тока в металлическом проводнике, совпадает с уравнением теплопроводности. Рассмотреть одномерный случай прямоугольной компоненты J , распространяющейся по оси z :

$$\frac{\partial^2 J}{\partial z^2} = \mu\sigma \frac{\partial J}{\partial t}.$$

Показать, что

$$J = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu\sigma}{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) e^{-\frac{\mu\sigma(\alpha-z)^2}{4t}} d\alpha$$

является решением, обращающимся при $t = 0$ в $f(z)$ и непрерывным вместе со своими производными для всех значений z при $t > 0$.

22. В задаче 21 найдено, что уравнению

$$\sqrt{\nu} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

удовлетворяет функция

$$\psi = \sqrt{\frac{1}{\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) e^{-\frac{(\alpha-z)^2}{4\nu t}} d\alpha.$$

Показать, исходя из теории преобразований Фурье, что ψ можно переписать в виде

$$\psi = \sqrt{\frac{1}{\pi\nu t}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{[(z-\alpha)+2\pi n]^2}{4\nu t}} f(\alpha) d\alpha.$$

Очевидно, уравнению удовлетворяет также функция

$$\psi = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{i(z-\alpha)n - n^2\nu t} f(\alpha) d\alpha.$$

Сравнить эти решения и из теоремы единственности доказать тождество

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-in(z-\alpha)-n^2\nu t} = \sqrt{\frac{\pi}{\nu t}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(z-\alpha+2\pi n)^2}{4\nu t}}$$

Это соотношение было применено Эвальдом к теории распространения волн в кристаллах.

23. Показать, что если радиоволны распространяются в электронной атмосфере в поле земного магнетизма, то следует ожидать резонансных явлений вблизи длины волны около 212 м. В этой области действительно наблюдалось заметное избирательное поглощение. Положить $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$ кулон/электрон, $m = 9 \cdot 10^{-31}$ кг/электрон и напряжённость магнитного поля земли $B_0 = 0,5 \cdot 10^{-4}$ вебер/метр².

24. Радиоволна распространяется в ионизированной атмосфере. Найти и проанализировать зависимость групповой скорости от частоты, определяя постоянную распространения из выражения (36), стр. 292. Концентрация электронов в определённых областях ионосферы предполагается порядка 10^{12} электронов/метр³.

25. Плоская линейно поляризованная волна входит в электронную атмосферу с плотностью 10^{12} электрон/метр. В направлении распространения наложено статическое магнитное поле напряжённости $B_0 = 0,5 \cdot 10^{-4}$ вебер/метр². Получить выражение для изменения состояния поляризации на длине волны в направлении распространения.

26. Радиоволна распространяется в ионизированной атмосфере при наличии данного магнитного поля. Найти постоянную распространения для случая, когда статическое поле перпендикулярно к направлению распространения.

27. В качестве простой модели атома можно принять неподвижный положительный заряд, с которым квазиупругой силой связан отрицательный заряд e массы m . Если пренебречь силами трения, то уравнением движения этой системы будет

$$m\ddot{\mathbf{r}} + f\mathbf{r} = 0,$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор заряда e , а f — постоянная связи. Пусть теперь наложено магнитное поле. Показать, что имеются две различные частоты колебаний и что соответствующие движения представляют собой круговые движения в противоположных направлениях в плоскости, перпендикулярной к направлению наложенного поля. Какова частота вращения? Это рассмотрение является элементарной теорией эффекта Зеемана.

28. Если частица движется со скоростью $\mathbf{v}$ в магнитном поле $\mathbf{B}$, то на единицу заряда действует сила $\mathbf{E}' = [\mathbf{v}, \mathbf{B}]$. Вызванная движением электродвижущая сила в замкнутом контуре есть

$$V' = \oint \mathbf{E}' d\mathbf{s} = \int \text{rot} [\mathbf{v}, \mathbf{B}] n da.$$

В любой фиксированной точке пространства скорость изменения $\mathbf{B}$ со временем есть $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$. Если под $\mathbf{E}$ понимать суммарную силу, действующую на единицу заряда движущегося тела, то

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \text{rot} [\mathbf{v}\mathbf{B}].$$

Показать, что правая часть равна с обратным знаком полной производной

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \text{ grad}) \mathbf{B},$$

так что для движущейся среды закон Фарадея имеет вид

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{d\mathbf{B}}{dt}.$$

Скорость перемещения предполагается малой по сравнению со скоростью света.

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

Вообще говоря, электромагнитное поле не может быть получено из одной скалярной функции, зависящей от точки и времени; вследствие этого анализ электромагнитных полей по самому их существованию сложнее, чем изучение тепловых потоков или передачи звуковых колебаний. В трёхмерном скалярном волновом уравнении переменные разделяются в 11 различных системах координат¹⁾, но полные решения *векторного* волнового уравнения в форме, непосредственно применимой к решению краевых задач, известны в настоящее время лишь для определённых разделяющихся систем цилиндрических координат и для сферических координат. Как будет показано, в таких системах электромагнитное поле может быть разложено на две составляющие поля, каждое из которых получается из одной скалярной функции, удовлетворяющей волновому уравнению.

УРАВНЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

6.1. Представление посредством векторов Герца. Предположим, что одна система координатных поверхностей образована семейством цилиндров, образующие которых параллельны оси z . Пока это специально не оговорено, эти цилиндрические поверхности не предполагаются обязательно круговыми или даже замкнутыми. По отношению к каждой поверхности семейства единичные векторы i_1, i_2, i_3 расположены, как показано на рис. 64. Таким образом, вектор i_1 нормален к цилиндру, i_3 касается его и направлен вдоль его образующих, а i_2 касается его поверхности и перпендикулярен к i_1 и i_3 . Положение по отношению к осям координат, определяемым этими тремя единичными векторами, характеризуется координатами u^1, u^2, z , а бесконечно малый элемент длины равен

$$ds = i_1 h_1 du^1 + i_2 h_2 du^2 + i_3 dz. \quad (1)$$

Определим теперь компоненты электромагнитного поля, связанного с вектором Герца Π , направленным по оси z , так что $\Pi_1 = \Pi_2 = 0, \Pi_z \neq 0$.

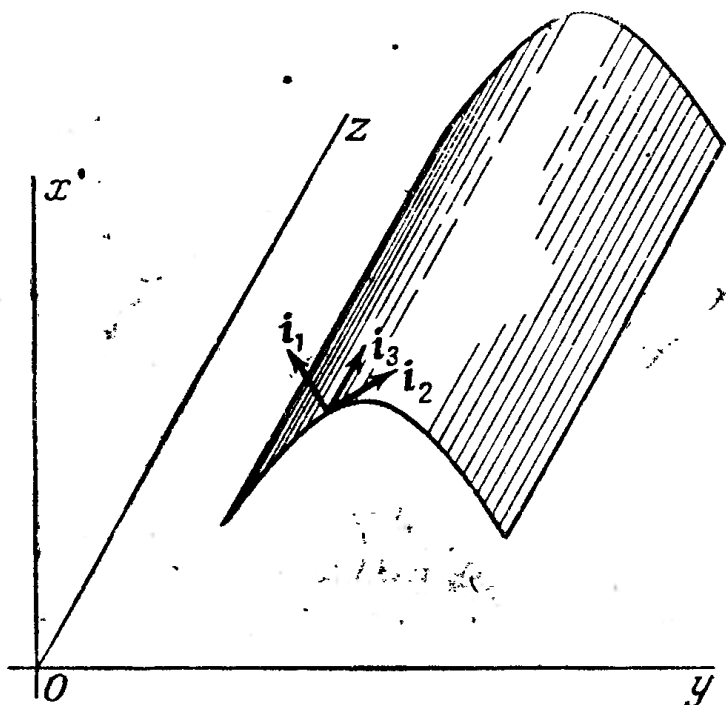


Рис. 64. Взаимное расположение единичных векторов на цилиндрической поверхности. Образующие параллельны оси z .

¹⁾ Eisenhart, *Annals of Math.* 35, 284, 1934.

В этой главе мы будем считать среду не только изотропной и однородной, но и безграничной. Тогда по (63) и (64), стр. 40, электрические и магнитные векторы поля определяются выражениями

$$\mathbf{E}^{(1)} = \text{rot rot } \Pi, \quad \mathbf{H}^{(1)} = \left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + \sigma \right) \text{rot } \Pi; \quad (2)$$

так как Π_1 и Π_2 равны нулю, то по (81) и (85), стр. 54—55, легко найти компоненты $\mathbf{E}^{(1)}$ и $\mathbf{H}^{(1)}$:

$$\left. \begin{aligned} E_1^{(1)} &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial z \partial u^1}, & E_2^{(1)} &= \frac{1}{h_2} \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial z \partial u^2}, \\ E_z^{(1)} &= -\frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial \Pi_z}{\partial u^1} \right) + \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \Pi_z}{\partial u^2} \right) \right], \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} H_1^{(1)} &= \left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + \sigma \right) \frac{1}{h_2} \frac{\partial \Pi_z}{\partial u^2}, & H_2^{(1)} &= -\left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + \sigma \right) \frac{1}{h_1} \frac{\partial \Pi_z}{\partial u^1}, \\ H_z^{(1)} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Таким образом мы получили из скалярной функции $\Pi_z = \psi$ электромагнитное поле, характеризующееся отсутствием осевой или продольной компоненты магнитного вектора. Ввиду того, что Π является электрическим поляризационным потенциалом, это поле можно назвать полем электрического типа (стр. 39), но в настоящее время представляется более подходящим термин *поперечно-магнитное поле*, недавно предложенный Щелкуновым¹⁾.

Так как Π_z является прямоугольной компонентой, то она должна удовлетворять скалярному волновому уравнению

$$\Delta \psi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0, \quad (5)$$

или по (82), стр. 54:

$$\frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial u^1} \right) + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial u^2} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0. \quad (6)$$

Элементарные гармонические решения этого уравнения имеют вид

$$\psi = f(u^1, u^2) e^{\pm i h z - i \omega t}, \quad (7)$$

где $f(u^1, u^2)$ является решением уравнения

$$\frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u^1} \right) + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial u^2} \right) + (k^2 - h^2) f = 0. \quad (8)$$

Точно таким же образом можно вывести частный вид поля из второго вектора Герца Π^*

$$\mathbf{E}^{(2)} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \Pi^*, \quad \mathbf{H}^{(2)} = \text{rot rot } \Pi^*; \quad (9)$$

если Π^* направлен по оси z , то составляющие этих векторов равны

$$E_1^{(2)} = -\frac{\mu}{h_2} \frac{\partial^2 \Pi_z^*}{\partial t \partial u^2}, \quad E_2^{(2)} = \frac{\mu}{h_1} \frac{\partial^2 \Pi_z^*}{\partial t \partial u^1}, \quad E_z^{(2)} = 0, \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} H_1^{(2)} &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial^2 \Pi_z^*}{\partial z \partial u^1}, & H_2^{(2)} &= \frac{1}{h_2} \frac{\partial^2 \Pi_z^*}{\partial z \partial u^2}, \\ H_z^{(2)} &= -\frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial \Pi_z^*}{\partial u^1} \right) + \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \Pi_z^*}{\partial u^2} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Скалярная функция Π_z^* является решением уравнения (5), а полученное из

¹⁾ Schelkunoff, Transmission Theory of Plane Electromagnetic Waves, Proc. Inst. Radio Engrs. 25, 1457—1492, November, 1937.

ней поле магнитного типа или «поперечное электрическое поле» характеризуется отсутствием продольной составляющей E .

Электромагнитное поле, получаемое наложением частных видов полей, получаемых из Π_z и Π_z^* , является настолько общим, что оно может удовлетворить заданным граничным условиям на любой цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси z , т. е. на любой координатной поверхности $u^1 = \text{const.}$ или $u^2 = \text{const.}$ или на плоскости $z = \text{const.}$ Однако выбор этих семейств ортогональных поверхностей практически ограничен теми координатными системами, в которых переменные в уравнении (8) разделяются.

6.2. Скалярный и векторный потенциалы. Поперечные электрическое и магнитное поля, определённые в предыдущем параграфе, обладают интересными свойствами, которые выявляются при рассмотрении скалярного и векторного потенциалов. Рассмотрим сначала поперечное магнитное поле, в котором $H_z^{(1)} = 0$;

$$E^{(1)} = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial A}{\partial t}, \quad B^{(1)} = \text{rot } A, \quad (12)$$

$$\varphi = -\text{div } \Pi, \quad A = \mu \left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + \sigma \right) \Pi. \quad (13)$$

В данном случае $\psi = \Pi_z$, откуда

$$\varphi = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad A_z = \mu \varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial t} + \mu \sigma \psi, \quad A_1 = A_2 = 0. \quad (14)$$

Компоненты $E^{(1)}$ имеют поэтому вид

$$\left. \begin{aligned} E_1^{(1)} &= -\frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u^1}, & E_2^{(1)} &= -\frac{1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial u^2}, \\ E_z^{(1)} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \psi}{\partial t}, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

а компоненты $B^{(1)}$

$$B_1^{(1)} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial A}{\partial u^2}, \quad B_2^{(1)} = -\frac{1}{h_1} \frac{\partial A}{\partial u^1}, \quad B_z^{(1)} = 0, \quad (16)$$

где вместо A_z написано A без индекса.

Заметим, что в плоскости $z = \text{const.}$ вектор $E^{(1)}$ безвихревой; следовательно, в этой поперечной плоскости линейный интеграл от $E^{(1)}$ между любыми двумя точками a и b не зависит от соединяющего их пути. Действительно, элемент длины в плоскости $z = \text{const.}$ имеет вид

$$ds = i_1 h_1 du^1 + i_2 h_2 du^2$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \int_a^b E^{(1)} ds &= \\ &= -\int_a^b \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial \varphi}{\partial u^2} du^2 \right) = \varphi(a) - \varphi(b). \end{aligned} \quad (17)$$

Разность потенциалов или напряжение между любыми двумя точками поперечной плоскости имеет определённое значение в каждый момент, независимо от частоты или вида цилиндрических координат.

Далее, можно заметить, что скалярная функция A играет роль функции тока для вектора $B^{(1)}$. Пусть кривая, соединяющая точки a и b на рис. 65, представляет собой след цилиндрической поверхности, пересекающей пло-

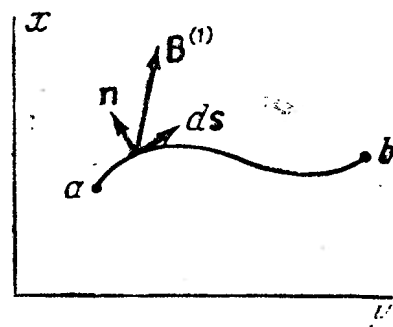


Рис. 65. Кривая ab изображает сечение цилиндрической поверхности плоскостью xu , в которой лежат также векторы n и $B^{(1)}$.

скость $z = \text{const.}$ Вычислим поток вектора $B^{(1)}$ через лентообразный элемент поверхности, ограниченный кривой ab и имеющий ширину, равную единице в направлении оси z . Если n — единичный вектор нормали к этой поверхности, а i_z — единичный вектор, направленный по оси z , то

$$(B^{(1)}n) da = B^{(1)} [i_z, ds] = i_z [ds, B^{(1)}], \quad (18)$$

где ds означает элемент длины вдоль кривой. Раскрывая (18), получаем

$$B^{(1)}n da = h_1 B_2^{(1)} du^1 - h_2 B_1^{(1)} du^2 = -dA, \quad (19)$$

откуда

$$\int_a^b B^{(1)}n da = A(a) - A(b). \quad (20)$$

Магнитный поток через любую единичную по ширине полосу цилиндрической поверхности, проходящую через две точки в плоскости $z = \text{const.}$, не зависит от формы полосы.

Если выразить составляющие $E^{(1)}$ и $B^{(1)}$ через скалярную функцию ψ , то легко показать, что

$$E_1^{(1)} B_1^{(1)} + E_2^{(1)} B_2^{(1)} = 0, \quad (21)$$

и, следовательно, проекция вектора $E^{(1)}$ на плоскость $z = \text{const.}$ всюду перпендикулярна вектору $B^{(1)}$. В поперечной плоскости семейства кривых $\varphi = \text{const.}$ (эквипотенциальные линии) и $A = \text{const.}$ (линии «тока» вектора $B^{(1)}$) совпадают. Из (14) и (7) ясно, что при гармоническом изменении во времени эквипотенциальными являются линии

$$f(u^1, u^2) = \text{const.}, \quad (22)$$

где $f(u^1, u^2)$ удовлетворяет уравнению (8).

Поперечное электрическое поле обладает подобными же свойствами, но роли электрических и магнитных векторов меняются. Согласно (35), стр. 37:

$$D^{(2)} = -\text{rot } A^*, \quad H^{(2)} = -\text{grad } \varphi^* - \frac{\partial A^*}{\partial t} - \frac{\sigma}{\varepsilon} A^* \quad (23)$$

$$\varphi^* = -\text{div } \Pi^*, \quad A^* = \mu \varepsilon \frac{\partial \Pi^*}{\partial t}. \quad (24)$$

Полагая $\psi = \Pi_z^*$, $\Pi_1^* = \Pi_2^* = 0$, получим

$$\varphi^* = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad A_z^* = \mu \varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad A_1^* = A_2^* = 0. \quad (25)$$

Компоненты векторов поля будут поэтому:

$$D_1^{(2)} = -\frac{1}{h_2} \frac{\partial A^*}{\partial u}, \quad D_2^{(2)} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial A^*}{\partial u^1}, \quad D_z^{(2)} = 0, \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} H_1^{(2)} &= -\frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi^*}{\partial u^1}, \quad H_2^{(2)} = -\frac{1}{h_2} \frac{\partial \varphi^*}{\partial u^2}, \\ H_z^{(2)} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \psi}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Проекция $H^{(2)}$ на поперечную плоскость является безвихревой, и следовательно, криволинейный интеграл, представляющий магнитодвижущую силу между двумя точками в этой плоскости, не зависит от пути интегрирования:

$$\int_a^b H^{(2)} ds = \varphi^*(a) - \varphi^*(b). \quad (28)$$

Подобным же образом поток вектора $\mathbf{D}^{(2)}$ через полосу единичной ширины, изображённую на рис. 65, зависит только от конечных точек

$$\int_a^b \mathbf{D}^{(2)} \mathbf{n} da = \int_a^b dA^* = A^*(b) - A^*(a). \quad (29)$$

Проекция $\mathbf{H}^{(2)}$ на плоскость $z = \text{const.}$ всюду перпендикулярна к вектору $\mathbf{D}^{(2)}$. Отсюда следует, что семейства кривых $\varphi^* = \text{const.}$ и $A^* = \text{const.}$ совпадают. Поле $\mathbf{D}^{(2)}$, $\mathbf{H}^{(2)}$ является в этом смысле сопряжённым полем $\mathbf{E}^{(1)}$, $\mathbf{B}^{(1)}$.

6.3. Импедансы гармонических цилиндрических полей. Предположим, что время входит лишь в гармонический множитель $e^{-i\omega t}$. Тогда потенциалы и компоненты напряжённостей поперечного магнитного поля имеют вид

$$\varphi = \mp ih\psi, \quad A = -i(\mu\epsilon\omega + i\mu\sigma)\psi, \quad (30)$$

$$E_1^{(1)} = \pm \frac{ih}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial u^1}, \quad E_2^{(1)} = \pm \frac{ih}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial u^2}, \quad E_z^{(1)} = (k^2 - h^2)\psi, \quad (31)$$

$$H_1^{(1)} = -\frac{ik^2}{\mu\omega} \frac{1}{h^2} \frac{\partial \psi}{\partial u^2}, \quad H_2^{(1)} = \frac{ik^2}{\omega\mu} \frac{1}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial u^1}, \quad H_z^{(1)} = 0, \quad (32)$$

где $k^2 = \mu\epsilon\omega + i\mu\sigma\omega$. Верхний знак относится к волнам, распространяющимся в положительном направлении по оси z , нижний — к волнам, распространяющимся в отрицательном направлении.

Совокупность импедансов, относящихся к напряжённости поля, может быть определена теперь на основе раздела 5.6. Величина импеданса зависит, очевидно, от направления, в котором он измеряется. По определению

$$Z_z^{(1)} = \frac{E_z^{(1)}}{H_z^{(1)}} = -\frac{E_2^{(1)}}{H_1^{(1)}} = \pm \frac{\omega\mu h}{k^2}. \quad (33)$$

Согласно стр. 252, внутренний импеданс однородной изотропной среды для плоских волн есть

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\omega\epsilon + i\sigma}} = \frac{\omega\mu}{k}, \quad (34)$$

так что (33) можно представить в виде

$$Z_z^{(1)} = \pm \frac{h}{k} Z_0. \quad (35)$$

Аналогично, импедансы в направлениях поперечных осей можно определить соотношениями

$$E_z^{(1)} = -Z_1^{(1)} H_2^{(1)}, \quad E_z^{(1)} = Z_2^{(1)} H_1^{(1)}. \quad (36)$$

Знак компонент электрического и магнитного векторов определяется, очевидно, положительным направлением вектора Пойнтинга. Так как $H_z^{(1)}$ равно нулю, то компонента тока, представляемая членами $E_2^{(1)} H_z^{(1)}$ и $E_1^{(1)} H_z^{(1)}$, отсутствует, и соответствующие импедансы бесконечны. Подставляя соответствующие выражения для компонент поля в (36), получаем

$$Z_1^{(1)} = \frac{h^2 - k^2}{ik} \frac{h_1 \psi}{\frac{\partial \psi}{\partial u^1}} Z_0, \quad Z_2^{(1)} = \frac{h^2 - k^2}{ik} \frac{h_2 \psi}{\frac{\partial \psi}{\partial u^2}} Z_0. \quad (37)$$

Определение соответствующих импедансов для гармонических компонент поперечного электрического поля не нуждается в дальнейших разъяснениях.

Потенциалы и векторы поля в этом случае имеют вид

$$\varphi^* = \mp ih\psi, \quad A^* = -i\mu\omega\psi, \quad (38)$$

$$E_1^{(2)} = i\mu\omega \frac{1}{h_2} \frac{\partial\psi}{\partial u^2}, \quad E_2^{(2)} = -i\mu\omega \frac{1}{h_1} \frac{\partial\psi}{\partial u^1}, \quad E_z^{(2)} = 0, \quad (39)$$

$$H_1^{(2)} = \pm \frac{ih}{h_1} \frac{\partial\psi}{\partial u^1}, \quad H_2^{(2)} = \pm \frac{ih}{h_2} \frac{\partial\psi}{\partial u^2}, \quad H_z^{(2)} = (k^2 - h^2)\psi. \quad (40)$$

Из этих соотношений вычислены импедансы:

$$\left. \begin{aligned} E_1^{(2)} &= Z_z^{(2)} H_2^{(2)}, & E_2^{(2)} &= Z_z^{(2)} H_1^{(2)}, \\ E_2^{(2)} &= Z_1^{(2)} H_z^{(2)}, & E_1^{(2)} &= -Z_2^{(2)} H_z^{(2)}, \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

$$Z_z^{(2)} = \pm \frac{\mu\omega}{h} = \pm \frac{k}{h} Z_0, \quad (42)$$

$$Z_1^{(2)} = \frac{ik}{h^2 - k^2} \frac{\frac{\partial\psi}{\partial u^1}}{\frac{\partial\psi}{\partial u^2}} Z_0, \quad Z_2^{(2)} = \frac{ik}{h^2 - k^2} \frac{\frac{\partial\psi}{\partial u^2}}{\frac{\partial\psi}{\partial u^1}} Z_0. \quad (43)$$

Отсюда получается любопытный ряд соотношений

$$Z_1^{(1)} Z_1^{(2)} = Z_2^{(1)} Z_2^{(2)} = Z_z^{(1)} Z_z^{(2)} = Z_0^2. \quad (44)$$

ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА

6.4. Элементарные волны. Простейшим случаем разделяющихся переменных является тот, когда семейство $u^1 = \text{const.}$ представляет собой совокупность коаксиальных круговых цилиндров. Тогда, согласно 1, стр. 56,

$$u^1 = r, \quad u^2 = \theta, \quad h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad (1)$$

и уравнение (8) раздела 6.1 принимает вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + (k^2 - h^2) f = 0, \quad (2)$$

где переменные легко разделяются, если представить $f(r, \theta)$ как произведение

$$f = f_1(r) f_2(\theta), \quad (3)$$

в котором $f_1(r)$ и $f_2(\theta)$ — произвольные решения обыкновенных дифференциальных уравнений

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{df_1}{dr} \right) + [(k^2 - h^2) r^2 - p^2] f_1 = 0, \quad (4)$$

$$\frac{d^2 f_2}{d\theta^2} + p^2 f_2 = 0. \quad (5)$$

Параметр p , так же как и h , является постоянной разделения; его выбор диктуется физическим требованием однозначности поля в фиксированной точке пространства. Если неоднородности и разрывы непрерывности среды исключены, как это и предположено в настоящей главе, то поле должно быть периодическим по θ и значения p ограничены целыми числами $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. С другой стороны, если поле представляется частными решениями уравнений (4) и (5) в секторе пространства, ограниченном плоскостями $\theta = \theta_1$ и $\theta = \theta_2$, то параметр p должен принимать, вообще говоря, нецелые значения.

Уравнение (4), которому удовлетворяет радиальная функция $f_1(r)$, есть уравнение Бесселя. Его решения можно было бы назвать бесселевыми функциями, но так как это название применяется обычно лишь к тому частному решению $J_p(\sqrt{k^2 - h^2}r)$, которое конечно на оси $r=0$, то мы будем называть произвольное частное решение уравнения (4) *круговой цилиндрической функцией* и будем обозначать её через $f_1 = Z_p(\sqrt{k^2 - h^2}r)$. Аргументом функции является $\sqrt{k^2 - h^2}r$, а p называется её *порядком*. Таким образом частные решения волнового уравнения (5), стр. 310, периодические по t и θ , могут быть построены из элементарных волн вида

$$\psi_n = e^{in\theta} Z_n(\sqrt{k^2 - h^2}r) e^{\pm i h z - i \omega t}. \quad (6)$$

Постоянная распространения h , вообще говоря, комплексна: следовательно, поле не обязательно периодически вдоль оси z . Явное выражение для h в функции частоты ω и констант среды можно получить, лишь задавая поведение ψ на цилиндрической поверхности $r = \text{const.}$ или в плоскости $z = \text{const.}$

6.5. Свойства функций $Z_p(\rho)$. Предполагая знакомство читателя с теорией уравнения Бесселя, полезно всё же дать для справок обзор важнейших свойств решений этого уравнения.

Если в уравнении (4) заменить независимую переменную на $\rho = \sqrt{k^2 - h^2}r$, то мы получим, что $Z_p(\rho)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 Z_p}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dZ_p}{d\rho} + \left(1 - \frac{p^2}{\rho^2}\right) Z_p = 0, \quad (7)$$

которое характеризуется регулярной особенностью при $\rho=0$ и существенной особенностью при $\rho=\infty$. Бесселевой функцией $J_p(\rho)$ или цилиндрической функцией первого рода называется частное решение (7), конечное при $\rho=0$. Оно может быть, таким образом, разложено в ряд по возрастающим степеням ρ , а так как в плоскости комплексного переменного ρ нет других особенностей, кроме точек $\rho=0$ и $\rho=\infty$, то этот ряд сходится, очевидно, для всех конечных значений аргумента. Для любого p , действительного или комплексного, и для действительных или комплексных ρ имеет место разложение

$$J_p(\rho) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(p+m+1)} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{p+2m}. \quad (8)$$

Если заменить в (7) p на $-p$, то уравнение остаётся неизменным; следовательно, при нецелых p второе фундаментальное решение можно получить из (8), заменяя p на $-p$. Но если $p=n$ является целым числом, то $J_p(\rho)$ становится однозначной функцией точки. Гамма-функция $\Gamma(n+m+1)$ заменяется факториалом $(n+m)!$, так что

$$J_n(\rho) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n+m)!} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{n+2m} \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad (9)$$

Функция $J_{-n}(\rho)$ уже не является независимой от (9), а связана с ней соотношением

$$J_{-n}(\rho) = (-1)^n J_n(\rho), \quad (10)$$

так что для нахождения второго решения следует прибегнуть к какому-либо иному методу.

Функция Бесселя второго рода определяется соотношением

$$N_p(\rho) = \frac{1}{\sin p\pi} [J_p(\rho) \cos p\pi - J_{-p}(\rho)] \quad (11)$$

Это решение уравнения (7) является независимым от $J_p(\rho)$ для всех значений p , но правая часть принимает неопределённый вид $0/0$ при целых p . Однако значение её можно подсчитать обычным способом, дифференцируя числитель и знаменатель по p и переходя затем к пределу при $p \rightarrow n$. Получающееся разложение довольно сложно¹⁾; мы приведём лишь первый член, годный в окрестности начала отсчёта:

$$N_0(\rho) \simeq -\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma \rho}, \quad N_n(\rho) \simeq -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{\rho}\right)^n \quad (n=1, 2, \dots), \quad (12)$$

где $\gamma = 1,78107$ и $|\rho| \ll 1$. Характерным свойством функций второго рода является *наличие особенности в начале координат*. Ввиду того что они обращаются в бесконечность при $\rho = 0$, они не могут быть применены для представления полей, которые по своему физическому смыслу конечны в окрестности $\rho = 0$.

Дальнейшие сведения о характере функций $J_p(\rho)$ и $N_p(\rho)$ даёт изучение их поведения при очень больших значениях ρ . Разложения в окрестности начала координат сходятся для всех конечных значений ρ ; $J_p(\rho)$ и $N_p(\rho)$ являются всюду аналитическими функциями p и ρ , кроме точек $\rho = 0$ и $\rho = \infty$. Однако для очень больших ρ ряды сходятся настолько медленно, что становятся бесполезными для практических вычислений, и здесь пользуются поэтому представлениями этих же функций в виде рядов по обратным степеням ρ . Действительно, можно показать, что уравнение Бесселя *формально* удовлетворяется разложениями

$$J_p(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi \rho}} [P_p(\rho) \cos \varphi - Q_p(\rho) \sin \varphi], \quad (13)$$

$$N_p(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi \rho}} [P_p(\rho) \sin \varphi + Q_p(\rho) \cos \varphi], \quad (14)$$

$$P_p(\rho) = 1 - \frac{(4p^2-1)(4p^2-9)}{2!(8\rho)^2} + \frac{(4p^2-1)(4p^2-9)(4p^2-25)(4p^2-49)}{4!(8\rho)^4} - \dots, \quad (15)$$

$$Q_p(\rho) = \frac{4p^2-1}{8\rho} - \frac{(4p^2-1)(4p^2-9)(4p^2-25)}{3!(8\rho)^3} + \dots, \quad (16)$$

где фазовый угол φ даётся выражением

$$\varphi = \rho - \left(p + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2}. \quad (17)$$

Оказывается, однако, что эти ряды расходятся для *всех* значений ρ и, следовательно, не имеют в точности аналитических свойств тех функций, которые они должны были бы представлять. С другой стороны, при больших ρ первые члены быстро уменьшаются по величине, и в этом смысле ряды являются «полусходящимися». Можно показать, что если прервать разложения вблизи члена, где последующие члены начинают расти, или перед этим членом, то разложения дают приближённое значение функции, причём можно оценить получающуюся ошибку. Чем больше ρ , тем ближе значение суммы нескольких первых членов к истинному значению функции. Поэтому такие представления называются *асимптотическими*.

¹⁾ См. Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, гл. III, Cambridge University Press, 1922, и Janke—Emde, Tables of Functions, стр. 198, Teubner, 1933.

Отметим, что при достаточно больших ρ

$$J_p(\rho) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \cos\left(\rho - \frac{2p+1}{4}\pi\right) \quad (18)$$

$$|\rho| \gg 1, \quad |\rho| \gg |p|,$$

$$N_p(\rho) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \sin\left(\rho - \frac{2p+1}{4}\pi\right). \quad (19)$$

На очень больших расстояниях от начала координат цилиндрические функции первого и второго рода относятся друг к другу как косинус и синус, но затухают с ростом ρ благодаря множителю $1/\sqrt{\rho}$. Эти функции удобны для представления *стоячих цилиндрических волн*.

По аналогии с показательными функциями можно построить линейную комбинацию решений $J_p(\rho)$ и $N_p(\rho)$, дающую функции, связанные с *бегущими волнами*. Бесселевы функции третьего рода, или, как их чаще называют, *функции Ганкеля* определяются соотношениями

$$H_p^{(1)}(\rho) = J_p(\rho) + iN_p(\rho), \quad (20)$$

$$H_p^{(2)}(\rho) = J_p(\rho) - iN_p(\rho). \quad (21)$$

Из предыдущих формул легко найти, что для очень больших ρ

$$H_p^{(1)}(\rho) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} e^{i\left(\rho - \frac{2p+1}{4}\pi\right)}, \quad (22)$$

$$|\rho| \gg 1, \quad |\rho| \gg |p|,$$

$$H_p^{(2)}(\rho) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} e^{-i\left(\rho - \frac{2p+1}{4}\pi\right)}. \quad (23)$$

К разложениям самих функций в ряд мы добавим для справок некоторые наиболее важные рекуррентные формулы:

$$Z_{p-1} + Z_{p+1} = \frac{2p}{\rho} Z_p, \quad (24)$$

$$\frac{dZ_p}{d\rho} = \frac{1}{2} Z_{p-1} - \frac{1}{2} Z_{p+1}, \quad (25)$$

$$\frac{d}{d\rho} [\rho^p Z_p(\rho)] = \rho^p Z_{p-1}, \quad (26)$$

$$\frac{d}{d\rho} [\rho^p Z_p(\rho)] = -\rho^{-p} Z_{p+1}. \quad (27)$$

6.6. Поле круговых цилиндрических волновых функций. Внутри однородной изотропной области любое электромагнитное поле может быть представлено линейной комбинацией элементарных волновых функций

$$\psi_{nhk} = e^{in\theta} J_n(\sqrt{k^2 - h^2}r) e^{\pm i h z - i \omega t}, \quad (28)$$

$$\psi_{nhk} = e^{in\theta} H_n^{(1)}(\sqrt{k^2 - h^2}r) e^{\pm i h z - i \omega t}. \quad (29)$$

Для конечных областей, включающих ось $r=0$, применимы лишь функции (28); на больших расстояниях от источника должны применяться функции (29), так как они асимптотически переходят, согласно (22), в радиально расходящуюся волну. Каждая элементарная волна определяется тройкой параметров n, h, k . При $n=0$ поле симметрично вокруг оси; при $h=0$ распространение происходит лишь в радиальном направлении, и поле является строго двумерным. Можно сказать, что функции вида (28) и (29) представляют *неоднородные плоские волны*. Плоскости постоянной фазы распространяются вдоль оси z со скоростью $v = \omega/\alpha$, где α — действительная

часть h , но амплитуды в этих плоскостях являются функциями r и θ . Такие волны могут создаваться лишь источниками, находящимися на конечных расстояниях от начала координат или же в средах с разрывами непрерывности. Плоские волны, изученные в предыдущей главе, *однородны* в строгом смысле слова, так как плоскости постоянной фазы являются также плоскостями постоянной амплитуды. Они могут существовать лишь в бесконечных однородных средах при бесконечно удалённых источниках возбуждения.

Из формул, выведенных в разделе 6.3, можно выразить импедансы и компоненты векторов поля через волновую функцию ψ :

$$Z_r^{(1)} = \frac{\omega\mu}{k^2} \frac{\sqrt{h^2 - k^2}}{\frac{\partial Z_n(\rho)}{\partial \rho}}, \quad Z_\theta^{(1)} = \frac{\omega\mu(k^2 - h^2)r}{nk^2}, \quad Z_z^{(1)} = \pm \frac{\omega\mu h}{k^2}. \quad (30)$$

$$E_r^{(1)} = \pm ih \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad E_\theta^{(1)} = \pm \frac{ih}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad E_z^{(1)} = (k^2 - h^2)\psi, \quad (31)$$

$$H_r^{(1)} = -\frac{ik^2}{\mu\omega} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad H_\theta^{(1)} = \frac{ik^2}{\mu\omega} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad H_z^{(1)} = 0. \quad (32)$$

Подобным же образом, для поперечного электрического поля

$$Z_r^{(2)} = \frac{\omega\mu}{\sqrt{h^2 - k^2}} \frac{\frac{\partial Z_n(\rho)}{\partial \rho}}{Z_n(\rho)}, \quad Z_\theta^{(2)} = \frac{\omega\mu n}{k^2 - h^2} \frac{1}{r}, \quad Z_z^{(2)} = \pm \frac{\mu\omega}{h}. \quad (33)$$

$$E_r^{(2)} = \frac{i\mu\omega}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad E_\theta^{(2)} = -i\mu\omega \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad E_z^{(2)} = 0, \quad (34)$$

$$H_r^{(2)} = \pm ih \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad H_\theta^{(2)} = \pm \frac{ih}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad H_z^{(2)} = (k^2 - h^2)\psi. \quad (35)$$

Если заданы начальные условия на некоторой плоскости или цилиндрической поверхности, то решение образуется суперпозицией элементарных волновых функций. Для фиксированных значений ω (или k) и h для результирующего поля получаются в цилиндрических координатах следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} E_r &= ih \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{\partial \psi_n}{\partial r} - \frac{\mu\omega}{r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} nb_n \psi_n \\ E_\theta &= -\frac{h}{r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} na_n \psi_n - i\mu\omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \frac{\partial \psi_n}{\partial r}, \\ E_z &= (k^2 - h^2) \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \psi_n \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

$$\left. \begin{aligned} H_r &= \frac{k^2}{\mu\omega} \frac{1}{r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} na_n \psi_n + ih \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \frac{\partial \psi_n}{\partial r}, \\ H_\theta &= \frac{ik^2}{\mu\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{\partial \psi_n}{\partial r} - \frac{h}{r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} nb_n \psi_n, \\ H_z &= (k^2 - h^2) \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \psi_n, \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

где a_n и b_n — коэффициенты, определяемые из начальных условий. Направление распространения положительно или отрицательно в зависимости от знака h .

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ

6.7. Построение из плоских волн. Если ζ измеряет расстояние вдоль произвольной оси, направление которой по отношению к фиксированной системе отсчёта (x, y, z) определяется единичным вектором $\mathbf{n}$, то, согласно разделам 5.1—5.6, простейший тип плоской волны можно представить функцией

$$\psi = e^{ik\zeta - i\omega t}, \quad (1)$$

в которой постоянные k и ω могут быть и действительны и комплексны. Пусть $\mathbf{R}$ — радиус-вектор, проведённый из начала координат в точку наблюдения, прямоугольные координаты которой x, y, z . Тогда фаза волновой функции в данный момент времени измеряется величиной

$$\zeta = \mathbf{nR} = n_x x + n_y y + n_z z. \quad (2)$$

Направляющие косинусы n_x, n_y, n_z вектора $\mathbf{n}$ удобнее выразить через полярные углы α и β , показанные на рис. 66:

$$n_x = \sin \alpha \cos \beta, \quad n_y = \sin \alpha \sin \beta, \quad n_z = \cos \alpha, \quad (3)$$

откуда

$$\psi = e^{ik(x \sin \alpha \cos \beta + y \sin \alpha \sin \beta + z \cos \alpha) - i\omega t}. \quad (4)$$

Меняя параметры α и β , можно придать оси распространения любое направление. Каждому направлению распространения сопоставляется амплитуда $g(\alpha, \beta)$, зависящая только от углов α и β . Так как уравнения поля в рассматриваемом случае линейны, решение можно построить путём суперпозиции плоских волн одной и той же частоты, но с различными направлениями распространения и с соответствующими амплитудами¹⁾:

$$\psi(x, y, z, t) = e^{-i\omega t} \int d\alpha \int d\beta g(\alpha, \beta) e^{ik(x \sin \alpha \cos \beta + y \sin \alpha \sin \beta + z \cos \alpha)}. \quad (5)$$

Если углы действительны, то α изменяется в пределах от 0 до π , а β от 0 до 2π . Такое решение с математической точки зрения отнюдь не является самым общим, так как (5) удовлетворяет волновому уравнению как при действительных, так и при комплексных значениях параметров α и β , и мы скоро обнаружим, что комплексные углы действительно должны быть включены в рассмотрение, если мы хотим представить таким интегралом любое поле.

При действительном ω волновая функция, определяемая равенством (5), является гармонической во времени. Для представления поля, которое на определённой координатной поверхности изменяется со временем более сложным образом, необходимо просуммировать или проинтегрировать (5) по параметру ω . Определим *векторную постоянную распространения* как $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$, прямоугольные компоненты которой равны

$$k_1 = k \sin \alpha \cos \beta, \quad k_2 = k \sin \alpha \sin \beta, \quad k_3 = k \cos \alpha, \quad (6)$$

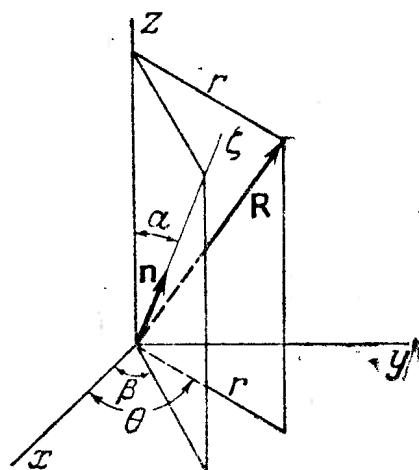


Рис. 66. Фаза элементарной плоской волны измеряется вдоль оси ζ , направление которой определяется единичным вектором $\mathbf{n}$. Точка наблюдения имеет радиус-вектор $\mathbf{R}$.

¹⁾ Общая теория таких решений волнового уравнения изложена в книге Е. Т. Уиттекера и Г. Н. Ватсона, Курс современного анализа, Л.—М., ГТТИ, 1933, гл. XVIII.

так что элементарная плоская волновая функция может быть записана в виде

$$\psi = e^{ikR - i\omega t}. \quad (7)$$

Внося (7) в волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - i\mu \sigma \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0, \quad (8)$$

мы находим, что компоненты $\mathbf{k}$ должны удовлетворять единственному соотношению

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \mu \varepsilon \omega^2 + i\mu \sigma \omega = k^2, \quad (9)$$

а в остальном совершенно произвольны. Таким образом, из параметров k_1 , k_2 , k_3 , ω можно выбрать произвольно любые три параметра, после чего четвёртый определится равенством (9).

Предположим, что на плоскости $z = 0$ функция ψ задана:

$$\psi(x, y, 0, t) = f(x, y, t).$$

Искомое решение будет

$$\begin{aligned} \psi(x, y, z, t) = \\ = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(k_1, k_2, \omega) e^{i(k_1 x + k_2 y + k_3 z - \omega t)} dk_1 dk_2 d\omega, \end{aligned} \quad (10)$$

где k_1 , k_2 и ω — действительные переменные, а k_3 — комплексная величина, определяемая соотношением

$$k_3^2 = \omega^2 \mu \varepsilon + i\mu \sigma \omega - k_1^2 - k_2^2. \quad (11)$$

Амплитудная функция $g(k_1, k_2, \omega)$ такова, что

$$f(x, y, t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(k_1, k_2, \omega) e^{i(k_1 x + k_2 y - \omega t)} dk_1 dk_2 d\omega. \quad (12)$$

Если $f(x, y, t)$ и её первые производные кусочно непрерывны и абсолютно интегрируемы, то $g(k_1, k_2, \omega)$ является представлением Фурье функции $f(x, y, t)$ и равна

$$g(k_1, k_2, \omega) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, t) e^{-i(k_1 x + k_2 y - \omega t)} dx dy dt. \quad (13)$$

При $z = 0$ каждая гармоническая компонента распространяется вдоль оси z со скоростью $v = \omega/k_3$, но так как $k_3 = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - k_1^2 - k_2^2}$ не является линейной комбинацией ω , k_1 и k_2 , то начальное возмущение $f(x, y, t)$, очевидно, не будет распространяться без искажения формы даже в отсутствие диссипативного члена. Точнее говоря, общего решения уравнения (8) вида $f\left(x, y, t - \frac{z}{v}\right)$ не существует.]

Равным образом можно было бы задать функцию $\psi(x, y, z, t)$ во всём пространстве в начальный момент времени $t=0$. Пусть, например, $\psi(x, y, z, 0) = f(x, y, z)$. Поле представляется в виде тройного интеграла

$$\psi(x, y, z, t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(k_1, k_2, k_3) e^{i(k_1x + k_2y + k_3z - \omega t)} dk_1 dk_2 dk_3, \quad (14)$$

в котором k_1, k_2, k_3 — действительные переменные, а ω — комплексная величина, определяемая из (9):

$$i\omega = b \pm i\sqrt{a^2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) - b^2}, \quad (15)$$

где $a = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$, $b = \sigma/2\epsilon$ (см. стр. 264). Амплитудная или весовая функция $g(k_1, k_2, k_3)$ такова, что

$$f(x, y, z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(k_1, k_2, k_3) e^{i(k_1x + k_2y + k_3z)} dk_1 dk_2 dk_3. \quad (16)$$

Если $f(x, y, z)$ обладает необходимыми аналитическими свойствами, то представление Фурье существует и имеет вид

$$g(k_1, k_2, k_3) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) e^{-i(k_1x + k_2y + k_3z)} dx dy dz. \quad (17)$$

Мы рассматривали в предыдущих разделах только положительные или расходящиеся волны, а начальные условия налагались только на самую функцию ψ . Если определённые условия налагаются как на функцию ψ , так и на её производную по одному из четырёх аргументов, необходимо включить в рассмотрение и положительные и отрицательные волны в соответствии с методами, описанными для одномерного случая в разделах 5.8, 5.9 и 5.10.

6.8. Интегральные представления функций $Z_n(\rho)$. В произвольной системе цилиндрических координат u^1, u^2, z волновому уравнению (6), стр. 310, удовлетворяет функция

$$\psi = f(u^1, u^2) e^{ihz - i\omega t}, \quad (18)$$

где h и ω — действительные или комплексные постоянные. В обозначениях предыдущего параграфа $h = k_z = k \cos \alpha$, а так как $k = \sqrt{\mu\epsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega}$, то угол α , образованный направлением составляющих плоских волн с осью z , также постоянен. Другими словами, элементарная цилиндрическая волна (18) может быть разложена на однородные плоские волны, направления которых образуют круговой конус вокруг оси z , но угол раствора конуса в общем случае комплексный:

$$f(u^1, u^2) = \int g(\beta) e^{ik \sin \alpha (x \cos \beta + y \sin \beta)} d\beta, \quad (19)$$

где x и y следует выразить через цилиндрические координаты u^1 и u^2 .

В системе координат кругового цилиндра мы имеем $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, откуда

$$x \cos \beta + y \sin \beta = r \cos(\theta - \beta). \quad (20)$$

В обозначениях предыдущего параграфа мы получаем далее

$$kr \sin \alpha = r \sqrt{k^2 - h^2} = \rho, \quad (21)$$

так что

$$f(r, \theta) = \int g(\beta) e^{i\rho \cos(\theta - \beta)} d\beta. \quad (22)$$

Заменим теперь в (22) переменную интегрирования β на $\varphi = \beta - \theta$ и заметим, что так как переменные в уравнении для $f(r, \theta)$ разделяются, то $g(\varphi + \theta)$ можно представить как произведение двух функций, каждая из которых зависит лишь от одной переменной:

$$g(\beta) = g(\varphi + \theta) = g_1(\varphi) g_2(\theta); \quad (23)$$

следовательно,

$$f(r, \theta) = f_1(r) f_2(\theta) = g_2(\theta) \int g_1(\varphi) e^{i\rho \cos \varphi} d\varphi. \quad (24)$$

Угловая функция $g_2(\theta)$ должна быть, очевидно, некоторой линейной комбинацией показательных функций $e^{i\rho\theta}$ и $e^{-i\rho\theta}$, а амплитудный или весовой множитель $g_1(\varphi)$ должен быть выбран так, чтобы радиальная функция $f_1(r)$ удовлетворяла уравнению (4), стр. 314, которое при аргументе ρ имеет вид

$$\rho^2 \frac{d^2 f_1}{d\rho^2} + \rho \frac{df_1}{d\rho} + (\rho^2 - p^2) f_1 = 0. \quad (25)$$

Подставим в (25) интеграл

$$f_1(\rho) = \int g_1(\varphi) e^{i\rho \cos \varphi} d\varphi. \quad (26)$$

Дифференцируя под знаком интеграла, получим

$$\frac{df_1}{d\rho} = \int i \cos \varphi g_1(\varphi) e^{i\rho \cos \varphi} d\varphi, \quad \frac{d^2 f_1}{d\rho^2} = - \int \cos^2 \varphi g_1(\varphi) e^{i\rho \cos \varphi} d\varphi; \quad (27)$$

следовательно, согласно (25),

$$\int (\rho^2 \sin^2 \varphi + i\rho \cos \varphi - p^2) g_1(\varphi) e^{i\rho \cos \varphi} d\varphi = 0. \quad (28)$$

Это уравнение мы преобразуем далее интегрированием по частям. Уравнение (28), очевидно, эквивалентно такому:

$$\int \left[g_1(\varphi) \frac{d^2 e^{i\rho \cos \varphi}}{d\varphi^2} + p^2 g_1(\varphi) e^{i\rho \cos \varphi} \right] d\varphi = 0. \quad (29)$$

Если P и Q — две функции от φ , то

$$Q \frac{d^2 P}{d\varphi^2} - P \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = \frac{d}{d\varphi} \left(Q \frac{dP}{d\varphi} - P \frac{dQ}{d\varphi} \right), \quad (30)$$

что в применении к (29) даёт

$$\begin{aligned} \int \frac{d}{d\varphi} \left[g_1(\varphi) \frac{de^{i\rho \cos \varphi}}{d\varphi} - e^{i\rho \cos \varphi} \frac{dg_1}{d\varphi} \right] d\varphi + \\ + \int \left(\frac{d^2 g_1}{d\varphi^2} + p^2 g_1 \right) e^{i\rho \cos \varphi} d\varphi = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Первый из этих двух интегралов может быть обращён в нуль, если выбрать контур интегрирования так, чтобы выражение под знаком производной имело одно и то же значение в начальной и конечной точках; второй интеграл обращается в нуль, если подинтегральное выражение равно нулю.

Следовательно, (26) является решением уравнения Бесселя, если $g_1(\varphi)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 g_1}{d\varphi^2} + p^2 g_1 = 0, \quad (32)$$

а путь интегрирования таков, что

$$\left(ip \sin \varphi g_1(\varphi) + \frac{dg_1}{d\varphi} \right) e^{ip \cos \varphi} \Big|_C = 0. \quad (33)$$

Уравнению (32), очевидно, удовлетворяет функция $e^{ip\varphi}$. Однако, как мы увидим, для того, чтобы $f_1(\rho)$ была тождественна с цилиндрической функцией $Z_p(\rho)$, определённой в разделе 6.5, следует добавить постоянный множитель $\frac{1}{\pi} e^{-ip\frac{\pi}{2}}$. Таким образом, полагая

$$g_1(\varphi) = \frac{1}{\pi} e^{ip(\varphi - \frac{\pi}{2})}, \quad (34)$$

мы получим интегральное представление цилиндрических функций по Зоммерфельду¹⁾:

$$Z_p(\rho) = \frac{e^{-ip\frac{\pi}{2}}}{\pi} \int_C e^{i(\rho \cos \varphi + p\varphi)} d\varphi, \quad (35)$$

где контур C таков, что

$$(\rho \sin \varphi + p) e^{i(\rho \cos \varphi + p\varphi)} \Big|_C = 0. \quad (36)$$

Различие между разными частными решениями $J_p(\rho)$, $N_p(\rho)$, $H_p(\rho)$ сведено теперь к различию в контурах интегрирования в плоскости комплексного переменного φ . Рассмотрим сначала самый элементарный случай, когда $p = n$ является целым числом. Тогда очевидно, что если интегрирование производится по действительной оси φ от $-\pi$ до $+\pi$ или по любому другому отрезку длины 2π , то условие (36) выполняется, и определённый интеграл

$$J_n(\rho) = \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{ip \cos \varphi + in\varphi} d\varphi \quad (37)$$

является решением уравнения Бесселя. В том, что функция, определённая равенством (37), действительно тождественна с частным решением (9), стр. 315, можно убедиться, разлагая $e^{ip \cos \varphi}$ в ряд в окрестности точки $\rho = 0$ и интегрируя этот ряд почленно.

В общем случае, когда p не является целым числом, или же для получения другого независимого решения, для того чтобы (36) обращалось в нуль в конечных точках, переменной φ следует приписать комплексные значения. Пусть $\varphi = \gamma + i\eta$. Тогда

$$ip \cos \varphi + ip\varphi = \rho \sin \gamma \operatorname{sh} \eta - p\eta + ip \cos \gamma \operatorname{ch} \eta + ip\gamma. \quad (38)$$

Если ρ комплексно, то мы положим $\rho = a + ib$, где a — существенно положительная величина. Тогда подходящим выбором γ и η можно сделать действительную часть (38) бесконечно большой отрицательной величиной, а при этом $\exp(ip \cos \varphi + ip\varphi) \rightarrow 0$. Это условие выполняется, например, если поло-

¹⁾ Sommerfeld, Math. Ann. 47, 335, 1896.

жить $\eta \rightarrow +\infty$, а для γ принять значения $-\pi/2$ или $+3\pi/2$; но эта показательная функция обращается в нуль также и при $\eta \rightarrow -\infty$, если только $\gamma = +\pi/2$. Для того чтобы (35) представляло решение уравнения Бесселя, необходимо лишь, чтобы контур C соединял любые две из этих точек.

Зоммерфельд выбрал в качестве пары фундаментальных решений два интеграла

$$H_p^{(1)}(\rho) = \frac{e^{-ip\frac{\pi}{2}}}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}+i\infty}^{\frac{\pi}{2}-i\infty} e^{ip \cos \varphi + ip\varphi} d\varphi, \quad (39)$$

$$H_p^{(2)}(\rho) = \frac{e^{-ip\frac{\pi}{2}}}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}-i\infty}^{\frac{3\pi}{2}+i\infty} e^{ip \cos \varphi + ip\varphi} d\varphi. \quad (40)$$

Контур C_1 , по которому берётся интеграл (39), начинается в $\eta = \infty$, $\gamma = -\pi/2$, пересекает действительную и мнимую оси при $\varphi = 0$ и заканчивается при $\eta = -\infty$, $\gamma = +\pi/2$. Контур C_2 , по

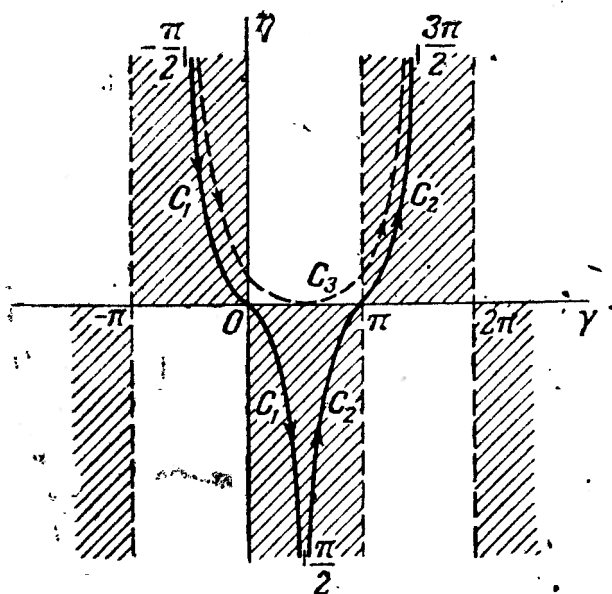


Рис. 67. Контур интегрирования для цилиндрических функций.

которому берётся интеграл (40), начинается в конечной точке контура C_1 , пересекает действительную ось при $\gamma = \pi$ и заканчивается в $\eta = \infty$, $\gamma = 3\pi/2$. Оба контура показаны на рис. 67. Точка пересечения с действительной осью, конечно, несущественна для определения функций. Контур можно деформировать произвольным образом, лишь бы только они начинались в бесконечно удалённой центральной точке одной заштрихованной области и заканчивались в соответствующей точке другой заштрихованной области.

Преимущества проведения C_1 и C_2 через точки $\gamma = 0$ и $\gamma = \pi$ действительной оси становятся очевидными при вычислении интегралов (39) и (40)

для очень больших значений ρ . Если действительная часть ρ очень велика, то множитель $\exp(ip \cos \varphi)$ становится исчезающе малым во всех точках заштрихованных областей на рис. 67, кроме ближайшей окрестности точек $\eta = 0$, $\gamma = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$. В этих точках действительная часть $ip \cos \varphi$, согласно (38), равна нулю, как бы ни было велико ρ ; следовательно, если C_1 и C_2 проведены, как показано на рис. 67, то полная величина контурного интеграла определяется значением интеграла, взятого лишь в окрестности начала координат и точки $\eta = 0$, $\gamma = \pi$. Из заштрихованной области, в которой значения подинтегральной функции исчезающе малы, контур C_1 проходит через крутой «перевал» или «седлообразную точку», где подинтегральная функция велика, а затем переходит на другую заштрихованную плоскость, где функция резко убывает, и значение интеграла по этой области опять пренебрежимо мало. Контур C_2 имеет подобную же седлообразную точку при $\eta = 0$, $\gamma = \pi$. Чтобы свести интегрирование к возможно более корот-

кому отрезку контура, нужно приближаться к перевалу по линии с наиболее крутым подъёмом, а спускаться с «вершины» в «долину» по линии с наиболее крутым спуском. В данном случае это означает, что контуры C_1 и C_2 должны пересекать ось под углом в 45° . Дебай ¹⁾ использовал поведение интегралов (39) и (40) в окрестности седлообразных точек для вычисления асимптотических разложений функций $H_p^{(1)}(\rho)$ и $H_p^{(2)}(\rho)$. При ρ , очень больших по сравнению с единицей и с порядком p , получаются соотношения (22) и (23), стр. 317, что показывает тождественность интегралов (39) и (40) с функциями Ганкеля, определёнными в разделе 6.5. Дебай рассмотрел также случай, когда p больше аргумента ρ ; его результаты были улучшены и расширены позднейшими исследованиями.

Представление $J_p(\rho)$ при нецелом p в виде контурного интеграла следует непосредственно из соотношения

$$J_p(\rho) = \frac{1}{2} [H_p^{(1)}(\rho) + H_p^{(2)}(\rho)], \quad (41)$$

откуда

$$J_p(\rho) = \frac{e^{-p\frac{\pi}{2}}}{2\pi} \int_{C_3} e^{i\rho \cos \varphi + ip\varphi} d\varphi. \quad (42)$$

Контур C_3 , показанный на рис. 67, представляет собой допустимую деформацию контура $C_1 + C_2$.

6.9. Интегралы Фурье-Бесселя. Мы показали, как выводятся из скалярной функции ψ в цилиндрических координатах два основных типа электромагнитного поля. Если цилиндрические координаты являются круговыми, то ψ получается, в общем случае, суперпозицией элементарных волн типа частных решений (28) и (29), стр. 317. Наша задача заключается теперь в следующем: заданы значения $\psi(r, \theta, z, t)$ в момент $t=0$ в плоскости $z=0$; требуется найти ψ для всех других значений z и t .

Предположим, что при $t=z=0$ функция $\psi=f(r, \theta)$. Будем считать $f(r, \theta)$ ограниченной и однозначной функцией переменных, кусочно непрерывной вместе со своими первыми производными. Тогда $f(r, \theta)$ должна быть периодической по θ и может быть разложена в ряд Фурье, коэффициенты которого являются функциями только от r :

$$f(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(r) e^{in\theta}, \quad f_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta. \quad (43)$$

Если $f(r, \theta)$ стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$ так, что обеспечивается сходимость интегралов $\int_0^\infty |f_n(r)| \sqrt{r} dr$, то каждый коэффициент $f_n(r)$ может быть представлен видоизменённым интегралом Фурье ²⁾.

Рассмотрим функцию $f(x, y)$ двух переменных, допускающую интегральное представление Фурье

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(k_1, k_2) e^{i(k_1 x + k_2 y)} dk_1 dk_2. \quad (44)$$

¹⁾ Debye, *Math. Ann.* 67, 535, 1909, см. также Watson, *loc. cit.*, стр. 235 и след.

²⁾ Интеграл Фурье-Бесселя выводится более строгими методами в гл. XIV книги Watson'a, *Bessel Functions*.

Совершим теперь преобразование к полярным координатам как в координатном пространстве, так и в k -пространстве:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta, & y &= r \sin \theta, \\ k_1 &= \lambda \cos \beta, & k_2 &= \lambda \sin \beta, \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

так что в обозначениях предыдущих параграфов $\lambda = k \sin \alpha = \sqrt{k^2 - k_z^2}$. Тогда $k_1 x + k_2 y = \lambda r \cos(\beta - \theta)$, и (44) как объёмный интеграл в k -пространстве принимает вид:

$$f(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \lambda d\lambda \int_0^{2\pi} d\beta g(\lambda, \beta) e^{i\lambda r \cos(\beta - \theta)}. \quad (46)$$

Легко раскрыть физический смысл этого представления. Функция $\exp[i\lambda r \cos(\beta - \theta) - i\omega t]$ представляет собой плоскую волну с постоянной распространения λ , бегущую в направлении, перпендикулярном к оси z и составляющем угол β с осью x . Каждая плоская волна умножена на амплитудный множитель $g(\lambda, \beta)$; затем волны просуммированы вначале по β от 0 до 2π , а затем по постоянной распространения или пространственной частоте λ .

Представление Фурье функции $f(x, y)$ имеет вид

$$g(k_1, k_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\xi, \eta) e^{-i(k_1 \xi + k_2 \eta)} d\xi d\eta, \quad (47)$$

что при переходе к полярным координатам $\xi = \rho \cos \mu$, $\eta = \rho \sin \mu$ даёт

$$g(\lambda, \beta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\mu f(\rho, \mu) e^{-i\lambda \rho \cos(\beta - \mu)}. \quad (48)$$

Наконец, допустим, что $f(r, \theta) = f_n(r) e^{in\theta}$. Тогда

$$g(\lambda, \beta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \rho d\rho f_n(\rho) \int_0^{2\pi} d\mu e^{-i\lambda \rho \cos(\beta - \mu) + in\mu}, \quad (49)$$

что после замены переменной $\varphi = \mu - \beta - \pi$ даст

$$g(\lambda, \beta) = e^{in(\beta + \frac{3}{2}\pi)} \int_0^\infty f_n(\rho) J_n(\lambda \rho) \rho d\rho = g_n(\lambda) e^{in(\beta + \frac{3}{2}\pi)}, \quad (50)$$

Подобным же образом (46) принимает вид:

$$f(r, \theta) = f_n(r) e^{in\theta} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \lambda d\lambda g_n(\lambda) \int_0^{2\pi} d\beta e^{i\lambda r \cos(\beta - \mu) + in(\beta + \frac{3}{2}\pi)}, \quad (51)$$

или, если положить $\varphi = \beta - \theta$:

$$f_n(r) e^{in\theta} = e^{in\theta} \int_0^\infty g_n(\lambda) J_n(\lambda r) \lambda d\lambda. \quad (52)$$

Таким образом мы получаем пару представлений Фурье-Бесселя:

$$f_n(r) = \int_0^{\infty} g_n(\lambda) J_n(\lambda r) \lambda d\lambda, \quad (53)$$

$$g_n(\lambda) = \int_0^{\infty} f_n(\rho) J_n(\lambda \rho) \rho d\rho. \quad (54)$$

Функция

$$\psi = e^{-i\omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} \int_0^{\infty} g_n(\lambda) J_n(\lambda r) e^{\pm i \sqrt{k^2 - \lambda^2} z} \lambda d\lambda. \quad (55)$$

является решением волнового уравнения в круговых цилиндрических координатах, которое при $t = 0$ переходит в $f(r, \theta)$ на плоскости $z = 0$. Но это, очевидно, не самое общее решение, удовлетворяющее этим условиям, так как в нашем распоряжении остаются ещё два параметра ω и k , на которых наложено только одно условие $k^2 = \mu\epsilon\omega^2 + i\sigma\mu\omega$. При действительных ω можно суперпозицией гармонических волновых функций типа (55) представить произвольный закон изменения ψ во времени в плоскости $z = 0$. Если рассматривать как положительные, так и отрицательные волны, то можно задать при $z = 0$ значения как ψ , так и $\frac{\partial \psi}{\partial z}$. Рассмотрение подобных задач было дано в главе V.

6.10. Представление плоской волны. Теорема Фурье-Бесселя даёт очень простой способ представления элементарной плоской волны через цилиндрические волновые функции. Пусть волна с постоянной распространения k бежит в направлении, определяемом единичным вектором $\mathbf{n}$, сферические полярные углы которого относительно фиксированной системы отсчёта равны α и β , как показано на рис. 66, стр. 319. Тогда

$$\psi = e^{ik \sin \alpha (x \cos \beta + y \sin \beta)} \cdot e^{ikz \cos \alpha - i\omega t}, \quad (56)$$

и наша задача сводится к представлению функции

$$f(x, y) = e^{ik \sin \alpha (x \cos \beta + y \sin \beta)} = e^{ikr \sin \alpha \cos(\beta - \theta)} \quad (57)$$

в виде ряда

$$f(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(r) e^{in\theta}. \quad (58)$$

Согласно (43), мы имеем

$$f_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikr \sin \alpha \cos(\beta - \theta) - in\theta} d\theta. \quad (59)$$

Заменой $\beta - \theta$ на φ это переходит в

$$f_n(r) = e^{in\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)} J_n(kr \sin \alpha), \quad (60)$$

и мы получаем полезное разложение

$$e^{ikr \sin \alpha \cos(\beta - \theta)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(kr \sin \alpha) e^{in(\beta - \theta)}. \quad (61)$$

Некоторые другие хорошо известные ряды являются прямыми следствиями этого разложения. Так, если мы положим $\rho = kr \sin \alpha$, а $\theta - \beta = \varphi - \frac{\pi}{2}$, то

соотношение (61) примет вид

$$e^{ip \sin \varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\rho) e^{in\theta}, \quad (62)$$

что после деления на действительную и мнимую части даёт

$$\left. \begin{aligned} \cos(\rho \sin \varphi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\rho) \cos n\varphi, \\ \sin(\rho \sin \varphi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\rho) \sin n\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ДЛЯ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВОЛН

6.11. Из формул предыдущего раздела можно вывести ряд важных соотношений, относящихся к переносу оси распространения параллельно самой себе. На рис. 68 O и O_1 означают начала координат двух прямоугольных систем отсчёта. Плоскость чертежа совпадает с плоскостью xu обеих систем, а оси x_1, y_1, z_1 , проходящие через O_1 , параллельны соответствующим осям x, y, z . Функция $J_n(\lambda r_1) e^{in\theta_1}$, умноженная на $\exp(\pm i h z_1 - i \omega t)$, представляет элементарную цилиндрическую волну, отнесённую к оси z_1 . Мы хотим выразить эту цилиндрическую волну в виде суммы цилиндрических волновых функций, отнесённых к параллельной оси z , проходящей через O .

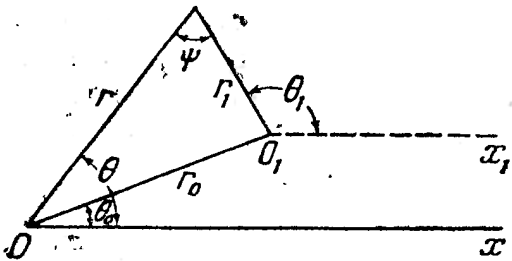


Рис. 68. Перенос системы отсчёта.

Напишем сначала

$$J_n(\lambda r_1) e^{in\theta_1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda r_1 \cos \varphi + in(\varphi + \theta_1 - \frac{\pi}{2})} d\varphi. \quad (1)$$

Из чертежа ясно, что $\theta_1 = \theta + \psi$ и

$$\left. \begin{aligned} r_1 \cos \psi &= r_1 \cos(\theta_1 - \theta) = r - r_0 \cos(\theta - \theta_0), \\ r_1 \sin \psi &= r_1 \sin(\theta_1 - \theta) = r_0 \sin(\theta - \theta_0). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Кроме того, в силу периодичности подинтегрального выражения, (1) эквивалентно

$$J_n(\lambda r_1) e^{in\theta_1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda r_1 \cos(\varphi - \psi) + in(\varphi - \psi + \theta_1 - \frac{\pi}{2})} d\varphi. \quad (3)$$

Из (2) следует, что

$$r_1 \cos(\varphi - \psi) = r \cos \varphi - r_0 \cos(\varphi + \theta - \theta_0), \quad (4)$$

откуда

$$J_n(\lambda r_1) e^{in\theta_1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i\lambda r \cos \varphi - i\lambda r_0 \cos(\varphi + \theta - \theta_0) + in(\varphi + \theta - \frac{\pi}{2})} d\varphi. \quad (5)$$

Согласно (61), стр. 327,

$$e^{-i\lambda r_0 \cos(\varphi + \theta - \theta_0)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{im\pi}{2}} J_m(\lambda r_0) e^{im(\varphi + \theta - \theta_0)}. \quad (6)$$

В силу равномерной сходимости можно изменить порядок суммирования и интегрирования:

$$\begin{aligned} J_n(\lambda r_1) e^{in\theta_1} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(\lambda r_0) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi e^{i\lambda r \cos \varphi + i(n+m)(\varphi - \frac{\pi}{2}) + im(\theta - \theta_0) + in\theta} = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(\lambda r_0) J_{n+m}(\lambda r) e^{in\theta + im(\theta - \theta_0)}. \end{aligned} \quad (7)$$

При замене θ_1 на $\theta + \psi$ это выражение принимает вид

$$J_n(\lambda r_1) e^{in\psi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(\lambda r_0) J_{n+m}(\lambda r) e^{im(\theta - \theta_0)}. \quad (8)$$

Аналогичное разложение для волновой функции $H_n^{(1)}(\lambda r_1) e^{in\theta_1}$ можно получить из интеграла

$$H_n^{(1)}(\lambda r_1) e^{in\psi} = \frac{1}{\pi} \int_{C_1} e^{i\lambda r_1 \cos(\varphi - \psi) + in(\varphi - \frac{\pi}{2})} d\varphi, \quad (9)$$

где C_1 — контур, изображённый на рис. 67, стр. 324, со сдвигом на величину ψ вдоль действительной оси, обеспечивающим обращение показательной функции в нуль в конечных точках. Заменяя экспонент по (2), находим, что

$$H_n^{(1)}(\lambda r_1) e^{in\psi} = \frac{1}{\pi} \int_{C_1} d\varphi e^{i\lambda r \cos \varphi - i\lambda r_0 \cos(\varphi + \theta - \theta_0) + in(\varphi - \frac{\pi}{2})}. \quad (10)$$

При $|r| > |r_0 \cos(\theta - \theta_0)|$ можно, действуя совершенно аналогично, прийти к выражению

$$H_n^{(1)}(\lambda r_1) e^{in\psi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(\lambda r_0) H_{n+m}^{(1)}(\lambda r) e^{im(\theta - \theta_0)}. \quad (11)$$

При $r_0 = 0$ оба центра совпадают; $J_m(0) = 0$ для всех значений m , кроме нуля, а $J_0(0) = 1$. Угол ψ равен нулю, и правая и левая части равенства (11), очевидно, тождественны. В справедливости разложения можно убедиться также при очень больших r и r_1 , так как в этом случае функции Ганкеля можно заменить их асимптотическим представлением (22), стр. 317. Угол ψ равен приблизительно нулю, и $r_1 \simeq r - r_0 \cos(\theta - \theta_0)$. Амплитудный множитель $\sqrt{2/\pi r_1}$ можно без заметной ошибки заменить на $\sqrt{2/\pi r}$, но член $r_0 \cos(\theta - \theta_0)$ в фазе следует оставить. Тогда (11) принимает вид

$$e^{-i\lambda r_0 \cos(\theta - \theta_0)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(\lambda r_0) e^{-\frac{im\pi}{2} + im(\theta - \theta_0)}, \quad (12)$$

а правая часть (12) в свою очередь является, согласно (61), стр. 327, точным разложением плоской волны, стоящей в левой части. В самом деле, при неограниченно возрастающем r_1 расходящаяся цилиндрическая волновая функция, определяемая (11), должна асимптотически переходить в плоскую волну.

При $|r| < |r_0 \cos(\theta - \theta_0)|$ разложение (11) не сходится и заменяется разложением

$$H_n^{(1)}(\lambda r_1) e^{in\psi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_m^{(1)}(\lambda r_0) J_{n+m}(\lambda r) e^{im(\theta - \theta_0)}, \quad (13)$$

которое конечно при $r=0$. В этой точке $J_{n+m}(\lambda r)$ равна нулю, кроме $m=-n$. Кроме того, $\psi \cong \pi + \theta_0 - \theta$ и, так как $H_{-n}^{(1)}(\rho) = e^{n\pi i} H_n^{(1)}(\rho)$, то, очевидно, правая и левая части равенства (13) тождественны. В другом предельном случае очень больших r_0 мы полагаем $r_1 = r_0 - r \cos(\theta - \theta_0)$ и с помощью асимптотических представлений функций Ганкеля находим, что (13) стремится к

$$e^{-i\lambda r \cos(\theta - \theta_0)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{n+m}(\lambda r) e^{-i(m+n)\frac{\pi}{2} + i(m+n)(\theta - \theta_0)}, \quad (14)$$

т. е. к плоской волне, распространяющейся от O_1 к O вдоль линии, соединяющей эти два центра.

ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА

6.12. Элементарные волны. Круговые цилиндрические функции являются, по существу, вырожденной формой эллиптических волновых функций, получаемой при приравнивании эксцентриситета цилиндров нулю. В эллиптических координатах исследование поля и свойств функций должно неизбежно оказаться сложнее, чем в круговых координатах, но зато и результаты значительно более интересны.

Согласно 3, стр. 57, полагаем

$$u^2 = \xi, \quad u^2 = \eta, \quad \xi \geq 1, \quad -1 \leq \eta \leq 1, \quad (1)$$

$$h_1 = c_0 \sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1}}, \quad h_2 = c_0 \sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{1 - \eta^2}}. \quad (2)$$

Внося это в (8), стр. 310, находим, что $f(\xi, \eta)$ должно удовлетворять уравнению

$$\begin{aligned} \sqrt{\xi^2 - 1} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sqrt{\xi^2 - 1} \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) + \sqrt{1 - \eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sqrt{1 - \eta^2} \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) + \\ + c_0^2 (k^2 - h^2) (\xi^2 - \eta^2) f = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Это уравнение в свою очередь легко разделяется, если положить $f = f_1(\xi) f_2(\eta)$, что даёт:

$$(\xi^2 - 1) \frac{d^2 f_1}{d\xi^2} + \xi \frac{df_1}{d\xi} + [c_0^2 (k^2 - h^2) \xi^2 - b] f_1 = 0, \quad (4)$$

$$(1 - \eta^2) \frac{d^2 f_2}{d\eta^2} + \eta \frac{df_2}{d\eta} + [b - c_0^2 (k^2 - h^2) \eta^2] f_2 = 0, \quad (5)$$

где b — произвольная постоянная разделения. Таким образом, $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$ удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению. Уравнения (4) и (5) являются частными случаями соответствующего уравнения Матьё ¹⁾

$$(1 - z^2) w'' - 2(a + 1) z w' + (b - c^2 z^2) w = 0, \quad (6)$$

которые получаются, если положить параметр $a = -\frac{1}{2}$. Эти уравнения характеризуются нерегулярной особенностью в бесконечности и регулярными особенностями при $z = \pm 1$. При $\xi \gg 1$ (4) переходит в уравнение Бесселя.

Существенного упрощения (4) и (5) можно достичь заменой независимых переменных. Пусть

$$\xi = \operatorname{ch} u, \quad \eta = \cos v, \quad (7)$$

¹⁾ Е. Т. Уиттекер и Г. Н. Ватсон, *loc. cit.*, главы X и XIX; Ince, *Ordinary Differential Equations*, глава XX, Longmans, 1927.

так что преобразование к прямоугольным координатам выражается уравнениями

$$x = c_0 \operatorname{ch} u \cos v, \quad y = c_0 \operatorname{sh} u \sin v. \quad (8)$$

Тогда вместо (4) и (5) получаем

$$\frac{d^2 f_1}{du^2} + (c_0^2 \lambda^2 \operatorname{ch}^2 u - b) f_1 = 0, \quad (9)$$

$$\frac{d^2 f_2}{dv^2} + (b - c_0^2 \lambda^2 \cos^2 v) f_2 = 0, \quad (10)$$

где, как и в предыдущих разделах $\lambda = \sqrt{k^2 - h^2}$. Расстояние между фокусами на оси x (рис. 9) равно $2c_0$, а эксцентриситет конфокальных эллипсов $e = 1/\operatorname{ch} u$. Переход к случаю круговых координат получается в пределе при $c_0 \rightarrow 0$ и $u \rightarrow \infty$. Тогда $c_0 \operatorname{ch} u \rightarrow c_0 \operatorname{sh} u \rightarrow r$, а v является, очевидно, углом между радиусом r и осью x . По этой причине мы будем называть $f_1(u)$ радиальной функцией, а $f_2(v)$ — угловой функцией. При $u = 0$ эксцентриситет равен единице, и эллипс вырождается в отрезок прямой длины $2c_0$, соединяющей фокусы на оси x .

Уравнения Матъё (9) и (10) изучались многими авторами. Рассмотрим сначала угловую функцию $f_2(v)$. Решения уравнения (10) имеются, конечно, при любом значении постоянной разделения b . Но электромагнитное поле является однозначной функцией точки и поэтому, если свойства среды являются периодической функцией угла v . Но уравнение (10) допускает периодические решения только для определённых характеристических значений параметра b . Эти характеристические значения образуют счётную последовательность $b_1, b_2, \dots, b_m, \dots$. Их определение довольно сложно, так что мы ограничимся ссылкой на таблицы ¹⁾ и перейдём непосредственно к определению функций, удовлетворяющих (9) и (10), когда b совпадает с характеристическим значением b_m .

Уравнение (10) допускает для собственных значений b как чётные, так и нечётные периодические решения. Обозначим счётную последовательность характеристических значений, дающих чётные решения, через $b_m^{(e)}$; соответствующие характеристические функции можно представить в виде рядов по косинусам:

$$Se_m(c_0 \lambda, \cos v) = \sum_n' D_n^m \cos nv \quad (m = 1, 2, 3, \dots), \quad (11)$$

где суммирование со штрихом производится по чётным n , если m чётно, и по нечётным n , если m нечётно. Рекуррентную формулу, связывающую коэффициенты $D_n^m(c_0 \lambda)$, можно найти, подставляя (11) в (10). Таким образом все коэффициенты ряда выражаются через один начальный коэффициент,

¹⁾ Очень ясное изложение теории функций Матъё дано у Уиттекера и Ватсона, *loc. cit.*, гл. XIX; дальнейшие детали с подробными ссылками на литературу опубликованы Стрэттоном в монографии «Функции Ляме, Матъё и родственные им в физике и технике», Харьков — Киев, ГНТИ Украины, 1935. Таблицы функций Матъё и характеристических значений опубликованы Гольдштейном, *Trans. Cambridge Phil. Soc.* 23, 303—336, 1927. Функции Se_m и So_m , определённые в тексте, отличаются от функций se_m и so_m этих авторов лишь коэффициентом пропорциональности. В то время как Гольдштейн выбирает свои коэффициенты так, чтобы нормирующий множитель был равен $\sqrt{\pi}$, мы сочли более удобным нормировать функции так, чтобы чётная функция и производная от нечётной функции обращались в единицу в полюсе $v = 0$. См. Stratton, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S.* 21, 51—56, 316—321, 1935 и Morse, *ibid.*, стр. 56—62. Подробные таблицы коэффициентов разложения D_n^m характеристических значений b_m и нормирующих множителей рассчитаны Морзе и вскоре выйдут в свет.

который остаётся произвольным. Удобно так выбрать этот начальный коэффициент, чтобы сама функция имела единичное значение при $v=0$, что соответствует $\eta = \cos v = 1$. Для этого мы наложим на D_n^m условие

$$\sum_n' D_n^m = 1, \quad Se_m(c_0\lambda, 1) = 1. \quad (12)$$

Нечётные периодические решения уравнения (10) соответствуют второй последовательности характеристических значений, которую мы обозначим $b_m^{(e)}$. Эти функции можно представить в виде рядов по синусам

$$So_m(c_0\lambda, \cos v) = \sum_n' F_n^m \sin nv, \quad (13)$$

на коэффициенты которых ($F_n^m c_0\lambda$) мы наложим условие $\sum_n' n F_n^m = 1$. Следовательно единичное значение при $v=0$ будет иметь производная от $So_m(c_0\lambda, \cos v)$:

$$\left[\frac{d}{dv} So_m(c_0\lambda, \cos v) \right]_{v=0} = 1. \quad (14)$$

Характеристические функции Se_m и So_m образуют полную систему ортогональных функций. Пусть $b_i^{(e)}$ и $b_j^{(e)}$ — два характеристических значения, а Se_i и Se_j — соответствующие им функции. Они удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d^2 Se_i}{dv^2} + (b_i^{(e)} - c_0^2 \lambda^2 \cos^2 v) Se_i = 0, \quad (15)$$

$$\frac{d^2 Se_j}{dv^2} + (b_j^{(e)} - c_0^2 \lambda^2 \cos^2 v) Se_j = 0. \quad (16)$$

Умножим (15) на Se_j , (16) на Se_i и вычтем одно из другого:

$$\frac{d}{dv} \left(Se_j \frac{d}{dv} Se_i - Se_i \frac{d}{dv} Se_j \right) + (b_i^{(e)} - b_j^{(e)}) Se_i Se_j = 0. \quad (17)$$

Интегрируя (17) от 0 до 2π и учитывая периодичность функций, получаем, что

$$\int_0^{2\pi} Se_i(c_0\lambda, \cos v) Se_j(c_0\lambda, \cos v) dv = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ N_i^{(e)}, & i = j. \end{cases} \quad (18)$$

Нормирующие множители $N_m^{(e)}$ можно подсчитать по разложениям функций в ряды.

Аналогично можно вывести, что

$$\int_0^{2\pi} So_i(c_0\lambda, \cos v) So_j(c_0\lambda, \cos v) dv = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ N_i^{(0)}, & i = j, \end{cases} \quad (19)$$

и

$$\int_0^{2\pi} Se_i(c_0\lambda, \cos v) So_j(c_0\lambda, \cos v) dv = 0, \quad (20)$$

причём последнее соотношение верно как при $i=j$, так и при $i \neq j$.

Каждому характеристическому значению $b_m^{(e)}$ соответствует одно и только одно периодическое решение Se_m . Но для этого же числа $b_m^{(e)}$ должно существовать другое независимое решение уравнения (10). Так как второе решение является непериодическим, оно несущественно для физических задач, по крайней мере пока среда однородна по отношению к углу v . Если,

однако, свойства среды испытывают разрывы непрерывности на поверхностях $\psi = \text{const.}$, то граничные условия могут потребовать применения функций второго рода.

Обратимся теперь к радиальным функциям. Можно без особого труда показать, что уравнение (9) удовлетворяется рядом функций Бесселя, коэффициенты которого отличаются лишь множителем от коэффициентов рядов (11) и (13). Таким образом, если параметр b принимает одно из характеристических значений $b_m^{(e)}$, то соответствующая радиальная функция будет

$$\text{Re}_m^1(c_0\lambda, \xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_n' i^{m-n} D_n^m J_n(c_0\lambda\xi), \quad (21)$$

где $\xi = \text{ch } u$, $i^{m-n} = \exp\left[i(m-n)\frac{\pi}{2}\right]$. Так как все решения уравнения Бесселя удовлетворяют рекуррентным соотношениям (24) и (25), стр. 317, то чётные радиальные функции второго рода определяются через функции Бесселя второго рода соотношением

$$\text{Re}_m^2(c_0\lambda, \xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_n' i^{m-n} D_n^m N_n(c_0\lambda\xi). \quad (22)$$

Сходимость подобных рядов функций доказать нелегко, но в данном случае она, повидимому, удовлетворительна. Большим преимуществом этих представлений является то, что они сразу приводят нас к асимптотическим выражениям для очень больших значений $c_0\lambda\xi$. Согласно (18) и (19), стр. 317,

$$\text{Re}_m^1(c_0\lambda, \xi) \simeq \frac{1}{\sqrt{c_0\lambda\xi}} \cos\left(c_0\lambda\xi - \frac{2m+1}{4}\pi\right), \quad (23)$$

$c_0\lambda\xi \rightarrow \infty.$

$$\text{Re}_m^2(c_0\lambda, \xi) \simeq \frac{1}{\sqrt{c_0\lambda\xi}} \sin\left(c_0\lambda\xi - \frac{2m+1}{4}\pi\right), \quad (24)$$

По аналогии с функциями Ганкеля, образуем линейные комбинации

$$\text{Re}_m^3(c_0\lambda, \xi) = \text{Re}_m^1 + i\text{Re}_m^2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_n' i^{m-n} D_n^m H_n^{(1)}(c_0\lambda\xi), \quad (25)$$

$$\text{Re}_m^4(c_0\lambda, \xi) = \text{Re}_m^1 - i\text{Re}_m^2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_n' i^{m-n} D_n^m H_n^{(2)}(c_0\lambda\xi), \quad (26)$$

асимптотическое представление которых имеет вид

$$\text{Re}_m^3(c_0\lambda, \xi) \simeq \frac{1}{\sqrt{c_0\lambda\xi}} e^{i\left(c_0\lambda\xi - \frac{2m+1}{4}\pi\right)}, \quad (27)$$

$c_0\lambda\xi \rightarrow \infty.$

$$\text{Re}_m^4(c_0\lambda, \xi) \simeq \frac{1}{\sqrt{c_0\lambda\xi}} e^{-i\left(c_0\lambda\xi - \frac{2m+1}{4}\pi\right)}, \quad (28)$$

Функция Re_m^1 удовлетворяет тому же уравнению, что и угловая функция Se_m ; обе они нигде не имеют особенностей, кроме бесконечно удалённой точки. Следовательно, они должны быть пропорциональны друг другу:

$$\text{Se}_m(c_0\lambda, \xi) = \sqrt{2\pi} l_m^{(e)} \text{Re}_m^1(c_0\lambda, \xi), \quad (29)$$

$$l_m^{(e)} = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \sum_n' i^{n-m} \frac{D_n^m}{D_0^m} & (\text{при чётных } m), \\ \frac{2}{c_0\lambda\pi} \sum_n' n i^{n-m} \frac{D_n^m}{D_1^m} & (\text{при нечётных } m). \end{cases}$$

Слева $\cos v$ заменён на ξ . Следовательно, при $u = 0$, $\xi = 1$ мы имеем

$$\text{Re}_m^1(c_0\lambda, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{l_m^{(e)}}, \quad \left[\frac{d}{du} \text{Re}_m^1(c_0\lambda, \text{ch } u) \right]_{u=0} = 0. \quad (30)$$

Соответствующие соотношения можно получить и для нечётных радиальных функций. Определим

$$\text{Ro}_m^1(c_0\lambda, \xi) = \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_n' i^{n-m} n F_n^m J_n(c_0\lambda\xi), \quad (31)$$

$$\text{Ro}_m^2(c_0\lambda, \xi) = \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_n' i^{n-m} n F_n^m N_n(c_0\lambda\xi), \quad (32)$$

$$\text{Ro}_m^3(c_0\lambda, \xi) = \text{Ro}_m^1 + i \text{Ro}_m^2, \quad \text{Ro}_m^4(c_0\lambda, \xi) = \text{Ro}_m^1 - i \text{Ro}_m^2. \quad (33)$$

Асимптотические выражения для нечётных функций тождественны с асимптотическими выражениями для соответствующих чётных функций. Наконец,

$$i\text{So}_m(c_0\lambda, \xi) = \sqrt{2\pi} l_m^{(o)} \text{Ro}_m^1(c_0\lambda, \xi), \quad (34)$$

$$l_m^{(o)} = \begin{cases} \frac{4}{\pi c_0^2 \lambda^2} \sum_n' n \frac{F_n^m}{F_2^m} i^{n-m} & (\text{при чётных } m), \\ \frac{2}{\pi c_0 \lambda} \sum_n' \frac{F_n^m}{F_1^m} i^{n-m} & (\text{при нечётных } m). \end{cases}$$

При $u = 0$, $\xi = 1$ имеем

$$\text{Ro}_m^1(c_0\lambda, 1) = 0, \quad \left[\frac{d}{du} \text{Ro}_m^1(c_0\lambda, \text{ch } u) \right]_{u=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{l_m^{(o)}}. \quad (35)$$

Теперь, имея в своём распоряжении эти функции, мы в состоянии написать элементарную волновую функцию для эллиптического цилиндра. Чётная и нечётная волновые функции, конечные всюду и, в частности, вдоль оси, соединяющей фокусы, образуются из радиальных функций первого рода

$$\psi_{em}^1 = \text{Se}_m(c_0\lambda, \cos v) \text{Re}_m^1(c_0\lambda, \xi) e^{\pm i \sqrt{k^2 - \lambda^2} z - i\omega t}, \quad (36)$$

$$\psi_{om}^1 = \text{So}_m(c_0\lambda, \cos v) \text{Ro}_m^1(c_0\lambda, \xi) e^{\pm i \sqrt{k^2 - \lambda^2} z - i\omega t}. \quad (37)$$

Если известно, что на больших расстояниях от оси цилиндров поле распространяется радиально вовне, то элементарные волновые функции образуются из радиальных функций третьего рода

$$\psi_{em}^3 = \text{Se}_m(c_0\lambda, \cos v) \text{Re}_m^3(c_0\lambda, \xi) e^{\pm i \sqrt{k^2 - \lambda^2} z - i\omega t}, \quad (38)$$

$$\psi_{om}^3 = \text{So}_m(c_0\lambda, \cos v) \text{Ro}_m^3(c_0\lambda, \xi) e^{\pm i \sqrt{k^2 - \lambda^2} z - i\omega t}. \quad (39)$$

Компоненты электрического и магнитного векторов находятся по правилам, изложенным в разделе 6.3.

6.13. Интегральные представления. Согласно (19), стр. 321, в любой системе цилиндрических координат

$$f(u^1, u^2) = \int g(\beta) e^{ik \sin \alpha (x \cos \beta + y \sin \beta)} d\beta. \quad (40)$$

Если заменить прямоугольные координаты эллиптическими с помощью преобразования $x = c_0 \text{ch } u \cos v$, $y = c_0 \text{sh } u \sin v$, то (40) можно переписать в виде

$$f(u, v) = \int g(\beta) e^{i\beta p} d\beta, \quad (41)$$

где, как и ранее, $\lambda = \sqrt{k^2 - h^2} = k \sin \alpha$, и где

$$p(u, v, \beta) = x \cos \beta + y \sin \beta = c_0 (\operatorname{ch} u \cos v \cos \beta + \operatorname{sh} u \sin v \sin \beta). \quad (42)$$

Функция $f(u, v)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + c_0^2 \lambda^2 (\operatorname{ch}^2 u - \cos^2 v) f = 0, \quad (43)$$

но, так как $f = f_1(u) f_2(v)$, то она должна, очевидно, удовлетворять также и уравнению

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (c_0^2 \lambda^2 \operatorname{ch}^2 u - b) f = 0, \quad (44)$$

которое получается умножением (9), стр. 331, на $f_2(v)$. Дифференцируя (41) по u , получаем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \int g(\beta) \left[i\lambda \frac{\partial^2 p}{\partial u^2} - \lambda^2 \left(\frac{\partial p}{\partial u} \right)^2 \right] e^{i\lambda p} d\beta; \quad (45)$$

следовательно, для того чтобы (41) удовлетворяло (44), необходимо, чтобы

$$\int g(\beta) \left[i\lambda \frac{\partial^2 p}{\partial u^2} - \lambda^2 \left(\frac{\partial p}{\partial u} \right)^2 + c_0^2 \lambda^2 \operatorname{ch}^2 u - b \right] e^{i\lambda p} d\beta = 0. \quad (46)$$

Величина p является функцией β и u , причём легко убедиться, что

$$c_0^2 \operatorname{ch}^2 u - \left(\frac{\partial p}{\partial u} \right)^2 = c_0^2 \cos^2 \beta + \left(\frac{\partial p}{\partial \beta} \right)^2, \quad (47)$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial u^2} = - \frac{\partial^2 p}{\partial \beta^2}. \quad (48)$$

Следовательно, (46) эквивалентно уравнению

$$\int g(\beta) \left[\frac{\partial^2 e^{i\lambda p}}{\partial \beta^2} + (b - c_0^2 \lambda^2 \cos^2 \beta) e^{i\lambda p} \right] d\beta = 0. \quad (49)$$

Наконец, согласно (30), стр. 322,

$$g(\beta) \frac{\partial^2 e^{i\lambda p}}{\partial \beta^2} = e^{i\lambda p} \frac{d^2 g}{d\beta^2} + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(g \frac{\partial e^{i\lambda p}}{\partial \beta} - e^{i\lambda p} \frac{\partial g}{\partial \beta} \right). \quad (50)$$

Следовательно, (41) является решением (44), если $g(\beta)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 g}{d\beta^2} + (b - c_0^2 \lambda^2 \cos^2 \beta) g = 0, \quad (51)$$

а путь интегрирования выбран так, что

$$g \frac{\partial e^{i\lambda p}}{\partial \beta} - e^{i\lambda p} \frac{\partial g}{\partial \beta} \Big|_C = 0. \quad (52)$$

Заметим, что уравнение для амплитуды $g(\beta)$ тождественно с уравнением для угловой функции $f_2(v)$ и лишь несущественным образом отличается от уравнения для $f_1(u)$, из которого мы исходили. Это свойство является общим для представлений Фурье всех решений уравнений, относящихся к группе, определённой равенством (6), стр. 330.

Полученные результаты верны при любых значениях постоянной разделения b_m . Но если ограничиться чётной и нечётной последовательностями характеристических значений $b_m^{(e)}$ и $b_m^{(o)}$, то удобно в качестве $g(\beta)$ взять периодические решения уравнения (51), обозначенные через $\operatorname{Se}_m(c_0 \lambda, \cos \beta)$, $\operatorname{So}_m(c_0 \lambda, \cos \beta)$. Так как $p(u, v, \beta)$ также периодически по β с периодом 2π , то, очевидно, (52) будет удовлетворено, если за путь интегрирования взять любой

отрезок действительной оси длиной 2π . Тогда интегральное представление $f(u, v)$, верное для b , принадлежащих последовательности $b_m^{(e)}$, имеет вид

$$f_m^{(e)}(u, v) = \int_0^{2\pi} \text{Se}_m(c_0\lambda, \cos \beta) e^{i\lambda p(u, v, \beta)} d\beta. \quad (53)$$

Отсюда можно сразу же найти интегральное представление для $f_1(u)$, полагая $v = 0$.

$$f_{1m}^{(e)}(u) = \int_0^{2\pi} \text{Se}_m(c_0\lambda, \cos \beta) e^{ic_0\lambda \text{ch } u \cos \beta} d\beta. \quad (54)$$

Остаётся найти связь частного решения, определяемого (54), с ранее известными функциями. Вводя разложение Se_m в ряд по косинусам и полагая для сокращения $c_0\lambda \text{ch } u = \rho$, получаем

$$f_{1m}^{(e)}(u) = \sum_n' D_n^m \int_0^{2\pi} e^{i\rho \cos \beta} \cos n\beta d\beta = 2\pi \sum_n' i^n D_n^m J_n(\rho). \quad (55)$$

Заметим далее, что $i^n = (-1)^n i^{-n}$, и вспомним, что суммирование производится по чётным n при чётных m и только по нечётным — при нечётном m . Поэтому $(-1)^n = (-1)^m$, и, в силу определения (21), стр. 333,

$$\text{Re}_m^1(c_0\lambda, \xi) = \frac{i^{-m}}{\sqrt{8\pi}} \int_0^{2\pi} \text{Se}_m(c_0\lambda, \cos \beta) e^{ic_0\lambda \xi \cos \beta} d\beta, \quad (56)$$

где $\xi = \text{ch } u$. Кроме того, $\text{Se}_m(c_0\lambda, \cos \beta)$ пропорциональна $\text{Re}_m^1(c_0\lambda, \cos \beta)$, где ξ заменено через $\cos \beta$, так что по (29), стр. 333, функция $\text{Re}_m^1(c_0\lambda, \xi)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\text{Re}_m^1(c_0\lambda, \xi) = i^{-m} \frac{l_m^{(e)}}{2} \int_0^{2\pi} \text{Re}_m^1(c_0\lambda, \cos \beta) e^{ic_0\lambda \xi \cos \beta} d\beta. \quad (57)$$

Можно получить и другое представление Re_m^1 , разлагая в ряд подинтегральное выражение в (57). Имеем

$$\text{Re}_m^1(c_0\lambda, \xi) = l_m^{(e)} \sqrt{\frac{\pi}{8}} \sum_n' i^{-n} D_n^m \int_0^{2\pi} J_n(c_0\lambda \cos \beta) e^{ic_0\lambda \xi \cos \beta} d\beta. \quad (58)$$

Но

$$J_n(c_0\lambda \cos \beta) = \frac{i^{-n}}{\pi} \int_0^\pi \cos n\varphi e^{ic_0\lambda \cos \beta \cos \varphi} d\varphi, \quad (59)$$

откуда

$$\int_0^{2\pi} J_n(c_0\lambda \cos \beta) e^{ic_0\lambda \xi \cos \beta} d\beta = i^{-n} \int_0^\pi \cos n\varphi J_0[c_0\lambda(\xi + \cos \varphi)] d\varphi. \quad (60)$$

Вспоминая ещё раз, что $(-1)^n = (-1)^m$, получаем

$$\text{Re}_m^1(c_0\lambda, \xi) = l_m^{(e)} (-1)^m \sqrt{\frac{\pi}{8}} \int_0^\pi J_0[c_0\lambda(\xi + \cos \varphi)] \text{Se}_m(c_0\lambda, \cos \varphi) d\varphi. \quad (61)$$

Интегральные представления радиальных функций третьего и четвертого рода можно получить, выбрав другие контуры интегрирования. Для упрощения положим $\operatorname{ch} u = \xi$, $v = 0$, $\cos \beta = t$. Тогда различные радиальные функции представляются интегралами вида

$$f_{1m}^{(e)}(\xi) = \int_C \operatorname{Se}_m(c_0\lambda, t) e^{ic_0\lambda\xi t} (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt, \quad (62)$$

где контур C таков, что обеспечено обращение в нуль так называемого «билинейного конкомитанта» (52), который здесь имеет вид

$$(1-t^2)^{\frac{1}{2}} \left[ic_0\lambda\xi \operatorname{Se}_m(c_0\lambda, t) - \frac{d}{dt} \operatorname{Se}_m(c_0\lambda, t) \right] e^{ic_0\lambda\xi t} \Big|_C = 0. \quad (63)$$

Когда t становится очень большим, асимптотическое представление Se_m будет

$$\operatorname{Se}_m(c_0\lambda, t) \simeq I_m^{(e)} \sqrt{\frac{2\pi}{c_0\lambda t}} \cos\left(c_0\lambda t - \frac{2m+1}{4}\pi\right); \quad (64)$$

следовательно, обращение (63) в нуль в бесконечности обеспечивается множителем $\exp ic_0\lambda(\xi-1)t$. Поэтому, если действительная часть $c_0\lambda(\xi-1)$ больше нуля, то начало или конец контура могут быть взяты при $t = i\infty$, а за другой предел можно взять $+1$ или -1 . В результате получим

$$\operatorname{Re}_m^3(c_0\lambda, \xi) = i^{-m} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{i\infty}^1 \operatorname{Se}_m(c_0\lambda, t) e^{ic_0\lambda\xi t} (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt, \quad (65)$$

$$\operatorname{Re}_m^4(c_0\lambda, \xi) = i^{-m} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-1}^{i\infty} \operatorname{Se}_m(c_0\lambda, t) e^{ic_0\lambda\xi t} (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt, \quad (66)$$

при условии, что действительная часть $[c_0\lambda(\xi-1)] > 0$. Возвращаясь к комплексной β -плоскости, находим, что (65) эквивалентно равенству

$$\operatorname{Re}_m^3(c_0\lambda, \xi) = i^{-m} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2} - i\infty} \operatorname{Se}_m(c_0\lambda, \cos \beta) e^{ic_0\lambda\xi \cos \beta} d\beta; \quad (67)$$

соответствующий интеграл имеет место и для $\operatorname{Re}_m^4(c_0\lambda, \xi)$.

С помощью (67) можно вывести ряд других интегралов типа (61). Так, вместо (58) можно написать

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}_m^3(c_0\lambda, \xi) &= I_m^{(e)} \sqrt{2\pi} \sum_n' i^{-n} D_n^m \int_0^{\frac{\pi}{2} - i\infty} J_n(c_0\lambda \cos \beta) e^{ic_0\lambda\xi \cos \beta} d\beta = \\ &= I_m^{(e)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_n' (-1)^n D_n^m \int_0^\pi d\varphi \cos n\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2} - i\infty} d\beta e^{ic_0\lambda(\xi + \cos \varphi) \cos \beta}. \end{aligned} \quad (68)$$

Но, согласно (39), стр. 324, при $p=0$ имеем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2} - i\infty} e^{ip \cos \beta} d\beta = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2} + i\infty}^{\frac{\pi}{2} - i\infty} e^{ip \cos \beta} d\beta = \frac{\pi}{2} H_0^{(1)}(p), \quad (69)$$

если действительная часть $\rho > 0$; следовательно,

$$\operatorname{Re}_m^3(c_0\lambda, \xi) = l_m^{(e)}(-1)^m \sqrt{\frac{\pi}{8}} \int_0^{2\pi} H_0^{(1)}[c_0\lambda(\xi + \cos \varphi)] \operatorname{Se}_m(c_0\lambda, \cos \varphi) d\varphi, \quad (70)$$

если действительная часть $[c_0\lambda(\xi - 1)] > 0$. Комбинация (61) и (70) даёт

$$\operatorname{Re}_m^2(c_0\lambda, \xi) = l_m^{(e)}(-1)^m \sqrt{\frac{\pi}{8}} \int_0^{2\pi} N_0[c_0\lambda(\xi + \cos \varphi)] \operatorname{Se}_m(c_0\lambda, \cos \varphi) d\varphi. \quad (71)$$

Для нахождения интегральных представлений нечётных функций исходным является соотношение

$$\int_0^{2\pi} e^{ic_0\lambda\xi \cos \beta} \sin n\beta \cos \beta d\beta = \frac{n}{ic_0\lambda\xi} \int_0^{2\pi} e^{ic_0\lambda\xi \cos \beta} \cos n\beta d\beta, \quad (72)$$

которое получается интегрированием по частям. Доказательство соотношений

$$\begin{aligned} \operatorname{Ro}_m^1(c_0\lambda, \xi) &= \frac{c_0\lambda}{\sqrt{8\pi}} i^{1-m} \sqrt{\xi^2 - 1} \int_0^{2\pi} \operatorname{So}_m(c_0\lambda, \cos \beta) e^{ic_0\lambda\xi \cos \beta} \sin \beta d\beta = \\ &= \frac{c_0\lambda}{2} l_m^{(o)} i^{-m} \sqrt{\xi^2 - 1} \int_0^{2\pi} \operatorname{Ro}_m^1(c_0\lambda, \cos \beta) e^{ic_0\lambda\xi \cos \beta} \sin \beta d\beta = \\ &= c_0\lambda l_m^{(o)} (-1)^m \sqrt{\frac{\pi}{8}} \sqrt{\xi^2 - 1} \int_0^{2\pi} J_1[c_0\lambda(\xi + \cos \varphi)] \times \\ &\quad \times \operatorname{So}_m(c_0\lambda, \cos \varphi) \frac{\sin \varphi}{\xi + \cos \varphi} d\varphi, \end{aligned} \quad (73)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Ro}_m^3(c_0\lambda, \xi) &= c_0\lambda l_m^{(o)} (-1)^m \sqrt{\frac{\pi}{8}} \sqrt{\xi^2 - 1} \int_0^{2\pi} H_1^{(1)}[c_0\lambda(\xi + \cos \varphi)] \times \\ &\quad \times \operatorname{So}_m(c_0\lambda, \cos \varphi) \frac{\sin \varphi}{\xi + \cos \varphi} d\varphi \end{aligned} \quad (74)$$

предоставляется читателю.

6.14. Разложение плоских и круговых волн. Периодические функции $\operatorname{Se}_m(c_0\lambda, \cos v)$ и $\operatorname{So}_m(c_0\lambda, \cos v)$ образуют полную ортогональную систему функций. Следовательно, если $f(u, v)$ — периодическая по v функция с периодом 2π , кусочно непрерывная по аргументу v вместе со своей первой производной $\partial f / \partial v$, то она может быть разложена в ряд

$$f(u, v) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m^{(e)}(u) \operatorname{Se}_m(c_0\lambda, \cos v) + \sum_{m=0}^{\infty} f_m^{(o)}(u) \operatorname{So}_m(c_0\lambda, \cos v), \quad (75)$$

коэффициенты которого определяются равенствами

$$\left. \begin{aligned} f_m^{(e)}(u) &= \frac{1}{N_m^{(e)}} \int_0^{2\pi} f(u, v) \operatorname{Se}_m(c_0\lambda, \cos v) dv, \\ f_m^{(o)}(u) &= \frac{1}{N_m^{(o)}} \int_0^{2\pi} f(u, v) \operatorname{So}_m(c_0\lambda, \cos v) dv. \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

Это разложение можно применить для представления плоской волны с константой распространения k , бегущей в направлении, определяемом

единичным вектором $\mathbf{n}$, образующим с фиксированной системой отсчёта полярные углы α и β , как показано на рис. 66, стр. 319. Имеем

$$\psi = e^{ik \sin \alpha (x \cos \beta + y \sin \beta)} \cdot e^{ikz \cos \alpha - i\omega t}. \quad (77)$$

Выражая x и y через u и v и полагая $\lambda = k \sin \alpha$, получим

$$f(u, v, \beta) = e^{i\lambda p}, \quad p = c_0 (\operatorname{ch} u \cos v \cos \beta + \operatorname{sh} u \sin v \sin \beta). \quad (78)$$

Так как выражение (78) совершенно симметрично относительно v и β , разложение (75) можно записать в виде

$$e^{i\lambda p} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(u) \operatorname{Se}_m(c_0\lambda, \cos \beta) \operatorname{Se}_m(c_0\lambda, \cos v) + \\ + \sum_{m=0}^{\infty} b_m(u) \operatorname{So}_m(c_0\lambda, \cos \beta) \operatorname{So}_m(c_0\lambda, \cos v), \quad (79)$$

где коэффициенты $a_m(u)$ и $b_m(u)$ зависят только от u . В силу (76) имеем

$$a_m(u) N_m^{(e)} \operatorname{Se}_m(c_0\lambda, \cos \beta) = \int_0^{2\pi} \operatorname{Se}_m(c_0\lambda, \cos v) e^{i\lambda p} dv. \quad (80)$$

Так как коэффициенты $a_m(u)$ не зависят от значения β , то можно положить $\beta = 0$, $\operatorname{Se}_m(c_0\lambda, 1) = 1$, $p = c_0 \operatorname{ch} u \cos v$. Тогда, согласно (56),

$$a_m(u) = \frac{i^m \sqrt{8\pi}}{N_m^{(e)}} \operatorname{Re}_m^1(c_0\lambda, \operatorname{ch} u). \quad (81)$$

Аналогично найдём

$$b_m(u) N_m^{(o)} \operatorname{So}_m(c_0\lambda, \cos \beta) = \int_0^{2\pi} \operatorname{So}_m(c_0\lambda, \cos v) e^{i\lambda p} dv. \quad (82)$$

Продифференцируем теперь это последнее равенство по β , а затем положим $\beta = 0$. Тогда, в силу (14), коэффициент $b_m(u)$ окажется равным

$$b_m(u) = \frac{i^m \sqrt{8\pi}}{N_m^{(o)}} \operatorname{Ro}_m^1(c_0\lambda, \operatorname{ch} u). \quad (83)$$

Таким образом, полное разложение для плоской волны произвольного направления имеет вид

$$e^{i\lambda p} = \sqrt{8\pi} \sum_{m=0}^{\infty} i^m \left[\frac{1}{N_m^{(e)}} \operatorname{Re}_m^1(c_0\lambda, \operatorname{ch} u) \operatorname{Se}_m(c_0\lambda, \cos v) \operatorname{Se}_m(c_0\lambda, \cos \beta) + \right. \\ \left. + \frac{1}{N_m^{(o)}} \operatorname{Ro}_m^1(c_0\lambda, \operatorname{ch} u) \operatorname{So}_m(c_0\lambda, \cos v) \operatorname{So}_m(c_0\lambda, \cos \beta) \right]. \quad (84)$$

Последний результат позволяет нам сразу написать интегральное представление для тех элементарных эллиптических волновых функций, которые остаются конечными вдоль оси. Для этого нужно только умножить (84) на $\operatorname{Se}_m(c_0\lambda, \cos \beta)$ и проинтегрировать по периоду. Тогда из ортогональности функций следует, что

$$\operatorname{Re}_m^1(c_0\lambda, \operatorname{ch} u) \operatorname{Se}_m(c_0\lambda, \cos v) = \frac{i^{-m}}{\sqrt{8\pi}} \int_0^{2\pi} \operatorname{Se}_m(c_0\lambda, \cos \beta) e^{i\lambda p} d\beta; \quad (85)$$

и аналогично для нечётных функций

$$\operatorname{Ro}_m^1(c_0\lambda, \operatorname{ch} u) \operatorname{So}_m(c_0\lambda, \cos v) = \frac{i^{-m}}{\sqrt{8\pi}} \int_0^{2\pi} \operatorname{So}_m(c_0\lambda, \cos \beta) e^{i\lambda p} d\beta. \quad (86)$$

С помощью (67) можно также показать, что элементарные функции эллиптических волн, бегущих от оси наружу, представляются контурным интегралом

$$\operatorname{Re}_m^3(c_0\lambda, \operatorname{ch} u) \operatorname{Se}_m(c_0\lambda, \cos v) = i^{-m} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2} - i\infty} \operatorname{Se}_m(c_0\lambda, \cos \beta) e^{\pm i\lambda p} d\beta. \quad (87)$$

Верхний знак в показательной функции берётся при $-\pi/2 < v < \pi/2$, отрицательный знак — при $\pi/2 < v < 3\pi/2$. Подобное же равенство можно вывести для нечётных функций.

Из раздела 6.8 легко усмотреть, что чётная круговая волновая функция $\cos n\theta J_n(\lambda r)$, остающаяся конечной на оси, может быть представлена интегралом

$$2\pi i^n \cos n\theta J_n(\lambda r) = \int_0^{2\pi} \cos n\beta e^{i\lambda p} d\beta, \quad (88)$$

где $p = x \cos \beta + y \sin \beta = r \cos(\beta - \theta)$. Умножая на D_n^m и суммируя по чётным или нечётным n , получаем равенство

$$\operatorname{Re}_m^1(c\lambda, \operatorname{ch} u) \operatorname{Se}_m(c\lambda, \cos v) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_n' i^{n-m} D_n^m \cos n\theta J_n(\lambda r), \quad (89)$$

которое выражает эллиптическую функцию в виде разложения по круговым волновым функциям. Подобное же выражение можно найти для нечётных функций.

Теорема сложения для круговых и эллиптических волн, отнесённых к двум параллельным осям, выведена Морзе¹⁾.

ЗАДАЧИ

1. Показать, что уравнению

$$\Delta\psi - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \sigma\mu \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$$

удовлетворяет волновая функция вида

$$\psi = C e^{i(\delta_1 + \delta_2)} \cos(h_1 x - \delta_1) \cos(h_2 y - \delta_2) e^{ih_3 z - i\omega t}, \quad h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = k^2.$$

Пусть $\psi = \Pi_z$, $\Pi_x = \Pi_y = 0$ будут компонентами вектора Герца, ориентированного в направлении распространения. Показать, что это приводит к поперечному магнитному полю, электрические компоненты которого равны

$$\begin{aligned} E_x &= -ih_1 h_3 C e^{i(\delta_1 + \delta_2)} \sin(h_1 x - \delta_1) \cos(h_2 y - \delta_2) e^{ih_3 z - i\omega t}, \\ E_y &= -ih_2 h_3 C e^{i(\delta_1 + \delta_2)} \cos(h_1 x - \delta_1) \sin(h_2 y - \delta_2) e^{ih_3 z - i\omega t}, \\ E_z &= (k^2 - h_3^2) C e^{i(\delta_1 + \delta_2)} \cos(h_1 x - \delta_1) \cos(h_2 y - \delta_2) e^{ih_3 z - i\omega t} \end{aligned}$$

а импедансы

$$\begin{aligned} Z_x &= -\frac{E_z}{H_y} = \frac{k^2 - h_3^2}{ik^2 h_1} \omega\mu \operatorname{ctg}(h_1 x - \delta_1), \\ Z_y &= \frac{E_z}{H_x} = \frac{k^2 - h_3^2}{ik^2 h_2} \omega\mu \operatorname{ctg}(h_2 y - \delta_2), \quad Z_z = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\omega\mu h_3}{k^2}. \end{aligned}$$

Найти составляющие соответствующего поперечного электрического поля, полагая $\psi = \Pi_z^*$, $\Pi_x^* = \Pi_y^* = 0$.

¹⁾ Morse, *loc. cit.*

Множитель $e^{i(\delta_1 + \delta_2)}$ введён для того, чтобы включить как бегущие, так и стоячие волны. Так, при $\delta_1 = i\infty$ поле ведёт себя, как $e^{i\hbar_1 x}$.

2. Двумерное волновое уравнение в *недиссипативной* среде имеет вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0.$$

Показать, что

$$2\pi a \psi(x, y, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{at} \int_0^{2\pi} \frac{g(x', y')}{\sqrt{a^2 t^2 - r^2}} r dr d\theta + \int_0^{at} \int_0^{2\pi} \frac{G(x', y')}{\sqrt{a^2 t^2 - r^2}} r dr d\theta,$$

где

$$x' - x = r \cos \theta, \quad y' - y = r \sin \theta,$$

и

$$\psi = g(x, y), \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = G(x, y) \quad \text{при } t = 0.$$

Это — формула Пуассона-Парсевалля. Заметьте, что в момент t волновая функция ψ определяется начальными значениями g и G во всех точках на окружности и *внутри* круга радиуса at . Таким образом, даже в недиссипативных средах возмущение остаётся после прохождения фронта волны. Это свойство характерно для волнового движения в пространствах с чётным числом измерений.

3. Показать, что волновое уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

имеет частное решение вида

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F \left(z + ir \cos \alpha, t - \frac{r}{c} \sin \alpha \right) d\alpha,$$

которое переходит в $\psi = F(z, t)$ на оси $r = 0$, где F — произвольная функция.

Показать, что другим решением этого уравнения является

$$\psi = \int_{-\infty}^{\infty} F \left(z - r \operatorname{sh} \alpha, t - \frac{r}{c} \operatorname{ch} \alpha \right) d\alpha. \quad (\text{Bateman})$$

4. Частным случаем решения, полученного в 3-й задаче, является симметричная двумерная волновая функция

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F \left(t - \frac{r}{c} \operatorname{ch} \alpha \right) d\alpha,$$

представляющая волну, распространяющуюся от однородного линейного источника силы $F(t)$ вдоль оси z ,

Показать, что если $F(t) = 0$ при $t < 0$, то

$$\psi = \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{t - \frac{r}{c}} \frac{F(\beta)}{\sqrt{c^2(t - \beta)^2 - r^2}} d\beta$$

и равна нулю всюду, пока $t < r/c$.

Показать, что если источник действует только в течение конечного времени τ , так что $F(t) = 0$ для всех t , за исключением интервала $0 < t < \tau$, то волна оставляет остаток или «шлейф», форма которого при $t - \frac{r}{c} \gg \tau$ определяется выражением

$$\psi = \frac{c}{2\pi \sqrt{c^2 t^2 - r^2}} \int_0^{\tau} F(\beta) d\beta.$$

(Ламб. Гидромеханика. Гостехиздат 1947 г.)

5. Показать, что уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + k^2 \psi = 0$$

удовлетворяет

$$\psi = \int_{r+r_0}^{\infty} \frac{\sin k(\xi + \alpha) d\xi}{V \xi^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2},$$

где

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad r_0^2 = x_0^2 + y_0^2. \quad (\text{Bateman})$$

6. Показать, что уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \lambda^2 \psi$$

удовлетворяет функция

$$\psi = \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{4t} - \lambda^2 t} \left[f\left(\frac{x+iy}{t}\right) + F\left(\frac{x-iy}{t}\right) \right] \frac{dt}{t},$$

где $r^2 = x^2 + y^2$, а f и F — произвольные функции. Каким ограничениям подчинено это решение?

Получить таким способом частное решение

$$\psi = \frac{1}{r} e^{-\lambda r} (x + iy)^{-\frac{1}{2}}. \quad (\text{Bateman})$$

7. Уравнение

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - 2b \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

приводится подстановкой

$$\psi = e^{-bt} u(x, y, t)$$

к виду

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + b^2 u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Начальные условия таковы:

$$u = g(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = G(x, y) \quad \text{при } t = 0.$$

Пусть r — радиус сферы, описанной вокруг точки наблюдения, а α, β, γ — направляющие косинусы r по отношению к осям x, y, z . Показать, что

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int \int t g(x + at\alpha, y + at\beta) \cos(ibt\gamma) d\Omega + \\ + \frac{1}{2\pi} \int \int t G(x + at\alpha, y + at\beta) \cos(ibt\gamma) d\Omega \quad (\text{Boussinesq})$$

является решением, где Ω — телесный угол, опирающийся на элемент поверхности сферы.

8. Показать, что

$$J_p(\rho) = \frac{\rho^n}{2^p \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi \cos(\rho \cos \varphi) \sin^2 p \varphi d\varphi$$

является интегральным представлением функции Бесселя первого рода, верным для всех значений порядка p , если только $\text{Re}(p) > -\frac{1}{2}$.

9. Вывести интегральные представления

$$N_0(z) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos(z \operatorname{ch} \alpha) d\alpha, \quad \operatorname{Im} z > 0$$

для функции Бесселя второго рода нулевого порядка и

$$H_p^{(2)}(z) = i^p + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi e^{-iz \operatorname{ch} \alpha} \operatorname{ch} p \alpha d\alpha, \quad \operatorname{Im} z < 0.$$

10. Показать, что видоизменённому уравнению Бесселя

$$z^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} - (z^2 + p^2) y = 0$$

удовлетворяет функция

$$I_p(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m! \Gamma(p+m+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{p+2m}$$

где

$$I_p(z) = e^{-\frac{p\pi i}{2}} J_p(iz) \quad \text{при } -\pi < \arg z < \frac{\pi}{2}.$$

Наиболее употребительное независимое решение определяется соотношением

$$K_p(z) = \frac{\pi i}{2} e^{\frac{p\pi i}{2}} H_p^{(1)}(iz).$$

Полная совокупность рекуррентных соотношений для этих функций приведена у Ватсона, Bessel Functions, стр. 79.

11. Доказать следующие интегральные представления видоизменённых функций Бесселя:

$$\begin{aligned} I_p(z) &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^p \int_0^\pi \operatorname{ch}(z \cos \alpha) \sin^{2p} \alpha \, d\alpha = \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^p \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{p-\frac{1}{2}} \operatorname{ch}(zt) \, dt = \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^p \int_0^\pi e^{\pm z \cos \alpha} \sin^{2p} \alpha \, d\alpha, \\ K_p(z) &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^p \int_0^\infty e^{-z \operatorname{ch} \alpha} \operatorname{sh}^{2p} \alpha \, d\alpha. \end{aligned}$$

Предполагается, что

$$\operatorname{Re}\left(p+\frac{1}{2}\right) > 0 \quad \text{и} \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2}.$$

12. Показать, что для очень больших значений аргументов асимптотическое поведение видоизменённых функций Бесселя даётся выражениями

$$I_p(z) \simeq \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (p, m)}{(2z)^m} + \frac{e^{-z + \left(p+\frac{1}{2}\right)\pi i}}{\sqrt{2\pi z}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(p, m)}{(2z)^m},$$

если $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3}{2}\pi$,

$$K_p(z) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(p, m)}{(2z)^m}, \quad |\arg z| < \frac{3}{2}\pi,$$

где

$$(p, m) = \frac{\Gamma\left(p+m+\frac{1}{2}\right)}{m! \Gamma\left(p-m+\frac{1}{2}\right)} = \frac{(4p^2-1)(4p^2-3^2)\dots[4p^2-(2m-1)^2]}{2^{2m} m!}.$$

Оставляя лишь первый член, получаем

$$I_p(z) \simeq \sqrt{\frac{1}{2\pi z}} e^z, \quad K_p(z) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}.$$

13. Доказать, что если $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ — расстояние между двумя точками, то обратное расстояние можно представить в виде

$$\frac{1}{R} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \beta z K_0(\beta r) d\beta,$$

где $K_0(\beta r)$ — видоизменённая функция Бесселя, определенная в задаче 10.

14. В качестве частного случая задачи 4 показать, что уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

удовлетворяет функция

$$\psi(r, t) = K_0(ikr) e^{i\omega t},$$

где $k = \omega/c$, а K_0 — видоизменённая функция Бесселя, определенная в задаче 10. Это решение играет в распространении двумерных волн такую же роль, какую в трёх измерениях играет функция e^{ikR}/R .

15. Показать, что уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \lambda^2 \psi = 0$$

удовлетворяет функция

$$\psi = \frac{1}{n} J_0(\lambda r) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{i \frac{m}{n} \frac{\pi}{2}} J_{\frac{m}{n}}(\lambda r) \cos \frac{m}{n} \theta,$$

имеющая период $2n\pi$ по θ и поэтому многозначная относительно обхода вокруг оси. Показать, что это решение можно представить интегралом

$$\psi = \frac{1}{2\pi n} \int_C \frac{e^{\frac{i\alpha}{n}}}{\frac{i\alpha}{en} - 1} e^{i\lambda r \cos(\theta - \alpha)} d\alpha$$

по надлежащим образом выбранному контуру C в комплексной плоскости α . Это решение всюду конечно и непрерывно. В бесконечности ψ ведёт себя, как плоская волна, если $|\theta| < \pi$, и обращается в нуль (функция регулярна), если θ лежит между какой-либо парой предельных значений

$$\pi < \theta < 3\pi, \quad 3\pi < \theta < 5\pi, \quad \dots \quad -3\pi < \theta < -\pi,$$

которые определяют 2-й 3-й... n -й листы римановой поверхности. Такая многослистная волновая функция применена Зоммерфельдом в задачах дифракции.

16. Вывести в явном виде выражения для радиального и тангенциального импедансов эллиптических цилиндрических электромагнитных волн.

17. Показать, что интеграл

$$\psi = \int_0^{\infty} e^{\pm iz \sqrt{k^2 - \lambda^2}} \frac{J_0(\lambda r)}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} f(\lambda) \lambda d\lambda$$

является цилиндрической волновой функцией, равной e^{ikR}/R , $R^2 = r^2 + z^2$ при $f(\lambda) = 1$.

ГЛАВА VII

СФЕРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

В предыдущей главе было показано, как аналитические трудности, связанные с рассмотрением *векторного* дифференциального уравнения в криволинейных координатах, могут быть преодолены в цилиндрической системе координат разложением поля на два частичных, каждое из которых может быть получено из скалярной функции, удовлетворяющей волновому уравнению. К счастью, этот приём применим также и в сферических координатах, к которым мы сейчас обратимся. Особые преимущества цилиндрических и сферических координат являются следствием простоты их геометрических свойств. Более глубокое представление о сущности стоящей перед нами задачи и о трудностях, которые появляются при переходе к криволинейным координатам в общем случае, мы получим предварительно коротко изучив векторное волновое уравнение.

ВЕКТОРНОЕ ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

7.1. Фундаментальная система решений. В пределах замкнутой области, из которой удалены все источники и которая заполнена однородной изотропной средой, все векторы, характеризующие электромагнитное поле, именно векторы поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$, векторный потенциал и вектор Герца, удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению. Если через $\mathbf{C}$ обозначить какой-либо из этих векторов, то это уравнение имеет вид:

$$\Delta \mathbf{C} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{C}}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} = 0. \quad (1)$$

В силу линейности этого волнового уравнения поле, произвольно меняющееся во времени, может быть построено из гармонических решений, и мы не уменьшим общности, если положим, что вектор $\mathbf{C}$ содержит время только в виде множителя $e^{-i\omega t}$. Под оператором Δ , действующим на вектор, мы должны понимать $\Delta \mathbf{C} = \text{grad div } \mathbf{C} - \text{rot rot } \mathbf{C}$; поэтому вместо (1) мы пишем

$$\text{grad div } \mathbf{C} - \text{rot rot } \mathbf{C} + k^2 \mathbf{C} = 0, \quad (2)$$

где, как обычно, $k^2 = \varepsilon \mu \omega^2 + i \sigma \mu \omega$.

Векторное уравнение (2) всегда может быть заменено соответствующей системой трёх скалярных уравнений, но разрешить эту систему относительно какой-либо из компонент $\mathbf{C}$ в большинстве случаев оказывается практически невозможным [см. (85), стр. 55]. Лишь в том случае, когда мы разлагаем $\mathbf{C}$ на три прямоугольные компоненты, мы получаем три независимых уравнения

$$\Delta C_j + k^2 C_j = 0, \quad (j = x, y, z) \quad (3)$$

где оператор Δ может быть представлен уже как в прямоугольных, так и в криволинейных координатах. До сих пор определению независимых *век-*

торных решений уравнения (2) было уделено очень мало внимания, но недавно такая попытка была предпринята Ганzenом¹⁾ в ряде интересных работ, посвящённых исследованию излучения антенн.

Пусть скалярная волновая функция ψ является решением уравнения

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0, \quad (4)$$

и пусть $\mathbf{a}$ будет каким-либо постоянным единичным вектором. Мы строим теперь три следующих независимых векторных решения уравнения (2):

$$\mathbf{L} = \text{grad } \psi, \quad \mathbf{M} = \text{rot}(\mathbf{a}\psi), \quad \mathbf{N} = \frac{1}{k} \text{rot } \mathbf{M}. \quad (5)$$

Если $\mathbf{C}$ в уравнении (2) положить равным $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$ или $\mathbf{N}$, то уравнение (2) будет удовлетворено тождественно при условии, что ψ удовлетворяет уравнению (4). Ясно, что, поскольку $\mathbf{a}$ — постоянный вектор, мы можем написать $\mathbf{M}$ в виде

$$\mathbf{M} = [\mathbf{L}, \mathbf{a}] = \frac{1}{k} \text{rot } \mathbf{N}. \quad (6)$$

Для одной и той же производящей функции ψ вектор $\mathbf{M}$ перпендикулярен к вектору $\mathbf{L}$, т. е.

$$\mathbf{LM} = 0. \quad (7)$$

Векторные функции $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ обладают некоторыми замечательными свойствами, следующими непосредственно из их определения. Вектор $\mathbf{L}$ безвихревой и

$$\text{rot } \mathbf{L} = 0, \quad \text{div } \mathbf{L} = \Delta\psi = -k^2\psi, \quad (8)$$

векторы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ соленоидальны:

$$\text{div } \mathbf{M} = 0, \quad \text{div } \mathbf{N} = 0. \quad (9)$$

Частные решения уравнения (4), конечные, непрерывные и однозначные в данной области, образуют дискретную систему. Обозначим временно какое-либо из этих решений через ψ_n . С каждой из характеристических функций ψ_n связано три векторных решения уравнения (2) $\mathbf{L}_n$, $\mathbf{M}_n$ и $\mathbf{N}_n$, ни одна пара из которых не коллинеарна. Можно предположить, что произвольная волновая функция может быть представлена в виде комбинации характеристических векторных функций; коэффициенты разложения могут быть определены, поскольку $\mathbf{L}_n$, $\mathbf{M}_n$ и $\mathbf{N}_n$ обладают свойствами ортогональности, которые мы в дальнейшем докажем. Если заданная функция чисто соленоидальная, то она может быть представлена в виде комбинации только $\mathbf{M}_n$ и $\mathbf{N}_n$. Если же дивергенция данной векторной функции нулю не равна, то в разложении должны присутствовать и функции $\mathbf{L}_n$.

Векторы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$, очевидно, пригодны для представления полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, так как каждый из них пропорционален ротору другого. Таким образом, если время входит только в виде множителя $e^{-i\omega t}$ и если плотность свободных зарядов всюду равна нулю, то для однородной изотропной среды с проводимостью σ мы имеем

$$\mathbf{E} = \frac{i\omega\mu}{k^2} \text{rot } \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{i\omega\mu} \text{rot } \mathbf{E}. \quad (10)$$

Допустим теперь, что мы можем разложить векторный потенциал по характеристическим векторным функциям в виде

$$\mathbf{A} = \frac{i}{\omega} \sum_n (a_n \mathbf{M}_n + b_n \mathbf{N}_n + c_n \mathbf{L}_n), \quad (11)$$

¹⁾ Hansen, *Phys. Rev.* 47, 139 — 143, January 1935; *Physics* 7, 460 — 465, December, 1936; *J. Applied Phys.* 8, 284 — 286, April, 1937.

где коэффициенты a_n , b_n и c_n должны быть найдены из распределения токов.

Согласно (8), (10) и соотношению $\mu \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ мы получаем для векторов поля

$$\mathbf{E} = - \sum_n (a_n \mathbf{M}_n + b_n \mathbf{N}_n), \quad \mathbf{H} = - \frac{k}{i\omega\mu} \sum_n (a_n \mathbf{N}_n + b_n \mathbf{M}_n). \quad (12)$$

Скалярный потенциал φ не играет роли в вычислениях, но, очевидно, может быть определён непосредственно из (11), так как согласно (27), стр. 36, $\text{div } \mathbf{A} = \frac{i}{\omega} k^2 \varphi$; и, следовательно, из (8)

$$\varphi = - \sum_n c_n \psi_n. \quad (13)$$

Таким образом, $\text{grad } \varphi = - \sum_n c_n \mathbf{L}_n$, и соотношение

$$\mathbf{E} = - \text{grad } \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

очевидно, снова приводит к формуле (12). Наконец, если мы напомним, что при данных условиях электромагнитное поле может быть выражено через два вектора Герца с помощью уравнений

$$\mathbf{E} = \text{rot rot } \mathbf{\Pi} + i\omega\mu \text{rot } \mathbf{\Pi}^*, \quad \mathbf{H} = \frac{k^2}{i\omega\mu} \text{rot } \mathbf{\Pi} + \text{rot rot } \mathbf{\Pi}^*, \quad (14)$$

то отсюда становится сразу же ясным, что

$$\mathbf{\Pi} = - \frac{1}{k} \sum_n b_n \psi_n \mathbf{a}, \quad \mathbf{\Pi}^* = - \frac{1}{i\omega\mu} \sum_n a_n \psi_n \mathbf{a}, \quad (15)$$

где $\mathbf{a}$ — постоянный вектор.

Прежде чем применить эти результаты к цилиндрической и сферической системам координат, мы рассмотрим элементарный пример волн в прямоугольных координатах. Плоская волна, волновой вектор которой равен $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$, может быть представлена в виде

$$\psi = e^{i\mathbf{k}\mathbf{R} - i\omega t}, \quad (16)$$

где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор, проведённый из фиксированного начала отсчёта. Так как $\mathbf{k}\mathbf{R} = k_x x + k_y y + k_z z$, то легко видеть, что

$$\mathbf{L} = i\psi \mathbf{k}, \quad \mathbf{M} = i\psi [\mathbf{k}, \mathbf{a}], \quad \mathbf{N} = \frac{1}{k} \psi [[\mathbf{k}, \mathbf{a}], \mathbf{k}]. \quad (17)$$

В этом частном случае $\mathbf{LM} = \mathbf{MN} = \mathbf{NL} = 0$; все три вектора взаимно перпендикулярны и $\mathbf{L}$ — чисто продольная волна. Пусть α и β — полярные углы, определяющие направление вектора $\mathbf{k}$, как это показано на рис. 66, стр. 319; общее решение уравнения (2) может быть получено интегрированием этих функций для плоской волны по всем возможным направлениям. Если $g(\alpha, \beta)$ — скалярная амплитуда (весовой множитель), то в какой-либо координатной системе мы можем написать для $\mathbf{L}$ при выполнении условий сходимости

$$\mathbf{L} = ie^{-i\omega t} \int d\alpha \int d\beta g(\alpha, \beta) \mathbf{k}(\alpha, \beta) e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} \quad (18)$$

и аналогично для $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$

$$\mathbf{M} = ie^{-i\omega t} \int d\alpha \int d\beta g(\alpha, \beta) [\mathbf{k}, \mathbf{a}] e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}}, \quad (19)$$

$$\mathbf{N} = \frac{1}{k} e^{-i\omega t} \int d\alpha \int d\beta g(\alpha, \beta) [[\mathbf{k}, \mathbf{a}], \mathbf{k}] e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}}. \quad (20)$$

7.2. Применение к цилиндрическим координатам¹⁾. Скалярные характеристические функции волнового уравнения в цилиндрических координатах были приведены в уравнении (6), стр. 315. Применение функций комплексного угла $\exp(in\theta)$ связано с некоторыми неудобствами, и, оказывается, проще пользоваться двумя действительными функциями $\cos n\theta$ и $\sin n\theta$, которые мы будем обозначать просто как чётные и нечётные. Цилиндрические волновые функции, построенные из бесселевых функций первого рода и, следовательно, конечные на оси, будут обозначаться через $\psi_n^{(1)}$, а волновые функции, образованные из $N_n(\lambda r)$ и $H_n^{(1)}(\lambda r)$ — соответственно через $\psi_n^{(2)}$ и $\psi_n^{(3)}$. Таким образом

$$\left. \begin{aligned} \psi_{en\lambda}^{(1)} &= \cos n\theta J_n(\lambda r) e^{ihz - i\omega t}, \\ \psi_{on\lambda}^{(1)} &= \sin n\theta J_n(\lambda r) e^{ihz - i\omega t}, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_{en\lambda}^{(3)} &= \cos n\theta H_n^{(1)}(\lambda r) e^{ihz - i\omega t}, \\ \psi_{on\lambda}^{(3)} &= \sin n\theta H_n^{(1)}(\lambda r) e^{ihz - i\omega t}, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

где, как обычно, $\lambda = \sqrt{k^2 - h^2} = k \sin \alpha$. Функции первого рода выражаются определёнными интегралами вида

$$\left. \begin{aligned} \psi_{en\lambda}^{(1)} &= \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\lambda r \cos(\beta - \theta)} \cos n\beta d\beta e^{ihz - i\omega t}, \\ \psi_{on\lambda}^{(1)} &= \frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\lambda r \cos(\beta - \theta)} \sin n\beta d\beta e^{ihz - i\omega t}, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

а представления для функций других родов отличаются только выбором пути интегрирования.

Из (23) мы построим теперь интегральное представление для *векторных* волновых функций. Так

$$\mathbf{L}_{en\lambda}^{(1)} = \text{grad } \psi_{en\lambda}^{(1)} = \frac{\partial \psi_{en\lambda}^{(1)}}{\partial r} \mathbf{i}_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_{en\lambda}^{(1)}}{\partial \theta} \mathbf{i}_2 + \frac{\partial \psi_{en\lambda}^{(1)}}{\partial z} \mathbf{i}_3. \quad (24)$$

Дифференцируя (23) по r , θ и z и замечая, что $k \sin \alpha \cos(\beta - \theta)$, $k \sin \alpha \sin(\beta - \theta)$ и $k \cos \alpha$ являются компонентами вектора $\mathbf{k}$ относительно осей, определяемых единичными векторами $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$, так что

$$\mathbf{k} = \mathbf{i}_1 k \sin \alpha [\cos(\beta - \theta) + \mathbf{i}_2 k \sin \alpha \sin(\beta - \theta) + \mathbf{i}_3 k \cos \alpha, \quad (25)$$

мы получаем для чётной функции выражение

$$\mathbf{L}_{en\lambda}^{(1)} = \frac{i^{1-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{k} e^{i\lambda r \cos(\beta - \theta)} \cos n\beta d\beta e^{ihz - i\omega t}, \quad (26)$$

которое имеет тот же вид, что и (18). Соответствующее выражение для нечётной функции получается заменой под интегралом $\cos n\beta$ на $\sin n\beta$. При применении этих характеристических функций для разложения по ним произвольной векторной волны представляется удобным исключить множитель

¹⁾ Результаты этого параграфа следует сравнить с уравнениями (36) и (37) на стр. 318—319.

$\exp(ihz - i\omega t)$, поэтому определим векторные аналоги скалярной функции $f(r, \theta)$ (глава VI) соотношениями

$$\left. \begin{aligned} L_n &= l_n e^{ihz - i\omega t}, \quad M_n = m_n e^{ihz - i\omega t}, \\ N_n &= n_n e^{ihz - i\omega t}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Из (26) имеем

$$l_{en\lambda}^{(1)} = \frac{i^{1-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} k e^{i\lambda r \cos(\beta-\theta)} \frac{\cos}{\sin} n\beta d\beta. \quad (28)$$

Таким же способом мы получим интегральные представления и для других независимых решений. Если в качестве постоянного вектора $\mathbf{a}$ мы возьмём единичный вектор $\mathbf{i}_3$, направленный вдоль оси z , то найдём:

$$M_n^{(1)} = [\text{grad } \psi_n^{(1)}, \mathbf{i}_3] = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_n^{(1)}}{\partial \theta} \mathbf{i}_1 - \frac{\partial \psi_n^{(1)}}{\partial r} \mathbf{i}_2, \quad (29)$$

откуда нетрудно получить, что

$$m_{en\lambda}^{(1)} = \frac{i^{1-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\mathbf{k}, \mathbf{i}_3] e^{i\lambda r \cos(\beta-\theta)} \frac{\cos}{\sin} n\beta d\beta; \quad (30)$$

и так как $\text{rot } M_n = k N_n$, то мы имеем

$$n_{en\lambda}^{(1)} = \frac{i^{1-n}}{2\pi k} \int_0^{2\pi} (k^2 \mathbf{i}_3 - h\mathbf{k}) e^{i\lambda r \cos(\beta-\theta)} \frac{\cos}{\sin} n\beta d\beta. \quad (31)$$

Исходя из этих интегралов, можно легко получить и прямоугольные компоненты волновых функций. Фигурирующая в подинтегральном выражении векторная функция угла разлагается на свои прямоугольные компоненты, которые могут быть затем объединены с $\cos n\beta$ или с $\sin n\beta$. Получающиеся в результате скалярные интегралы могут быть вычислены путём сравнения их с (23).

Для того чтобы произвольную функцию от r и θ можно было разложить по функциям $l_{en\lambda}$, $m_{en\lambda}$ и $n_{en\lambda}$, мы должны показать, что эти функции

ортогональны. Пусть $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$ и $\mathbf{i}_3$ будут единичными базисными векторами круговой цилиндрической системы координат (рис. 7, стр. 56), а $Z_n(\lambda r)$ — цилиндрическая бесселева функция любого рода. Тогда, согласно (5), мы получаем

$$l_{en\lambda} = \frac{\partial}{\partial r} Z_n(\lambda r) \frac{\cos}{\sin} n\theta \mathbf{i}_1 + \frac{n}{r} Z_n(\lambda r) \frac{\sin}{\cos} n\theta \mathbf{i}_2 + ih Z_n(\lambda r) \frac{\cos}{\sin} n\theta \mathbf{i}_3, \quad (32)$$

$$m_{en\lambda} = + \frac{n}{r} Z_n(\lambda r) \frac{\sin}{\cos} n\theta \mathbf{i}_1 - \frac{\partial}{\partial r} Z_n(\lambda r) \frac{\cos}{\sin} n\theta \mathbf{i}_2, \quad (33)$$

$$n_{en\lambda} = \frac{ih}{k} \frac{\partial}{\partial r} Z_n(\lambda r) \frac{\cos}{\sin} n\theta \mathbf{i}_1 + \frac{ihn}{kr} Z_n(\lambda r) \frac{\sin}{\cos} n\theta \mathbf{i}_2 + \frac{\lambda^2}{k} Z_n(\lambda r) \frac{\cos}{\sin} n\theta \mathbf{i}_3. \quad (34)$$

Из этих выражений сразу же видно, что интеграл по θ от 0 до 2π от скалярного произведения любых двух из этих функций равен нулю, если только индексы n у этих функций различны. Далее:

$$\int_0^{2\pi} l_{en\lambda} l_{on\lambda} d\theta = \int_0^{2\pi} l_{en\lambda} l_{en'\lambda} d\theta = 0, \quad \text{если } n \neq n'. \quad (35)$$

Будем подразумевать под $\tilde{1}$ функцию 1 , у которой знак при ih изменён на обратный¹⁾. Тогда нормирующий множитель может быть найден из интеграла

$$\int_0^{2\pi} l_{e_{n\lambda}} \tilde{l}_{e_{n\lambda'}} d\theta = (1 + \delta) \pi \left[\frac{\partial}{\partial r} Z_n(\lambda r) \frac{\partial}{\partial r} Z_n(\lambda' r) + \right. \\ \left. + \frac{n^2}{r^2} Z_n(\lambda r) Z_n(\lambda' r) + hh' Z_n(\lambda r) Z_n(\lambda' r) \right], \quad (36)$$

где $\delta = 0$ при $n \neq 0$, и $\delta = 1$ при $n = 0$. Первые два члена правой части можно объединить с помощью рекуррентных соотношений (24) и (25), стр. 317, что даёт

$$\int_0^{2\pi} l_{e_{n\lambda}} \tilde{l}_{e_{n\lambda'}} d\theta = (1 + \delta) \pi \left\{ \frac{\lambda\lambda'}{2} [Z_{n-1}(\lambda r) Z_{n-1}(\lambda' r) + \right. \\ \left. + Z_{n+1}(\lambda r) Z_{n+1}(\lambda' r)] + hh' Z_n(\lambda r) Z_n(\lambda' r) \right\}. \quad (37)$$

Те же рекуррентные соотношения приводят также к следующим интегралам:

$$\int_0^{2\pi} m_{en\lambda} m_{on\lambda} d\theta = \int_0^{2\pi} m_{e_{n\lambda}} m_{e_{n'\lambda'}} d\theta = 0 \quad (n \neq n'), \quad (38)$$

$$\int_0^{2\pi} m_{e_{n\lambda}} \tilde{m}_{e_{n\lambda'}} d\theta = (1 + \delta) \pi \frac{\lambda\lambda'}{2} [Z_{n-1}(\lambda r) Z_{n-1}(\lambda' r) + \\ + Z_{n+1}(\lambda r) Z_{n+1}(\lambda' r)], \quad (39)$$

$$\int_0^{2\pi} n_{en\lambda} n_{on\lambda} d\theta = \int_0^{2\pi} n_{e_{n\lambda}} n_{e_{n'\lambda'}} d\theta = 0 \quad (n \neq n'), \quad (40)$$

$$\int_0^{2\pi} n_{e_{n\lambda}} \tilde{n}_{e_{n\lambda'}} d\theta = (1 + \delta) \frac{\pi}{k^2} \left\{ \frac{hh'\lambda\lambda'}{2} [Z_{n-1}(\lambda r) Z_{n-1}(\lambda' r) + \right. \\ \left. + Z_{n+1}(\lambda r) Z_{n+1}(\lambda' r)] + (\lambda\lambda')^2 Z_n(\lambda r) Z_n(\lambda' r) \right\}. \quad (41)$$

Кроме того,

$$\int_0^{2\pi} l_{e_{n\lambda}} m_{e_{n\lambda'}} d\theta = \int_0^{2\pi} m_{e_{n\lambda}} n_{e_{n\lambda'}} d\theta = \int_0^{2\pi} l_{e_{n\lambda}} \tilde{n}_{e_{n\lambda'}} d\theta = 0, \quad (42)$$

и, воспользовавшись ещё раз тем же рекуррентным соотношением, мы получаем

$$\int_0^{2\pi} l_{e_{n\lambda}} m_{o_{n\lambda'}} d\theta = \int_0^{2\pi} m_{e_{n\lambda}} n_{o_{n\lambda'}} d\theta = 0. \quad (43)$$

Осталась только одна комбинация, которая, к сожалению, приводит к некоторой трудности:

$$\int_0^{2\pi} l_{e_{n\lambda}} \tilde{n}_{e_{n\lambda'}} d\theta = i(1 + \delta) \frac{\pi}{k} \left\{ h\lambda'^2 Z_n(\lambda r) Z_n(\lambda' r) - \right. \\ \left. - \frac{\lambda\lambda'h}{2} [Z_{n-1}(\lambda r) Z_{n-1}(\lambda' r) + Z_{n+1}(\lambda r) Z_{n+1}(\lambda' r)] \right\}, \quad (44)$$

¹⁾ Эта функция не обязательно является комплексно сопряжённой, поскольку λ и h могут быть комплексными.

т. е. получается величина, неравная нулю тождественно. Таким образом, ввиду (44), система векторов $\mathbf{l}_{e_{n\lambda}}$, $\mathbf{m}_{e_{n\lambda}}$ и $\mathbf{n}_{e_{n\lambda}}$ не является полностью ортогональной по отношению к θ . Во многих случаях это не существенно, ибо, если дивергенция векторной функции равна нулю, как это и имеет место для векторов электромагнитного поля в отсутствие свободных зарядов, то она может быть разложена только по $\mathbf{m}_{e_n}$ и $\mathbf{n}_{e_{n\lambda}}$. Но полное разложение векторного потенциала требует включения и функций $\mathbf{l}_{e_{n\lambda}}$ ¹⁾.

Для случая функций первого рода Ганзен применил теорему Фурье-Бесселя с тем, чтобы получить полную ортогональность и упростить выражения для нормирующих множителей. После очевидной замены переменных мы получаем из (53) и (54), стр. 327,

$$f(\lambda) = \int_0^\infty r dr \int_0^\infty \lambda' d\lambda' f(\lambda') J_n(\lambda' r) J_n(\lambda r). \quad (45)$$

Заменяем в (37), (39), (41) и (44) $Z_n(\lambda r)$ на $J_n(\lambda r)$ и применяем соотношение (45). Вместо $f(\lambda')$ мы будем иметь λ' , $h' = \sqrt{k^2 - \lambda'^2}$, $h'\lambda'$ и т. д. Необходимо заметить при этом, что справедливость теоремы Фурье-Бесселя

была доказана только для того случая, когда интеграл $\int_0^\infty |f(\lambda)| \sqrt{\lambda} d\lambda$

существует; в данном случае это условие не выполняется. Ухищрения, которыми пользуются для того, чтобы обеспечить сходимость, связанные с математическими трудностями, которые выходят за пределы этой книги. С некоторыми оговорками мы можем ввести экспоненциальный множитель, обеспечивающий сходимость, как мы делали это в теории преобразования Лапласа на стр. 276. Будем, следовательно, под $\mathbf{l}_{e_{n\lambda}}^{(1)}$ подразумевать предел,

к которому стремится $\mathbf{l}_{e_{n\lambda}}^{(1)} e^{-|s|\lambda}$ при $s \rightarrow 0$. Тогда

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^\infty r dr \int_0^\infty \lambda' d\lambda' \{ \lambda' e^{-|s|\lambda'} \} J_n(\lambda' r) J_n(\lambda r) = \lambda. \quad (46)$$

В соответствии с этим выражения для нормирующих множителей примут вид

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \mathbf{l}_{e_{n\lambda}}^{(1)} \tilde{\mathbf{l}}_{e_{n\lambda'}}^{(1)} \lambda' d\lambda' r dr d\theta = (1 + \delta) \pi \lambda^2, \quad (47)$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \mathbf{m}_{e_{n\lambda}}^{(1)} \tilde{\mathbf{m}}_{e_{n\lambda'}}^{(1)} \lambda' d\lambda' r dr d\theta = (1 + \delta) \pi \lambda^2, \quad (48)$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \mathbf{n}_{e_{n\lambda}}^{(1)} \tilde{\mathbf{n}}_{e_{n\lambda'}}^{(1)} \lambda' d\lambda' r dr d\theta = (1 + \delta) \pi \lambda^2, \quad (49)$$

¹⁾ Полнота системы векторных функций не была нами доказана, но её можно предполагать, исходя из полноты системы функций $\psi_{e_{n\lambda}}$.

тогда как для неприятного выражения (44) мы получим¹⁾

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{2\pi} l_{en\lambda}^{(1)} \tilde{n}_{en\lambda'}^{(1)} \lambda' d\lambda' r dr d\theta = 0. \quad (50)$$

СКАЛЯРНОЕ ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ В СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

7.3. Элементарные сферические волны. Поскольку произвольно изменяющееся во времени поле может быть представлено по теореме Фурье в виде суммы гармонических составляющих, мы не уменьшим общности результатов, если будем в дальнейшем полагать, что

$$\psi = f(R, \theta, \varphi) e^{-i\omega t}. \quad (1)$$

В однородной изотропной среде функция $f(R, \theta, \varphi)$ должна удовлетворять уравнению

$$\Delta f + k^2 f = 0, \quad (2)$$

которое, согласно (95), стр. 57, имеет в сферических координатах вид

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial f}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + k^2 f = 0. \quad (3)$$

Переменные в этом уравнении разделяются, так что, положив

$$f = f_1(R) f_2(\theta) f_3(\varphi),$$

мы получим

$$R^2 \frac{d^2 f_1}{dR^2} + 2R \frac{df_1}{dR} + (k^2 R^2 - p^2) f_1 = 0, \quad (4)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{df_2}{d\theta} \right) + \left(p^2 - \frac{q^2}{\sin^2 \theta} \right) f_2 = 0, \quad (5)$$

$$\frac{d^2 f_3}{d\varphi^2} + q^2 f_3 = 0. \quad (6)$$

Параметры p и q , являющиеся постоянными разделения, определяются из физического требования однозначности поля в любой данной точке пространства. $f_3(\varphi)$ должна быть, очевидно, периодической функцией φ с периодом, равным 2π , и область возможных значений q ограничивается, следовательно, целыми числами $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Чтобы определить параметр p , мы покажем сначала, что решение f_2 тождественно с присоединёнными функциями Лежандра. После подстановки $\eta = \cos \theta$ уравнение (5) принимает вид

$$(1 - \eta^2) \frac{d^2 f_2}{d\eta^2} - 2\eta \frac{df_2}{d\eta} + \left(p^2 - \frac{m^2}{1 - \eta^2} \right) f_2 = 0. \quad (7)$$

Это уравнение имеет регулярные особенности только в точках $\eta = -1$, $\eta = +1$ и $\eta = \infty$. Его решениями будут, следовательно, гипергеометрические функции. Далее, при $m = 0$ (7) сводится к уравнению Лежандра, которое имеет два независимых решения. Каждое из этих решений может быть разложено в ряд по возрастающим степеням η в окрестности $\eta = 0$. Однако в общем случае эти ряды при $\eta = \pm 1$ не сходятся. Но если взять $p^2 = n(n+1)$, где $n = 0, 1, 2, \dots$, то один из рядов оборвётся после конечного числа членов и будет иметь конечное значение в полюсах. Эти решения

¹⁾ Следует заметить, что предел, к которому стремится интеграл (46) при $s \rightarrow 0$, не обязательно равен значению интеграла при $s = 0$, так как последнее требует непрерывности функции, определяемой этим интегралом, в окрестности точки $s = 0$. Этот момент и лежит в основе всей теории преобразования Лапласа. См., например, у Carslaw, Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals, 2-е изд., стр. 293, Macmillan, 1921.

в виде полиномов, удовлетворяющие уравнению

$$(1 - \eta^2) \frac{d^2 v}{d\eta^2} - 2\eta \frac{dv}{d\eta} + n(n+1)v = 0, \quad (8)$$

называются полиномами Лежандра и обозначаются через $P_n(\eta)$. Если продифференцировать (8) m раз по η , то получится

$$(1 - \eta^2) \frac{d^2 w}{d\eta^2} - 2(m+1)\eta \frac{dw}{d\eta} + [n(n+1) - m(m+1)]w = 0, \quad (9)$$

где $w = d^m v / d\eta^m$. Сделав, наконец, последнюю замену зависимой переменной $w = (1 - \eta^2)^{-\frac{m}{2}} f_2(\eta)$, мы получим уравнение (7) в виде

$$(1 - \eta^2) \frac{d^2 f_2}{d\eta^2} - 2\eta \frac{df_2}{d\eta} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1 - \eta^2} \right] f_2 = 0. \quad (10)$$

Решениями уравнения (10), конечными в полюсах $\eta = \pm 1$ и, следовательно, периодическими относительно θ , будут присоединённые полиномы Лежандра

$$f_2(\eta) = P_n^m(\eta) = (1 - \eta^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(\eta)}{d\eta^m}. \quad (11)$$

Для каждой пары целых чисел существует ещё одно независимое решение $Q_n^m(\eta)$, которое обращается в бесконечность при $\eta = \pm 1$ и которое, следовательно, непригодно, для представления физических полей в пределах всей сферы.

Данное в (11) определение присоединённых полиномов Лежандра имеет смысл только для *положительных* целочисленных n и m . Функции с отрицательными индексами довольно просто связаны с функциями с положительными индексами, но мы не приводим их, так как они нам не понадобятся. Для того чтобы избежать какой-либо путаницы в этом вопросе, мы возьмём в качестве частных решений (6) *действительные* функции $\cos m\varphi$, $\sin m\varphi$ и ограничим значения m и n целыми положительными числами или нулём. Из (11) ясно, что при $m > n$ полином $P_n^m(\eta)$ равен нулю, так как $P_n(\eta)$ есть полином n -й степени. Действительно, мы имеем

$$P_n^m(\eta) = \frac{(1 - \eta^2)^{\frac{m}{2}}}{2^n n!} \frac{d^{n+m}(\eta^2 - 1)^n}{d\eta^{n+m}}. \quad (12)$$

Функции Лежандра являются наиболее известным примером гипергеометрических функций, свойства которых были изучены настолько подробно, что едва ли представляется возможным в пределах имеющегося в нашем распоряжении места дать сколько-нибудь исчерпывающее изложение многочисленных интегральных представлений этих функций или их разложений в ряды. Мы выпишем только необходимые рекуррентные соотношения:

$$\left. \begin{aligned} (n - m + 1)P_{n+1}^m - (2n + 1)\eta P_n^m + (n + m)P_{n-1}^m &= 0, \\ P_{n-1}^m &= \eta P_n^m - (n - m + 1)\sqrt{1 - \eta^2} P_n^{m-1}, \\ P_{n+1}^m &= \eta P_n^m + (n + m)\sqrt{1 - \eta^2} P_n^{m-1}, \\ \sqrt{1 - \eta^2} P_n^{m+1} &= (n + m + 1)\eta P_n^m - (n - m + 1)P_{n+1}^m, \\ \sqrt{1 - \eta^2} P_n^{m+1} &= 2m\eta P_n^m - (n + m)(n - m + 1)\sqrt{1 - \eta^2} P_n^{m-1}, \\ \sqrt{1 - \eta^2} P_n^m &= \frac{1}{2n + 1}(P_{n+1}^{m+1} - P_{n-1}^{m+1}), \\ \frac{m}{\sqrt{1 - \eta^2}} P_n^m &= \frac{1}{2}\eta[(n - m + 1)(n + m)P_n^{m-1} + P_{n+1}^{m+1}] + \\ &\quad + m\sqrt{1 - \eta^2} P_n^m. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

К ним можно добавить дифференциальные соотношения:

$$\left. \begin{aligned} (1 - \eta^2) \frac{dP_n^m}{d\eta} &= (n+1) \eta P_n^m - (n-m+1) P_{n+1}^m, \\ (1 - \eta^2) \frac{dP_n^m}{d\eta} &= (n+m) P_{n-1}^m - n \eta P_n^m, \\ \frac{dP_n^m}{d\theta} &= -\sqrt{1-\eta^2} \frac{dP_n^m}{d\eta} = \frac{1}{2} \{ (n-m+1)(n+m) P_n^{m-1} - P_n^{m+1} \}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Заметим мимоходом, что этим же соотношениям удовлетворяют и функции второго рода Q_n^m .

Функции $\cos m\varphi P_n^m(\cos \theta)$ и $\sin m\varphi P_n^m(\cos \theta)$ периодичны на поверхности единичной сферы, и число узловых линий определяется индексами m и n . Так при $m=0$ поле от экваториального угла φ не зависит; если при

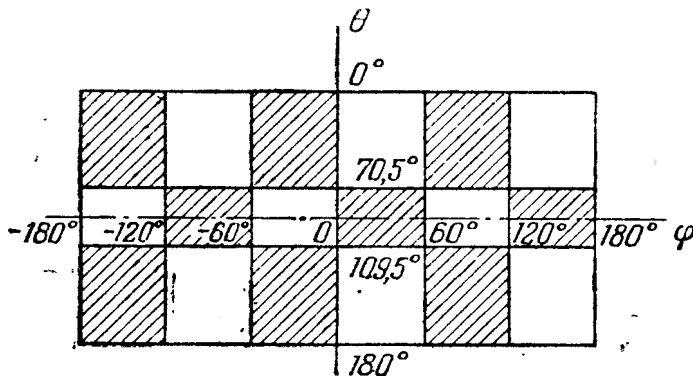


Рис. 69. Развёрнутая поверхность сферы, на которой показаны узлы функции $\sin 3\varphi P_5^3(\cos \theta)$. Заштрихованные области соответствуют её отрицательным значениям.

этом n также равно нулю, то функция на всей поверхности сферы постоянна. При $n=1$ имеется одна узловая линия, проходящая по экватору $\theta = \pi/2$, вдоль которой функция равна нулю. При $n=2$ узловых линий две; они проходят по параллелям, соответствующим приблизительно $\theta = 55^\circ$ и $\theta = 125^\circ$. Таким образом, сфера делится при этом на три зоны; функция положительна в полярных зонах и отрицательна в экваториальной зоне. Продолжая тем же путём дальше, мы получим, очевидно, что число узловых

линий равно n , а число зон, в пределах каждой из которых функция сохраняет свой знак, равно $n+1$. В пределах каждой из зон функция сохраняет свой положительный или отрицательный знак. Поэтому функции $P_n(\cos \theta)$ часто называются *зональными гармоническими функциями*. Если теперь m отлично от нуля, то благодаря множителю $(1-\eta^2)^{\frac{m}{2}}$ функция обращается в нуль в полюсах, а число узловых линий, параллельных экватору, равно $n-m$ (см. приложение IV). Кроме того, функция обращается в нуль и вдоль меридианов, определяемых корнями $\cos m\varphi$ и $\sin m\varphi$. Очевидно, имеется m меридиональных узловых линий, пересекающих широтные узловые линии под прямым углом, и, таким образом, поверхность сферы разделена на прямоугольные области или клетки, в пределах каждой из которых функция попеременно либо положительна, либо отрицательна. Функции $\cos m\varphi P_n^m(\cos \theta)$ и $\sin m\varphi P_n^m(\cos \theta)$ часто называют поэтому *тессеральными гармоническими функциями* n -й степени m -го порядка. Очевидно, имеется $2n+1$ тессеральных гармоник n -й степени. Подобное разделение поверхности сферы на положительные и отрицательные области показано графически для функции $\sin 3\varphi P_5^3(\cos \theta)$ на рис. 69.

Если тессеральные гармонические функции умножить на систему произвольных постоянных и просуммировать, то мы получим *поверхностную сферическую гармоническую функцию* n -й степени, с которой

мы уже имели дело в главе III:

$$Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^n (a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta). \quad (15)$$

Тессеральные гармонические функции образуют полную систему функций, ортогональных на поверхности сферы¹⁾. Интегрированием (12) по частям легко показать, что

$$\int_{-1}^{+1} P_n^m(\eta) P_l^m(\eta) d\eta = 0, \quad \int_{-1}^{+1} P_n^m(\eta) P_l^m(\eta) \frac{d\eta}{1-\eta^2} = 0 \quad (16)$$

при $n \neq l$ или при $m \neq l$ соответственно и что

$$\left. \begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \{P_n^m(\eta)\}^2 d\eta &= \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}, \\ \int_{-1}^{+1} \{P_n^m(\eta)\}^2 \frac{d\eta}{1-\eta^2} &= \frac{1}{m} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Из этих соотношений следует фундаментальная теорема о разложении произвольной функции в ряд по сферическим гармоническим функциям: Пусть $g(\theta, \varphi)$ будет произвольной функцией на поверхности сферы, непрерывной вместе со всеми своими первыми и вторыми производными. Тогда $g(\theta, \varphi)$ может быть представлена в виде абсолютно сходящегося ряда поверхностных гармонических функций

$$g(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_{n0} P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n (a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta)], \quad (18)$$

коэффициенты которого определяются соотношениями

$$\left. \begin{aligned} a_{n0} &= \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi g(\theta, \varphi) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta d\varphi, \\ a_{nm} &= \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi g(\theta, \varphi) P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi \sin \theta d\theta d\varphi, \\ b_{nm} &= \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi g(\theta, \varphi) P_n^m(\cos \theta) \sin m\varphi \sin \theta d\theta d\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

В случае функции, зависящей только от θ , условия сходимости разложения по полиномам Лежандра совпадают с условиями сходимости ряда Фурье. В указанном случае достаточно, чтобы функция $g(\theta)$ и её первая производная были кусочно непрерывны в интервале $0 \leq \theta \leq 2\pi$. С другой стороны, теория сходимости разложения (18) по сферическим поверхностным гармо-

¹⁾ Доказательство этого утверждения и следующей далее теоремы о разложении можно найти в Р. Куранта и Д. Гильберта, Методы математической физики, М.—Л., ГТТИ, 1933, гл. VII, § 5. За дальнейшими подробностями следует обратиться к Hobson, Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics, Cambridge University Press, 1931.

никам представляет значительно бóльшие трудности, и распространение теоремы о разложении на разрывные функции выходит за пределы этого обзора.

Нам осталось только установить характер радиальных функций $f_1(R)$, удовлетворяющих уравнению (4). Если мы напомним f_1 в виде $f_1 = (kR)^{-\frac{1}{2}} v(R)$, то легко показать, что $v(R)$ удовлетворяет уравнению

$$R^2 \frac{d^2 v}{dR^2} + R \frac{dv}{dR} + \left[k^2 R^2 - \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \right] v = 0. \quad (20)$$

Следовательно, согласно разделу 6.5, $v(R)$ — цилиндрические функции целого порядка

$$f_1(R) = \frac{1}{\sqrt{kR}} Z_{n+\frac{1}{2}}(kR). \quad (21)$$

Характеристические или элементарные волновые функции, конечные и однозначные во всех точках на поверхности сферы, будут, следовательно,

$$f_{e_{mn}} = \frac{1}{\sqrt{kR}} Z_{n+\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}kR) P_n^m(\cos \theta) \frac{\cos m\varphi}{\sin m\varphi}. \quad (22)$$

Как и в случае цилиндрических волн, в области, включающей начало координат, мы берём в качестве $Z_{n+\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}kR)$ бесселевы функции первого рода, а

там, где поле представляет собой бегущую волну, — функции третьего рода.

7.4. Свойства радиальных функций. В разное время для радиальных функций $(kR)^{-\frac{1}{2}} Z_{n+\frac{1}{2}}(kR)$ применялись различные обозначения, но ни одно из них не получило всеобщего распространения¹⁾. Мы будем придерживаться обозначений, которые были недавно предложены Морзе²⁾ и которые представляются нам более или менее логически обоснованными. В соответствии с этим мы определим *сферические бесселевы функции* соотношениями

$$\left. \begin{aligned} z_n(\rho) &= \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} Z_{n+\frac{1}{2}}(\rho), & j_n(\rho) &= \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} J_{n+\frac{1}{2}}(\rho), \\ n_n(\rho) &= \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} N_{n+\frac{1}{2}}(\rho), & h_n^{(1)}(\rho) &= \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(\rho), \\ h_n^{(2)}(\rho) &= \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(\rho). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Разложение этих функций в ряд около точки $\rho \rightarrow 0$ может быть получено непосредственно из (8) и (11), стр. 315. Если вспомнить, что $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ и воспользоваться *формулой удвоения*, согласно которой

$$\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(2z)}{2^{2z-1} \Gamma(z)}, \quad (24)$$

то для $j_n(\rho)$ получим

$$j_n(\rho) = 2^n \rho^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (n+m)!}{m! (2n+2m+1)!} \rho^{2m}, \quad (25)$$

¹⁾ См. Watson, Bessel Functions, стр. 55, Cambridge University Press, 1931.

²⁾ Morse, Vibration and Sound, стр. 246, Mc Graw-Hill, 1936.

откуда очевидно, что $j_n(\rho)$ является целой функцией. Точно так же из соотношения $N_{n+\frac{1}{2}}(\rho) = (-1)^{n-1} J_{-n-\frac{1}{2}}(\rho)$ для функции второго рода мы получаем

$$n_n(\rho) = -\frac{1}{2^n n! \rho^{n+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2n-2m+1)}{m! (n-m+1)!} \rho^{2m}. \quad (26)$$

Обратимся теперь к представлениям в случае, когда ρ — очень большое число. На стр. 316 разложение по убывающим степеням ρ было дано для функций произвольного порядка ρ . Подобные ряды формально удовлетворяют уравнению Бесселя, но являются лишь полусходящимися. Однако, как мы можем заметить, при $\rho = n + \frac{1}{2}$ ряды $P_{n+\frac{1}{2}}(\rho)$ и $Q_{n+\frac{1}{2}}(\rho)$ обрываются, так что вопрос о сходимости вообще отпадает. Соответственно с этим, выражения (13) и (14), стр. 316, будут аналитическими представлениями $J_{n+\frac{1}{2}}(\rho)$ и $N_{n+\frac{1}{2}}(\rho)$. Очевидно, кроме того, что эти функции целого порядка могут быть представлены в виде конечного числа членов. Из (23) и из уравнений (13) и (17), стр. 316, мы получаем, что

$$j_n(\rho) = \frac{1}{\rho} \left\{ P_{n+\frac{1}{2}}(\rho) \cos\left(\rho - \frac{n+1}{2} \pi\right) - Q_{n+\frac{1}{2}}(\rho) \sin\left(\rho - \frac{n+1}{2} \pi\right) \right\}, \quad (27)$$

$$n_n(\rho) = \frac{1}{\rho} \left[P_{n+\frac{1}{2}}(\rho) \sin\left(\rho - \frac{n+1}{2} \pi\right) + Q_{n+\frac{1}{2}}(\rho) \cos\left(\rho - \frac{n+1}{2} \pi\right) \right], \quad (28)$$

где

$$P_{n+\frac{1}{2}}(\rho) = 1 - \frac{n(n^2-1)(n+2)}{2^2 \cdot 2! \rho^2} + \frac{n(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)(n+4)}{2^4 \cdot 4! \rho^4} - \dots, \quad (29)$$

$$Q_{n+\frac{1}{2}}(\rho) = \frac{n(n+1)}{2 \cdot 1! \rho} - \frac{n(n^2-1)(n^2-4)(n+3)}{2^3 \cdot 3! \rho^3} + \dots \quad (30)$$

Для функций третьего и четвертого рода эти выражения дают

$$\left. \begin{aligned} h_n^{(1)}(\rho) &= \frac{(-i)^{n+1}}{\rho} e^{i\rho} \{ P_{n+\frac{1}{2}}(\rho) + iQ_{n+\frac{1}{2}}(\rho) \}, \\ h_n^{(2)}(\rho) &= \frac{i^{n+1}}{\rho} e^{-i\rho} \{ P_{n+\frac{1}{2}}(\rho) - iQ_{n+\frac{1}{2}}(\rho) \}. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Эти ряды сходятся весьма быстро, так что при больших ρ достаточно точные значения дают уже одни только первые члены. Таким образом, при $\rho \rightarrow \infty$

$$\left. \begin{aligned} j_n(\rho) &\cong \frac{1}{\rho} \cos\left(\rho - \frac{n+1}{2} \pi\right), & n_n(\rho) &\cong \frac{1}{\rho} \sin\left(\rho - \frac{n+1}{2} \pi\right), \\ h_n^{(1)}(\rho) &\cong \frac{1}{\rho} (-i)^{n+1} e^{i\rho}, & h_n^{(2)}(\rho) &\cong \frac{1}{\rho} i^{n+1} e^{-i\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Рекуррентные соотношения, которым удовлетворяют сферические бesselовы функции, получаются непосредственно из уравнений (24) — (27), стр. 317:

$$z_{n-1} + z_{n+1} = \frac{2n+1}{\rho} z_n, \quad (33)$$

$$\frac{d}{d\rho} z_n(\rho) = \frac{1}{2n+1} \{ n z_{n-1} - (n+1) z_{n+1} \}, \quad (34)$$

$$\frac{d}{d\rho} \{ \rho^{n+1} z_n(\rho) \} = \rho^{n+1} z_{n-1}, \quad \frac{d}{d\rho} \{ \rho^{-n} z_n(\rho) \} = -\rho^{-n} z_{n+1}. \quad (35)$$

Определив таким образом радиальные функции, мы можем, наконец, написать общее решение уравнений (3) в виде суммы элементарных сферических волновых функций. В том случае, когда $f(R, \theta, \varphi)$ должна быть конечна в начале координат, мы имеем

$$f^{(1)}(R, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} j_n(kR) \left\{ a_{n0} P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n (a_{nm} \cos m\varphi + b_{nm} \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta) \right\}, \quad (36)$$

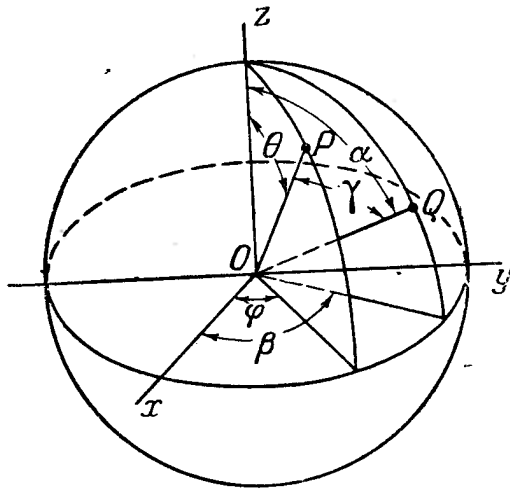
в то время как поле, у которого поверхности равной фазы перемещаются наружу, выражается функцией $f^{(3)}(R, \theta, \varphi)$, получаемой из (36) заменой $j_n(kR)$ на $h_n^{(1)}(kR)$. Сферически симметричные решения получаются в том случае, когда все коэффициенты, за исключением a_{00} , равны нулю. С точностью до произвольного множителя мы получаем, следовательно, что

$$\left. \begin{aligned} f_0^{(1)} &= \frac{\sin kR}{kR}, & f_0^{(2)} &= \frac{\cos kR}{kR}, \\ f_0^{(3)} &= \frac{1}{kR} e^{ikR}, & f_0^{(4)} &= \frac{1}{kR} e^{-ikR}. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

7.5. Теорема сложения для полиномов Лежандра. Если $g(\theta, \varphi)$ — какая-либо функция, удовлетворяющая условиям теоремы о разложении (18), то её значение в полюсе $\theta = 0$ должно быть равно

$$[g(\theta, \varphi)]_{\theta=0} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n0} = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} g(\theta, \varphi) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (38)$$

потому что $P_n(1) = 1$, $P_n^m(1) = 0$. Возьмём, в частности, в качестве функции $g(\theta, \varphi)$ какую-либо поверхностную гармоническую функцию n -й степени $Y_n(\theta, \varphi)$, выражение которой даётся формулой (15). Тогда, в силу соотношений ортогональности, сумма (38) сведётся только к одному члену, и в результате мы получим следующую формулу:



$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Y_n(\theta, \varphi) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta d\varphi &= \\ &= \frac{4\pi}{2n+1} [Y_n(\theta, \varphi)]_{\theta=0}. \end{aligned} \quad (39)$$

Рис. 70. К теореме сложения.

С помощью этой формулы мы получим выражения для преобразования зональных гармонических функций при переходе к новой системе отсчёта. Пусть P на рис. 70 будет точкой на сфере, координаты которой в данной ортогональной системе отсчёта будут θ и φ . Координаты другой точки Q пусть будут α и β , а угол между осями OP и OQ равен γ . Зональные гармонические функции в точке P по отношению к новой полярной оси OQ будут иметь вид $P_n(\cos \gamma)$, и наша задача состоит в том, чтобы выразить $P_n(\cos \gamma)$ через координаты θ, φ и α, β .

На единичной сфере $\cos \gamma$ равен, очевидно, проекции линии OP на ось OQ . Если x, y, z — координаты точки P , а x', y', z' — ко-

ординаты точки Q , то

$$\cos \gamma = xx' + yy' + zz' = \sin \theta \sin \alpha \cos (\varphi - \beta) + \cos \theta \cos \alpha. \quad (40)$$

Предположим, что искомое разложение для $P_n^m(\cos \gamma)$ имеет вид

$$P_n(\cos \gamma) = \frac{c_0}{2} P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n (c_m \cos m\varphi + d_m \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta); \quad (41)$$

умножим обе части на $P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi$ и проинтегрируем по всей единичной сфере. Воспользовавшись ещё раз соотношениями ортогональности, мы получим

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi P_n(\cos \gamma) P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{2\pi}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} c_m. \quad (42)$$

Но, согласно (39),

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi P_n(\cos \gamma) P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi \sin \theta d\theta d\varphi = \\ = \frac{4\pi}{2n+1} [P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi]_{\gamma=0} = \frac{4\pi}{2n+1} P_n^m(\cos \alpha) \cos m\beta, \end{aligned} \quad (43)$$

так как при $\gamma=0$ имеем $\theta = \alpha$, $\varphi = \beta$. Следовательно,

$$c_m = 2 \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \alpha) \cos m\beta. \quad (44)$$

Аналогично

$$d_m = 2 \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \alpha) \sin m\beta. \quad (45)$$

Искомое разложение или формула сложения будет, следовательно,

$$\begin{aligned} P_n(\cos \gamma) = P_n(\cos \alpha) P_n(\cos \theta) + \\ + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \alpha) P_n^m(\cos \theta) \cos m(\varphi - \beta). \end{aligned} \quad (46)$$

На основании этого результата мы можем дать иное выражение для теоремы, сформулированной на стр. 355, а именно: если $g(\theta, \varphi)$ и её производные обладают необходимыми свойствами непрерывности на поверхности сферы, то ряд Лапласа (18) для этой функции будет иметь вид

$$g(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \varphi), \quad (47)$$

или, в силу (19) и (46),

$$g(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \int_0^{2\pi} \int_0^\pi g(\alpha, \beta) P_n(\cos \gamma) \sin \alpha d\alpha d\beta. \quad (48)$$

7.6. Разложение плоской волны. Теперь можно сравнительно просто получить разложение плоской волны, распространяющейся в произвольном направлении, на элементарные сферические волны относительно какого-либо заданного центра. Направление распространения и длина волны определяются в плоской волне волновым вектором $\mathbf{k}$, прямоугольные компоненты которого равны

$$k_1 = k \sin \alpha \cos \beta, \quad k_2 = k \sin \alpha \sin \beta, \quad k_3 = k \cos \alpha. \quad (49)$$

Координаты произвольной точки наблюдения будут

$$x = R \sin \theta \cos \varphi, \quad y = R \sin \theta \sin \varphi, \quad z = R \cos \theta. \quad (50)$$

Фаза волны определяется тогда выражением

$$kR = kR [\sin \alpha \sin \theta \cos(\varphi - \beta) + \cos \alpha \cos \theta] = kR \cos \gamma. \quad (51)$$

Функция $f^{(1)}(R, \theta, \varphi) = \exp(ikR \cos \gamma)$ непрерывна и имеет непрерывные производные всюду, включая и начало координат $R=0$. Она может быть, следовательно, разложена по формуле (36), стр. 358. Рассмотрим прежде всего ось, направление которой совпадает с направлением распространения волны. В силу симметрии волны относительно этой оси, мы можем написать, что

$$e^{ikR \cos \gamma} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n j_n(kR) P_n(\cos \gamma). \quad (52)$$

Коэффициенты могут быть определены обычным способом, путём умножения обеих частей равенства на $P_n(\cos \gamma) \sin \gamma$ и интегрирования по γ от 0 до π . Тогда, учитывая (17), получаем

$$a_n j_n(kR) = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} e^{ikR \cos \gamma} P_n(\cos \gamma) \sin \gamma d\gamma. \quad (53)$$

Для того чтобы избавиться в этом соотношении от зависимости от R , продифференцируем обе части по $\rho = kR$ и положим затем $\rho=0$. Так как, согласно (25),

$$\left[\frac{d^n j_n(\rho)}{d\rho^n} \right]_{\rho=0} = \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}; \quad (54)$$

то

$$\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} a_n = \frac{2n+1}{2} i^n \int_0^{\pi} \cos^n \gamma P_n(\cos \gamma) \sin \gamma d\gamma. \quad (55)$$

Интеграл справа легко берётся, и мы получаем, что $a_n = (2n+1) i^n$, т. е.

$$e^{ikR \cos \gamma} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) j_n(kR) P_n(\cos \gamma). \quad (56)$$

Если ось z координатной системы не совпадает с направлением распространения волны, то мы можем воспользоваться теоремой сложения (46), для того чтобы записать (56) относительно произвольной системы координатных осей. Мы получим тогда

$$e^{ikR \cos \gamma} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) j_n(kR) \left\{ P_n(\cos \alpha) P_n(\cos \theta) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \alpha) P_n^m(\cos \theta) \cos m(\varphi - \beta) \right\}; \quad (57)$$

7.7. Интегральные представления. Мы нашли, что в определённых случаях оказывается удобным представлять волновую функцию в виде суммы плоских волн с соответствующими весами или амплитудными множителями. Направление распространения каждой из таких плоских компонент определяется углами α и β . Интегрирование должно быть распространено по всем возможным направлениям в пространстве и может в некоторых случаях включать и мнимые значения α или β . Как и в разделе 6.7, мы

хотим найти представления в виде

$$f(x, y, z) = \int d\alpha \int d\beta g(\alpha, \beta) e^{ik(x \sin \alpha \cos \beta + y \sin \alpha \sin \beta + z \cos \alpha)} \quad (58)$$

или, если $x = R \sin \theta \cos \varphi$, $y = R \sin \theta \sin \varphi$, $z = R \cos \theta$,

$$f(R, \theta, \varphi) = \int d\alpha \int d\beta g(\alpha, \beta) e^{ikR \cos \gamma}, \quad (59)$$

где α и β — углы, показанные на рис. 66 и 70. В случае цилиндрической волны постоянная частота и постоянная длина волны вдоль оси z приводят к постоянному значению α , так что направления плоских волн, представляющих цилиндрическую функцию $f(u^1, u^2)$, образуют круговой конус. Поскольку у сферических волн подобное преимущественное направление отсутствует, интегрирование должно производиться и по α , и по β .

Интегральное представление элементарной сферической волновой функции может быть получено непосредственно из разложения (57). Если обе части этого уравнения умножить на $P_n^m(\cos \alpha) \cos m\beta$, или на $P_n^m(\cos \alpha) \sin m\beta$, то благодаря соотношениям ортогональности (19) мы получим в результате

$$j_n(kR) P_n^m(\cos \theta) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} m\varphi = \frac{i^{-n}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{ikR \cos \gamma} P_n^m(\cos \alpha) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} m\beta \sin \alpha d\alpha d\beta. \quad (60)$$

После умножения обеих частей на произвольные постоянные a_{nm} и b_{nm} и суммирования по m результат этот может быть записан также в виде

$$j_n(kR) Y_n(\theta, \varphi) = \frac{i^{-n}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{ikR \cos \gamma} Y_n(\alpha, \beta) \sin \alpha d\alpha d\beta. \quad (61)$$

Из этих общих формул можно получить много полезных выражений для различных специальных случаев. Так, например, положив $m=0$, $\theta=0$, мы получим представление для сферической бесселевой функции $j_n(kR)$

$$j_n(kR) = \frac{i^{-n}}{2} \int_0^\pi e^{ikR \cos \alpha} P_n(\cos \alpha) \sin \alpha d\alpha, \quad (62)$$

или

$$j_n(kR) = \frac{i^{-n}}{2} \int_{-1}^{+1} e^{ikR\eta} P_n(\eta) d\eta. \quad (63)$$

Легко показать, что интеграл

$$z_n(kR) = i^{-n} \int_C e^{ikR\eta} P_n(\eta) d\eta \quad (64)$$

действительно удовлетворяет уравнению (4), стр. 352, при условии, что путь интегрирования C выбран таким образом, что билинейное выражение

$$(1 - \eta^2) \left(\frac{dP_n}{d\eta} - ikR P_n \right) e^{ikR\eta} \Big|_C = 0 \quad (65)$$

исчезает на пределах интегрирования. Вместо $\eta = \pm 1$ мы можем выбрать такие значения, при которых исчезает экспоненциальный множитель. Так, если k действительно, то в качестве верхнего предела мы

можем взять $\eta = i\infty$ и получить следующие представления:

$$\left. \begin{aligned} h_n^{(1)}(kR) &= i^{-n} \int_{i\infty}^1 e^{ikR\eta} P_n(\eta) d\eta, \\ h_n^{(2)}(kR) &= i^{-n} \int_{-1}^{i\infty} e^{ikR\eta} P_n(\eta) d\eta. \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

Если из-за проводимости среды k комплексно, то мы можем взять тот из корней k^2 , мнимая часть которого положительна, и предел $\eta = i\infty$ заменить на $\eta = \infty$.

Из (60) и (54) мы можем получить представления и для функций $P_n^m(\cos \theta)$, положив φ и R равными нулю:

$$P_n^m(\cos \theta) = \frac{(2n+1)!}{4\pi 2^n (n!)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos^n \gamma P_n^m(\cos \alpha) \cos m\beta \sin \alpha d\alpha d\beta. \quad (67)$$

Выполнить интегрирование по α с помощью имеющихся в нашем распоряжении формул затруднительно; можно, однако, показать иным путём, что выражение (67) приводится к такому:

$$P_n^m(\cos \theta) = \frac{(n+m)!}{2\pi n!} i^{-m} \int_0^{2\pi} (\cos \theta + i \sin \theta \cos \beta)^n \cos m\beta d\beta. \quad (68)$$

Заметим, наконец, что воспользовавшись для бесселевой функции интегральным представлением (37), стр. 323, можно привести правую часть (60) к однократному интегралу. При $\varphi = 0$

$$\begin{aligned} j_n(kR) P_n^m(\cos \theta) &= \\ &= \frac{i^{-n}}{2} \int_0^\pi e^{ikR \cos \alpha \cos \theta} J_m(kR \sin \theta \sin \alpha) P_n^m(\cos \alpha) \sin \alpha d\alpha. \end{aligned} \quad (69)$$

7.8. Интеграл Фурье-Бесселя. Предположим, что $f(x, y, z)$ — произвольная кусочно непрерывная функция с кусочно непрерывными первыми производными и что интеграл от абсолютной величины этой функции, распространённый по всему пространству существует. Тогда для этой функции существует интеграл Фурье

$$f(x, y, z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(k_1, k_2, k_3) e^{i(k_1x + k_2y + k_3z)} dk_1 dk_2 dk_3, \quad (70)$$

а функция, преобразованная по Фурье относительно f , будет

$$g(k_1, k_2, k_3) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) e^{-i(k_1x + k_2y + k_3z)} dx dy dz. \quad (71)$$

Мы преобразуем теперь эти интегралы к сферическим координатам, предполагая молчаливо, что тройной интеграл по бесконечному кубу может быть заменён интегралом по сфере бесконечного радиуса. Следуя тому же пути, что и в разделе 6.9, и замечая, что $k_1x + k_2y + k_3z = kR \cos \gamma$, мы

получаем

$$f(R, \theta, \varphi) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} g(\alpha, \beta, k) e^{-ikR \cos \gamma} k^2 \sin \alpha \, dk \, d\alpha \, d\beta, \quad (72)$$

$$g(\alpha, \beta, k) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(R, \theta, \varphi) e^{-ikR \cos \gamma} R^2 \sin \theta \, dR \, d\theta \, d\varphi. \quad (73)$$

Предположим теперь, что $f(R, \theta, \varphi) = f_n(R) Y_n(\theta, \varphi)$. На функцию $f_n(R)$, в остальных отношениях произвольную, мы наложим условие кусочной непрерывности вместе с её первой производной и потребуем существования интеграла $\int_0^\infty |f_n(R)| \, dR$. Тогда

$$g(\alpha, \beta, k) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty R^2 dR f_n(R) \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y(\theta, \varphi) e^{-ikR \cos \gamma} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi. \quad (74)$$

Это выражение, в силу соотношения (61) и того, что $j_n(-kR) = (-1)^n j_n(kR)$, переходит в следующее:

$$g(\alpha, \beta, k) = (-1)^n Y_n(\alpha, \beta) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f_n(R) j_n(kR) R^2 dR, \quad (75)$$

или $g(\alpha, \beta, k) = (-1)^n Y_n(\alpha, \beta) g_n(k)$. Внося это значение для преобразованной функции обратно в (72) и снова меняя порядок интегрирования, мы находим

$$f_n(R) Y_n(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty g_n(k) j_n(kR) k^2 dk Y_n(\theta, \varphi), \quad (76)$$

откуда получается ещё одна симметричная пара взаимно преобразующихся функций

$$f(R) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty g(k) j_n(kR) k^2 dk, \quad (77)$$

$$g(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(R) j_n(kR) R^2 dR. \quad (78)$$

Индекс n здесь опущен; поскольку он не имеет более какого-либо специального смысла. В частном случае $n=0$ уравнения (77) и (78) сводятся к обычному интегралу Фурье (18), стр. 257. Если выбранное значение R совпадает с точкой разрыва непрерывности функции $f(R)$, то мы напомним

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty k^2 dk \int_0^\infty f(\rho) j_n(k\rho) j_n(kR) \rho^2 d\rho = \frac{1}{2} [f(R+0) + f(R-0)]. \quad (79)$$

7.9. Разложение цилиндрической волновой функции. При подсчёте излучения заданного распределения переменных токов иногда бывает необходимо выразить цилиндрическую волновую функцию в сферических координатах. Интегральное представление для волновой функции, конеч-

ной на оси, будет

$$\frac{\cos}{\sin} m\varphi J_m(\lambda r) e^{ihz} = \frac{i^{-m}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\lambda r \cos(\beta - \varphi) + i h z} \frac{\cos}{\sin} m\beta d\beta. \quad (80)$$

Далее

$$kR = \lambda r \cos(\beta - \varphi) + hz = kR \{ \sin \alpha \sin \theta \cos(\varphi - \beta) + \cos \alpha \cos \theta \}, \quad (81)$$

а на стр. 360, формула (57), мы имеем разложение функции $\exp(ikR)$ по соответствующим сферическим волновым функциям. Интегрируя по β , мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{\cos}{\sin} m\varphi J_m(\lambda r) e^{ihz} &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} i^{n-m} (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{\cos}{\sin} m\varphi P_n^m(\cos \alpha) P_n^m(\cos \theta) j_n(kR). \end{aligned} \quad (82)$$

Так как при $m > n$ полиномы P_n^m равны нулю, то первые m членов в (82) — нули, и можно написать разложение в виде

$$\begin{aligned} J_m(\lambda r) e^{ihz} &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+2m+1) \frac{n!}{(n+2m)!} P_{n+m}^m(\cos \alpha) P_{n+m}^m(\cos \theta) j_{n+m}(kR). \end{aligned} \quad (83)$$

Если $\alpha = \pi/2$, то $h=0$, $\lambda=k$, и

$$P_{n+m}^m(0) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ нечётное,} \\ \frac{(n+2m-1)!}{2^{n+m-1} \left(\frac{n}{2}\right)! \left(\frac{n}{2} + m - 1\right)!}, & \text{если } n \text{ чётное.} \end{cases} \quad (84)$$

В результате мы получаем разложение цилиндрической бесселевой функции в ряд по сферическим бесселевым функциям

$$\begin{aligned} J_m(kr) &= \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2^{2l+m-1}} \frac{(4l+2m+1)}{2l+2m} \frac{(2l)!}{l!(l+m-1)!} P_{2l+m}^m(\cos \theta) j_{2l+m}(kr). \end{aligned} \quad (85)$$

7.10. Теорема сложения для функции $z_0(kR)$. Пусть $P(R_0, \theta, \varphi)$ будет точкой наблюдения, а $Q(R_1, \theta_1, \varphi_1)$ — источником сферической волны. Координаты R_0, θ, φ и R_1, θ_1, φ_1 берутся относительно фиксированной системы координат, начало которой находится в точке O . Расстояние от Q до P равно

$$R = \sqrt{R_0^2 + R_1^2 - 2R_0 R_1 \cos \gamma},$$

где $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta_1 + \sin \theta \sin \theta_1 \cos(\varphi - \varphi_1)$. Наша задача состоит в том, чтобы выразить сферическую волну, распространяющуюся из точки Q , в виде суммы сферических волн, источник которых расположен в точке O . Решение этой задачи в общем виде требует длительных вычислений, а её практическое значение не настолько велико, чтобы оправдать затраты времени и места. Однако в теории излучения мы будем иметь пример применения одного специального случая этой теоремы, а именно случай преобразования

волны, сферически симметричной относительно источника Q . Для этого случая без особого труда можно получить следующие разложения:

$$j_0(kR) = \frac{\sin kR}{kR} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos \gamma) j_n(kR_0) j_n(kR_1), \quad (86)$$

$$h_0^{(1)}(kR) = \frac{e^{ikR}}{ikR} \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos \gamma) j_n(kR_0) h_n^{(1)}(kR_1) (R_0 < R_1), \\ \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos \gamma) j_n(kR_1) h_n^{(1)}(kR_0) (R_0 > R_1). \end{cases} \quad (87)$$

Их доказательство предоставляется читателю.

ВЕКТОРНОЕ ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ В СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

7.11. Сферические векторные волновые функции. Как и в случае цилиндрических координат, можно получить решения векторного волнового уравнения в сферических координатах непосредственно из характеристических функций соответствующего скалярного уравнения. Следуя обозначениям предыдущего раздела, мы положим $\psi_{emn} = f_{emn} e^{-i\omega t}$, где f_{emn} — характеристическое решение

$$f_{emn} = {}^c \sin^s m\varphi P_n^m(\cos \theta) z_n(kR). \quad (1)$$

Согласно разделу 7.1, одно из решений векторного волнового уравнения

$$\text{grad div } \mathbf{C} - \text{rot rot } \mathbf{C} + k^2 \mathbf{C} = 0 \quad (2)$$

может быть получено, если просто взять градиент от (1). Мы определяем $\mathbf{L}$ как $\text{grad } \psi$ и отщепляем временной множитель, полагая $\mathbf{L} = \mathbf{l} e^{-i\omega t}$. Тогда, согласно (95), стр. 57,

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_{emn} = & \frac{\partial}{\partial R} z_n(kR) P_n^m(\cos \theta) {}^c \sin m\varphi \mathbf{i}_1 + \frac{1}{R} z_n(kR) \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m(\cos \theta) {}^c \sin m\varphi \mathbf{i}_2 \pm \\ & \pm \frac{m}{R \sin \theta} z_n(kR) P_n^m(\cos \theta) {}^c \sin m\varphi \mathbf{i}_3, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$ и $\mathbf{i}_3$ — единичные векторы, изображённые для сферической системы координат на рис. 8, стр. 56.

Для того чтобы получить независимые решения $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$, мы должны в соответствии с разделом 7.1 ввести *постоянный* вектор $\mathbf{a}$. Подобная операция в данном случае, конечно, допустима, но полученные таким образом функции $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ не будут на всей поверхности сферы ни нормальными, ни чисто тангенциальными. Вместо $\mathbf{a}$ мы воспользуемся радиальным вектором $\mathbf{i}_1$; тогда векторная функция $[\mathbf{L}, \mathbf{i}_1]$ будет тангенциальна на всей поверхности сферы. Но $\mathbf{i}_1$ — не постоянный вектор, и мы не можем, следовательно, утверждать а priori, что получим таким образом независимое решение. Мы покажем, однако, что тангенциальное решение $\mathbf{M}$ действительно может быть построено с помощью радиального вектора $\mathbf{i}_1$. К сожалению, этот путь неприменим для более общих координатных систем.

Попробуем построить решение уравнения (2) в виде вектора

$$\mathbf{M} = \text{rot}(\mathbf{i}_1 u(R)\psi) = [\mathbf{L}, \mathbf{i}_1] u(R),$$

где $u(R)$ — неизвестная скалярная функция R . Тогда, если M_1 , M_2 и M_3 представляют собой R -, θ -, φ -компоненты вектора $\mathbf{M}$, то

$$M_1 = 0, \quad M_2 = \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (u\psi), \quad M_3 = -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} (u\psi). \quad (4)$$

Дивергенция $\mathbf{M}$ равна нулю, и уравнение $\text{rot rot } \mathbf{M} - k^2 \mathbf{M} = 0$ мы разложим теперь на R -, θ - и φ -компоненты по формулам (85), стр. 55. R -компонента тождественно равна нулю при любом выборе $u(R)$. Условия для θ - и φ -компонент будут выполнены, если $u(R)$ будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2} (u\psi) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (u\psi) \right] + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} (u\psi) + k^2 u\psi = 0. \quad (5)$$

(Особое преимущество сферической системы координат по сравнению с более общими системами состоит в том, что это условие одинаково для обеих тангенциальных компонент.) Следовательно, если мы возьмём $u(R) = R$, то соотношение (5) сведётся к требуемому уравнению

$$\Delta \psi + k^2 \psi = 0. \quad (6)$$

Таким образом, в сферических координатах уравнение (2) удовлетворяется функцией

$$\mathbf{M} = \text{rot} (R\psi) = [\mathbf{L}, \mathbf{R}] = \frac{1}{k} \text{rot } \mathbf{N}, \quad (7)$$

компоненты которой равны

$$M_1 = 0, \quad M_2 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad M_3 = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta}. \quad (8)$$

Компоненты третьего решения легко могут быть найдены из соотношения $k\mathbf{N} = \text{rot } \mathbf{M}$:

$$kN_1 = \frac{\partial^2 (R\psi)}{\partial R^2} + k^2 R\psi, \quad N_2 = \frac{1}{kR} \frac{\partial^2 (R\psi)}{\partial R \partial \theta}, \quad N_3 = \frac{1}{kR \sin \theta} \frac{\partial^2 (R\psi)}{\partial R \partial \varphi}. \quad (9)$$

Так как ψ должно удовлетворять уравнению (4), стр. 352, то радиальная компонента приводится к более простому виду ¹⁾

$$N_1 = \frac{n(n+1)}{kR} \psi. \quad (10)$$

Для того чтобы получить развёрнутые выражения для векторных волновых функций $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$, нам необходимо только произвести дифференцирование (1) в соответствии с формулами (8) и (9). Временной множитель мы

¹⁾ Первое полное исследование электромагнитной задачи о сфере было проведено Ми (Mie), *Ann. Physik* 25, 377, 1908, и Дебаем (Debye), *Ann. Physik*, 30, 57, 1909. Оба автора пользовались парой потенциальных функций, которые приводят непосредственно к нашим векторам $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$. Связь между этими решениями и радиальным вектором Герца была указана Зоммерфельдом в книге Франк-Мизес, *Интегральные и дифференциальные уравнения математической физики*, ОНТИ, 1937, стр. 892.

отщепляем; написав $M = m e^{-i\omega t}$, $N = n e^{-i\omega t}$, и получаем

$$m_{e_{mn}} = \mp \frac{m}{\sin \theta} z_n(kR) P_n^m(\cos \theta) \frac{\sin}{\cos} m\varphi i_2 - z_n(kR) \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} \frac{\cos}{\sin} m\varphi i_3, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} n_{e_{mn}} = & \frac{n(n+1)}{kR} z_n(kR) P_n^m(\cos \theta) \frac{\cos}{\sin} m\varphi i_1 + \\ & + \frac{1}{kR} \frac{\partial}{\partial R} \{R z_n(kR)\} \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m(\cos \theta) \frac{\cos}{\sin} m\varphi i_2 \mp \\ & \mp \frac{m}{kR \sin \theta} \frac{\partial}{\partial R} [R z_n(kR)] P_n^m(\cos \theta) \frac{\sin}{\cos} m\varphi i_3. \end{aligned} \quad (12)$$

7.12. Интегральные представления. Волновые функции l , m и n могут быть представлены в виде интегралов от плоских векторных волн, подобных интегралам (18)–(20), стр. 347. Согласно соотношению (60), стр. 361, для функций первого рода, которые конечны в начале координат, мы имеем

$$f_{e_{mn}}^{(1)} = \frac{i^{-n}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{ikR \cos \gamma} P_n^m(\cos \alpha) \frac{\cos}{\sin} m\beta \sin \alpha d\alpha d\beta. \quad (13)$$

Прежде всего дифференцированием под знаком интеграла мы найдём выражения для компонент градиента, а именно $\frac{\partial f}{\partial R}$, $\frac{1}{R} \frac{\partial f}{\partial \theta}$ и $\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi}$. Из рис. 70, стр. 358, видно, что если вектор $k(\alpha, \beta)$ направлен вдоль линии OQ , а $R(\theta, \varphi)$ — вдоль линии OP , то

$$\left. \begin{aligned} ki_1 &= k \cos \gamma = k [\sin \alpha \sin \theta \cos (\varphi - \beta) + \cos \alpha \cos \theta], \\ ki_2 &= k [\sin \alpha \cos \theta \cos (\varphi - \beta) - \cos \alpha \sin \theta], \\ ki_3 &= -k \sin \alpha \sin (\varphi - \beta), \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где единичные координатные векторы сферической системы координат берутся, конечно, в точке наблюдения P . Тогда без дальнейших вычислений ясно, что

$$l_{e_{mn}}^{(1)} = \frac{i^{1-n}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi k(\alpha, \beta) e^{ikR \cos \gamma} P_n^m(\cos \alpha) \frac{\cos}{\sin} m\beta \sin \alpha d\alpha d\beta. \quad (15)$$

Соответствующие представления для $m^{(1)}$ и $n^{(1)}$ мы получим, заметив, что

$$\left. \begin{aligned} [R, k] &= kR \{ \sin \alpha \sin (\varphi - \beta) i_2 + [\sin \alpha \cos \theta \cos (\varphi - \beta) - \cos \alpha \sin \theta] i_3 \}, \\ [[k, R], k] &= k^2 R \{ \sin^2 \gamma i_1 - \cos \gamma [\sin \alpha \cos \theta \cos (\varphi - \beta) - \cos \alpha \sin \theta] i_2 + \\ & \quad + \cos \gamma \sin \alpha \sin (\varphi - \beta) i_3 \}, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

и дифференцируя согласно (8) и (9), в виде:

$$m_{e_{mn}}^{(1)} = \frac{i^{1-n}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [k, R] e^{ikR \cos \gamma} P_n^m(\cos \alpha) \frac{\cos}{\sin} m\beta \sin \alpha d\alpha d\beta, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} n_{e_{mn}}^{(1)} = & \frac{i^{-n}}{4\pi k} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \{ [[k, R] k] + 2ik \} e^{ikR \cos \gamma} \times \\ & \times P_n^m(\cos \alpha) \frac{\cos}{\sin} m\beta \sin \alpha d\alpha d\beta. \end{aligned} \quad (18)$$

Для того чтобы получить интегральные представления функций третьего и четвёртого рода, надо заменить интегрирование по α от 0 до π интегрированием по соответствующему контуру в комплексной области, как это было описано на стр. 361 — 362.

С помощью этих интегральных представлений без труда можно вычислить прямоугольные компоненты векторов $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$, хотя получающиеся в результате выражения довольно длинны и громоздки. Подинтегральные векторные выражения разлагаются на прямоугольные компоненты, после чего мы получаем их в виде выражений, содержащих явно α , β , θ , φ . Так, например, $k_x = k \sin \alpha \cos \beta$. Затем с помощью рекуррентных соотношений для сферических гармоник эти множители исключаются, и интегралы приводятся к виду, в котором они могут быть вычислены с помощью (13).

7.13. Ортогональность. Очевидно, скалярное произведение любого нечётного вектора на любой чётный вектор или на любой вектор с иным индексом m будет ортогонально; необходимо рассмотреть, следовательно, только такие произведения, которые не исчезают при интегрировании по φ от 0 до 2π . Так

$$\int_0^{2\pi} l_{e_{mn}} l_{e_{mn'}} d\varphi = (1 + \delta) \pi [P_n^m P_{n'}^m \frac{\partial}{\partial R} z_n(kR) \frac{\partial}{\partial R} z_{n'}(kR) + \\ + (\frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} \frac{\partial P_{n'}^m}{\partial \theta} + \frac{m^2}{\sin^2 \theta} P_n^m P_{n'}^m) \frac{1}{R^2} z_n(kR) z_{n'}(kR)], \quad (19)$$

где $\delta = 0$ при $m > 0$ и $\delta = 1$ при $m = 0$. Для того чтобы преобразовать (19), мы воспользуемся формулой

$$\int_0^\pi \left(\frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} \frac{\partial P_{n'}^m}{\partial \theta} + \frac{m^2 P_n^m P_{n'}^m}{\sin^2 \theta} \right) \sin \theta d\theta = \\ = \begin{cases} 0, & \text{при } n \neq n', \\ \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} n(n+1) & \text{при } n = n'. \end{cases} \quad (20)$$

Следовательно, при интегрировании (19) по θ при $n \neq n'$ мы получаем нуль, а при $n = n'$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi l_{e_{mn}} l_{e_{mn}} \sin \theta d\theta d\varphi = \\ = (1 + \delta) \frac{2\pi}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \left\{ \left[\frac{\partial z_n(kR)}{\partial R} \right]^2 + \frac{n(n+1)}{R^2} [z_n(kR)]^2 \right\}. \quad (21)$$

Это выражение можно преобразовать к окончательному виду, воспользовавшись рекуррентными соотношениями (33) и (34), стр. 357; тогда нормирующий множитель мы получим в виде

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi l_{e_{mn}} l_{e_{mn}} \sin \theta d\theta d\varphi = (1 + \delta) \frac{2\pi}{(2n+1)^2} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} k^2 \{ n [z_{n-1}(kR)]^2 + \\ + (n+1) [z_{n+1}(kR)]^2 \}. \quad (22)$$

Те же формулы непосредственно приводят к интегралам:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi m_{e_{mn}} m_{e_{mn}} \sin \theta d\theta d\varphi = (1 + \delta) \frac{2\pi}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} n(n+1) [z_n(kR)]^2, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi n_{e_{mn}} n_{e_{mn}} \sin \theta d\theta d\varphi = \\ = (1 + \delta) \frac{2\pi}{(2n+1)^2} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} n(n+1) \{ (n+1) [z_{n-1}(kR)]^2 + \\ + n [z_{n+1}(kR)]^2 \}, \quad (24) \end{aligned}$$

в то время как все остальные произведения, в которых индексы n различны, дают нуль.

Рассматривая произведения векторов различного типа, мы получаем, во-первых,

$$\int_0^{2\pi} l_{e_{mn}} m_{e_{mn}} d\varphi = \pm (1 + \delta) \frac{\pi}{R} z_n z_{n'} \frac{m}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} [P_n^m P_{n'}^m], \quad (25)$$

откуда

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} l_{e_{mn}} m_{e_{mn}} \sin \theta d\theta d\varphi = 0 \quad (26)$$

независимо от значений n и n' . Аналогично

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} m_{e_{mn}} n_{e_{mn}} \sin \theta d\theta d\varphi = 0. \quad (27)$$

Как и в цилиндрической системе координат, ортогональность получается неполной из-за произведения $l_{e_{mn}} n_{e_{mn}}$, интеграл от которого по всей сфере при $n = n'$ не равен нулю; в этом случае

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} l_{e_{mn}} n_{e_{mn}} \sin \theta d\theta d\varphi = \\ = (1 + \delta) \frac{2\pi}{(2n+1)^2} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} n(n+1) k \{ [z_{n-1}(kR)]^2 - [z_{n+1}(kR)]^2 \}. \quad (28) \end{aligned}$$

Для того чтобы получить полную ортогональность, мы можем, как и в разделе 7.2, считать k' переменным параметром и интегрировать по k' и по R ; однако в большинстве случаев подобная операция оказывается излишней.

7.14. Разложение плоской векторной волны. При рассмотрении дифракции плоской волны с заданной поляризацией на сферическом препятствии мы должны сначала разложить падающую плоскую векторную волну по сферическим волновым функциям $l_{e_{mn}}, m_{e_{mn}}, n_{e_{mn}}$.

Рассмотрим векторную функцию

$$f(z) = a e^{ikz} = a e^{ikR \cos \theta}, \quad (29)$$

где a — амплитудный вектор, ориентированный произвольно по отношению к прямоугольной системе отсчёта. Разложим вектор a по трём единичным

векторам, направленным соответственно вдоль осей x , y и z . Тогда

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \sin \theta \cos \varphi i_1 + \cos \theta \cos \varphi i_2 - \sin \varphi i_3; \\ a_y &= \sin \theta \sin \varphi i_1 + \cos \theta \sin \varphi i_2 + \cos \varphi i_3; \\ a_z &= \cos \theta i_1 - \sin \theta i_2, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

где i_1, i_2, i_3 — попрежнему единичные векторы, показанные для сферической системы координат на рис. 8, стр. 56. Дивергенция векторных функций $a_x \exp(ikz)$ и $a_y \exp(ikz)$ равна нулю и, следовательно, они могут быть разложены только по характеристическим функциям m и n . При $R=0$ поле конечно, и нам нужны будут поэтому функции первого рода. Очевидно, далее, что зависимость от φ вида (30) ограничивает нас значением $m=1$; если мы рассмотрим после этого свойства чётности и нечётности у (11) и (12), то установим, что разложение должно иметь вид

$$a_x e^{ikR \cos \theta} = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n m_{01n}^{(1)} + b_n n_{e1n}^{(1)}). \quad (31)$$

Для определения коэффициентов разложения мы применяем соотношения ортогональности предыдущего раздела

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} a_x m_{01n}^{(1)} e^{ikR \cos \theta} \sin \theta d\theta d\varphi = 2\pi i^n n(n+1) [j_n(kR)]^2, \quad (32)$$

откуда, согласно (23),

$$a_n = \frac{2n+1}{n(n+1)} \cdot i^n. \quad (33)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} a_x n_{e1n}^{(1)} e^{ikR \cos \theta} \sin \theta d\theta d\varphi &= \\ &= -2\pi i^{n+1} \frac{n(n+1)}{2n+1} \{ (n+1) [j_{n-1}(kR)]^2 + n [j_{n+1}(kR)]^2 \}, \end{aligned} \quad (34)$$

что даёт, в силу (24),

$$b_n = -i^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}. \quad (35)$$

Следовательно,

$$a_x e^{ikz} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} [m_{01n}^{(1)} - i n_{e1n}^{(1)}]. \quad (36)$$

Тем же путём для плоской волны, поляризованной в направлении оси y , мы получаем

$$a_y e^{ikz} = - \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} [m_{e1n}^{(1)} + i n_{01n}^{(1)}]. \quad (37)$$

Так как дивергенция от продольной волновой функции $a_z \exp(ikz)$ не равна нулю, то её разложение должно содержать и функции 1. Фактически оказывается необходимой система только этих функций, и можно без труда получить, что

$$a_z e^{ikz} = \frac{i}{k} \sum_{n=0}^{\infty} i^{n-1} (2n+1) l_{e0n}^{(1)}. \quad (38)$$

ЗАДАЧИ

1. Показать, что сферические бesselевы функции удовлетворяют соотношениям

$$\int_{-\infty}^{+\infty} j_n(\rho) j_m(\rho) d\rho = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ \frac{\pi}{2} \frac{1}{2n+1} & \text{при } n = m, \end{cases}$$

если n и m — целые числа, причём $n \geq 0$ и $m > 0$. Относительно применения этих интегралов к разложениям в ряды по бesselевым функциям см. Watson, Bessel Functions, стр. 533.

2. Показать, что цилиндрические бesselевы функции удовлетворяют соотношениям

$$\frac{d^n}{d(x^2)^n} [x^{-p} J_p(x)] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n x^{-p-n} J_{p+n}(x),$$

$$\frac{d^n}{d(x^2)^n} [x^p J_p(x)] = \frac{x^{p-n}}{2^n} J_{p-n}(x),$$

и с помощью этих формул показать, что сферические бesselевы функции могут быть записаны в виде

$$j_n(x) = (-1)^n (2x)^n \frac{d^n}{d(x^2)^n} \left(\frac{\sin x}{x}\right) = x^n \left(-\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{\sin x}{x}\right),$$

$$n_n(x) = (-1)^{n-1} (2x)^n \frac{d^n}{d(x^2)^n} \left(\frac{\cos x}{x}\right) = -x^n \left(-\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{\cos x}{x}\right).$$

3. Показать, что если $R^2 = R_0^2 + R_1^2 - 2 R_0 R_1 \cos \gamma$, то

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{\sin kR}{kR} d(\cos \gamma) = \frac{\sin kR_0}{kR_0} \frac{\sin kR_1}{kR_1},$$

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{\cos kR}{kR} d(\cos \gamma) = \begin{cases} \frac{\sin kR_0}{kR_0} \frac{\cos kR_1}{kR_1}, & R_0 \leq R_1, \\ \frac{\cos kR_0}{kR_0} \frac{\sin kR_1}{kR_1}, & R_0 \geq R_1. \end{cases}$$

4. Показать, что в вытянутых сфероидальных координатах, определённых на стр. 60, уравнение

$$\Delta \psi + k^2 \psi = 0$$

принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[(\xi^2 - 1) \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(1 - \eta^2) \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right] + \left[\frac{1}{\xi^2 - 1} + \frac{1}{1 - \eta^2} \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + k^2 d^2 (\xi^2 - \eta^2) \psi = 0.$$

Показать, что если положить $\psi = \psi_1(\xi) \psi_2(\eta) \psi_3(\varphi)$, то предыдущее уравнение распадается на следующие три:

$$\frac{d}{d\xi} \left[(\xi^2 - 1) \frac{d\psi_1}{d\xi} \right] + \left[k^2 d^2 \xi^2 - \frac{m^2}{\xi^2 - 1} - C \right] \psi_1 = 0,$$

$$\frac{d}{d\eta} \left[(1 - \eta^2) \frac{d\psi_2}{d\eta} \right] - \left[k^2 d^2 \eta^2 + \frac{m^2}{1 - \eta^2} - C \right] \psi_2 = 0,$$

$$\frac{d^2 \psi_3}{d\varphi^2} + m^2 \psi_3 = 0,$$

где m и C — постоянные разделения. Показать далее, что система волновых функций для сплюснутой системы сфероидальных координат может быть построена из

$$\psi_{mn} = (\xi^2 - 1)^{\frac{m}{2}} (1 - \eta^2)^{\frac{m}{2}} \text{Se}_{mn}^1(c, \eta) \text{Re}_{mn}(c, \xi)_{\sin}^{\cos} m\varphi,$$

где «радиальная функция» Re и «угловая функция» Se — обе удовлетворяют уравнению

$$(1 - z^2) y'' - 2(m+1)zy' + (b - c^2 z^2)y = 0,$$

в котором m — целое число или нуль, $b = C - m$, а $c = kd = 2\pi d/\lambda$.

5. Если волновые функции предыдущей задачи применить к полному сфероиду, то нужно положить $m = 0, 1, 2, \dots$ и найти такую постоянную b , при которой поле в полюсах $\eta = \pm 1$ оставалось бы конечным. Тогда мы получим систему дискретных значений в виде

$$b_n = n(n+1) + f_n(c), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Показать, что функции Se и Re могут быть представлены в виде рядов

$$Se_{mn}^1(c, z) = \sum_s' d_s T_s^m(z), \quad T_s^m(z) = (1-z^2)^{-\frac{m}{2}} P_{s+m}^m(z),$$

где P_{s+m}^m — присоединённая функция Лежандра, а штрих над знаком суммы показывает, что при n чётном надо суммировать по чётным значениям s , а при n нечётном — по нечётным значениям s :

$$Re_{mn}^1(c, z) = \frac{1}{2^m m! (cz)^m} \sum_s' i^{s-n} \frac{(2m+s)!}{s!} d_s j_{s+m}(cz),$$

где $j_{s+m}(cz)$ — сферическая бесселева функция. Независимое решение получается заменой $j_{s+m}(cz)$ на $n_{s+m}(cz)$. Показать, что коэффициенты удовлетворяют следующей рекуррентной формуле:

$$\frac{(s+2m+2)(s+2m+1)}{(2s+2m+5)(2s+2m+3)} c^2 d_{s+2} + \frac{s(s-1)}{(2s+2m-1)(2s+2m-3)} c^2 d_{s-2} +$$

$$+ \left\{ \frac{2s^2 + 2s(2m+1) + 2m-1}{(2s+2m-1)(2s+2m+3)} c^2 + s(s+2m+1) - b \right\} d_s = 0.$$

Дать с помощью этого соотношения способ определения характеристических значений b_n .

6. Доказать, что сфероидальные функции, определенные в задаче 5, удовлетворяют соотношениям

$$Se_{mn}^1 = i^n 2^{m+1} m! \lambda_n Re_n^1,$$

$$Se_{mn}^1(c, z) = \lambda_n \int_{-1}^{+1} e^{iczt} (1-t^2)^m Se_{mn}^1(c, t) dt,$$

где λ_n — любое число из дискретного ряда характеристических значений.

7. Написать уравнение $\Delta\psi + k^2\psi = 0$ в системе сплюснутых сфероидальных координат и записать решения через функции Se и Re , определенные в задаче 5.

8. Система координат ξ, η, φ , обладающая симметрией вращения, определяется квадратичной формой

$$ds^2 = h_1 d\xi^2 + h_2 d\eta^2 + r^2 d\varphi^2,$$

где r — расстояние по перпендикуляру от оси вращения. Если поле обладает той же симметрией, что и рассматриваемая система координат, то его компоненты от φ не зависят. Показать, что уравнения

$$\text{rot } \mathbf{E} - i\omega\mu \mathbf{H} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{H} + (i\omega\epsilon - \sigma) \mathbf{E} = 0$$

распадаются на две независимые группы

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{rh_2} \frac{d}{d\eta} (rE_\varphi) - i\omega\mu H_\xi &= 0, \\ \frac{1}{rh_1} \frac{\partial}{\partial \xi} (rE_\varphi) + i\omega\mu H_\eta &= 0, \\ \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (h_2 H_\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} (h_1 H_\xi) \right] + (i\omega\epsilon - \sigma) E_\varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{rh_2} \frac{\partial}{\partial \eta} (rH_\varphi) + (i\omega\epsilon - \sigma) E_\xi &= 0, \\ \frac{1}{rh_1} \frac{\partial}{\partial \xi} (rH_\varphi) - (i\omega\epsilon - \sigma) E_\eta &= 0, \\ \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} (h_2 E_\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta} (h_1 E_\xi) \right] - i\omega\mu H_\varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

Показать, что уравнениям (II) удовлетворяет потенциал Q , причём

$$Q = rH_\varphi, \quad E_\xi = \frac{i\omega\mu}{rh_2k^2} \frac{\partial Q}{\partial \eta}, \quad E_\eta = -\frac{i\omega\mu}{rh_1k^2} \frac{\partial Q}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h_2}{rh_1} \frac{\partial Q}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{h_1}{rh_2} \frac{\partial Q}{\partial \eta} \right) + k^2 \frac{h_1h_2}{r} Q = 0.$$

Аналогичным образом может быть проинтегрирована и система (I). (Абрагам.)

9. Метод задачи 8 применить к нахождению электромагнитного поля, обладающего симметрией вращения, в системе вытянутых сфероидальных координат. Показать, что если электрические колебания направлены вдоль меридианов, то Q удовлетворяет уравнению

$$(\xi^2 - 1) \frac{\partial^2 Q}{\partial \xi^2} + (1 - \eta^2) \frac{\partial^2 Q}{\partial \eta^2} + d^2k^2(\xi^2 - \eta^2)Q = 0,$$

которое распадается на следующие:

$$(\xi^2 - 1) Q_1'' + (d^2k^2\xi^2 - C) Q_1 = 0,$$

$$(1 - \eta^2) Q_2'' + (-d^2k^2\eta^2 + C) Q_2 = 0,$$

где $Q = Q_1(\xi) Q_2(\eta)$. Заметьте, что оба эти уравнения являются частными случаями уравнения

$$(1 - z^2) y'' - 2(a + 1)zy' + (b - c^2z^2)y = 0$$

при $a = -1$. Показать, что поле определяется формулами

$$E_\xi = \frac{i\omega\mu}{d^2k^2} \frac{Q_1}{\sqrt{(\xi^2 - 1)(\xi^2 - \eta^2)}} \frac{dQ_2}{d\eta},$$

$$E_\eta = -\frac{i\omega\mu}{d^2k^2} \frac{Q_2}{\sqrt{(1 - \eta^2)(\xi^2 - \eta^2)}} \frac{dQ_1}{d\xi}.$$

10. В этой главе были рассмотрены два вида электромагнитных волн: поперечные электрические, для которых $E_R = 0$, и поперечные магнитные, для которых $H_R = 0$. Получить выражения для радиального волнового импеданса, подобно тому как это было сделано ранее в случае цилиндрических волн.

11. Доказать справедливость разложений (86) и (87) раздела 7.10 и показать, что при $\theta_1 = \pi$ и $R_1 \rightarrow \infty$ уравнение (87) асимптотически переходит в разложение для плоской волны.

12. С помощью метода, упомянутого в конце раздела 7.12, получить выражения для прямоугольных компонент векторных сферических волновых функций l , m и n .

ГЛАВА VIII

ИЗЛУЧЕНИЕ

На протяжении трёх последних глав мы изучали распространение электромагнитных волн, не касаясь того, как они получены. Мы рассмотрим теперь источники этих волн и основную задачу теории излучения, состоящую в определении напряжённости и структуры поля, создаваемого заданным распределением зарядов и токов.

НЕОДНОРОДНОЕ СКАЛЯРНОЕ ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

8.1. Метод интегрирования Кирхгофа. Математически задача нахождения соотношения между полем и его источником сводится к интегрированию неоднородного дифференциального уравнения. Пусть ψ представляет собой скалярный потенциал или любую прямоугольную компоненту какого-либо вектора поля, и пусть $g(x, y, z, t)$ будет функцией, определяющей плотность источников. Мы предположим, что в области V , где находятся источники, среда однородна и изотропна и что её *проводимость равна нулю*. Наличие проводимости приводит к значительным аналитическим трудностям, которых можно, однако, избежать в большинстве практических приложений теории. Влияние проводящих тел, находящихся в соседстве с осциллирующими источниками, будет рассмотрено в главе IX как краевая задача. При указанных ограничениях скалярная функция ψ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -g(x, y, z), \quad (1)$$

где $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ — фазовая скорость.

Разработанный Кирхгофом способ интегрирования этого уравнения представляет собой развитие метода, применённого в разделе 3.3 для интегрирования уравнения Пуассона. Пусть V — замкнутая область, ограниченная регулярной поверхностью S , а φ и ψ — две любые скалярные функции, непрерывные в этой области и на поверхности S вместе со своими первыми и вторыми производными. Тогда, согласно (7), стр. 153

$$\int_V (\varphi \Delta\psi - \psi \Delta\varphi) dv = \int_S \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) da, \quad (2)$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ обозначает дифференцирование в направлении положительной, т. е. внешней нормали. Пусть (x', y', z') — фиксированная точка наблюдения внутри области V , а

$$r = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2} \quad (3)$$

— расстояние от переменной точки (x, y, z) , находящейся внутри области V или на поверхности S до фиксированной точки наблюдения. В качестве φ

мы возьмём сферически симметричное решение

$$\varphi = \frac{1}{r} f\left(t + \frac{r}{v}\right) \quad (4)$$

однородного уравнения

$$\Delta\varphi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (5)$$

где $f\left(t + \frac{r}{v}\right)$ — произвольная аналитическая функция аргумента $t + \frac{r}{v}$.

Аналогично задаче, относящейся к статическому полю, φ имеет особенность в точке $r=0$; эта точка должна быть исключена из области V путём проведения небольшой сферы S_1 радиуса r_1 с центром в (x', y', z') . Область V ограничена теперь снаружи поверхностью S и изнутри S_1 . Далее, если мы обозначим левую часть (2) через I и используем (1) и (5), то получим

$$I = - \int_V \varphi g \, dv + \frac{1}{v^2} \int_V \left(\varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) dv, \quad (6)$$

или, поскольку

$$\begin{aligned} \varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \psi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right), \\ I &= - \int_V \varphi g \, dv + \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) dv. \end{aligned} \quad (7)$$

После интегрирования по времени от $-\infty$ до $+\infty$ это даёт

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_V \varphi g \, dv + \frac{1}{v^2} \int_V \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) dv \Big|_{t=-\infty}^{t=+\infty}. \quad (8)$$

Теперь задача состоит в таком выборе функции $f\left(t + \frac{r}{v}\right)$, чтобы последний член в (8) исчезал. Для этого мы положим $t' = \frac{r}{v}$ и в качестве $f(t + t')$ возьмём импульсную функцию¹⁾, определённую соотношением (35) на стр. 249,

$$f(t + t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{(t+t')^2}{2\delta^2}}}{\delta} = S_0(t + t'), \quad (9)$$

причём

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t + t') d(t + t') = 1. \quad (10)$$

Для того чтобы избежать каких-либо вопросов, связанных с непрерывностью функции f и её производных, мы будем считать δ очень малым, но переходить к пределу $\delta \rightarrow 0$ пока не будем. Определённая таким образом функция $S_0(t + t')$ всюду равна нулю, за исключением весьма малого интервала в окрестности момента $t = -t'$. Если иметь это в виду, то очевидно, что для произвольной функции времени $F(t)$

$$F(-t') = \int_{-\infty}^{+\infty} S_0(t + t') F(t) dt; \quad (11)$$

если $\delta \rightarrow 0$, то $\frac{\partial f}{\partial t}$ равно нулю для всех значений t , лежащих вне окрестности $t = -t'$.

¹⁾ Т. е. в пределе $\delta \rightarrow 0$ — дельта-функцию. Прим. ред.

Следовательно, поскольку φ и $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ на пределах $t = -\infty$ и $t = \infty$ ¹⁾ равны нулю для всех конечных значений r , последний член в выражении (8) также должен равняться нулю, и мы получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} I dt &= - \int_V dv \int_{-\infty}^{+\infty} S_0(t+t') \frac{g(x, y, z, t)}{r} dt = \\ &= - \int_V \frac{1}{r} g(x, y, z, -t') dv. \end{aligned} \quad (12)$$

Приравнивая это правой части (2), получаем

$$\begin{aligned} \int_V \frac{1}{r} g dv + \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_S \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) da + \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{S_1} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) da = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

На поверхности S_1 имеем $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r}$, так что

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) da = \\ = \left\{ \frac{S_0\left(t + \frac{r_1}{v}\right)}{r_1^2} + \frac{\left[\frac{\partial}{\partial r} S_0\left(t + \frac{r}{v}\right) \right]_{r=r_1}}{r_1} \right\} \int_{S_1} \psi da - S_0\left(t + \frac{r_1}{v}\right) \int_{S_1} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)_{r=r_1} da. \end{aligned} \quad (14)$$

Переходя к пределу при $r_1 \rightarrow 0$, мы получим

$$\int_{S_1} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) da = -4\pi S_0(t) \psi(x', y', z', t), \quad (15)$$

откуда, согласно (11),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{S_1} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) da = -4\pi \psi(x', y', z', 0). \quad (16)$$

Подстановка этого значения в (13) даёт

$$\begin{aligned} \psi(x', y', z', 0) &= \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{1}{r} g(x, y, z, -t') dv + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_S \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{r} S_0(t+t') \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial}{\partial n} \frac{S_0(t+t')}{r} \right] dt da. \end{aligned} \quad (17)$$

Для того чтобы преобразовать эти интегралы к более простому виду, заметим, что

$$\psi \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{S_0(t+t')}{r} \right] = S_0(t+t') \psi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{\psi}{r} \frac{\partial}{\partial n} S_0(t+t') \quad (18)$$

¹⁾ Очевидно, пределы могут быть выбраны теперь так, чтобы охватывать лишь бесконечно малый интервал, содержащий момент $t = -\frac{r}{v}$.

и что

$$\frac{\partial}{\partial n} S_0 \left(t + \frac{r}{v} \right) = \frac{\partial}{\partial u} S_0(u) \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{1}{v} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial S_0}{\partial t}. \quad (19)$$

Интегрирование по частям даёт:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi}{r} \frac{\partial S_0(t+t')}{\partial n} dt = -\frac{1}{v} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} \int_{-\infty}^{+\infty} S_0(t+t') \frac{\partial \psi}{\partial t} dt, \quad (20)$$

и, применив (11), мы получаем

$$\begin{aligned} \psi(x', y', z', 0) = & \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{1}{r} g(x, y, z, -t') dv + \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_{t=-t'} - \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \psi_{t=-t'} + \frac{1}{v} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{t=-t'} \right] da. \end{aligned} \quad (21)$$

Согласно (21), значение ψ в точке x', y', z' в момент $t=0$ получается суммирование слагаемых от отдельных элементов, причём фаза каждого из слагаемых отстаёт на величину $t' = \frac{r}{v}$. Однако ограничение точки наблюдения моментом времени, равным нулю, совершенно произвольно, так что формула Кирхгофа может быть написана в виде

$$\begin{aligned} \psi(x', y', z', t) = & \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{1}{r} [g] dv + \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \psi}{\partial n} \right] - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) [\psi] + \frac{1}{v} \frac{\partial r}{\partial n} \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} \right] \right\} da, \end{aligned} \quad (22)$$

где знак

$$[g] = g \left(x, y, z, t - \frac{r}{v} \right) \quad (23)$$

означает функцию с запаздывающей фазой.

Объёмный интеграл в (22) является *частным решением* неоднородного волнового уравнения, представляющим собой физически ту часть $\psi(x', y', z', t)$, которая вызывается всеми источниками, расположенными в области V . К этому частному решению надо добавить *общее решение* однородного уравнения (5), выраженное в виде поверхностного интеграла по поверхности S и учитывающее все источники, расположенные за пределами этой поверхности. В том случае, когда значения ψ и производных ψ на поверхности S известны, поле во всех внутренних точках определено полностью, однако задавать эти значения произвольно столь же недопустимо, как и в статическом случае. Ниже нам представится повод рассмотреть этот вопрос подробнее в связи с принципом Гюйгенса.

Поведение функции ψ на бесконечности не столь уж очевидно, поскольку r входит теперь явно в $[g]$ через запаздывающую временную переменную $t - \frac{r}{v}$. Распространение поля происходит, однако, с конечной скоростью, и следовательно, если все источники расположены на конечном расстоянии от некоторого заданного начала отсчёта и если они существуют в течение конечного промежутка времени, то мы можем положить, что поверхность S вынесена дальше первого волнового фронта. Она лежит тогда целиком в той области, до которой возмущение к моменту t ещё не дошло и в которой ψ

и все производные от ψ равны нулю. В этом случае

$$\psi(x', y', z', t) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{1}{r} g\left(x, y, z, t - \frac{r}{v}\right) dv, \quad (24)$$

где V является теперь полным объёмом, занятым источниками поля.

Без сомнения, читатель заметил, что выбор функции $f\left(t + \frac{r}{v}\right)$ с плюсом совершенно произволен, поскольку однородное уравнение (5) допускает также и решение $\frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{v}\right)$. Эта функция приводит, очевидно, к опережению во времени и означает, что величина ψ может быть наблюдаема раньше того момента, когда она будет возбуждена источниками. Привычная связь причины и следствия оказывается в этом случае обёрнутой, и это второе решение могло бы быть поэтому отброшено как логически невозможное. Однако применение принципа «логической» причинности в случаях, подобных данному, является весьма шатким обоснованием, и мы поступим лучше, если ограничимся запаздывающим действием единственно потому, что только это решение согласуется с современными физическими данными.

8.2. Запаздывающие потенциалы. Применив (24) к скалярному потенциалу и к прямоугольным компонентам векторного потенциала, мы получаем следующие формулы:

$$\varphi(x', t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{1}{r} \rho(x, t^*) dv, \quad (25)$$

$$A(x', t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{1}{r} J(x, t^*) dv, \quad (26)$$

которые позволяют вычислить поле при заданном распределении зарядов и токов. В этих формулах x' представляет собой тройку координат x', y', z' , а x — тройку x, y, z , в то время как запаздывающее время обозначено через $t^* = t - \frac{r}{v}$. Соотношения эти должны, однако, удовлетворять ещё одному условию. Мы пока показали лишь то, что (25) и (26) являются решениями неоднородного волнового уравнения. Для того чтобы они представляли потенциалы электромагнитного поля, необходимо, чтобы они удовлетворяли соотношению

$$\text{div}' A + \mu\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (27)$$

Штрих при операторе div обозначает, что дифференцирование производится по координатам точки наблюдения x', y', z' .

Мы покажем, что (25) и (26) удовлетворяют этому условию, если плотности токов и зарядов удовлетворяют уравнению непрерывности. Так как для фиксированной точки пространства $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t^*}$, то мы имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{1}{r} \frac{\partial \rho(x, t^*)}{\partial t^*} dv, \quad (28)$$

$$\text{div}' A = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \text{div}' \frac{J(x, t^*)}{r} dv = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \left[J \text{grad}' \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \text{div}' J \right] dv. \quad (29)$$

Применяя оператор grad к любой степени r , мы можем написать, что $\text{grad } r^n = -\text{grad}' r^n$. Переменные x' входят в $J(x, t^*)$ только через $t^* = t - \frac{r}{v}$

и, следовательно,

$$\operatorname{div}' \mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t^*} \operatorname{grad}' t^* = -\frac{1}{v} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t^*} \operatorname{grad}' r = \frac{1}{v} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t^*} \operatorname{grad} r. \quad (30)$$

С другой стороны,

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{1}{v} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t^*} \operatorname{grad} r + (\operatorname{div} \mathbf{J})_{t^* = \text{const.}}, \quad (31)$$

так что

$$\operatorname{div}' \mathbf{J} = (\operatorname{div} \mathbf{J})_{t^* = \text{const.}} - \operatorname{div} \mathbf{J}. \quad (32)$$

Уравнение (29) может быть теперь написано в виде

$$\operatorname{div}' \mathbf{A} = -\frac{\mu}{4\pi} \int_V \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{J}}{r} \right) dv + \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{1}{r} (\operatorname{div} \mathbf{J})_{t^* = \text{const.}} dv. \quad (33)$$

По теореме о дивергенции

$$\int_V \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{J}}{r} \right) dv = \int_S \frac{\mathbf{J}}{r} \mathbf{n} da = 0, \quad (34)$$

так как замкнутая поверхность S , ограничивающая объем V , может быть взята настолько большой, что $\mathbf{J}$ на поверхности S всюду равно нулю. Комбинируя (28) и (33), мы получаем

$$\frac{1}{\mu} \operatorname{div}' \mathbf{A} + \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{1}{r} \left\{ (\operatorname{div} \mathbf{J})_{t^* = \text{const.}} + \frac{\partial \rho}{\partial t^*} \right\} dv, \quad (35)$$

что должно равняться нулю, ибо сохранение заряда требует, чтобы

$$(\operatorname{div} \mathbf{J})_{t^* = \text{const.}} + \frac{\partial \rho}{\partial t^*} = 0 \quad (36)$$

в любой точке, местное время в которой равно t^* .

8.3. Запаздывающий вектор Герца. В силу (36) достаточно задать распределение в пространстве и времени одних только токов. Плотность зарядов может быть тогда вычислена и потенциалы определяются вычислением интегралов (25) и (26). В большинстве случаев выгодно, однако, получать поле из единой функции, характеризующей источники, с помощью вектора Герца.

Будем выражать плотности токов и зарядов с помощью одного вектора $\mathbf{P}$, определенного соотношениями

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \quad \rho = -\operatorname{div} \mathbf{P}. \quad (37)$$

Уравнение непрерывности удовлетворяется тогда тождественно, а уравнения поля принимают вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0, \quad (\text{I}) \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (\text{III})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \quad (\text{II}) \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = -\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div} \mathbf{P}. \quad (\text{IV})$$

Как было показано в разделе 1.11, этим уравнениям удовлетворяют выражения

$$\mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2}, \quad \mathbf{H} = \varepsilon \operatorname{rot} \frac{\partial \Pi}{\partial t}, \quad (38)$$

где вектор Π является каким-либо решением уравнения

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \Pi - \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{P}. \quad (39)$$

Прямоугольные компоненты Π удовлетворяют, следовательно, неоднородному волновому уравнению

$$\Delta \Pi_j - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \Pi_j}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon} P_j \quad (j=1, 2, 3). \quad (40)$$

Едва ли нужно говорить о том, что вектор P , определённый соотношениями (37), не совпадает с вектором диэлектрической поляризации, определённым ранее в разделе 1.6. Вектор P данного раздела измеряет поляризацию или момент единицы объёма распределения свободных зарядов и поэтому не равен $D - \varepsilon_0 E$.

Для облегчения последующих вычислений мы несколько изменим обозначения. Точка наблюдения, расстояние которой от данного начала отсчёта O равно R , будет обозначаться прямоугольными координатами x_1, x_2, x_3 (рис. 71), а элемент тока, расположенный на расстоянии R_1 от начала отсчёта, — координатами (ξ_1, ξ_2, ξ_3) . Таким образом, расстояние от этого элемента тока до точки наблюдения равно

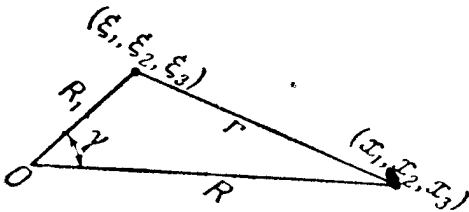


Рис. 71. Элемент тока расположен в точке ξ_1, ξ_2, ξ_3 , а x_1, x_2, x_3 — фиксированная точка наблюдения.

$$r = \sqrt{\sum_{j=1}^3 (x_j - \xi_j)^2}. \quad (41)$$

Поскольку в общем случае устанавливающееся или установившееся переменное поле может быть разложено на гармонические составляющие, нам достаточно рассмотреть только эти гармонические компоненты. Пусть

$$J = J_0(\xi) e^{-i\omega t}; \quad \rho = \rho_0(\xi) e^{-i\omega t}, \quad \rho_0 = \frac{1}{i\omega} \operatorname{div} J_0(\xi), \quad (42)$$

$$P = P_0(\xi) e^{-i\omega t}, \quad P_0 = \frac{i}{\omega} J_0. \quad (43)$$

Так как в данном случае $k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} = \frac{\omega}{v}$, то, применив (24) к (40), мы получаем основную формулу

$$\Pi(x, t) = \frac{e^{-i\omega t}}{4\pi \varepsilon} \int_V P_0(\xi) \frac{e^{ikr}}{r} d\sigma. \quad (44)$$

РАЗЛОЖЕНИЕ НА МУЛЬТИПОЛИ.

8.4. Определение моментов. Для того чтобы вычислить интеграл для запаздывающего вектора Герца, часто бывает необходимо прибегнуть к какому-либо разложению в ряд. Характер этого разложения определяется частотой токов и геометрическими свойствами их распределения. В этом разделе мы рассмотрим распространение теории мультиполей, развитой в разделах 3.8—3.12 и 4.4—4.7 для электростатических и магнитостатических полей, на случай переменных полей.

Согласно (87), стр. 365, при $R > R_1$ подинтегральное выражение соотношения (44) предыдущего раздела может быть разложено в ряд

$$\frac{e^{ikr}}{r} = ik \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos \gamma) j_n(kR_1) h_n^{(1)}(kR). \quad (1)$$

Следовательно, если R больше, чем радиус сферы, содержащей все источники, то

$$\Pi(x, t) = \frac{ik}{4\pi\epsilon} e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) h_n^{(1)}(kR) \int_V P_0(\xi) j_n(kR_1) P_n(\cos \gamma) dv. \quad (2)$$

Предположим теперь, что $P_0(\xi)$ выражено в виде функции от R_1, γ, φ , где φ — экваториальный угол относительно оси, проведённой из точки O через точку наблюдения. Тогда вектор $P_0(k_1, \gamma, \varphi)$ может быть разложен на скалярные компоненты, а каждая компонента разложена в ряд по сферическим гармоническим функциям, как это было сделано в формуле (36), стр. 358. В силу ортогональности функций $P_n(\cos \gamma)$ интеграл справа сведётся к коэффициенту разложения, умноженному на $[j_n(kR_1)]^2$. Успех этого способа зависит от вида распределения токов и от тех трудностей, с которыми будет связан подсчёт коэффициентов разложения.

Если длина волны переменного поля во много раз больше, чем наибольшие размеры области, занимаемой токами, то ряд (2) может быть представлен в виде электрических и магнитных мультиполей, расположенных в начале координат. Мы предположим, что для всех значений R_1 в пределах области V

$$kR_1 = \frac{2\pi R_1}{\lambda} \ll 1, \quad (3)$$

где λ — длина волны в данной среде, определяемой значениями ϵ и μ . Следовательно, функция $j_n(kR_1)$ может быть заменена первым членом её разложения в ряд. Согласно (25), стр. 356,

$$j_n(kR_1) \simeq \frac{2^n n!}{(2n+1)!} (kR_1)^n. \quad (4)$$

Полное поле будет состоять из суммы частичных полей

$$\Pi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Pi^{(n)}(x, t), \quad (5)$$

причём

$$\Pi^{(n)}(x, t) = \frac{i}{4\pi\epsilon} \frac{2^n n!}{(2n)!} k^{n+1} e^{-i\omega t} h_n^{(1)}(kR) \int_V P_0(\xi) R_1^n P_n(\cos \gamma) dv. \quad (6)$$

Так как $P_0(\cos \gamma) = 1$ и $h_0^{(1)}(kR) = -\frac{i}{kR} e^{ikR}$, то для первого члена мы сразу же получаем

$$\Pi^{(0)} = \frac{1}{4\pi\epsilon} p^{(1)} \frac{e^{ikR-i\omega t}}{R}, \quad p^{(1)} = \int_V P_0(\xi) dv. \quad (7)$$

Пусть ψ будет любой скалярной функцией точки. По теореме о дивергенции

$$\int_V \operatorname{div}(\psi P_0) dv = \int_S \psi P_0 n da \quad (8)$$

и, следовательно,

$$\int_V P_0 \operatorname{grad} \psi dv = - \int_V \psi \operatorname{div} P_0 dv + \int_S \psi P_0 n da. \quad (9)$$

Если S охватывает все источники данного распределения, то на поверхности S произведение $P_0 n$ равно нулю, и поверхностный интеграл исчезает.

Возьмём теперь в качестве ψ прямоугольную компоненту ξ_i радиуса-вектора, R_1 . Тогда

$$\int_V P_{0j} dv = - \int_V \xi_j \operatorname{div} P_0 dv; \quad (10)$$

соответственно,

$$p^{(1)} = \int_V P_0 dv = \int_V R_1 \rho_0 dv. \quad (11)$$

Частичное поле $\Pi^{(0)}$ возбуждается переменным электрическим диполем, дипольный момент $p^{(1)}$ которого определяется в точности так же, как и в случае электрического поля (уравнение (47), стр. 164).

Так как $P_1(\cos \gamma) = \cos \gamma$, $h_1^{(1)}(kR) = -\frac{1}{kR} \left(1 + \frac{i}{kR}\right) e^{ikR}$, то второй член уравнения (6) мы получим в виде

$$\Pi^{(1)} = -\frac{ik}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R} + \frac{i}{kR^2}\right) e^{ikR - i\omega t} \int_V P_0(\xi) R_1 \cos \gamma dv. \quad (12)$$

Для интерпретации этого интеграла мы прежде всего разложим подинтегральное выражение

$$P_0 R_1 \cos \gamma = (R_1 R) \frac{P_0}{R} = \frac{1}{2R} \left\{ [R_1, P_0] R + P_0 (R_1 R) + R_1 (R P_0) \right\}. \quad (13)$$

Магнитный дипольный момент был определён соотношением (28), стр. 212, как

$$m^{(1)} = \frac{1}{2} \int_V [R_1, J_0] dv. \quad (14)$$

Так как R от переменных интегрирования ξ не зависит, то мы имеем, следовательно,

$$\frac{1}{2R} \int_V [R_1, P_0] R dv = \frac{i}{\omega R} [m^{(1)}, R]. \quad (15)$$

Электрические квадрупольные моменты некоторого распределения зарядов были определены на стр. 164 соотношением (48) как компоненты тензора

$$p_{ij} = \int_V \xi_i \xi_j \rho_0 dv = - \int_V \xi_i \xi_j \operatorname{div} P_0 dv. \quad (16)$$

Полагая в (9) $\psi = \xi_i \xi_j$, мы получаем

$$p_{ij} = \int_V (\xi_i P_{0i} + \xi_j P_{0j}) dv = p_{ji}. \quad (17)$$

Кроме того,

$$R_1 R = R \sum_{j=1}^3 \xi_j \frac{\partial R}{\partial x_j}, \quad P_0 R = R \sum_{j=1}^3 P_{0j} \frac{\partial R}{\partial x_j}. \quad (18)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2R} \int_V [P_{0i} (R_1 R) + \xi_i (P_0 R)] dv &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial R}{\partial x_j} \int_V (\xi_j P_{0i} + \xi_i P_{0j}) dv = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 p_{ij} \frac{\partial R}{\partial x_j} = \frac{1}{2} p_i^{(2)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Величины $p_i^{(2)}$ являются компонентами вектора

$$p^{(2)} = {}^2p \operatorname{grad} R, \quad (20)$$

где 2p — тензор с компонентами p_{ij} [ср. с уравнениями (23) и (24), стр. 196].

Частичное поле $\Pi^{(1)}$ представляет собой часть поля, обусловленную магнитным диполем и электрическим квадруполем

$$\Pi^{(1)} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left\{ [m^{(1)}, \operatorname{grad} R] - \frac{i\omega}{2} p^{(2)} \right\} \left(\frac{1}{R} + \frac{i}{kR^2} \right) e^{ikR - i\omega t}. \quad (21)$$

Сравнение (21) с (7) показывает, что два эти поля отличаются прежде всего коэффициентом $\sqrt{\mu/\epsilon}$, т. е. приблизительно, в $3 \cdot 10^8$ раз, и следовательно, моменты $m^{(1)}$ и $p^{(2)}$ должны быть очень велики по сравнению с $p^{(1)}$, для того чтобы $\Pi^{(1)}$ имело заметную величину. С другой стороны, необходимо напомнить, что электрический момент токов зависит не только от геометрических свойств их распределения, но и от их частоты [уравнение (43), стр. 380]. Если $p^{(2)}$ выразить через токи, а не через заряды, то мы увидим, что величина $\Pi^{(1)}$ от частоты не зависит, в то время как величина $\Pi^{(0)}$ с увеличением частоты убывает как $\frac{1}{\omega}$.

Остальные члены ряда $\Pi^{(n)}$ дают ту часть поля, которая вызывается электрическими и магнитными мультиполями высших порядков. Они должны выражаться через соответствующие тензоры, но трудность подсчёта быстро возрастает с увеличением порядка. Величина последующих членов меняется в общем как $\left(\frac{\omega}{c}\right)^n$. В тех случаях, когда ряд сходится настолько медленно, что необходимо учитывать члены более высокого порядка, для расчёта излучения приходится обычно применять какой-либо иной метод.

8.5. Электрический диполь. Предположим, что заряды распределены так, что существует только электрический дипольный момент. Это имеет место, например, в случае переменного тока в прямолинейном отрезке проводника, длина которого очень мала по сравнению с длиной волны. Ориентируем систему координат так, чтобы положительная ось z совпадала с направлением дипольного момента $p^{(1)}$. Вектор $p^{(1)}$ может быть разложен на его компоненты в сферической системе координат, как показано на рис. 72:

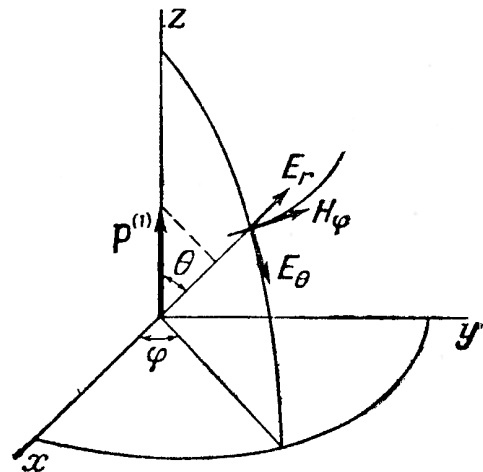


Рис. 72. Компоненты поля электрического диполя.

$$p^{(1)} = p^{(1)} \cos \vartheta i_1 - p^{(1)} \sin \vartheta i_2, \quad (22)$$

где i_1, i_2, i_3 — единичные векторы сферической системы координат, указанные на рис. 8, стр. 56. Согласно (7), вектор Герца $\Pi^{(0)}$ параллелен $p^{(1)}$ и может быть разложен аналогичным образом. Векторы поля могут быть подсчитаны затем с помощью формул (38), стр. 379, которые в случае гармонического временного множителя принимают вид

$$E = \operatorname{grad} \operatorname{div} \Pi + k^2 \Pi, \quad H = -i\omega \operatorname{rot} \Pi. \quad (23)$$

Дифференциальные операторы, выраженные в сферических координатах соотношениями (95), стр. 57, применяются к вектору

$$\Pi^{(0)} = \Pi^{(0)} \cos \vartheta i_1 - \Pi^{(0)} \sin \vartheta i_2. \quad (24)$$

Если $\mathbf{R}_0 \equiv \text{grad } R$ — единичный вектор, направленный от диполя к наблюдателю, и $t^* = t - \frac{R}{v}$, то

$$\mathbf{E}^{(0)} = \frac{1}{4\pi\epsilon} e^{-i\omega t^*} \left\{ \frac{1}{R^3} (3\mathbf{R}_0 (\mathbf{R}_0 \mathbf{p}^{(1)}) - \mathbf{p}^{(1)}) - \frac{ik}{R^2} (3\mathbf{R}_0 (\mathbf{R}_0 \mathbf{p}^{(1)}) - \mathbf{p}^{(1)}) - \frac{k^2}{R} [\mathbf{R}_0 [\mathbf{R}_0, \mathbf{p}^{(1)}]] \right\}, \quad (25)$$

$$\mathbf{H}^{(0)} = -\frac{i\omega}{4\pi} e^{-i\omega t^*} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{ik}{R} \right) [\mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{R}_0]. \quad (26)$$

Из этих выражений легко установить основные особенности строения поля диполя. Мы замечаем прежде всего, что электрический вектор лежит в меридиональной плоскости, проходящей через ось диполя, а магнитный вектор перпендикулярен к этой плоскости. Магнитные силовые линии являются концентрическими окружностями, проведёнными вокруг диполя. При частоте, равной нулю, в формуле (25) исчезают все члены, кроме первого, при $\frac{1}{R^3}$, который, согласно формуле (27), стр. 161, совпадает с полем электростатического диполя. Далее, если мы заменим $\mathbf{p}^{(1)}$ согласно формуле (43) на стр. 380 на линейный элемент тока $\frac{i}{\omega} Ids$, то первый член в (26), очевидно, можно будет интерпретировать как распространение закона Био и Савара [(14), стр. 310] на переменные поля. Отдельные члены в (25) и (26) расположены в порядке обратных степеней R , и отношение последовательных членов равно kR или $2\pi \frac{R}{\lambda}$. В непосредственном соседстве с источником преобладают «статические» и «индукционные» поля, убывающие как $\frac{1}{R^3}$ и $\frac{1}{R^2}$, в то время как на расстояниях, для которых $R \gg \lambda$ или $kR \gg 1$, необходимо принимать в расчёт только поле «излучения»

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}^{(0)} &\cong -\frac{k^2}{4\pi\epsilon} [\mathbf{R}_0 [\mathbf{R}_0, \mathbf{p}^{(1)}]] \frac{e^{-i\omega t^*}}{R}, \\ \mathbf{H}^{(0)} &\cong \frac{\omega k}{4\pi} [\mathbf{R}_0, \mathbf{p}^{(1)}] \frac{e^{-i\omega t^*}}{R}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

На расстояниях от источника, больших по сравнению с длиной волны, поле становится поперечным относительно направления распространения. Если мы положим, что $R \rightarrow \infty$, но в то же время $\mathbf{p}^{(1)}$ возрастает так, что напряжённость поля остаётся неизменной, то в пределе мы получим плоские волны, рассмотренные в главе V.

Свойство поперечности волнового движения на больших расстояниях является общим для всех электромагнитных источников колебаний, но не следует упускать из виду, что в непосредственной близости от источника имеется и продольная компонента вдоль направления распространения. Так, например, поле излучения электрического диполя равно нулю в направлении его оси, но при достаточно малых значениях R имеется заметная продольная компонента $E^{(0)}$ вида

$$E_z = \frac{2}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{z} - \frac{ik}{z^2} \right) |\mathbf{p}^{(1)}| e^{-i\omega t^*}. \quad (28)$$

Именно эта компонента, а не поле излучения, определяет распределение токов в вертикальной антенне, расположенной над землёй.

Для подсчёта потока энергии в поле используем комплексный вектор Пойнтинга, введённый в разделе 2.20. Если $\bar{S}$ — среднее значение энергии,

проходящей в секунду через единичную площадку в направлении положительной нормали, то

$$\bar{S} = \text{Re}(S^+), \quad S^+ = \frac{1}{2} [E, H^*]. \quad (29)$$

Для того чтобы подсчитать комплексный вектор Пойнтинга, мы прежде всего напомним в компонентах формулы (25) и (26)

$$\left. \begin{aligned} E_R^{(0)} &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R^3} - \frac{ik}{R^2} \right) \cos \vartheta |p^{(1)}| e^{-i\omega t^*}, \\ E_\vartheta^{(0)} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R^3} - \frac{ik}{R^2} - \frac{k^2}{R} \right) \sin \vartheta |p^{(1)}| e^{-i\omega t^*}, \\ H_\varphi^{(0)} &= -\frac{i\omega}{4\pi} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{ik}{R} \right) \sin \vartheta |p^{(1)}| e^{-i\omega t^*}. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Из этих выражений мы образуем

$$S^+ = \frac{1}{2} E_\vartheta H_\varphi^* i_1 - \frac{1}{2} E_R H_\varphi^* i_2 \quad (31)$$

и получим

$$S^+ = \frac{\omega k^3}{32\pi^2\epsilon_0} \frac{\sin^2 \vartheta}{R^2} |p^{(1)}|^2 i_1 + \frac{i\omega}{32\pi^2\epsilon_0} \frac{\sin^2 \vartheta}{R^5} |p^{(1)}|^2 i_1 - \frac{i\omega}{16\pi^2\epsilon_0} \left(\frac{1}{R^5} - \frac{k^2}{R^3} \right) \sin \vartheta \cos \vartheta |p^{(1)}|^2 i_2. \quad (32)$$

Теперь надо проинтегрировать нормальную компоненту S^+ по поверхности сферы радиуса R :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi S_R^+ R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{\omega^4}{12\pi} \mu \sqrt{\epsilon\mu} |p^{(1)}|^2 + \frac{i\omega}{12\pi\epsilon} \frac{1}{R^3} |p^{(1)}|^2. \quad (33)$$

Согласно (29), стр. 128, действительная часть (33) даёт среднее значение потока энергии, вытекающего через сферическую поверхность, охватывающую колеблющийся диполь. Поскольку действительная часть не зависит от радиуса сферы, поток этот должен быть одинаковым для всех концентрических сфер; мы получили таким образом, что *система теряет энергию с постоянной мощностью, равной*

$$W^{(0)} = \frac{\omega^4}{12\pi} \mu \sqrt{\epsilon\mu} |p^{(1)}|^2 \text{ ватт}. \quad (34)$$

Величина W определяет *радиационные потери* диполя. В разложении электромагнитного поля излучение дают только те члены, которые исчезают в бесконечности, как $\frac{1}{R}$. В данном случае имеется, конечно, мгновенный поток энергии, связанный с другими членами (25) и (26), но в среднем за период этот поток равен нулю. Члены с $\frac{1}{R^2}$ и $\frac{1}{R^3}$ связаны с энергией, распределённой в поле, которая периодически то вытекает из источника, то возвращается к нему обратно, но не утрачивается системой.

В свободном пространстве $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$, $\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-8}$ и, следовательно,

$$W^{(0)} = \frac{1}{9} 10^{-15} \omega^4 |p^{(1)}|^2 = 173 \cdot 10^{-15} \nu^4 |p^{(1)}|^2 \text{ ватт}, \quad (35)$$

где ν — частота. Излучение очень быстро растёт с увеличением частоты и уменьшением длины волны.

8.6. Магнитный диполь. Распределение токов может быть таково, что существенную роль играет только дипольный магнитный момент $\mathbf{m}^{(1)}$. При достаточно малых частотах именно это будет иметь место в случае проводника в виде замкнутой петли. Тогда

$$\Pi^{(1)} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} [\mathbf{m}^{(1)}, \mathbf{R}_0] \left(\frac{1}{R} + \frac{i}{kR^2} \right) e^{-i\omega t^*}. \quad (36)$$

Подсчитанные по (23) компоненты векторов поля будут

$$\left. \begin{aligned} E_{\varphi}^{(1)} &= \frac{k^2}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left(\frac{1}{R} + \frac{i}{kR^2} \right) \sin \vartheta |\mathbf{m}^{(1)}| e^{-i\omega t^*}, \\ H_R^{(1)} &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{R^3} - \frac{ik}{R^2} \right) \cos \vartheta |\mathbf{m}^{(1)}| e^{-i\omega t^*}, \\ H_{\vartheta}^{(1)} &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{R^3} - \frac{ik}{R^2} - \frac{k^2}{R} \right) \sin \vartheta |\mathbf{m}^{(1)}| e^{-i\omega t^*}. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Структура этого поля совпадает со структурой поля электрического диполя, но векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ поменялись местами. Вектор $\mathbf{H}^{(1)}$ лежит теперь в меридианальной плоскости, проходящей через диполь, и имеет как радиальную, так и поперечную компоненты. Линии вектора $\mathbf{E}^{(1)}$ являются концентрическими окружностями, проведёнными вокруг оси диполя. При $k=0$ формулы (37) переходят в выражения, выведенные в разделе 4.5 для статического поля постоянного магнитного диполя.

Для подсчёта излучения мы снова, как и в (31), образуем комплексный вектор Пойнтинга и интегрируем по поверхности сферы радиуса R его нормальную компоненту. В результат войдут из (37) только члены, содержащие $\frac{1}{R}$, и мы получим

$$W^{(1)} = \frac{k^4}{12\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} |\mathbf{m}^{(1)}|^2 \text{ ватт}. \quad (38)$$

В свободном пространстве $\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376,6 \text{ ом}$, и в этом случае

$$W^{(1)} = 10 k^4 |\mathbf{m}^{(1)}|^2 \text{ ватт}. \quad (39)$$

Рассмотрим для примера переменный ток в одиночном витке радиуса R_1 м. Пусть максимальное значение тока будет I_0 , а длина волны очень велика по сравнению с R_1 . Фаза тока во всех точках витка будет по существу одна и та же, из чего, согласно (43), стр. 380, и (11), стр. 382, следует, что электрическим дипольным моментом можно пренебречь. Магнитный момент $|\mathbf{m}^{(1)}| = \pi R_1^2 I_0$. Следовательно, излучаемая мощность равна

$$W = 160\pi^6 \left(\frac{R_1}{\lambda} \right)^4 I_0^2. \quad (40)$$

Сопротивление излучения $\Re$ определяется как такое эквивалентное омическое сопротивление, в котором рассеивается та же мощность. Так как максимальная амплитуда тока равна I_0 , то

$$W = \frac{1}{2} \Re I_0^2 \quad (41)$$

и, следовательно, в рассматриваемом примере

$$\Re = 320\pi^6 \left(\frac{R_1}{\lambda} \right)^4 = 3,075 \cdot 10^5 \left(\frac{R_1}{\lambda} \right)^4 \text{ ом}. \quad (42)$$

Результат этот ограничен прежде всего тем условием, что второй член в разложении $j_1(kR_1)$ должен быть исчезающе малым по сравнению

с первым; имеем

$$j_1(kR_1) = \frac{(kR_1)}{3} \left(1 - \frac{(kR_1)^2}{10} + \dots \right), \quad (43)$$

и следовательно, $j_1(kR_1)$ может быть аппроксимировано первым членом, если $kR_1 < 1$. Фактически оказывается общим правилом, что эти функции могут быть представлены их первыми членами до тех пор, пока их аргумент не превышает их порядка. Если, например, $\lambda = 10R_1$, то сопротивление излучения равно около 30 *омов*. Оно очень быстро возрастает при уменьшении λ , но при этом начинают играть роль и электрические дипольные и квадрупольные моменты. С другой стороны, очевидно, что при увеличении длины волны излучение становится вскоре исчезающе малым. Токи, длина волны которых велика по сравнению с наибольшими размерами системы проводников, по которым они протекают, не дают сколько-нибудь заметного излучения и называются *квазистационарными*.

ТЕОРИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АНТЕНН

8.7. Поле излучения одиночного линейного осциллятора. Точное определение распределения токов в проводнике является краевой задачей: требуется найти такое установившееся решение волнового уравнения, соответствующее данным э.д.с., которое удовлетворяло бы условию конечности во внутренних точках проводника и условию непрерывности тангенциальной компоненты напряжённости поля при переходе через его поверхность. Для цилиндрического проводника конечной длины эта задача полностью ещё не решена, но неплохое представление о том, что здесь происходит, может быть получено при изучении проводящего вытянутого сфероида, эксцентриситет которого мало отличается от единицы. Подробное исследование впервые было проведено Абрагамом¹⁾; в последнее время целый ряд работ также был посвящён этому вопросу²⁾. Все эти работы подтверждают то, что естественно было ожидать с самого начала: распределение тока вдоль изолированного прямого проводника в основном является гармоническим, а отношение длины антенны к длине волны, пока размеры поперечного сечения антенны весьма малы по сравнению с её длиной, равно полуцелому числу. Значительно бóльшим источником ошибки, нежели конечность диаметра проводника, является затухание вследствие излучения. При протекании тока от точки

¹⁾ Abraham, *Ann. Physik* 66, 435, 1898.

²⁾ В настоящее время решение краевой задачи о вынужденных колебаниях тонкого проводника конечной длины настолько продвинуто, что уже нельзя согласиться с высказанным выше противоположным утверждением автора. Основными здесь явились работы Галлена и работы советских авторов. В работе Галлена (E. Hallén, *Nova Acta Upsala* 11, 1, 1938) последовательно используется малость радиуса провода a по сравнению с его длиной l , что позволяет привести задачу к интегральному уравнению, содержащему малый параметр $1/\ln(l/a)$. Численная обработка результатов Галлена была сделана Кингом и Блэком (R. King and Blake, *Proc. J. R. E.* 30, 335, 1942). Независимо М. А. Леонтовичем и М. Л. Левиным (*ЖТФ* 14, 481, 1944), благодаря использованию того же малого параметра, задача была приведена к интегро-дифференциальному уравнению для полного тока в антенне, которое можно рассматривать как «телеграфное уравнение однопроводной линии». В работе М. Л. Левина (*ДАН* 54, 599, 1946) получено далее интегральное представление входного реактанса антенны, аналогичное соответствующему представлению сопротивления излучения. Таким образом, расчёт реактанса сведён к квадратурам, причём вычисление может быть проведено для самых различных профилей (тонкого) провода, в отличие от расчётов, предполагающих специализированный профиль (например, вытянутый сфероид—Page and Adams, *Phys. Rev.* 53, 819, 1938; Stratton and Chu, *J. Applied Phys.* 12, 230, 1941; конус—Schelkunoff, *Proc. I. R. E.* 29, 493, 1941). Кроме того, указанное интегральное представление реактанса позволяет обобщить теорию на случаи антенны в волноводе, объёмном резонаторе и т. п. *Прим. ред.*

подвода питания к концам антенны энергия рассеивается и в виде тепла и в виде излучения. Следовательно, предположение о постоянстве амплитуды в пучностях тока вдоль провода не соответствует действительности. На стоячую волну тока в антенне накладывается затухающая бегущая волна, восполняющая потери энергии. Влияние подобного изменения распределения тока в антенне на характер излучения может быть очень заметным.

На распределение токов в антенне влияет также близость земли или каких-либо других предметов. Современное направление развития ведёт к системам линейных антенн, подвешенных на некотором расстоянии над землёй, а в этом случае влиянием земли на распределение токов можно обычно пренебречь. С другой стороны, если в качестве антенны используется стальная башенная конструкция, то ёмкость её по отношению к земле может существенно повлиять на распределение токов.

В этом разделе мы рассмотрим радиационные свойства линейных антенн, изолированных в свободном пространстве. Каким образом излучение отражается и преломляется затем землёй, будет рассмотрено в следующей главе. Мы предположим, что измерение токов произведено в ряде точек вдоль

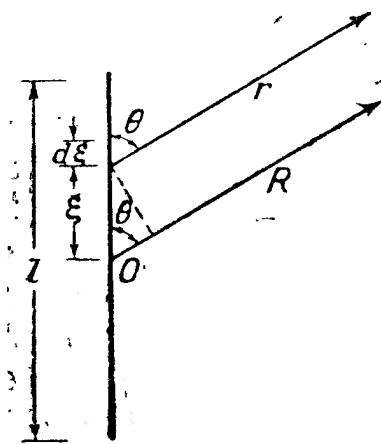


Рис. 73. Одиночный линейный осциллятор.

каждого из проводников и что измеренное таким образом распределение токов может быть представлено с помощью одной или нескольких стоячих или бегущих синусоидальных волн.

Рассмотрим сначала одиночный прямолинейный проводник длины l , как показано на рис. 73. Ток в любой точке на расстоянии ξ от середины проводника пусть будет $I = u(\xi) \exp(-i\omega t)$; тогда, согласно (44), стр. 380, вектор Герца для такого распределения равен

$$\Pi(x, t) = \frac{i}{4\pi\omega\epsilon_0} e^{-i\omega t} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} u(\xi) \frac{e^{ikr}}{r} d\xi, \quad (1)$$

где $d\xi$ — элемент длины вдоль проводника. Поле излучения элемента $d\xi$ по формуле (27), стр. 384, будет

$$\begin{aligned} dE_\theta &= -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r} e^{ikr-i\omega t} u(\xi) d\xi, \\ dH_\varphi &= -\frac{i\omega}{4\pi c} \frac{\sin\theta}{r} e^{ikr-i\omega t} u(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (2)$$

так что, интегрируя по всем элементам вдоль проводника, мы получаем

$$E_\theta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_\varphi = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi} e^{-i\omega t} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{\sin\theta}{r} e^{ikr} u(\xi) d\xi. \quad (3)$$

Если $r \gg l$, то можно рассматривать $\frac{\sin\theta}{r}$ как медленно меняющуюся функцию от ξ . Это значит, что радиусы-векторы, проведённые от различных элементов тока к точке наблюдения, почти параллельны и $\frac{\sin\theta}{r}$ может быть заменён на $\frac{\sin\theta}{R}$ и вынесен из-под знака интеграла. Это приближение тем более точно, чем больше R , а так как через все концентрические сферы

с центром в точке O проходит одно и то же излучение, то мы можем брать R сколь угодно большим. Фазу, однако, необходимо рассматривать с большей точностью. Из рисунка ясно, что время, необходимое волне, испущенной элементом в точке ξ для того, чтобы достигнуть удалённой точки, меньше соответствующего времени для волны, испущенной элементом в точке O , на величину $\xi \frac{\cos \theta}{c}$. Соответственно фазы этих волн отличаются на величину $k\xi \cos \theta$, поскольку $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Таким образом при $R \rightarrow \infty$ напряжённости поля стремятся к пределу

$$E_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_\varphi = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \frac{\sin \theta}{R} e^{ikR-i\omega t} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} e^{-ik\xi \cos \theta} u(\xi) d\xi. \quad (4)$$

Синусоидальное распределение токов даётся функцией

$$u(\xi) = I_0 \sin(k\xi - \alpha), \quad (5)$$

а условие равенства нулю токов на концах проводника при $\xi = \pm \frac{l}{2}$ выполняется при

$$u(\xi) = I_0 \sin m\pi \left(\frac{\xi}{l} + \frac{1}{2} \right), \quad k = \frac{m\pi}{l}. \quad (6)$$

Целое число m равно числу полувольт, укладывающихся на длине l , а I_0 — амплитуда тока в пучности. Интеграл (4) легко вычисляется и даёт

$$E_{0z} = -\frac{i}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} I_0 \left\{ e^{\frac{im\pi}{2} \cos \theta} - (-1)^m e^{-\frac{im\pi}{2} \cos \theta} \right\} \frac{1}{R \sin \theta} e^{ikR-i\omega t}. \quad (7)$$

Численный коэффициент равен

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 59,92 \cong 60, \quad (8)$$

следовательно,

$$E_0 = -i 60 I_0 \frac{\cos\left(\frac{m\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \frac{e^{ikR-i\omega t}}{R} \quad \text{при } m \text{ нечётном} \quad (9)$$

и

$$E_0 = 60 I_0 \frac{\sin\left(\frac{m\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \frac{e^{ikR-i\omega t}}{R} \quad \text{при } m \text{ чётном.} \quad (10)$$

Излучение зависит только от типа возбуждённых колебаний, но не от длины излучателя. Поле излучения одиночного линейного осциллятора такое же, как и поле диполя, расположенного в его центре, но с амплитудой, умноженной на фазовый множитель $F(\theta)$.

Интенсивность излучения в каком-либо данном направлении опять-таки выражается через комплексный вектор Пойнтинга, направленный по радиусу и равный по величине

$$\left. \begin{aligned} S^+ &= \frac{1}{2} E_0 H_\varphi^*, \\ S^+ &= \frac{30 I_0^2 \cos^2\left(\frac{m\pi}{2} \cos \theta\right)}{2\pi R^2 \sin^2 \theta} \quad (m = 1, 3, 5, \dots), \\ S^+ &= \frac{30 I_0^2 \sin^2\left(\frac{m\pi}{2} \cos \theta\right)}{2\pi R^2 \sin^2 \theta} \quad (m = 2, 4, 6, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Из расположения нулей и максимумов этих функций можно получить вполне отчётливое представление о диаграмме излучения. При m нечётном нули S^+ получаются при

$$\cos \theta = \frac{1}{m}, \frac{3}{m}, \dots, \frac{m}{m}, \quad (12)$$

в то время как максимумы находятся из соотношения

$$\frac{m\pi}{2} \operatorname{tg} \theta \sin \theta = \operatorname{ctg} \left(\frac{m\pi}{2} \cos \theta \right). \quad (13)$$

Аналогично, при m чётном нули получаются при

$$\cos \theta = 0, \frac{2}{m}, \frac{4}{m}, \dots, \frac{m}{m}, \quad (14)$$

а максимумы соответствуют углам, удовлетворяющим соотношению

$$\frac{m\pi}{2} \operatorname{tg} \theta \sin \theta = \operatorname{tg} \left(\frac{m\pi}{2} \cos \theta \right). \quad (15)$$

Диаграммы излучения для первых четырёх типов колебаний показаны на рис. 74. В каждом случае пунктирной кривой показано распределение

тока вдоль излучателя, которое в различных участках осциллятора либо совпадает по фазе, либо различается на 180° . Интерференционное взаимодействие подобных участков тока приводит к разделению диаграммы на отдельные лепестки, число которых равно числу m участков. Между лепестками располагаются узлы поля излучения.

Интенсивность излучения имеет наибольшую величину в направлении осей лепестков, расположенных ближе всего к излучателю, и при $m \rightarrow \infty$ излучение направлено полностью вдоль провода. Энергия может распространяться вдоль бесконечного проводника, но в этом случае отсутствует направленный в сторону радиальный по-

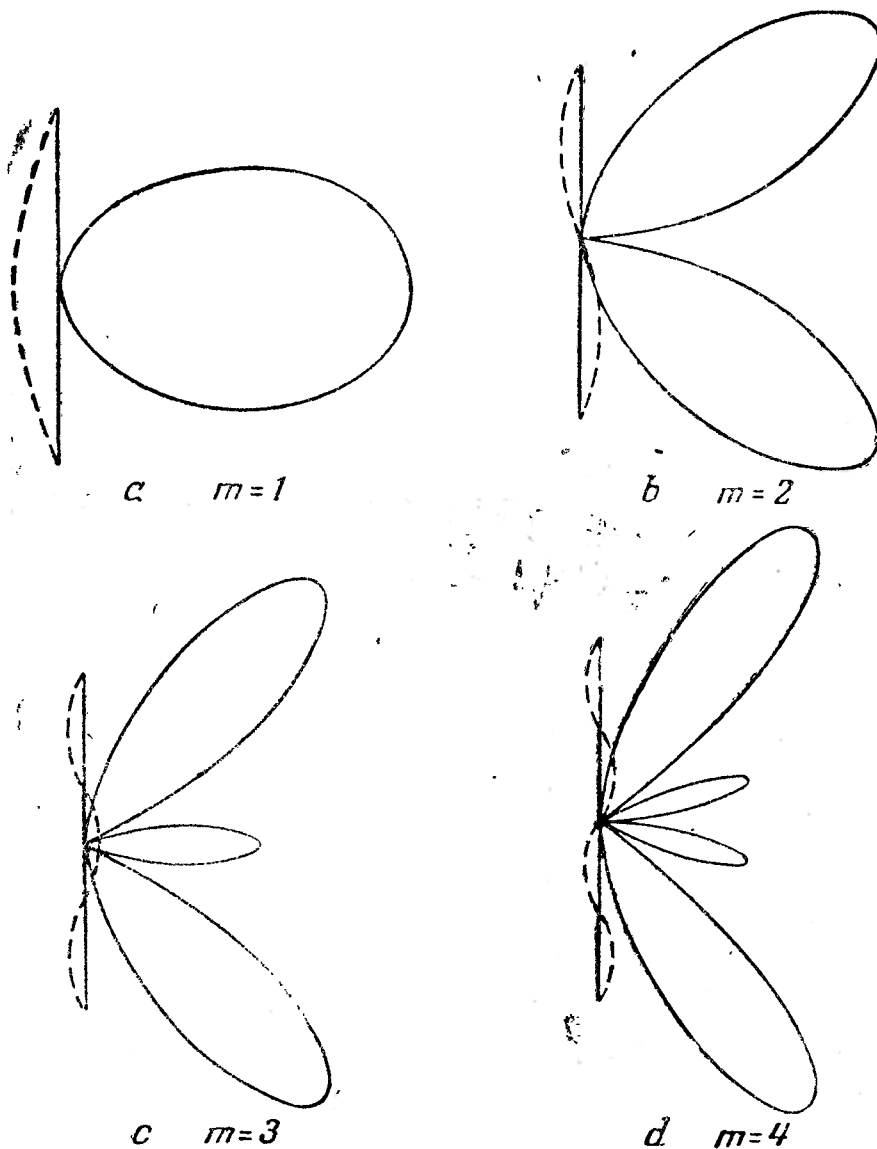


Рис. 74. Диаграммы излучения линейного осциллятора, возбуждаемого в различных тонах: $m = 1, 2, 3, 4$.

ток энергии. В дальнейшем мы увидим, что наличие внутри проводника потерь на джоулево тепло приводит к появлению компенсирующего потока энергии, направленного в проводник.

Полученные нами теоретические диаграммы на практике видоизменяются из-за затухания, вызываемого потерями на джоулево тепло и на излучение. Вследствие этого амплитуды последовательных пучностей тока уменьшаются по мере удаления вдоль антенны от точки подвода питания. Лепестки диаграммы излучения, лежащие в экваториальной плоскости $\theta = \frac{\pi}{2}$ или около неё, усиливаются за счёт сужения наружных лепестков. Этот эффект становится более резко выраженным по мере увеличения сопротивления материала антенны, что иллюстрирует рис. 75. Кривые были получены Бергманом¹⁾ из измерений, проведённых над линейными осцилляторами, в которых возбуждались колебания порядка $m=3$, в бронзовой и стальной проволоке разных диаметров. Отношение амплитуды тока в центральной пучности к амплитудам в крайних пучностях было порядка 1,4:1. Расчёт излучения при таком распределении амплитуд привёл к результатам, хорошо согласующимся с наблюдаемыми значениями.

Излучаемая мощность получается интегрированием S^+ по поверхности сферы очень большого радиуса R с центром в точке 0. При m нечётном имеем

$$W = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi S^+ R^2 \sin \theta \, d\varphi \, d\theta =$$

$$= 30 I_0^2 \int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{m\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} d\theta. \quad (16)$$

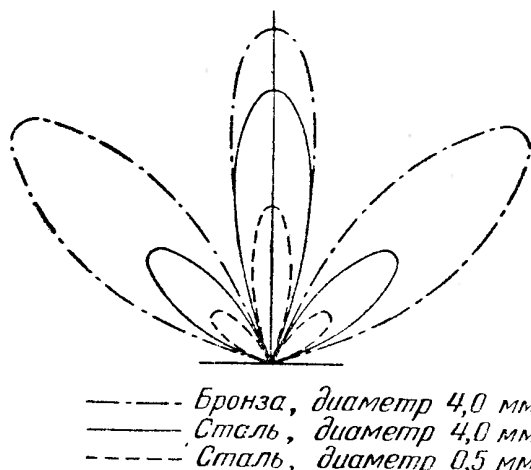


Рис. 75. Влияние сопротивления антенны на излучение по измерениям Бергмана.

Для вычисления этого интеграла мы заменим переменную θ на $u = \cos \theta$ с пределами изменения от $+1$ до -1 . Тогда ввиду того, что

$$\frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} \right), \quad (17)$$

(16) преобразуется к виду

$$W = 15 I_0^2 \int_{-1}^{+1} \frac{1 + \cos m\pi u}{1+u} du. \quad (18)$$

Положив далее $1+u = \frac{v}{m\pi}$, получим

$$W = 15 I_0^2 \int_0^{2m\pi} \frac{1 - \cos v}{v} dv \quad (19)$$

или

$$W = 15 I_0^2 [\ln 2m\pi\gamma - \text{Ci } 2m\pi], \quad (20)$$

где $\gamma = 1,7811$, а $\text{Ci } x$ — интегральный косинус

$$\text{Ci } x = - \int_x^\infty \frac{\cos v}{v} dv, \quad (21)$$

значения которого приведены в таблицах функций Янке и Эмде.

Точно такой же результат получается и при нечётном m . В обоих случаях сопротивление излучения равно:

$$\Re = 30 (\ln 2\pi m\gamma - \text{Ci } 2m\pi) \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (22)$$

¹⁾ Bergmann, *Ann. Physik* 82, 504, 1927.

или, поскольку

$$\ln 2\pi\gamma = 2,4151, \\ \Re = 72,45 + 30 \ln m - 30 \operatorname{Ci} 2\pi m \text{ омов.} \quad (23)$$

Если $m > 2$, то членом с $\operatorname{Ci} 2\pi m$ можно пренебречь. Соотношение между сопротивлением излучения и порядком возбуждения показано графически на рис. 76. Выражение (23) справедливо только в случае резонанса, когда $2l/\lambda = m$ является целым числом. Для промежуточных значений длин волн сопротивление излучения следует кривой, колеблющейся между резонансными значениями, нанесёнными на рис. 76. Точная форма этой кривой зависит от способа возбуждения¹⁾.

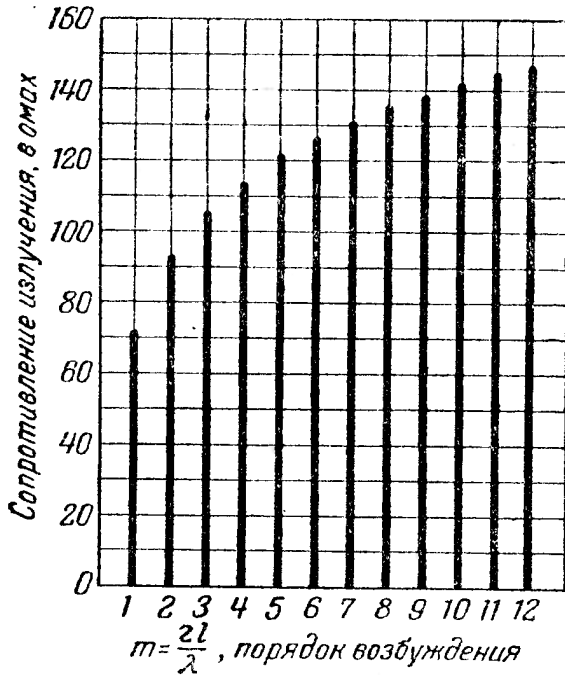


Рис. 76. Сопротивление излучения линейной антенны при резонансе.

в которой отсутствует отражённая компонента тока, предположим, что распределение тока даётся функцией

$$u(\xi) = I_0 e^{ik\xi}. \quad (24)$$

Если, как и в предыдущем случае, антенна питается в центральной точке, то напряжённость поля излучения будет

$$E_\theta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_\varphi = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi} I_0 \frac{\sin \theta}{R} e^{ikR - i\omega t} \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} e^{ik(1 - \cos \theta)\xi} d\xi, \quad (25)$$

что после интегрирования даёт

$$E_\theta = -i60I_0 \sin \theta \frac{\sin \left[\frac{kl}{2} (1 - \cos \theta) \right]}{1 - \cos \theta} \frac{e^{ikR - i\omega t}}{R}. \quad (26)$$

Поток излучаемой энергии определяется функцией

$$S^+ = \frac{1}{2} E_\theta H_\varphi^* = \frac{30I_0^2}{2\pi} \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \left[\frac{kl}{2} (1 - \cos \theta) \right]}{(1 - \cos \theta)^2} \frac{1}{R^2}. \quad (27)$$

¹⁾ См., например, интересную статью Labus, Hochfrequenztechn. u. Elektroak. 41, 17, 1933.

²⁾ Задача с двумя параллельными линиями — прямой и обратной — была впервые правильно рассмотрена Manneback'ом, J. Am. Inst. Elec. Engrs. 42, 95, 1923.

Излучаемая мощность равна, следовательно,

$$W = 30I_0^2 \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \left[\frac{kl}{2} (1 - \cos \theta) \right]}{(1 - \cos \theta)^2} \sin \theta d\theta.$$

Для того чтобы выполнить интегрирование, мы полагаем

$$u = 1 - \cos \theta, \quad du = \sin \theta d\theta,$$

в результате чего (28) приводится к виду

$$W = 30I_0^2 \int_0^2 \frac{(2-u) \sin^2 \frac{klu}{2}}{u} du. \quad (29)$$

Опуская элементарные промежуточные вычисления, мы получаем для W выражение

$$W = 30I_0^2 \left(1,415 + \ln \frac{2l}{\lambda} - \text{Ci} \frac{4\pi l}{\lambda} + \frac{\sin \frac{4\pi l}{\lambda}}{\frac{4\pi l}{\lambda}} \right), \quad (30)$$

а для сопротивления излучения

$$R = 84,9 + 60 \ln \frac{2l}{\lambda} + 60 \frac{\sin \frac{4\pi l}{\lambda}}{\frac{4\pi l}{\lambda}} - 60 \text{Ci} \frac{4\pi l}{\lambda}. \quad (31)$$

Мы видим, что для одинаковой длины волны и для одной и той же антенны сопротивление излучения для бегущей волны больше, чем для стоячей.

8.9. Гашение противоположных фаз. Направленные свойства однопроводной антенны могут быть усилены путём гашения одной из противоположных фаз тока. В антенне типа Маркони-Франклина такое гашение осуществляется путём включения вдоль линии соответствующих индуктивных нагрузок на расстоянии полуволны друг от друга. Каждый из участков с противоположной фазой настолько сокращается по длине, что излучением от него можно пренебречь, в результате чего такая антенна оказывается эквивалентной системе синфазных полуволновых излучателей, расположенных вдоль одной прямой, вплотную друг к другу. Схематически это показано на рис. 77.

Слагаемое поля излучения от колебаний в каком-либо из отрезков приходит в удалённую точку с упреждением по фазе на $\beta = \omega d/c$ по срав-

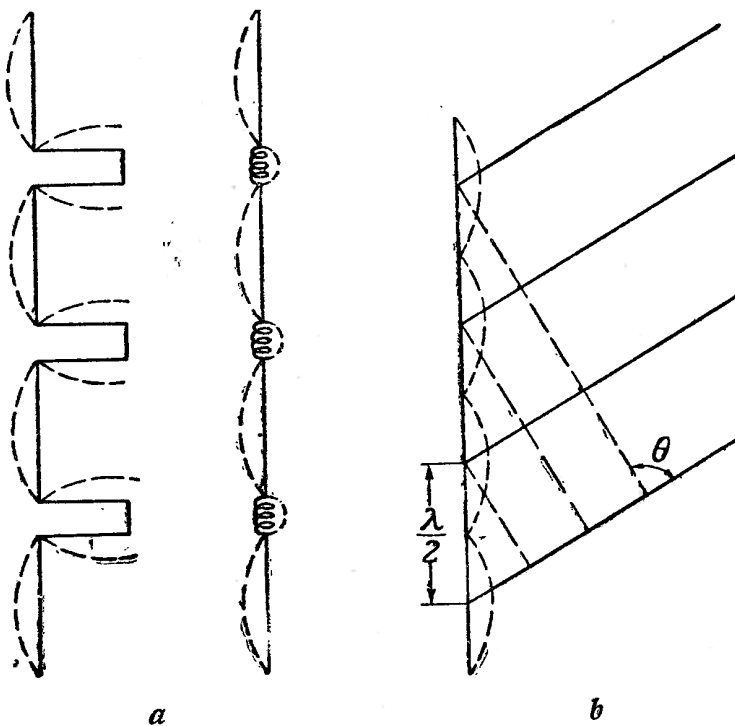
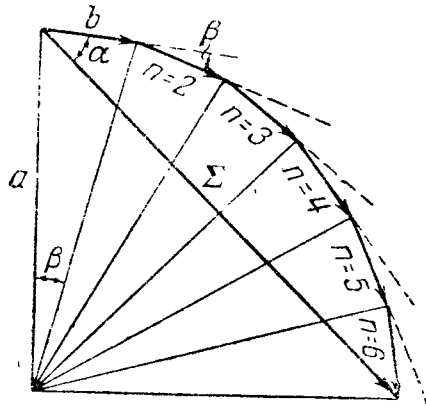


Рис. 77. *a* — антенны Маркони-Франклина; *b* — идеализированное распределение токов.

нению с соседним нижним отрезком. Результирующее поле будет, следовательно,

$$E_0 = -60iI_0 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \frac{e^{ikR - i\omega t}}{R} \sum_{m=0}^n e^{-im\beta}, \quad (32)$$

где n — число пучностей тока. Величина $be^{-im\beta}$ является вектором на комплексной плоскости, повернутым на угол $-m\beta$ по отношению к действительной оси. Таким образом, суммирование в формуле (32) может быть осуществлено простым геометрическим построением. На рис. 78 начерчена соответствующая векторная диаграмма, на которой сумма представляется очевидно хордой правильного многоугольника. В соответствии с обозначениями на рисунке мы имеем



$$b = 2a \sin \frac{\beta}{2}, \quad \Sigma = 2a \sin \frac{n\beta}{2},$$

где $\Sigma = \frac{b \sin \frac{n\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}}$ составляет с действительной

осью угол $\alpha = (n-1)\frac{\beta}{2}$. Так как в нашем случае $b = 1$, то мы получим

Рис. 78. Вычисление ряда

$$\sum_{m=0}^n be^{-im\beta}.$$

$$\sum_{m=0}^n e^{-im\beta} = \frac{\sin \frac{n\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} e^{-i(n-1)\frac{\beta}{2}}. \quad (33)$$

Вместо β мы пишем $\omega d/c = \pi \cos \theta$, поскольку $d = \frac{\lambda}{2} \cos \theta$, и получаем

$$E_0 = 60iI_0 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)} \frac{e^{ikR - i\omega t - i(n-1)\frac{\pi}{2} \cos \theta}}{R}. \quad (34)$$

Поток энергии равен

$$S^+ = \frac{30I_0^2}{2\pi} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)} \right]^2 \frac{1}{R^2}, \quad (35)$$

и полная излучаемая мощность

$$W = 30I_0^2 \int_0^{\pi} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{n\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)} d\theta. \quad (36)$$

Этот интеграл был вычислен Бонч-Бруевичем¹⁾, который получил

$$W = (-1)^{n-1} 30I_0^2 \left[S_0^{n\pi} - \frac{(n-1)\pi}{4} S_0^{(n-1)\pi} + \frac{(n-2)\pi}{8} S_0^{(n-2)\pi} - \frac{(n-3)\pi}{12} S_0^{(n-3)\pi} + \dots \pm 4(n-1) S_0^{\pi} \right], \quad (37)$$

¹⁾ Bontsch-Bruewitsch, *Ann. Physik* 81, 437, 1926.

где

$$S_0^{m\pi} = \int_0^{m\pi} \frac{\sin^2 u}{u} du = \frac{1}{2} (\ln 2m\pi\gamma - \text{Ci } 2m\pi). \quad (38)$$

Сопротивление излучения равно, следовательно,

$$\Re = (-1)^{n-1} 60 \left(S_0^{n\pi} - \frac{(n-1)\pi}{4} S_0^{(n-1)\pi} + \frac{(n-2)\pi}{8} S_0^{(n-2)\pi} - \dots \right). \quad (39)$$

На рис. 79, *a* показана концентрация излучённой энергии в экваториальной плоскости для случая трёх пучностей тока; рис. 79, *b*, на котором нанесены значения сопротивления излучения, показывает значительное увеличение излучаемой мощности, достигаемое в результате гашения одной из противоположных интерферирующих фаз.

8.10. Направленные устройства. Однопроводная антенна является направленной только в том смысле, что излучение концентрируется в круговом конусе, осью которого является антенна. Система расположенных вдоль прямой полуволновых излучателей, возбуждаемых в одной и той же фазе, ограничивает излучение тонкой круглой дископодобной областью, вроде показанной на рис. 79, *a*. Если мы хотим получить преимущественное направление также и в самой экваториальной плоскости или какой либо иной вид осевой асимметрии, то однопроводный излучатель должен быть заменён группой или устройством из полуволновых антенн, которые соответствующим образом расположены в пространстве и в которых возбуждаются колебания с соответствующими фазами. На практике обычно выдерживаются одинаковые расстояния между центрами излучателей, так что устройство образует пространственную решётку. Между задачами о распространении рентгеновских лучей в кристаллографии и конструированием коротковолновых антенных систем действительно существует некоторая аналогия. Из дифракционных пятен на рентгенограммах физики стремятся сделать заключения о расположении атомных диполей, вызывающих дифракцию, и определить таким образом строение кристалла. Радиоинженер должен выбрать пространственную решётку и фазу токов в диполях таким образом, чтобы получить заданную диаграмму излучения. В обоих случаях распределение излучения характеризуется фазовым множителем, или коэффициентом формы, зависящим от полярных углов θ и φ , и методы, развитые для анализа строения кристаллов, в значительной мере могут быть применены и к проектированию антенн.

Для того чтобы упростить задачу, мы предположим, что все излучатели устройства параллельны друг другу. Антенны возбуждаются в центральных точках с помощью фидеров, которые могут быть сконструированы так, чтобы излучаемая ими энергия была пренебрежимо мала. Кроме того, фазо-

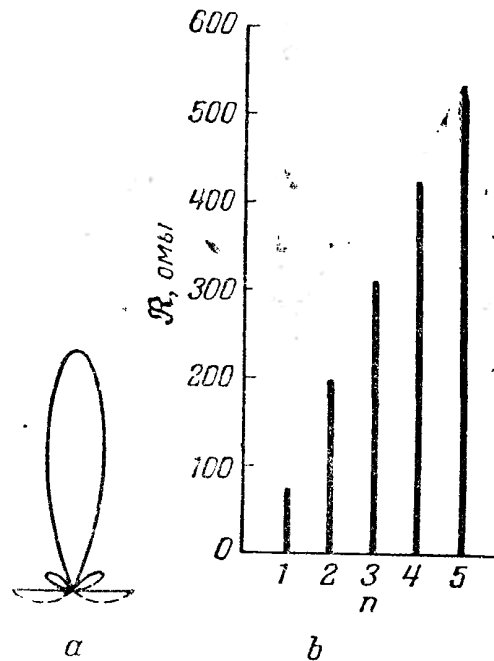


Рис. 79, *a* — диаграмма излучения антенны, распределение токов в которой показано пунктиром; *b* — сопротивление излучения n полуволновых отрезков, колебания в которых происходят синфазно.

вая скорость распространения вдоль этих фидеров может быть сделана как меньше, так и больше c ; в соответствии с этим, фазовые соотношения между различными элементами устройства могут быть заданы практически совершенно произвольно¹⁾.

Фазовый множитель одиночной полуволновой антенны мы будем обозначать через F_0 :

$$F_0(\theta) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta}. \quad (40)$$

Центры осцилляторов регулярно расположены в виде пространственной решётки, которая определяется тремя базисными векторами $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, как показано на рис. 80. Положение j -го осциллятора в решётке определяется вектором

$$\mathbf{r}_j = j_1 \mathbf{a}_1 + j_2 \mathbf{a}_2 + j_3 \mathbf{a}_3, \quad (41)$$

где j_1 , j_2 , j_3 — три целых числа, не исключая и нуля. Фаза j -го осцилля-

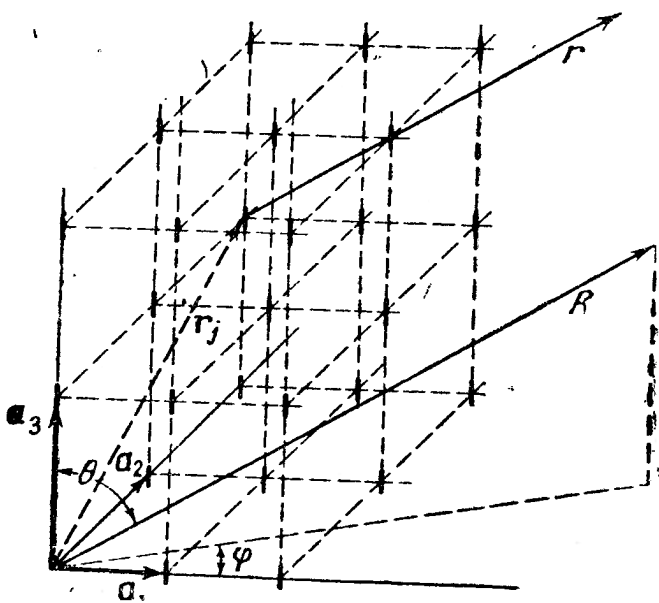


Рис. 80. Система полуволновых вибраторов, расположенных в виде пространственной решётки, определяемой базисными векторами $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$.

тора по отношению к осциллятору, расположенному в начале решётки, пусть будет β_j :

$$\beta_j = j_1 \alpha_1 + j_2 \alpha_2 + j_3 \alpha_3. \quad (42)$$

Таким образом, α_i — сдвиг фазы любого осциллятора по отношению к ближайшему его соседу на оси, определяемой базисным вектором $\mathbf{a}_1$, и т. д. Поле излучения j -го осциллятора будет, следовательно,

$$E_j = -i60 I_{0j} F_0(\theta) \frac{e^{ikR - i\omega t - ikR_0 r_j - i\beta_j}}{R}, \quad (43)$$

где $\mathbf{R}_0$ — единичный вектор в направлении радиуса-вектора $\mathbf{R}$. Напряжённость результирующего поля получается суммированием по всей системе:

$$E = -i60 F_0 \frac{e^{ikR - i\omega t}}{R} \sum_j I_{0j} e^{-i(kR_0 r_j + \beta_j)}. \quad (44)$$

Соответствующим подбором амплитуд, расположения осцилляторов в пространстве и фаз их колебаний в выражении (44) можно добиться почти любой требуемой формы диаграммы излучения. Мы рассмотрим только наиболее обычное устройство, в котором амплитуды всех токов одинаковы, а базисные векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ определяют прямоугольную решётку, стороны которой параллельны координатным осям x , y и z . В каждом ряду, параллельном оси x , имеется n_1 излучателей; в ряду, параллельном оси y их n_2 , а в столбце, параллельном оси z их число равно n_3 , так что решётка целиком заполнена излучателями. Имеем

$$\mathbf{R}_0 \mathbf{r}_j = j_1 \mathbf{a}_1 \sin \theta \cos \varphi + j_2 \mathbf{a}_2 \sin \theta \sin \varphi + j_3 \mathbf{a}_3 \cos \theta, \quad (45)$$

¹⁾ В техническом отношении эта задача разбирается у многих современных авторов. Можно обратиться к Carter, Hansell and Lindenbland, *Proc. Inst. Radio. Engrs.* 19, 1773, 1931; Wilmotte and McPetrie, *J. Inst. Elec. Eng. (London)* 66, 949, 1928; Hund, *Phenomena in High-frequency Systems*, McGraw-Hill, 1936; Hollman, *Physik und Technik der ultrakurzen Wellen*, т. II, Springer, 1936.

где a_1, a_2, a_3 — расстояния между осцилляторами вдоль x, y и z осей соответственно. Напряженность в любой точке поля излучения будет

$$E = -i60 I_0 F_0 f_1 f_2 f_3 \frac{e^{ikR - i\omega t}}{R}, \quad (46)$$

где комплексные фазовые множители f_s равны

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \sum_{j_1=0}^{n_1} e^{-ij_1 (ka_1 \sin \theta \cos \varphi + \alpha_1)}, \\ f_2 &= \sum_{j_2=0}^{n_2} e^{-ij_2 (ka_2 \sin \theta \sin \varphi + \alpha_2)}, \\ f_3 &= \sum_{j_3=0}^{n_3} e^{-ij_3 (ka_3 \cos \theta + \alpha_3)}. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Если мы положим

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= ka_1 \sin \theta \cos \varphi + \alpha_1, & \gamma_2 &= ka_2 \sin \theta \sin \varphi + \alpha_2, \\ \gamma_3 &= ka_3 \cos \theta + \alpha_3, \end{aligned} \quad (48)$$

то, согласно (33), можно записать (47) в виде

$$f_s = \sum_{j_s=0}^{n_s} e^{-ij_s \gamma_s} = \frac{\sin \frac{n_s \gamma_s}{2}}{\sin \frac{\gamma_s}{2}} e^{-i(n_s-1)\frac{\gamma_s}{2}} \quad (49)$$

($s = 1, 2, 3$) ($n_s \geq 1$).

Из выражения для плотности энергии фазовые множители исключаются; мы получаем

$$S^+ = \frac{30}{2\pi} \frac{I_0^2}{R^2} (F_0 F_1 F_2 F_3)^2, \quad (50)$$

где

$$F_s = \frac{\sin \frac{n_s \gamma_s}{2}}{\sin \frac{\gamma_s}{2}} \quad (s = 1, 2, 3). \quad (51)$$

Все формулы излучения, выведенные выше, являются частными случаями этого выражения. Например, однопроводная антенна, описанная в разделе 8.7 и возбуждаемая в каком-либо высшем порядке, представляет собой линейное распределение полуволновых осцилляторов при $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = \lambda/2$, $\alpha_3 = \pi$. В этом случае

$$\begin{aligned} F_1 &= F_2 = 1, \\ F_3 &= \frac{\sin \frac{n_3 \pi}{2} (\cos \theta + 1)}{\cos \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right)}, \end{aligned} \quad (52)$$

что непосредственно приводит к выражению (11), стр. 389. Если, как в разделе 8.9, колебания во всех осцилляторах, расположенных вдоль одной прямой линии, происходят в одной и той же фазе, то мы должны положить $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = \frac{\lambda}{2}$, $\alpha_3 = 0$, и получим тогда выражение (35).

Рассмотрим теперь систему вертикальных полуволновых осцилляторов, расположенных вдоль горизонтальной оси x . Мы предположим, что все эти осцилляторы возбуждаются в одной и той же фазе и находятся на рас-

стоянии полуволны друг от друга. Следовательно, $a_1 = \frac{\lambda}{2}$, $a_2 = a_3 = 0$, $\alpha_1 = 0$ и

$$S^+ = \frac{30}{2\pi} \frac{I_0^2}{R^2} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \frac{\sin\left(\frac{n_1 \pi}{2} \sin \theta \cos \varphi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} \sin \theta \cos \varphi\right)} \right]^2, \quad (53)$$

— выражение, зависящее теперь от экваториального угла φ . Нули получаются под теми углами, для которых величина $n_1 \pi/2 \sin \theta \cos \varphi$ имеет какое-либо из значений $\pi, 2\pi, \dots$. Для экваториальной плоскости $\theta = \pi/2$ и, следовательно, узлы на диаграмме излучения определяются соотношениями

$$\cos \varphi = \pm \frac{2}{n_1}, \pm \frac{4}{n_1}, \dots, \pm \frac{n_1}{n_1} \quad (54)$$

или

$$\cos \varphi = \pm \frac{2}{n_1}, \pm \frac{4}{n_1}, \dots, \pm \frac{n_1 - 1}{n_1},$$

в зависимости от того, чётно n_1 или нечётно. Главные максимумы получаются при $\varphi = \pi/2$. Таким образом, это устройство даёт боковое излучение энергии. Дополнительные максимумы определяются условием $dF_1/d\varphi = 0$, которое в данном случае приводит к соотношению

$$n_1 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \sin \theta \cos \varphi\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{n_1 \pi}{2} \sin \theta \cos \varphi\right). \quad (55)$$

При $\theta = \varphi = \pi/2$ имеем $F_0 F_1 = n_1$, так что интенсивность излучения в направлении главного максимума в n_1^2 раз больше максимальной интенсивности излучения одиночного осциллятора. С другой стороны, каждый из осцилляторов получает только $1/n_1$ часть всей мощности, отдаваемой источником (в предположении, что она распределяется поровну) и, следовательно, выигрыш в интенсивности излучения в данном избранном направлении получается в n_1 раз, где n_1 — число осцилляторов.

Соседние нули, расположенные по обе стороны от главного максимума, определяются соотношением $\cos \varphi = \pm 2/n_1$. Следовательно, чем больше n_1 , тем уже луч. Луч, очевидно, ограничен областью, определяемой углами φ_1 и φ_2 , для которых $\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 = 4/n_1$, расположенными по обе стороны

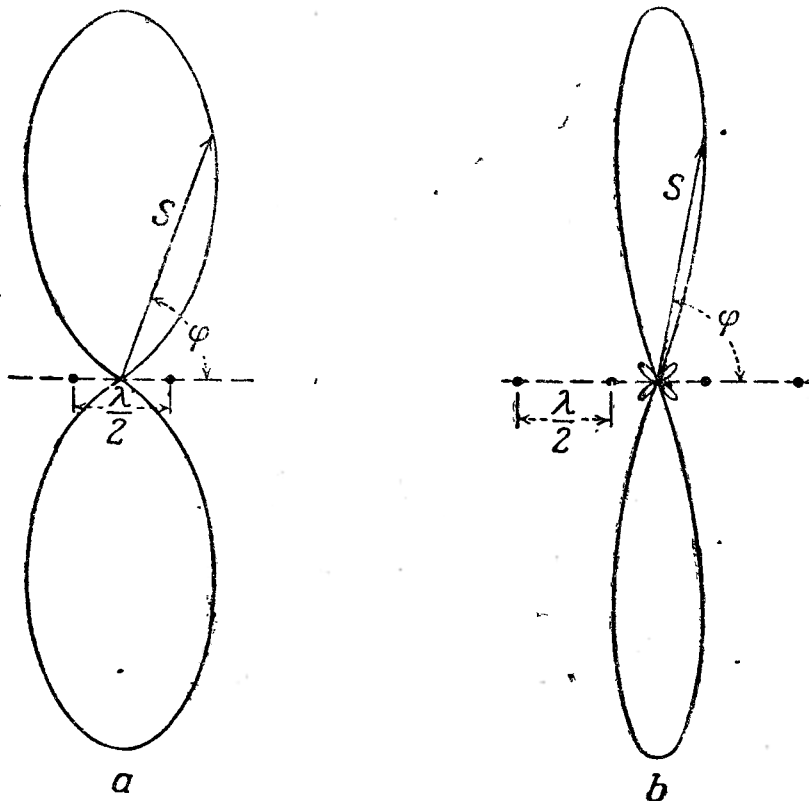


Рис. 81, *a* — два полуволновых синфазных вибратора, расстояние между которыми равно полуволне; диаграмма излучения в экваториальной плоскости; *b* — четыре полуволновых синфазных вибратора, расположенных на расстоянии полуволны друг от друга; диаграмма излучения в экваториальной плоскости.

от $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Диаграммы излучения в экваториальной плоскости для устройств, состоящих из двух и четырёх излучателей, приведены на рис. 81, а и 81, б.

В заключение мы применим соотношение (50) к двум антеннам, расположенным на расстоянии четверти волны друг от друга и несущим токи, сдвинутые по фазе на 90° . Полагая $a_1 = \lambda/4$, $a_2 = a_3 = 0$, $\alpha_1 = -\pi/2$, получаем

$$S^+ = \frac{120}{2\pi} \frac{I_0^2}{R^2} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\sin \vartheta} \cos\left(\frac{\pi}{4} (\sin \vartheta \cos \varphi - 1)\right) \right]^2. \quad (56)$$

Диаграмма излучения в экваториальной плоскости показана на рис. 82. Энергия излучается в виде широкого пучка в положительном направлении оси x . Излучение в обратном направлении снижено до весьма малой величины. Во многих практических установках задняя антенна не связана непосредственно с источником колебаний. Возбуждение её происходит благодаря индуктивной связи с расположенным впереди осциллятором, так что её действие подобно действию рефлектора. Однако в этом случае расстояние не равно точно $\lambda/4$ и, кроме того, необходима некоторая подстройка рефлектора по длине.

Иглообразный пространственный луч может быть получен комбинированием описанных выше простых антенных устройств. Концентрация излучения в меридиональной плоскости осуществляется с помощью горизонтального ряда вертикальных осцилляторов. Удлинение этих вертикальных излучателей рядом полуволновых осцилляторов, возбуждаемых в той же фазе, приводит к кон-

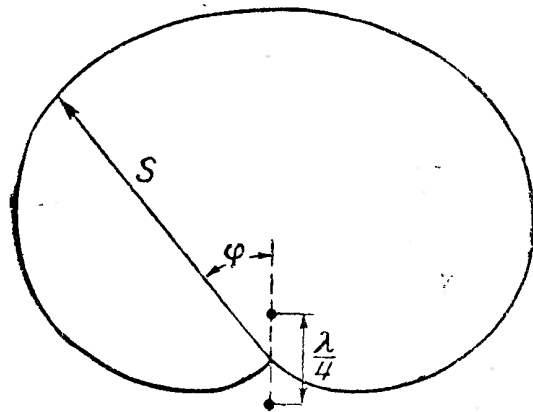


Рис. 82. Два полуволновых вибратора, расположенных на расстоянии в четверть волны, колебания в которых происходят со сдвигом фазы на 90° ; диаграмма излучения в экваториальной плоскости.

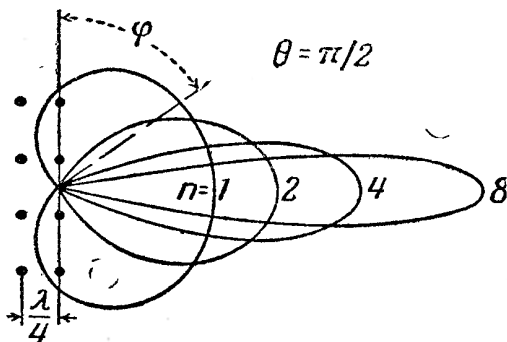


Рис. 83. Горизонтальный ряд вертикальных полуволновых вибраторов, позади которых расположен ряд рефлекторов; диаграмма излучения в экваториальной плоскости, иллюстрирующая сосредоточение энергии в направлении вперед пучке в зависимости от числа вибраторов. (Гольман.)

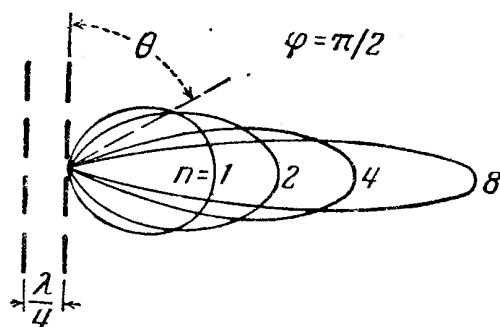


Рис. 84. Вертикальная система полуволновых вибраторов, позади которых расположены рефлекторы; диаграмма излучения в меридиональной плоскости. (Гольман.)

центрации излучения в экваториальной плоскости. Наконец, позади такого двумерного устройства, на расстоянии примерно $\lambda/4$, располагается соответствующая система рефлекторов. На рис. 83 начерчены диаграммы излучения

в экваториальной плоскости $\theta = \pi/2$ для горизонтального ряда вертикальных осцилляторов, позади которых расположены соответствующие рефлекторы, при различном n_2 — числе осцилляторов в ряду, а на рис. 84 — для меридиональной плоскости $\varphi = \pi/2$ вертикальной системы осцилляторов. В обоих случаях эффективность увеличения n совершенно очевидна. Естественно, что наибольшее улучшение получается при малых n , когда добавление ещё одного осциллятора даёт весьма заметный эффект. Относительный выигрыш с увеличением числа осцилляторов падает, и, наконец, мы достигаем такого момента, когда дальнейшее увеличение числа элементов устройства становится экономически неоправданным.

8.11. Точный расчёт поля линейного осциллятора. Метод Пойнтинга, который мы применяли до сих пор для расчёта сопротивления излучения, целиком основан на определении потока энергии на больших расстояниях от центра излучающей системы. Но если энергия всё время теряется, то она должна всё время доставляться источником. Следовательно, над токами в антенне всё время должна производиться работа, для чего необходима компонента э. д. с., параллельная проводу на его поверхности и сдвинутая по фазе на 180° по отношению к антенным токам. Знание фазовых соотношений между токами и э. д. с. вдоль проводника должно привести к тому же значению сопротивления излучения, что и ранее. Фактически оно может дать нам больше, ибо это сопротивление является лишь действительной частью комплексного радиационного импеданса, который, конечно, должен быть известен, если мы хотим рассматривать излучатель как элемент цепи тока.

Очевидно, результаты предыдущих параграфов не могут быть использованы при этом втором методе, поскольку они справедливы только для больших расстояний от источника. Существенно, однако, что мы имеем точное выражение для поля в непосредственной близости к каждому из проводников. Доказательства того, что точное выражение в конечном виде действительно может быть найдено, были даны Бриллюэном¹⁾, Писталькорсом²⁾ и Бехманом³⁾ и явились чрезвычайно важным вкладом в теорию антенн.

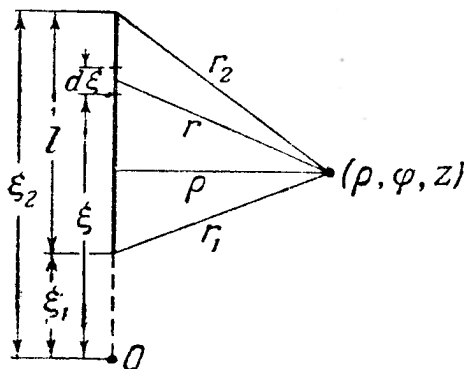


Рис. 85. Координаты линейного вибратора, рассматриваемого в разделе 8.11.

её координатой ξ , а длина проводника $l = \xi_2 - \xi_1$, как показано на рис. 85. Распределение токов синусоидально, но, если учитывать нагрузки на концах, не обязательно равно нулю в этих точках. Подобные нагрузки могут быть осуществлены использованием ёмкостного эффекта металлических пластин, заземлением через сосредоточенную самоиндукцию или сопротивление, или с помощью какого-либо из многочисленных других устройств. Ток, таким образом, снова равен

$$I = I_0 \sin(k\xi - \alpha) e^{-i\omega t}, \quad (57)$$

а вектор Герца для такого распределения будет

$$\Pi_z(x, t) = \frac{iI_0}{4\pi\epsilon_0\omega} e^{-i\omega t} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \sin(k\xi - \alpha) \frac{e^{ikr}}{r} d\xi. \quad (58)$$

¹⁾ Brillouin, *Radioélectricité*, Апрель 1922.

²⁾ Pistalkors, *Proc. Inst. Radio. Engrs.* 17, 562, 1929.

³⁾ Bechman, *ibid.*, 19, 461, 1471, 1931.

Это выражение можно написать также в виде

$$\Pi_z(x, t) = \frac{I_0 e^{-i\omega t}}{8\pi\epsilon_0\omega} \left[e^{-i\alpha} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{e^{ik(r+\xi)}}{r} d\xi - e^{i\alpha} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{e^{ik(r-\xi)}}{r} d\xi \right]. \quad (59)$$

Цилиндрические координаты произвольной точки поля будут ρ , φ , z , расстояние от какого-либо элемента тока до этой точки равно

$$r = \sqrt{\rho^2 + (z - \xi)^2}.$$

Положим теперь

$$u = r + \xi - z, \quad du = \frac{u}{r} d\xi. \quad (60)$$

Тогда

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{e^{ik(r+\xi)}}{r} d\xi = e^{ikz} \int_{u_1}^{u_2} \frac{e^{iku}}{u} du, \quad (61)$$

где $u_1 = r_1 + \xi_1 - z$, $u_2 = r_2 + \xi_2 - z$, а r_1 и r_2 — расстояния от концов проводника до точки наблюдения. Аналогично, если

$$v = r - \xi + z, \quad dv = -\frac{v}{r} d\xi, \quad (62)$$

то

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{e^{ik(r-\xi)}}{r} d\xi = -e^{-ikz} \int_{v_1}^{v_2} \frac{e^{ikv}}{v} dv, \quad (63)$$

где $v_1 = r_1 - \xi_1 + z$, $v_2 = r_2 - \xi_2 + z$. Вектор Герца будет, следовательно,

$$\Pi_z = \frac{I_0 e^{-i\omega t}}{8\pi\epsilon_0\omega} \left[e^{i(kz-\alpha)} \int_{u_1}^{u_2} \frac{e^{iku}}{u} du + e^{-i(kz-\alpha)} \int_{v_1}^{v_2} \frac{e^{ikv}}{v} dv \right]. \quad (64)$$

Интегралы с экспонентами простыми преобразованиями могут быть приведены к виду, для которого имеются табулированные значения. Мы замечаем прежде всего, что

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{e^{iku}}{u} du = \int_{u_1}^{\infty} \frac{e^{iku}}{u} du - \int_{u_2}^{\infty} \frac{e^{iku}}{u} du. \quad (65)$$

Согласно определению интегрального косинуса и интегрального синуса,

$$\text{Ci } ku_1 = - \int_{u_1}^{\infty} \frac{\cos ku}{u} du, \quad \text{Si } ku_1 = \int_0^{u_1} \frac{\sin ku}{u} du, \quad (66)$$

и ввиду того, что $\text{Si } \infty = \pi/2$, имеем

$$\int_{u_1}^{\infty} \frac{e^{iku}}{u} du = -\text{Ci } ku_1 - i \text{Si } ku_1 + \frac{\pi i}{2} \quad (67)$$

или

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{e^{iku}}{u} du = \left[\text{Ci } ku \right]_{u_1}^{u_2} + i \left[\text{Si } ku \right]_{u_1}^{u_2}. \quad (68)$$

Таблицы этих функций можно найти у Янке и Эмде.

Для подсчёта поля мы применяем формулы

$$\mathbf{E} = \text{grad div } \Pi + k^2 \Pi, \quad \mathbf{H} = -i\omega \epsilon \text{ rot } \Pi, \quad (69)$$

которые в цилиндрических координатах имеют вид

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial z^2} + k^2 \Pi_z, & E_\rho &= \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial \rho \partial z}, & E_\varphi &= 0, \\ H_z &= H_\rho = 0, & H_\varphi &= i\omega \epsilon \frac{\partial \Pi_z}{\partial \rho}. \end{aligned} \quad (70)$$

Так как u_1 , u_2 и т. д. в (64) зависят как от z , так и от ρ , то нужно дифференцировать и пределы интегралов. Например,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \int_{u_1}^{u_2} \frac{e^{iku}}{u} du &= \frac{e^{iku_2}}{u_2} \frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{e^{iku_1}}{u_1} \frac{\partial u_1}{\partial z}, \\ e^{ikz} \frac{\partial}{\partial z} \int_{u_1}^{u_2} \frac{e^{iku}}{u} du &= \frac{e^{ik(r_1 + \xi_1)}}{r_1} - \frac{e^{ik(r_2 + \xi_2)}}{r_2}. \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Аналогично

$$e^{ikz} \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{u_1}^u \frac{e^{iku}}{u} du = \frac{\rho}{r_2 - (z - \xi_2)} \frac{e^{ik(r_2 + \xi_2)}}{r_2} - \frac{\rho}{r_1 - (z - \xi_1)} \frac{e^{ik(r_1 + \xi_1)}}{r_1}. \quad (72)$$

После выполнения дифференцирования и приведения подобных членов мы получаем для компонент напряжённости поля

$$E_z = -\frac{iI_0 e^{-i\omega t}}{4\pi\epsilon_0\omega} \left[k \frac{e^{ikr_2}}{r_2} \cos(k\xi_2 - \alpha) - k \frac{e^{ikr_1}}{r_1} \cos(k\xi_1 - \alpha) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{ikr_2}}{r_2} \right) \sin(k\xi_2 - \alpha) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{ikr_1}}{r_1} \right) \sin(k\xi_1 - \alpha) \right], \quad (73)$$

$$E_\rho = \frac{iI_0 e^{-i\omega t}}{4\pi\epsilon_0\omega} \left\{ \frac{k(z - \xi_2)}{\rho} \frac{e^{ikr_2}}{r_2} \cos(k\xi_2 - \alpha) - \right. \\ \left. - \frac{k(z - \xi_1)}{\rho} \frac{e^{ikr_1}}{r_1} \cos(k\xi_1 - \alpha) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left[(z - \xi_2) \frac{e^{ikr_2}}{r_2} \right] \sin(k\xi_2 - \alpha) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left[(z - \xi_1) \frac{e^{ikr_1}}{r_1} \right] \sin(k\xi_1 - \alpha) \right\}, \quad (74)$$

$$H_\varphi = -\frac{iI_0 e^{-i\omega t}}{4\pi} \left[\frac{e^{ikr_2}}{\rho} \cos(k\xi_2 - \alpha) - \frac{e^{ikr_1}}{\rho} \cos(k\xi_1 - \alpha) + \right. \\ \left. + \frac{i(z - \xi_2)}{\rho} \frac{e^{ikr_2}}{r_2} \sin(k\xi_2 - \alpha) - \frac{i(z - \xi_1)}{\rho} \frac{e^{ikr_1}}{r_1} \sin(k\xi_1 - \alpha) \right]. \quad (75)$$

В случае изолированного провода со свободными концами токи в точках $\xi = \xi_1$, $\xi = \xi_2$ равны нулю. Тогда $k = \pi m/l$, где m — снова число полуволн, укладываемых вдоль провода. Так как

$$\sin\left(\frac{\pi m \xi_1}{l} - \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi m \xi_2}{l} - \alpha\right) = 0,$$

то мы можем положить $\alpha = \frac{\pi m \xi_1}{l} = \pi m \left(1 - \frac{\xi_2}{l}\right)$. Формулы для напряжённостей поля примут тогда сравнительно простые выражения:

$$\left. \begin{aligned} E_z &= -30iI_0 e^{-i\omega t} \left[(-1)^m \frac{e^{ikr_2}}{r_2} - \frac{e^{ikr_1}}{r_1} \right], \\ E_\rho &= i30I_0 e^{-i\omega t} \left[(-1)^m \frac{(z - \xi_2) e^{ikr_2}}{\rho r_2} - \frac{(z - \xi_1) e^{ikr_1}}{\rho r_1} \right], \\ H_\varphi &= \frac{iI_0}{4\pi} e^{-i\omega t} \frac{1}{\rho} \left\{ (-1)^m e^{ikr_2} - e^{ikr_1} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

8.12. Определение сопротивления излучения по методу вычисления э. д. с. Выражения для поля, выведенные в предыдущем параграфе, являются точными и справедливыми для всех точек пространства, в том числе и в непосредственной окрестности токов. Особенности, которые получаются в конечных точках проводника при $r_1 = 0$, $r_2 = 0$, появляются вследствие предположения о линейном распределении токов. Практически, в результате конечности сечения провода, мы можем быть уверены в конечности значений напряжённости поля, хотя вблизи этих точек следует ожидать относительно больших напряжённостей. Во всех других точках проводника соотношение между фазами тока и параллельной ему компоненты E может быть определено из (73) или из (76), а следовательно, может быть подсчитана и работа против сил реакции поля, необходимая для поддержания токов в антенне.

В разделе 2.19 было показано, что для действительных векторов E , H и J и при токах, распределённых в свободном пространстве, дивергенция вектора Пойнтинга удовлетворяет соотношению

$$\operatorname{div} S = -EJ - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{\mu_0}{2} H^2 \right). \quad (77)$$

Если поле является периодическим, то среднее за период изменение распределённой в поле энергии равно нулю, так что

$$\overline{\operatorname{div} S} = \operatorname{div} \bar{S} = -\overline{EJ}. \quad (78)$$

Если теперь вместо действительных векторов мы будем оперировать комплексными напряжённостями поля и токами, то, согласно разделу 2.20, получим

$$\left. \begin{aligned} \bar{S} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [E, H^*] = \operatorname{Re} S^+, \\ \overline{\operatorname{Re} E \operatorname{Re} J} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} (E J^*), \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

где знак $*$ обозначает сопряжённые величины. Полная средняя мощность, излучаемая системой токов, будет, следовательно,

$$W = \int_S \bar{S} n da = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_V E J^* dv. \quad (80)$$

Энергия излучения может быть подсчитана либо путём интегрирования нормальной компоненты вектора Пойнтинга по какой-либо замкнутой поверхности, охватывающей все источники, либо путём интегрирования мощности, расходуемой в единице объёма, по всему объёму, в котором распределены токи.

Предположим теперь, что в пустом пространстве имеется n линейных проводников, по которым текут токи. Не теряя общности, мы можем предположить, что проводники системы параллельны друг другу и оси z . Пусть комплексная величина I_j есть ток в j -м проводнике, z — компонента электрического поля, вызванного i -м током в j -м проводнике, будет E_{ij} . Тогда, согласно (80), полное излучение системы будет

$$W = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \int_{\xi_{1j}}^{\xi_{2j}} E_{ji} I_j^* d\xi_j, \quad (81)$$

где интегралы должны быть распространены вдоль каждого из проводников. Это выражение даёт нам мощность, с которой индуцированные э. д. с. про-

изводят работу над токами системы. Напишем I_j и E_{ji} в виде

$$\left. \begin{aligned} I_j &= I_{0j} \sin(k\xi_j - \alpha_j) e^{-i\omega t}, \\ E_{ji} &= I_{0i} U_{ji} e^{-i\omega t}, \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

где амплитуды I_{0j} и I_{0i} в общем случае комплексны, а функция U_{ji} определяется соотношением (73). Тогда

$$W = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n I_{0i} I_{0j}^* Z_{ji}, \quad (83)$$

где

$$Z_{ji} = - \int_{\xi_{1j}}^{\xi_{2j}} U_{ji} \sin(k\xi_j - \alpha_j) d\xi_j. \quad (84)$$

Величины Z_{ij} являются коэффициентами связи, или, в некотором смысле, переходными импедансами. Действительная часть коэффициента Z_{ii} представляет собой сопротивление излучения i -го проводника при удалении всех остальных проводников.

Очень изящный метод для расчёта излучения был предложен Бехманом¹⁾. Если, как в (82), распределение токов синусоидально, то можно написать

$$\frac{d^2 I_j^*}{d\xi_j^2} = -k^2 I_j^*. \quad (85)$$

Напряжённость поля E_{ji} удовлетворяет соотношению

$$E_{ji} = \frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial \xi_j^2} + k^2 \Pi_i. \quad (86)$$

Кроме того,

$$I_j^* \frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial \xi_j^2} = \Pi_i \frac{\partial^2 I_j^*}{\partial \xi_j^2} + \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(I_j^* \frac{\partial \Pi_i}{\partial \xi_j} - \Pi_i \frac{\partial I_j^*}{\partial \xi_j} \right), \quad (87)$$

и следовательно,

$$W = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left\{ \Pi_i \frac{\partial I_j^*}{\partial \xi_j} - I_j^* \frac{\partial \Pi_i}{\partial \xi_j} \right\} \Big|_{\xi_{1j}}^{\xi_{2j}}. \quad (88)$$

Из (64) и (68) мы имеем

$$\begin{aligned} \Pi_i = \frac{I_{0i} e^{-i\omega t}}{8\pi\epsilon_0\omega} \left\{ e^{i(k\xi_j - \alpha)} \left| (Ciku + iSiku) \right|_{u_{1i}}^{u_{2i}} + \right. \\ \left. + e^{-i(k\xi_j - \alpha)} \left| (Cikv + iSikv) \right|_{v_{1i}}^{v_{2i}} \right\}, \end{aligned} \quad (89)$$

где в данном случае $u = r_{ij} + \xi_i - \xi_j$, $v = r_{ij} - \xi_i + \xi_j$. Координата ξ_i относится к точке антенны, ток в которой равен I_i , в то время как ξ_j представляет точку j -го проводника. Индексы 1 и 2 обозначают, как и прежде, координаты соответственно верхнего и нижнего концов антенны. Для нахождения излучения системы линейных проводников никаксго дальнейшего интегрирования не требуется. Поскольку амплитуды токов I_{0i} и I_{0j} входят в (88) в виде множителей, мы можем найти интегральное выражение для импеданса Z_{ji} .

¹⁾ В е с h m a n n, *loc. cit.*, стр. 1471.

В случае ненагруженной антенны ток I_j на концах ξ_{1j} и ξ_{2j} равен нулю. Тогда $k\xi_{1j} - \alpha_j = 0$, $k\xi_{2j} - \alpha_j = m_j\pi$, и мы получаем

$$W = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n k I_{0j}^* \{ (-1)^{m_j} \Pi_i(\xi_{2j}) - \Pi_i(\xi_{1j}) \}. \quad (90)$$

Трудность возникает при применении этой формулы к коллинеарным проводникам. Рассмотрим, например, как и в разделе 8.7, излучение одиночного линейного осциллятора. Этот случай является пределом двух параллельных проводников, расстояние между которыми стремится к нулю. Если мы примем, что концы двух проводников совпадают, то

$$\begin{aligned} \text{при } \xi_j = \xi_1: \quad u_{1i} &= 0 + \xi_1 - \xi_1 = 0, & u_{2i} &= l + \xi_2 - \xi_1 = 2l, \\ v_{1i} &= 0 - \xi_1 + \xi_1 = 0, & v_{2i} &= l - \xi_2 + \xi_1 = 0, \\ \text{и при } \xi_j = \xi_2: \quad u_{1i} &= l + \xi_1 - \xi_2 = 0, & u_{2i} &= 0 + \xi_2 - \xi_2 = 0, \\ v_{1i} &= l - \xi_1 + \xi_2 = 2l, & v_{2i} &= 0 - \xi_2 + \xi_2 = 0. \end{aligned}$$

Согласно (89),

$$\begin{aligned} \Pi_i(\xi_2) &= \frac{I_0 e^{-i\omega t}}{8\pi\epsilon_0\omega} (-1)^m (\operatorname{Ci} kv + i \operatorname{Si} kv) \Big|_{v=2l}^{v=0}, \\ \Pi_1(\xi_1) &= \frac{I_0 e^{-i\omega t}}{8\pi\epsilon_0\omega} (\operatorname{Ci} ku + i \operatorname{Si} ku) \Big|_{u=0}^{u=2l}. \end{aligned}$$

Но $k = \frac{\pi m}{l} = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 60$, и, следовательно, согласно (90),

$$W = -15 I_0^2 \operatorname{Ci} \frac{\pi m u}{l} \Big|_0^{2l}.$$

Этот результат, очевидно, ошибочен, поскольку $\operatorname{Ci} 0$ обращается в бесконечность. Трудности этой можно избежать, если сначала рассчитать излучение двух параллельных проводников, разделённых малым, но *конечным* расстоянием ρ . При переходе к пределу $\rho = 0$ бесконечные члены выпадают¹⁾, и мы получаем, как и в разделе 8.7, что

$$W = 15 I_0^2 (\ln 2m\pi\gamma - \operatorname{Ci} 2m\pi). \quad (91)$$

ПРИНЦИП ГЮЙГЕНСА-КИРХГОФА

8.13. Скалярная волновая функция. Пусть V — любая область внутри однородной изотропной среды, ограниченная замкнутой регулярной поверхностью S , а $\psi(x, y, z)$ — какое-либо непрерывное и обладающее непрерывными первыми производными в объёме V и на границе S решение уравнения

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0. \quad (1)$$

Тогда из теоремы Грина, уравнение (7), стр. 153, непосредственно следует, что значение ψ в любой внутренней точке x', y', z' может быть выражено через интеграл по поверхности S от ψ и нормальной производной ψ :

$$\psi(x', y', z') = \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ \frac{\partial\psi}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} - \psi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right\} da, \quad (2)$$

где, как всегда,

$$r = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2} \quad (3)$$

¹⁾ Подробности даны у Бехмана, *loc. cit.*, стр. 1477.

ложены вне её. Если R — расстояние от точки Q до элемента площади — S_2 , очень велико по сравнению с наибольшим значением R_1 , то, согласно (87), стр. 365, и (32), стр. 357,

$$\frac{e^{ikR_2}}{R_2} \simeq \frac{e^{ikR}}{R} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n (2n+1) P_n(\cos \gamma_1) j_n(kR_1) = \frac{e^{ikR}}{R_2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\gamma_1, R_1), \quad (6)$$

$$\frac{e^{ikR}}{R} \simeq \frac{e^{ikR}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} B_n(\gamma_0, R_0), \quad (7)$$

откуда

$$\psi = \frac{e^{ikR_2}}{R_2} \simeq \frac{e^{ikr}}{r} f(\gamma_0, \gamma_1, R_0, R_1). \quad (8)$$

На поверхности S_2

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{e^{ikr}}{r} \simeq \left(ik - \frac{1}{r} \right) \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right)^2 f(\gamma_0, \gamma, R_0, R_1),$$

$$\psi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \simeq \left(ik - \frac{1}{r} \right) \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right)^2 f(\gamma_0, \gamma, R_0, R_1), \quad (9)$$

откуда следует, что члены с $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r^2}$ и $\frac{1}{r^3}$ в развёрнутом подинтегральном выражении в (2) взаимно сокращаются, а остающиеся члены имеют порядок $\frac{1}{r^n}$, $n > 3$ и, следовательно, ничего не вносят в интеграл по поверхности S_2 , если $r \rightarrow \infty$.

Предположим теперь, что поверхность S представляет собой непрозрачный экран, отделяющий источник от наблюдателя. В силу только что доказанной теоремы можно считать, что бесконечно протяжённая незамкнутая поверхность замыкается в бесконечности. Если в поверхности S_1 проделать небольшое отверстие, то поле в некоторой степени будет проникать и в область, в которой расположен наблюдатель. Задача состоит в том, чтобы определить интенсивность и распределение этого дифрагированного поля. Очевидно, если известны значения ψ и $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ в отверстии S_1 и на стороне экрана, обращённой к наблюдателю, то дифрагированное поле можно было бы определить подсчётом интеграла (2). Эти значения нам неизвестны, но для того, чтобы получить приближённое решение, предположим, вслед за Кирхгофом, что

а) На внутренней стороне экрана

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0.$$

б) На поверхности S_1 щели или отверстия поле тождественно с полем невозмущённой падающей волны.

Почти все расчёты дифракции от щелей или решёток, произведённые со времён Кирхгофа, были основаны на этих предположениях¹⁾. Легко ука-

¹⁾ О классической теории дифракции см., например, М. Планк, Введение в теоретическую физику, ч. 4 (Оптика), М. — Л. 1934 или Б. Орн, Оптика, 1934. Для того чтобы получить более ясное представление о физической сущности явления, кроме описанного ниже метода Кирхгофа, читателю следует также познакомиться с работой Rubino wicz'a *Ann. Physik* 53, 257, 1917, а также Kottler, *ibid.* 70, 405, 1923. Уже после написания этого и последующих параграфов рассмотрение этого вопроса было дано в книге The Mathematical Theory of Huygens' Principle, B a k e r and C o r p s o n, Oxford, 1939.

зять основные аналитические ошибки, допускаемые при этом. Прежде всего предположение о равенстве нулю ψ и $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ на внутренней поверхности экрана означает разрыв непрерывности ψ на контуре C_1 , ограничивающем отверстие S_1 , в то время как теорема Грина справедлива только для функций, непрерывных всюду на полной замкнутой поверхности S . Эта трудность не может быть устранена простым приёмом замены контура, на котором имеет место разрыв, узкой областью с быстрым, но непрерывным изменением рассматриваемой функции. Если ψ и $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ равны нулю на каком-либо конечном участке поверхности S , то они равны нулю во всех точках пространства, охватываемого этой поверхностью¹⁾. Во-вторых, электромагнитное поле не может быть в общем случае представлено с помощью одной только скалярной волновой функции. Оно характеризуется системой скалярных функций, представляющих собой прямоугольные компоненты электрического и магнитного векторов. Каждая из этих скалярных функций удовлетворяет уравнению (1) и её значение в какой-либо внутренней точке x', y', z' выражается с помощью соотношения (2) через значения на границе S . Однако эти компоненты должны удовлетворять не только волновому уравнению (1), но должны быть также и решениями максвелловских уравнений поля. Реальная задача состоит не в интегрировании волнового уравнения, скалярного или векторного, а в одновременном интегрировании системы векторных уравнений первого порядка, связывающих вектора E и H .

Несмотря на эти возражения, классическая теория Кирхгофа приводит к удовлетворительному решению многих дифракционных задач физической оптики. Успех этот обязан прежде всего тому факту, что в оптических задачах отношение длины волны к наибольшему размеру отверстия мало. Вследствие этого дифрагированное излучение отбрасывается, главным образом, вперёд, в направлении падающего луча, и предположение о равенстве нулю поля на затенённой стороне экрана приблизительно выполняется. Кроме того, при измерениях обычно интересуются интенсивностью, а не поляризацией. По мере увеличения длины волны дифракционная картина расширяется. Вычисление ψ из соотношения (2) приводит тогда к наличию интенсивности непосредственно позади экрана, которая никоим образом не равна нулю, в противоположность нашему исходному предположению. Разные авторы предполагали, что эти нулевые значения могут рассматриваться как первый член в ряде последовательных приближений, и значения ψ и $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ на поверхности S , полученные из первого приближения, должны быть взяты в качестве граничных условий для второго. Доказательства сходимости такого расчёта, однако, нет, а трудности интегрирования делают этот способ практически непригодным.

Новейшие достижения в технике генерирования ультракоротких радиоволн стимулировали интерес к ряду задач, имевших ранее очень небольшое практическое значение. Естественным следствием этой тенденции к использованию коротких волн явилось применение методов физической оптики к расчёту интенсивности и распределения электромагнитного излучения из полых труб, рупоров или малых отверстий в полых резонаторах. Но в радиотехнике длина волны обычно того же порядка, что и размеры отверстия; поляризация дифрагированного излучения легко наблюдается. Трудно ожидать поэтому, что и при таких условиях можно полагаться на формулу Кирхгофа (2).

¹⁾ Прямое следствие теоремы Грина. См. *Roskels, loc. cit.*, стр. 212.

8.14. Непосредственное интегрирование уравнений поля¹⁾. Задача, состоящая в том, чтобы выразить векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ во внутренних точках какого-либо объема через их значения на поверхности, ограничивающей этот объем, рассматривалась многими авторами²⁾. Требуемый результат может быть получен просто и непосредственно, если к уравнениям поля применить векторный аналог теоремы Грина. В разделе 4.14 было показано, что если $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ — любые две векторные функции положения, удовлетворяющие соответствующим условиям непрерывности, то

$$\int_V (\mathbf{Q} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{P} - \mathbf{P} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{Q}) d\mathbf{v} = \int_S \{[\mathbf{P} \operatorname{rot} \mathbf{Q}] - [\mathbf{Q} \operatorname{rot} \mathbf{P}]\} \mathbf{n} da, \quad (10)$$

где S , как обычно, регулярная поверхность, ограничивающая объем V .

Предположим, что векторы поля содержат время только в виде множителя $\exp(-i\omega t)$, и напомним уравнения поля в виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} - i\omega \mu \mathbf{H} = -\mathbf{J}^*, \quad (\text{I}) \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \rho^*, \quad (\text{III})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} + i\omega \varepsilon \mathbf{E} = \mathbf{J}, \quad (\text{II}) \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon} \rho. \quad (\text{IV})$$

Среда предполагается однородной, изотропной и непроводящей. Величины $\mathbf{J}^*$ и ρ^* являются фиктивными плотностями «магнитных токов» и «магнитных зарядов», которые, согласно всему, что мы знаем, не имеют реального физического существования. Вскоре, однако, у нас встретятся случаи, когда мы будем предполагать существование произвольных разрывов непрерывности обоих векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, разрывов, которые в действительности физически невозможны, но которые вызывались бы поверхностно распределёнными магнитными токами и зарядами, если бы они существовали. Токи и заряды обоих типов подчинены уравнениям непрерывности

$$\operatorname{div} \mathbf{J} - i\omega \rho = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{J}^* - i\omega \rho^* = 0. \quad (\text{V})$$

Векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ удовлетворяют уравнениям

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} - k^2 \mathbf{E} = i\omega \mu \mathbf{J} - \operatorname{div} \mathbf{J}^*, \quad (11)$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} - k^2 \mathbf{H} = i\omega \varepsilon \mathbf{J}^* + \operatorname{div} \mathbf{J}, \quad (12)$$

где $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu$.

Положим в (10) $\mathbf{P} = \mathbf{E}$, $\mathbf{Q} = \varphi \mathbf{a}$, где $\mathbf{a}$ — единичный вектор произвольного направления, а $\varphi = \frac{e^{ikr}}{r}$. Расстояние r , измеряемое от элемента x, y, z до точки наблюдения x', y', z' , определяется (3). Мы имеем тождественно

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{Q} &= [\operatorname{grad} \varphi, \mathbf{a}], \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{Q} = \mathbf{a} k^2 \varphi + \operatorname{grad} (\mathbf{a} \operatorname{grad} \varphi), \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{P} &= k^2 \mathbf{E} + i\omega \mu \mathbf{J} - \operatorname{rot} \mathbf{J}^*. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Следуя способу раздела 4.15, легко показать, что вектор $\mathbf{a}$ является общим множителем для всех членов соотношения (10) и, так как $\mathbf{a}$

¹⁾ Разделы 8.14 и 8.15 написаны совместно с д-ром L. J. Chu.

²⁾ Love, *Phil. Trans. (A)* 197, 1901; Larmor, *Lond. Math. Soc. Proc.* 1, 1, 1903, Ignatowsky, *Ann. Phys.* 23, 875, 1907; и 25, 99, 1908. Tonolo, *Annali di Mat.* 3, 17, 1910; Macdonald, *Proc. Lond. Math. Soc.* 10, 91, 1911 и *Phil. Trans. (A)* 212; 295, 1912. Tedone, *Link Rend.* (5) 1, 286, 1917; Kottler, *Ann. Phys.* 71, 457, 1923. Schelkunoff, *Bell. System Techn. J.* 15, 92, 1936; Baker and Copson, *loc. cit.*, гл. III.

произволен, то, следовательно,

$$\begin{aligned} \int_V (i\omega\mu \mathbf{J}\varphi - \text{rot } \mathbf{J}^*\varphi + \frac{1}{\varepsilon} \rho \text{ grad } \varphi) dv = \\ = \int_S \{i\omega\mu [\mathbf{n}, \mathbf{H}]\varphi + [[\mathbf{n}, \mathbf{E}]\text{ grad } \varphi] + (\mathbf{n}\mathbf{E})\text{ grad } \varphi - [\mathbf{n}, \mathbf{J}^*]\varphi\} da. \end{aligned} \quad (14)$$

Тождество

$$\int_V \text{rot } \mathbf{J}^*\varphi dv = \int_S [\mathbf{n}, \mathbf{J}^*]\varphi da + \int_V [\mathbf{J}^*, \text{ grad } \varphi] dv \quad (15)$$

позволяет привести это соотношение к виду

$$\begin{aligned} \int_V \{i\omega\mu \mathbf{J}\varphi - [\mathbf{J}^*, \text{ grad } \varphi] + \frac{1}{\varepsilon} \rho \text{ grad } \varphi\} dv = \\ = \int_S \{i\omega\mu [\mathbf{n}, \mathbf{H}] + [[\mathbf{n}, \mathbf{E}]\text{ grad } \varphi] + (\mathbf{n}\mathbf{E})\text{ grad } \varphi\} da. \end{aligned} \quad (16)$$

Исключение особенности в точке $r=0$ было описано в разделе 4.15. Сфера радиуса r_1 описывается вокруг точки x', y', z' , нормаль к сфере направлена из объема V и, следовательно, по радиусу к центру. Имеем

$$\text{grad } \varphi = \left(\frac{1}{r} - ik\right) \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{r}_0, \quad (17)$$

так как на этой сфере $\mathbf{n} = \mathbf{r}_0$. Площадь сферы уменьшается с радиусом как $4\pi r_1^2$, и так как

$$[[\mathbf{n}, \mathbf{E}]\mathbf{n}] + (\mathbf{n}, \mathbf{E})\mathbf{n} = \mathbf{E}, \quad (18)$$

то слагаемое от интеграла по поверхности сферы в правой части (15) сводится к $4\pi \mathbf{E}(x', y', z')$. Значение $\mathbf{E}$ в любой внутренней точке V будет, следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x', y', z') = \frac{1}{4\pi} \int_V \{i\omega\mu \mathbf{J}\varphi - [\mathbf{J}^*, \text{ grad } \varphi] + \frac{1}{\varepsilon} \rho \text{ grad } \varphi\} dv - \\ - \frac{1}{4\pi} \int_S \{i\omega\mu [\mathbf{n}, \mathbf{H}]\varphi + [[\mathbf{n}, \mathbf{E}]\text{ grad } \varphi] + (\mathbf{n}\mathbf{E})\text{ grad } \varphi\} da. \end{aligned} \quad (19)$$

Очевидно, перемена местами векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ приведет к соответствующему выражению для $\mathbf{H}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(x', y', z') = \frac{1}{4\pi} \int_V \{i\omega\varepsilon \mathbf{J}^*\varphi + [\mathbf{J}, \text{ grad } \varphi] + \frac{1}{\mu} \rho^* \text{ grad } \varphi\} dv + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_S \{i\omega\varepsilon [\mathbf{n}, \mathbf{E}]\varphi - [[\mathbf{n}, \mathbf{H}]\text{ grad } \varphi] - (\mathbf{n}\mathbf{H})\text{ grad } \varphi\} da. \end{aligned} \quad (20)$$

Последнее соотношение является обобщением уравнения (23), стр. 228, на случай динамического поля.

Если все токи и заряды могут быть окружены сферой конечного радиуса, то поле регулярно на бесконечности, и любая сторона поверхности S может быть выбрана в качестве «внутренней».

В предыдущих разделах этой главы мы рассматривали расчёт полей заданного распределения зарядов с помощью векторного и скалярного потенциалов и с помощью вектора Герца. Теперь мы показали, что векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ могут быть подсчитаны и непосредственно, без введения потенциалов. Поверхностные интегралы в (19) и в (20) выражают поля, вызываемые источниками, расположенными вне поверхности S . Если S удаляется в бесконечность, то можно считать, что эти поля исчезают. Оббрасывая магнитные заряды и токи, мы получаем следующие важные формулы:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}(x', y', z') &= \frac{1}{4\pi} \int_V \left\{ i\omega\mu \mathbf{J} \frac{e^{ikr}}{r} + \frac{1}{\epsilon} \rho \operatorname{grad} \frac{e^{ikr}}{r} \right\} dv, \\ \mathbf{H}(x', y', z') &= \frac{1}{4\pi} \int_V \left[\mathbf{J}, \operatorname{grad} \frac{e^{ikr}}{r} \right] dv. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Поскольку распределение токов предполагается известным, плотность зарядов может быть определена из уравнения непрерывности.

В разделе 9.2 будет показано, что электромагнитное поле внутри ограниченной области полностью определяется заданием тангенциальных компонент векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ на ограничивающей поверхности и начальным распределением поля по объёму области. Отсюда следует, что если значения $[\mathbf{n}, \mathbf{E}]$ и $[\mathbf{n}, \mathbf{H}]$ в (19) и (20) заданы, то выбор $\mathbf{nE}$ и $\mathbf{nH}$ не может быть сделан произвольно. Этот выбор должен быть совместим с условиями, которые наложены на векторные поля, удовлетворяющие уравнениям Максвелла. Такие же ограничения в выборе ψ и $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ были подчёркнуты в разделе 8.13. Зависимость нормальной компоненты $\mathbf{E}$ от тангенциальной компоненты $\mathbf{H}$ эквивалентна зависимости ρ от $\mathbf{J}$.

Предположим временно, что распределение зарядов и токов в (19) ограничено тонким слоем на поверхности S . Пусть по мере уменьшения толщины слоя плотности возрастают, так что в пределе мы, как обычно, объёмную плотность заменим поверхностной. Если внутри области V и на её границе S зарядов и токов нет, то поле во внутренних точках будет

$$\mathbf{E}(x', y', z') = -\frac{1}{4\pi} \int_S \{ i\omega\mu [\mathbf{n}, \mathbf{H}] \varphi + [[\mathbf{n}, \mathbf{E}] \operatorname{grad} \varphi] + (\mathbf{nE}) \operatorname{grad} \varphi \} da. \quad (22)$$

Отсюда ясно, что поле это точно такое же, какое вызывалось бы электрическими токами, распределёнными по поверхности S с поверхностной плотностью $\mathbf{K}$, магнитными токами, распределёнными с поверхностью $\mathbf{K}^*$ и поверхностными электрическими зарядами плотности η , где

$$\mathbf{K} = -[\mathbf{n}, \mathbf{H}], \quad \mathbf{K}^* = [\mathbf{n}, \mathbf{E}], \quad \eta = -\epsilon \mathbf{nE}. \quad (23)$$

Значения $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в (23) являются значениями непосредственно у поверхности с внутренней её стороны.

Функция $\mathbf{E}(x', y', z')$, определённая формулой (22), разрывна при переходе через S . Можно показать, как это было сделано выше, что разрыв, связанный с $\varphi = \frac{e^{ikr}}{r}$, таков же, как и в случае стационарного поля, когда $\varphi = \frac{1}{r}$. Тогда, согласно разделу 3.15, скачок интеграла •

$$\mathbf{E}_s(x', y', z') = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S \eta \operatorname{grad} \varphi da \quad (24)$$

при переходе через поверхность S равен $n\Delta E_3 = \frac{\eta}{\epsilon}$, где ΔE_3 — разность значений E_3 с внешней и внутренней стороны поверхности. Следовательно, третий член в (22) не влияет на величину скачка тангенциальной компоненты, а величину нормальной компоненты E сводит к нулю. Точно так же скачок

$$E_2(x', y', z') = \frac{1}{4\pi} \int_S [K^*, \text{grad } \varphi] da, \quad (25)$$

согласно разделу 4.13, определяется соотношением $[n, \Delta E_2] = K^*$, так что второй член в (22) сводит к нулю тангенциальную компоненту вектора E , не оказывая влияния на нормальную. Первый член в (22) непрерывен при переходе через поверхность S , но имеет разрывную производную. Ротор E в точке x', y', z' равен

$$\text{rot}' E(x', y', z') = -\frac{i\mu\omega}{4\pi} \int [[n, H] \text{grad } \varphi] da. \quad (26)$$

Это выражение типа (25). Вектор E и тангенциальная компонента его ротора на положительной стороне поверхности S равны нулю: следовательно, вектор E равен нулю во всех внешних точках. Те же рассуждения применимы и к вектору H .

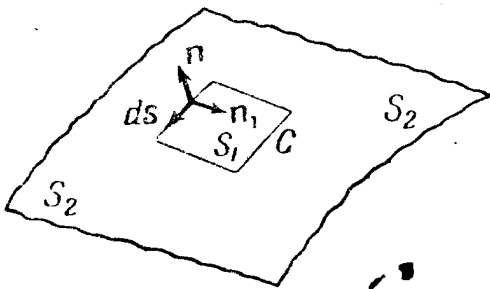


Рис. 87. C — контур на замкнутой поверхности S , разделяющий её на две части S_1 и S_2 .

8.15. Разрывы поверхностного распределения. Результаты предыдущего раздела справедливы только в том случае, если векторы E и H непрерывны и имеют непрерывные первые производные во всех точках поверхности S . Следовательно, их нельзя применить непосредственно к задаче о дифракции на щели. Для того чтобы распространить выражение (22) и на подоб-

ные случаи, рассмотрим замкнутую поверхность S (не исключается и случай поверхности, замкнутой в бесконечности), разделённую на две зоны S_1 и S_2 контуром C , расположенным на поверхности S , как показано на рис. 87. Векторы E и H и их первые производные непрерывны на S_1 ; то же самое справедливо и относительно S_2 . Однако тангенциальные к поверхности S компоненты E и H могут теперь испытывать разрыв непрерывности при переходе через контур из одной зоны в другую. Для того чтобы совместить возможность подобных разрывов с уравнениями поля, необходимо сделать дальнейшие предположения о наличии линейного распределения зарядов и токов вдоль контура C . Это линейное распределение источников определённым образом изменяет поле, и только при учёте этого изменения получающиеся в результате выражения для E и H удовлетворяют уравнениям Максвелла.

Метод нахождения распределения зарядов и токов на контуре, совместимого с требованиями задачи, был предложен Котлером¹⁾. Выше было показано, что поле во внутренних точках тождественно с полем, создаваемым поверхностными зарядами и токами, определёнными соотношениями (23). Скачок тангенциальных компонент E и H при переходе на поверхности S из зоны S_1 в зону S_2 предполагает, следовательно, скачкообразное изменение поверхностной плотности тока. Обрыв линий тока, согласно уравнению непрерывности, в свою очередь связан с накоплением на контуре C заряда.

¹⁾ Kottler, *Ann. Physik* 71, 457, 1923.

Пусть ds будет элемент длины вдоль контура C , положительное направление которого определяется положительной нормалью n (рис. 87). Пусть n_1 будет единичным вектором, нормальным к n и элементу контура ds и направленным в сторону зоны 1. Линейные плотности электрических и магнитных зарядов мы будем обозначать через σ и σ^* . Уравнения (V) применительно к поверхностным зарядам примут вид

$$n_1 (K_1 - K_2) = i\omega\sigma, \quad n_1 (K_1 - K_2^*) = i\omega\sigma^* \quad (27)$$

и, следовательно, согласно (23),

$$\left. \begin{aligned} i\omega\sigma &= n_1 ([n, H_2] - [n, H_1]) = (H_2 - H_1) [n_1, n], \\ i\omega\sigma^* &= n_1 ([n, E_1] - [n, E_2]) = -(E_2 - E_1) [n_1, n]. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Вектор $[n_1, n]$ имеет то же направление, что и ds . Если S_2 представляет собой непрозрачный экран, на поверхности которого $E_2 = H_2 = 0$, то поле в любой точке на затенённой стороне равно

$$E(x', y', z') = -\frac{1}{i\omega\epsilon} \frac{1}{4\pi} \oint_C \text{grad } \varphi (H_1 ds) - \\ - \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \left\{ i\omega\mu [n, H_1] \varphi + [n, E_1] \text{grad } \varphi + (nE_1) \text{grad } \varphi \right\} da, \quad (29)$$

что, как можно показать, тождественно с

$$4\pi E(x', y', z') = -\frac{1}{i\omega\epsilon} \oint_C \text{grad } \varphi (H ds) + \\ + \oint_C \varphi [E_1, ds] - \int_{S_1} \left(E_1 \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial E_1}{\partial n} \right) da. \quad (30)$$

Для магнитного поля получим

$$4\pi H(x', y', z') = \frac{1}{i\omega\mu} \oint_C \text{grad } \varphi (E_1 ds) + \\ + \int_{S_1} \left\{ i\omega\epsilon [n, E_1] \varphi - [n, H_1] \text{grad } \varphi - (nH_1) \text{grad } \varphi \right\} da = \\ = \frac{1}{i\omega\mu} \oint_C \text{grad } \varphi (E_1 ds) + \oint_C \varphi [H_1 ds] - \int_{S_1} \left(H_1 \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial H_1}{\partial n} \right) da. \quad (31)$$

Остаётся показать, что дивергенции полей, выражаемых этими интегралами, действительно равны нулю и что поля эти удовлетворяют уравнениям (I) и (II)¹⁾.

1) Формулы (29)–(31) определяют E и H внутри поверхности через значения на S как тангенциальных, так и нормальных компонент векторов поля. Задание стольких составляющих на S является, вообще говоря, излишним, поскольку, как это следует из теоремы единственности (раздел 9.2), поле внутри S однозначно определяется заданием либо E_t , либо H_t (так называемые первая и вторая граничные задачи электродинамики). Соответствующие формулы, определяющие поле, могут быть получены применением леммы Лоренца, играющей роль векторной теоремы Грина, и должным образом подобранного вспомогательного поля, играющего роль функции Грина. В общем случае негармонических процессов аналогичные результаты могут быть получены при помощи «обобщённой леммы Лоренца» (см. Я. Н. Фельд, ЖЭТФ 13, 110, 1943 и 14, 330, 1944; ДАН 41, 294, 1943 и 48, 181, 1945). Следует отметить также, что формулы типа (29)–(31) легко получаются из леммы Лоренца, если в качестве вспомогательных полей ввести поле электрического (для нахождения E) и магнитного (для нахождения H) диполя в свободном пространстве. Прим. ред.

Рассмотрим сначала дивергенцию (29) в точке x', y', z' :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}' E(x', y', z') &= \frac{1}{i\omega\epsilon} \frac{1}{4\pi} \oint_C \Delta\varphi (H_1 ds) + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \{ i\omega\mu [n, H_1] \operatorname{grad} \varphi + (nE_1) \Delta\varphi \} da = - \frac{k^2}{i\omega\epsilon} \frac{1}{4\pi} \oint_C \varphi H_1 ds - \\ &- \frac{k^2}{4\pi} \int_{S_1} (n, E_1) \varphi da + \frac{i\omega\mu}{4\pi} \int_{S_1} [n, H_1] \operatorname{grad} \varphi da, \end{aligned} \quad (32)$$

если учесть, что при применении к функции φ и её производным $\operatorname{grad}' = -\operatorname{grad}$. Далее,

$$\int_S [n, H] \operatorname{grad} \varphi da = \int_S \varphi \operatorname{rot} H n da - \oint_C \varphi H ds. \quad (33)$$

Линейный интеграл, получающийся в результате этого преобразования, равен нулю, если поверхность S замкнута; если же она не замкнута, то он как раз компенсирует контурный интеграл в (32). Обратно, только наличие в выражении (29) контурного интеграла приводит к тому, что дивергенция равна нулю, и к тому, что на больших расстояниях от отверстия S_1 волны поперечны. Из (II) и из соотношения $\frac{k^2}{i\omega\epsilon} = -i\omega\mu$ немедленно следует, что

$$\operatorname{div}' E(x', y', z') = 0. \quad (34)$$

Такое же доказательство справедливо и для $H(x', y', z')$.

Покажем, наконец, что (29) и (31) удовлетворяют (I) и (II):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}' H(x', y', z') &= - \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \{ [n, H_1] \Delta\varphi + \\ &+ k^2 \varphi [n, H_1] - i\omega\epsilon [n, E_1] \operatorname{grad} \varphi \} da, \end{aligned} \quad (35)$$

поскольку ротор градиента тождественно равен нулю. Далее,

$$\begin{aligned} \int_{S_1} [n, H_1] \Delta\varphi da &= - \int_{S_1} \{ n [\operatorname{grad}_{\operatorname{grad} \varphi} H_1] \} \operatorname{grad} \varphi da = \\ &= \int_{S_1} (n, \operatorname{rot} H_1) \operatorname{grad} \varphi da - \int_{S_1} [n, \operatorname{grad} (H_1 \operatorname{grad} \varphi)] da = \\ &= - \oint_C \operatorname{grad} \varphi (H_1 ds) - i\omega\epsilon \int_{S_1} (nE_1) \operatorname{grad} \varphi da, \end{aligned} \quad (36)$$

где оператор $\operatorname{grad}_{\operatorname{grad} \varphi}$ действует только на $\operatorname{grad} \varphi$. Последним интегралом учитывается тот факт, что уравнения поля, по предположению, удовлетворяются на S_1 . Таким образом,

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}' H(x', y', z') &= \frac{1}{4\pi} \oint_C \operatorname{grad} \varphi (H_1 ds) + \\ &+ \frac{i\omega\epsilon}{4\pi} \int_{S_1} \{ i\omega\mu [n, H_1] \varphi + [n, E_1] \operatorname{grad} \varphi + (nE_1) \operatorname{grad} \varphi \} da = \\ &= -i\omega\epsilon E(x', y', z'). \end{aligned} \quad (37)$$

Удовлетворение уравнению (I) устанавливается таким же способом¹⁾.

¹⁾ Эти формулы были применены L. J. Chu и автором к расчёту дифракции от прямоугольной щели в идеально проводящем экране. Полученные результаты относительно удовлетворительны, если сравнивать их с результатами Morse and Rubinstein, *Phys. Rev.* 54, 895, 1938, которые решали задачу с двумерной щелью совершенно строго введением гиперболических цилиндрических координат; *Phys. Rev.* 56, 99, 1939. См. также решение подобных задач у Щелкунова, *ibid.*, стр. 308.

ЧЕТЫРЕХМЕРНАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ ОБ ИЗЛУЧЕНИИ

8.16. Интегрирование волнового уравнения. В разделе 1.21 было показано, как с помощью тензоров уравнения поля могут быть записаны в чрезвычайно сжатой форме. Если ввести мнимое расстояние $x_4 = ict$ в качестве координаты в некотором четырехмерном многообразии, то действительно уравнения переменного поля будут *формально* тождественны с уравнениями для статического состояния, и методы, которые были применены для интегрирования уравнения Пуассона, могут быть непосредственно распространены и на этот более общий случай. Четырехмерное представление теории более абстрактно, нежели методы, описанные ранее в этой главе, и поэтому не применяется в практических задачах расчета излучения антенн. Но, помимо своего формального изящества, четырехмерная трактовка приводит иногда к весьма важным результатам наиболее прямым путём. Сказанное относится в особенности к довольно трудной задаче определения поля отдельного произвольно движущегося заряда.

Мы ограничимся рассмотрением зарядов и токов в *свободном пространстве*. Как и в соотношениях (82), стр. 73, векторный и скалярный потенциалы могут быть представлены в виде четыре-вектора, прямоугольные компоненты которого равны

$$\Phi_1 = A_x, \quad \Phi_2 = A_y, \quad \Phi_3 = A_z, \quad \Phi_4 = \frac{i}{c} \varphi. \quad (1)$$

Аналогично плотности токов и зарядов могут быть представлены в виде *четыре-вектора* с компонентами

$$J_1 = J_x, \quad J_2 = J_y, \quad J_3 = J_z, \quad J_4 = ic\rho. \quad (2)$$

Четыре-потенциал удовлетворяет соотношению

$$\sum_{k=1}^4 \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x_k^2} = -\mu_0 J_j, \quad \sum_{k=1}^4 \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_k} = 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4). \quad (3)$$

Согласно обозначению (35), стр. 66, $\square$ — символический *четыре-вектор*, компоненты которого равны $\frac{\partial}{\partial x_k}$. Следовательно, уравнения (3) могут быть сокращённо записаны в виде

$$\square^2 \Phi = -\mu_0 J, \quad \square \Phi = 0. \quad (4)$$

Пусть V — область четырехмерного пространства, ограниченная трёхмерной «поверхностью» S , a и n — единичная внешняя нормаль к S . Тогда в четырехмерном пространстве, так же как и в трёх измерениях,

$$\int_V \square \Phi \, dv = \int_S \Phi n da. \quad (5)$$

Если u и w — две скалярные функции от четырёх координат x_1, x_2, x_3, x_4 , непрерывные в объёме V и на поверхности S вместе со своими первыми и вторыми производными, то

$$\int_V \square (u \square w) \, dv = \int_S u (\square w n) \, da, \quad (6)$$

$$\int_V (\square u \square w) \, dv + \int_V u \square^2 w \, dv = \int_S u \frac{\partial w}{\partial n} \, da. \quad (7)$$

Мы получаем таким образом, четырёхмерный аналог теоремы Грина

$$\int_V (\omega \square^2 u - u \square^2 \omega) dv = \int_S \left(\omega \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \omega}{\partial n} \right) da. \quad (8)$$

Пусть x'_j будет координатой фиксированной точки наблюдения, находящейся внутри поверхности S , а x_j — координатой переменной точки внутри области V или на поверхности S . Расстояние от x_j до x'_j равно

$$R = \sqrt{\sum_{j=1}^4 (x'_j - x_j)^2}. \quad (9)$$

Непосредственным дифференцированием можно убедиться, что уравнению

$$\square^2 \omega = 0 \quad (10)$$

удовлетворяет функция

$$\omega = \frac{1}{R^2} \quad (11)$$

во всех точках, за исключением особой точки $R = 0$, которая исключается, как обычно, сферой S_1 радиуса R_1 . Если отождествить u с какой-либо компонентой четырёх-потенциала Φ_j , то получим

$$\int_V \frac{\square^2 \Phi_j}{R^2} dv = \int_{S_1 + S_2} \left\{ \frac{1}{R^2} \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} - \Phi_j \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R^2} \right) \right\} da. \quad (12)$$

На поверхности S_1 мы имеем

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial n} = -\frac{\partial \Phi_j}{\partial R}; \quad \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R^2} \right) \right]_{R=R_1} = \frac{2}{R_1^3}. \quad (13)$$

Для определения площади сферической гиперповерхности S_1 введём полярные координаты

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= R \cos \vartheta_1, & x_2 &= R \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2, \\ x_3 &= R \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos \varphi, & x_4 &= R \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \sin \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

которые удовлетворяют соотношению

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = R^2. \quad (15)$$

Метрические коэффициенты h_1 подсчитываются так же, как и по формуле (70), стр. 53, и оказываются равными

$$h_1 = 1, \quad h_2 = R, \quad h_3 = R \sin \vartheta_1, \quad h_4 = R \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2. \quad (16)$$

Элемент объёма будет

$$dv = h_1 h_2 h_3 h_4 dR d\vartheta_1 d\vartheta_2 d\varphi = R^3 \sin^2 \vartheta_1 \sin \vartheta_2 dR d\vartheta_1 d\vartheta_2 d\varphi, \quad (17)$$

а площадь поверхности гиперсферы равна, следовательно,

$$R^3 \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^2 \vartheta_1 \sin \vartheta_2 d\vartheta_1 d\vartheta_2 d\varphi = 2\pi^2 R^3. \quad (18)$$

Таким образом

$$\int_{S_1} \left\{ \frac{1}{R^2} \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} - \Phi_j \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R^2} \right) \right\} da \rightarrow -4\pi^2 \Phi_j(x'), \quad (19)$$

при $R_1 \rightarrow 0$.

Заменяя $\square^2 \Phi_j$ на $-\mu_0 J_j$ и соединяя компоненты Φ_j в четыре-вектор, мы получаем для Φ в точке x' выражение

$$\Phi(x') = \frac{\mu_0}{4\pi^2} \int_V \frac{J(x)}{R^2} dv + \frac{1}{4\pi^2} \int_S \left\{ \frac{1}{R^2} \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R^2} \right) \right\} da. \quad (20)$$

Для того чтобы найти векторы поля, мы должны вычислить компоненты тензора 2F в точке x'_j . Согласно (79), стр. 73,

$$F_{jk} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial x'_j} - \frac{\partial \Phi_j}{\partial x'_k} \quad (j, k = 1, 2, 3, 4). \quad (21)$$

Предположим временно, что все источники расположены в пределах объёма V . Тогда интеграл по поверхности S в формуле (20) ничего не прибавляет к значению Φ , и в этом случае

$$F_{jk}(x') = \frac{\mu_0}{4\pi^2} \int_V \left\{ J_k \frac{\partial}{\partial x'_j} \left(\frac{1}{R^2} \right) - J_j \frac{\partial}{\partial x'_k} \left(\frac{1}{R^2} \right) \right\} dv = \frac{\mu_0}{4\pi^2} \int_V \frac{[J, R]_{jk}}{R^4} dv, \quad (22)$$

где $[J, R]_{jk} = J_j R_k - J_k R_j$ и где R — радиус-вектор, проведённый из точки x в точку x' .

Векторное произведение $[J, R]$ является шести-вектором или антисимметричным тензором, компоненты которого определяются соотношениями (62), стр. 70. В сокращённом виде

$${}^2F(x') = \frac{\mu_0}{2\pi^2} \int_V \frac{[J, R]}{R^4} dv. \quad (23)$$

8.17. Поле движущегося точечного заряда. Пусть отдельный заряд q движется в свободном пространстве с произвольной скоростью v . Предполагается, что расстояние от заряда до наблюдателя таково, что заряд можно считать геометрической точкой. Движение заряда по траектории определяется заданием его координат как функции от t :

$$x_1 = f_1(t), \quad x_2 = f_2(t), \quad x_3 = f_3(t), \quad x_4 = f_4(t) = ict. \quad (24)$$

Необходимо отметить, что здесь t является не временем наблюдателя, а собственным временем движущегося заряда. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int \int J_j dx_1 dx_2 dx_3 = q \frac{dx_j}{dt} = q \frac{df_j}{dt} \quad (j = 1, 2, 3, 4) \quad (25)$$

и, согласно (20),

$$\Phi_j = \frac{\mu_0}{4\pi^2} q \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df_j}{dt} \frac{1}{R^2} dx_4. \quad (26)$$

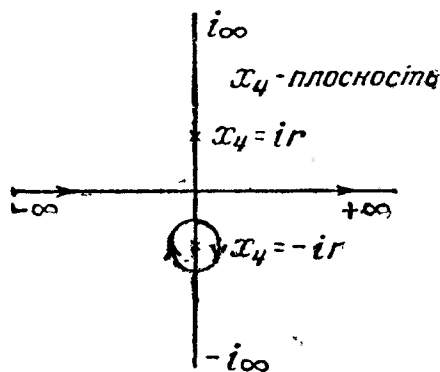
Начало отсчёта на оси времени мы можем менять совершенно произвольно, не теряя в общности. Удобно принять, что в момент наблюдения время наблюдателя $t' = 0$. Тогда $x'_4 = 0$ и

$$R^2 = r^2 + x_4^2, \quad (27)$$

где r — расстояние в трёхмерном конфигурационном пространстве от заряда до точки наблюдения. Полюсы подинтегрального выражения в (26) расположены в точках

$$x_4 = -ir, \quad x_4 = +ir. \quad (28)$$

По условиям задачи координаты траектории определены для действительных значений t , которые меньше чем t' и, следовательно, в данном случае меньше нуля. Таким образом функции $f_j(t)$ определены только для значений x_4 на отрицательной части мнимой оси. Однако мы предположим, что $f_j(t)$ — аналитические функции от $x_4 = ict$ и могут быть аналитически продолжены на всю комплексную плоскость x_4 . Поскольку единственными особенностями (26) являются полюсы (28), то по лемме Жордана, стр. 280, контур интегрирования может быть деформирован из действительной оси в небольшой круг около полюса $x_4 = -ir$, проведённый в показанном на рис. 88 направлении, и тогда интеграл может быть вычислен методом вычетов, стр. 280. Разложение R^2 в ряд около точки $x_4 = -ir$ даёт



$$R^2 = \left(\frac{dR^2}{dx_4} \right)_{R^2=0} (x_4 + ir) + \dots \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \frac{dR^2}{dx_4} &= \frac{2i}{c} \sum_{j=1}^3 (x'_j - x_j) \frac{dx_j}{dt} + 2x_4 = \\ &= \frac{2i}{c} \mathbf{v} \mathbf{r} + 2x_4; \end{aligned} \quad (30)$$

Рис. 88. Контур интегрирования сводится к небольшой окружности, проведённой вокруг полюса $x_4 = -ir$. Отсюда

$$\left(\frac{dR^2}{dx_4} \right)_{R^2=0} = \frac{2i}{c} \mathbf{v} \mathbf{r} - 2ir = 2ir \left(\frac{v_r}{c} - 1 \right), \quad (31)$$

где v_r — компонента скорости заряда в направлении радиуса-вектора $\mathbf{r}$, проведённого от заряда к наблюдателю.

Интеграл (26) принимает теперь вид

$$\Phi_j = \frac{\mu_0 q}{4\pi^2} \frac{i}{2r \left(1 - \frac{v_r}{c} \right)} \oint \frac{df_j}{dt} \frac{1}{x_4 + ir} dx_4. \quad (32)$$

Обход контура совершается по часовой стрелке и, следовательно, согласно теореме Коши, интеграл в (32) равен $-2\pi i \frac{df_j}{dt}$. Поэтому

$$\Phi_j = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q}{r \left(1 - \frac{v_r}{c} \right)} \frac{df_j}{dt} \quad (33)$$

или, в виде векторного и скалярного потенциалов,

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \mathbf{v}}{r \left(1 - \frac{v_r}{c} \right)}, \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r \left(1 - \frac{v_r}{c} \right)}. \quad (34)$$

Это формулы Льенара-Вихерта. Значения r и $\mathbf{v}$ заряда q надо брать для момента времени, предшествующего моменту наблюдения на величину $\frac{r}{c}$.

Вместо того чтобы дифференцировать эти выражения, более прямым путём для получения векторов поля является применение того же способа прямо к выражению (23). Это было сделано Зоммерфельдом¹⁾, который и получил формулы, вывод которых прежними способами связан с большими

¹⁾ Франк и Мизес, Уравнения математической физики. ОНТИ, 1937, стр. 831, Р. Беккер, Теория электричества. ГТТИ, 1941, стр. 66—67, и Френкель, Электродинамика, т. I, гл. VI.

усложнениями. Выражения для поля удобно разложить на две части: *поле, связанное со скоростью*, в котором нет членов, содержащих ускорение $\dot{v}$, и *поле, связанное с ускорением*, которое исчезает при $\dot{v}$, стремящемся к нулю. Для поля, связанного со скоростью, мы получаем

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma^3}{r^2} \left(r_0 - \frac{v}{c} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right), \\ H &= \frac{q}{4\pi} \frac{\gamma^3}{r^2} [v, r_0] \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

где

$$\gamma = \frac{1}{1 - \frac{v r_0}{c}}, \quad (36)$$

а r_0 — единичный вектор в направлении r от заряда к наблюдателю для момента времени $t' - \frac{r}{c}$. Эти формулы могут быть получены также применением преобразования Лоренца (103), стр. 77, к полю статического заряда с учётом того, что (103) относится к времени наблюдателя.

Поле, связанное с ускорением, равно

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\gamma^2}{rc^2} \left\{ \gamma \left(r_0 - \frac{v}{c} \right) (r_0 \dot{v}) - \dot{v} \right\}, \\ H &= \frac{q}{4\pi} \frac{\gamma^2}{rc} \left\{ \gamma \left[\frac{v}{c}, r_0 \right] (r_0 \dot{v}) + [\dot{v}, r_0] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Прежде всего следует отметить, что *оба поля*, как связанное со скоростью, так и связанное с ускорением, удовлетворяют условию

$$H = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} [r_0, E]. \quad (38)$$

Магнитный вектор всегда перпендикулярен к радиусу-вектору, проведённому из эффективного положения заряда, под которым подразумевается то положение, которое он занимал в момент $t' - \frac{r}{c}$. Электрический вектор поля, связанного со скоростью, не поперечен, но для поля, связанного с ускорением,

$$E = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} [H, r_0], \quad E r_0 = H r_0 = 0. \quad (39)$$

Поле, связанное со скоростью, убывает, как $\frac{1}{r^2}$, в то время как поле, связанное с ускорением, только как $\frac{1}{r}$. Таким образом, на больших расстояниях поле, связанное с ускорением, превалирует; это поле является чисто поперечным и только оно одно обуславливает излучение.

В том случае, когда скорость заряда очень мала по сравнению со скоростью света, уравнения (37) для поля на больших расстояниях переходят в следующие приближённые выражения:

$$\left. \begin{aligned} E &\cong \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{rc^2} [r_0 [r_0, \dot{v}]], \\ H &\cong \frac{q}{4\pi} \frac{1}{rc} [\dot{v}, r_0], \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

напоминающие уравнения (27), стр. 384, для поля излучения диполя.

Результаты этого раздела основаны на предположении, что движение и траектория заряда известны, аналогично тому, как ранее предполагалось,

что распределение токов может быть задано. Однако в обоих случаях мы допускаем нестрогость, предполагая, что вопрос о движении заряда или о распределении токов можно рассматривать независимо от вопроса об излучении. Предположим, например, что заряд движется в заданном магнитном поле. Если пренебречь излучением, то механическая сила, действующая на заряд, будет равна $q[v, B]$, и из этого выражения для силы мы можем методами классической механики определять движение заряда. (Если скорости велики, то необходимо сделать также поправку на релятивистское изменение массы.) Но результатом действия этой силы является ускорение заряда в поперечном направлении и, следовательно, возникновение потери энергии вследствие излучения. Рассеяние энергии вследствие излучения не может быть объяснено действием силы $q[v, B]$. Необходимо включить дополнительную силу — реакцию излучения, которая грубо может быть уподоблена трению. Реакция излучения в свою очередь оказывает влияние на вид траектории, откуда ясно, что точное решение может быть получено только введением полной действующей силы с самого начала, что представляет собой задачу, намного более трудную. К счастью, в большинстве случаев реакция излучения чрезвычайно мала, так что, даже полностью пренебрегая ею, мы всё же получаем удовлетворительное приближённое решение для движения.

ЗАДАЧИ

1. Показать, что эффективная напряжённость поля на больших расстояниях от полуволнового линейного осциллятора даётся формулой

$$E = \frac{7\sqrt{W}}{R} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\sin \vartheta} \text{ вольт/метр,}$$

где W — излучаемая мощность в ваттах, R — расстояние от осциллятора в метрах и ϑ — угол между радиусом-вектором R и осью осциллятора.

Показать, что эффективная напряжённость поля на больших расстояниях от электрического диполя равна

$$E = 6,7 \cdot \frac{\sin \vartheta}{R} \sqrt{W} \text{ вольт/метр}$$

при условии, что длина волны весьма велика по сравнению с длиной диполя.

2. Пусть ψ является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + k^2 \psi = 0,$$

непрерывным вместе со своими первыми и вторыми производными внутри замкнутого контура C на плоскости x, y , включая и сам контур, и пусть

$$u(x', y') = \frac{1}{4} \int_C \left\{ H_0^{(1)}(kr) \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(1)}(kr) \right\} ds,$$

где $r = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$, n обозначает внешнюю нормаль к контуру C , а $H_0^{(1)}(kr)$ — функция Ганкеля. Показать, что если фиксированная точка x', y' лежит вне контура C , то $u = 0$, в то время как $u = \psi$ для точки внутри контура C .

Теорема справедлива также и для того случая, когда функция $H_0^{(1)}$ заменена на $N(kr)$. Эта теорема является двумерным аналогом формулы Гельмгольца (5), стр. 406, и выведена Вебером, *Math. Ann.* 1, 1—36, 1869.

3. Рассмотреть аналог формулы Кирхгофа для двух измерений. Доказательство, основанное на формуле Вебера, задача 2, было дано Volterra, *Acta Math.* 18, 161, 1894. (Очень интересная работа, касающаяся распространения волн в двумерном пространстве, была недавно сделана М. Riesz'ом. См. также Baker and Copson, *Huygens' Principle*, Cambridge University Press, стр. 54, 1939.)

4. Пусть x', y' — какая-либо фиксированная точка внутри плоской двумерной области, ограниченной замкнутой кривой C , и пусть ψ — решение уравнения

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + k^2 \psi = -\eta(x, y),$$

непрерывное и обладающее непрерывными первыми производными на контуре C и охватываемой им площади S . Показать, что

$$2\pi\psi(x', y') = \int_C \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial n} K_0(ikr) - \psi \frac{\partial}{\partial n} K_0(ikr) \right\} ds + \frac{1}{2\pi} \int_S \eta(x, y) K_0(ikr) da,$$

где $r^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2$, а $K_0(ikr)$ — изменённая функция Бесселя, разобранная в задаче 10, глава VI; n — внешняя нормаль к контуру C .

5. Пусть распределение токов в объёме V задано функцией $J(x)e^{-i\omega t}$, где x поставлено вместо трёх координат x, y, z . Показать, что напряжённость электрического поля, вызванного этими токами, может быть представлена интегралом

$$E(x', t) = \frac{ie^{-i\omega t}}{4\pi\omega\epsilon} \int_V \left\{ (J, \text{grad}) \text{grad} + k^2 J \right\} \frac{e^{ikr}}{r} dv,$$

где x' заменяет три координаты точки наблюдения, $k = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$ и

$$r^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2.$$

6. Применяя теорему задачи 5 к идеальному проводнику, мы получаем

$$E(x', t) = \frac{ie^{-i\omega t}}{4\pi\epsilon\omega} \int_S \left\{ (K, \text{grad}) \text{grad} + k^2 K \right\} \frac{e^{ikr}}{r} da,$$

где K — плотность поверхностных токов в точке x, y, z на поверхности проводника S . Пусть теперь S будет поверхностью линейного проводника. Предположим, что кривизна провода непрерывна и что его поперечное сечение всюду мало по сравнению с радиусом кривизны и по сравнению с длиной волны. Показать, что поле такого линейного проводника даётся выражением

$$E(x', t) = \frac{i}{4\pi\omega\epsilon} e^{-i\omega t} \text{grad}' \left\{ I \frac{e^{ikr}}{r} \Big|_{s=s_2}^{s=s_1} + \int_C \frac{\partial I}{\partial s} \frac{e^{ikr}}{r} ds \right\} + \frac{i\omega\mu}{4\pi} \int_C I \frac{e^{ikr}}{r} ds,$$

где grad' применяется в точке наблюдения, а интеграл распространён по контуру C проводника между точками s_1 и s_2 .

7. Применить формулу задачи 6 с тем, чтобы получить выражение для поля линейного осциллятора, и сравнить это выражение с результатами раздела 8.11.

8. В том случае, когда линейный контур задачи 6 замкнут, $s_1 = s_2$ и проинтегрированный член равен нулю. На поверхности проводника тангенциальная компонента E равна приближённо

$$E_s \cong \frac{ie^{-i\omega t}}{4\pi\omega\epsilon} \oint_C \left(\frac{\partial^2 I}{\partial s^2} + k^2 I \right) \frac{e^{ikr}}{r} ds = 0,$$

откуда следует, что ток I должен иметь вид

$$I = A_m e^{-ik_m s}, \quad k_m = \frac{2\pi m}{l},$$

где l — длина контура, а m — целое число. Показать, что поле такого замкнутого петлеобразного осциллятора даётся выражением

$$E(x', t) = \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{-i\omega_m t} \times \\ \times \left\{ \text{grad}' \oint_C \frac{e^{ik_m(r-s)}}{r} ds + ik_m \oint_C \frac{e^{ik_m(r-s)}}{r} ds \right\}.$$

Это выражение является в пределе точным при исчезающе малом поперечном сечении проводника, и верно приближённо, если поперечное сечение мало по сравнению с длиной волны и радиусом кривизны в каждой точке контура. Применение этой формулы к вибраторам Герца, какие применялись в ранние дни беспроволочной телеграфии, разобрано в 1902 г. в очерке Macdonald'a на премию Adams'a, озаглавленном *Electrical Waves*.

9. По полубесконечному линейному проводнику, совпадающему с отрицательной частью координатной оси z , проходит ток частоты $\frac{\omega}{2\pi}$. Найти выражения для компонент напряжённости электрического и магнитного полей и подсчитать полную величину энергии, протекающей через плоскость, перпендикулярную к проводнику.

10. Подсчитать сопротивление излучения линейного полуволнового осциллятора методом э. д. с., описанным в разделе 8.12.

11. Изолированная линейная полуволновая антенна излучает 50 квт при длине волны в 15 м. Вычертить графики значений параллельной и нормальной компонент напряжённости электрического поля вдоль антенны, принимая гармоническое распределение тока и диаметр проводника 6 мм.

12. Нечётная и чётная функции

$$F(o) = \frac{\sin(\alpha \cos \vartheta)}{\sin \vartheta}, \quad F(e) = \frac{\cos(\alpha \cos \vartheta)}{\sin \vartheta}$$

очень часто встречаются в теории линейных осцилляторов. Положив $\eta = \cos \vartheta$, показать, что эти функции являются решениями уравнения

$$(1 - \eta^2) F'' - 2\eta F' + \left\{ \alpha^2 (1 - \eta^2) - \frac{1}{1 - \eta^2} \right\} F = 0.$$

Полагая $F = \sqrt{1 - \eta^2} G$, показать, что G удовлетворяет присоединённому уравнению Матьё (6), стр. 330,

$$(1 - \eta^2) w'' - 2(a + 1) \eta w' + (b - c^2 \eta^2) w = 0$$

для того частного случая, когда $a = 1$, $b = \alpha^2 - 1$, $c = \alpha$.

Следует обратить внимание на то, что хотя $F(o)$ и $F(e)$ являются периодическими функциями от ϑ для всех значений α , в полюсах они остаются конечными только для некоторых характеристических значений. Для чётных функций эти значения принадлежат к дискретному ряду $\alpha_m^{(e)} = \frac{2m+1}{2} \pi$; для нечётных функций они образуют ряд $\alpha_m^{(o)} = m\pi$, где m — целое число.

Доказать ортогональность этих функций, выражаемую соотношениями

$$\int_{-1}^1 F_m^{(e)} F_n^{(e)} (1 - \eta^2) d\eta = \int_{-1}^{+1} F_m^{(o)} F_n^{(o)} (1 - \eta^2) d\eta = 0 \quad (m \neq n),$$

$$\int_{-1}^{+1} F_m^{(e)} F_n^{(o)} (1 - \eta^2) d\eta = 0 \quad \begin{cases} m = n, \\ m \neq n, \end{cases}$$

где индексы внизу определяют значения α ; показать также, что функции эти нормированы. Рассмотреть связь между этими функциями и полем излучения линейной антенны при произвольном распределении тока.

13. Источник электромагнитного поля расположен в точке P_1 . Другой источник, действующий с той же частотой, расположен в точке P_2 . Промежуточная среда изотропна, но не обязательно однородна. Все соотношения между векторами поля линейны, и время входит в виде гармонического множителя. Пусть векторы поля, связанного с источником P_1 , будут E_1 и H_1 , а поля, связанного с источником P_2 , E_2 и H_2 . Показать, что всюду, где эти векторы конечны и непрерывны, они удовлетворяют симметричному соотношению

$$\operatorname{div} ([E_1, H_1] - [E_2, H_2]) = 0.$$

Этот результат был получен Лоренцом и был развит в целую систему теорем взаимности, имеющих фундаментальное значение для радиосвязи.

14. На стр. 383 было показано, что вектор Герца электрического квадруполь равен

$$\mathbf{H} = -\frac{i\omega}{8\pi} \mathbf{p}^{(2)} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left(\frac{1}{R} + \frac{i}{kR^2} \right) e^{ikR - i\omega t},$$

$$p_i^{(2)} = \sum_{j=1}^3 p_{ij} \frac{\partial R}{\partial x_j}, \quad p_{ij} = \int_V \xi_i \xi_j \rho_0 dV,$$

$$R^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

где $\rho_0(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ — плотность заряда. Пусть $p_r, p_\vartheta, p_\varphi$ будут сферическими компонентами вектора $\mathbf{p}^{(2)}$. Показать, что поле излучения квадруполь в области, для которой $kR \gg 1$, даётся выражениями

$$E_\vartheta \cong \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H_\varphi, \quad E_\varphi \cong -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H_\vartheta,$$

$$H_\vartheta \cong \frac{i\omega^3 \mu \epsilon}{8\pi} p_\varphi \frac{e^{ikR - i\omega t}}{R}, \quad H_\varphi \cong -\frac{i\omega^3 \mu \epsilon}{8\pi} p_\vartheta \frac{e^{ikR - i\omega t}}{R},$$

тогда как радиальная компонента исчезает, как $\frac{1}{R^2}$. Показать, что среднее значение интенсивности излучения равно

$$\bar{I}_R \cong \frac{\omega^6 \mu^2 \epsilon^2}{128\pi^2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} (p_\vartheta^2 + p_\varphi^2) \frac{1}{R^2}.$$

15. Показать, что компоненты p_ϑ и p_φ вектора $\mathbf{p}^{(2)}$ предыдущей задачи связаны с компонентами p_{ij} тензора квадруполь соотношениями

$$p_\vartheta = \frac{1}{2} \sin 2\vartheta (p_{11} \cos^2 \varphi + p_{22} \sin^2 \varphi - p_{33} + p_{12} \sin 2\varphi) + \cos 2\vartheta (p_{13} \cos \varphi + p_{23} \sin \varphi),$$

$$p_\varphi = \frac{1}{2} \sin \vartheta \sin 2\varphi (p_{22} - p_{11}) + p_{12} \sin \vartheta \cos 2\varphi + p_{23} \cos \vartheta \cos \varphi - p_{31} \cos \vartheta \sin \varphi.$$

Если поворотом системы координат привести её оси в совпадение с главными осями тензора квадруполь, то тогда $p_{12} = p_{23} = p_{31} = 0$, и предыдущие соотношения принимают вид

$$p_\vartheta = \sin 2\vartheta (Q_1 - Q_2 \cos 2\varphi), \quad p_\varphi = 2 \sin \vartheta \sin 2\varphi Q_2,$$

где

$$Q_1 = \frac{1}{4} (p_{11} + p_{22} - 2p_{33}), \quad Q_2 = \frac{1}{4} (p_{22} - p_{11}).$$

Показать теперь, что полная величина квадрупольного излучения равна

$$W = \frac{\omega^6 \mu^2 \epsilon^2}{60\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} (Q_1^2 + 3Q_2^2) \text{ ватт.}$$

Если средой, окружающей квадруполь, является воздух, то $\mu\epsilon = \frac{1}{c^2}$ и $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = 60$ и, следовательно,

$$W = \frac{27\pi^6 c^2}{\lambda^6} (Q_1^2 + 3Q_2^2).$$

16. Заряды $-e$ помещены на противоположных концах отрезка, вращающегося с постоянной угловой скоростью вокруг перпендикулярной к нему оси, проходящей через его центр. Заряд $+2e$ находился в центре. Дипольный момент всей системы равен, таким образом, нулю. Рассчитать компоненты квадрупольного момента и найти полное излучение (Van Vleck).

17. Два заданных диполя расположены в одной плоскости. Их оси параллельны друг другу, но моменты направлены в противоположные стороны. Диполи вращаются с постоянной угловой скоростью вокруг оси, параллельной им и расположенной посередине между ними. Рассчитать компоненты квадрупольного момента и найти полное излучение (Van Vleck).

18. Положительный и отрицательный заряды, связанные вместе квазиупругими силами, образуют гармонический осциллятор. Показать, что потери на излучение могут быть учтены введением сил трения, которые, однако, пропорциональны скорости изменения ускорения, а не скорости изменения смещения.

19. Положительный точечный заряд колеблется с очень малой амплитудой около фиксированного отрицательного заряда той же величины. Показать что формулы для поля колеблющегося диполя могут быть получены непосредственно из уравнений (35) и (37), стр. 419, которые относятся к ускоренно движущемуся точечному заряду.

ГЛАВА IX

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

Можно считать, что читатель теперь знаком с принципами, определяющими возникновение электромагнитных волн, и с тем, как эти волны распространяются в неограниченном однородном изотропном пространстве. Неограниченное пространство является, конечно, чистой абстракцией. Фактически наиболее интересные физические явления вызываются именно поверхностями разрыва непрерывности среды или быстрого изменения её физических свойств.

Такого рода краевые задачи бывают, грубо говоря, трёх типов.

Предположим, что волна, распространяющаяся в одной среде, падает на поверхность разрыва непрерывности, являющуюся границей другой среды. В первом случае линейные размеры поверхности очень велики по сравнению с длиной волны. Часть падающей энергии *отражается* от поверхности, а остальная часть проходит во вторую среду. Направление распространения в общем случае меняется; подобное изменение направления проходящих лучей называется *преломлением*.

Законы отражения и преломления электромагнитных волн на бесконечных поверхностях сравнительно просты. Если, однако, одно или оба измерения поверхности разрыва имеют размеры порядка длины волны, — это второй случай краевой задачи, — то трудности математического анализа значительно возрастают. Возмущение первоначального поля при этих условиях называется *дифракцией*. В обоих случаях вторичное поле индуцированных зарядов возбуждается первичными волнами от независимого источника.

Оба вида задач являются *неоднородными краевыми задачами*, как они были впервые определены для статического поля на стр. 177.

Третий из указанных выше случаев представляет собой *однородную задачу*. Проводящее тело находится в диэлектрической среде. Заряды смещены из положения равновесия и затем освобождены. Возникающие колебания зарядов сопровождаются колебаниями в окружающем поле. В каждом случае это поле может быть представлено в виде суперпозиции *характеристических волновых функций*, вид которых определяется формой тела, а относительные их амплитуды — начальными условиями. С каждой характеристической функцией связано *характеристическое число*, определяющее частоту данного частичного колебания. Колебания затухают частью из-за конечной проводимости тела, частью же в результате рассеяния энергии в виде излучения. Проводник и диэлектрик можно, однако, поменять местами по отношению к разделяющей их границе. В этом случае электромагнитные колебания будут происходить внутри полости, заполненной диэлектриком и ограниченной проводящими стенками. Если проводимость стенок бесконечна, то как тепловые, так и радиационные потери отсутствуют, и колебания всех частот будут незатухающими.

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ

9.1. Граничные условия. В разделе 1.13 было дано соответствующее доказательство условий, которым удовлетворяют нормальные и тангенциальные компоненты векторов поля на границе. В главах III и IV была установлена связь между этими граничными условиями и разрывными свойствами некоторых интегралов для стационарного режима; на основании разделов 8.13 и 8.14 тот же способ может быть распространён и на переменные поля. Предпосылая разбору задач этот анализ, мы уделим большее внимание тому важному случаю, когда проводимость одной из двух сред стремится к бесконечности.

Изменения тангенциальной компоненты вектора $\mathbf{E}$ и нормальной компоненты вектора $\mathbf{D}$ при переходе через поверхность соприкосновения двух сред выражаются соотношениями

$$[n_1, E_2 - E_1] = 0, \quad n(D_2 - D_1) = \delta, \quad (1)$$

где, как мы условились ранее, n — единичная нормаль, направленная из среды (1) в среду (2), а δ — плотность поверхностных зарядов (вместо ω , чтобы избежать путаницы с $\omega = 2\pi\nu$). В тех случаях, когда проводимость какой-либо из сред или обеих сред конечна и не равна нулю, поток зарядов через границу или к границе должен удовлетворять также уравнению непрерывности

$$n(J_2 - J_1) = -\frac{\partial \delta}{\partial t}. \quad (2)$$

Предположим теперь, что время входит только в виде обычного множителя $\exp(-i\omega t)$ и что, за исключением границы, обе среды однородны и изотропны. Тогда (1) и (2) дают

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} &= \delta, \\ \sigma_2 E_{2n} - \sigma_1 E_{1n} &= i\omega \delta. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Посмотрим прежде всего, при каких условиях плотность поверхностных зарядов может быть равна нулю. Если $\delta = 0$, то детерминант (3) должен обращаться в нуль и, следовательно,

$$\sigma_1 \varepsilon_2 - \sigma_2 \varepsilon_1 = 0. \quad (4)$$

Если (как это обычно и бывает) δ не равно нулю, то оно может быть исключено из соотношений (3), и мы получаем в качестве условия для нормальной компоненты вектора $\mathbf{E}$

$$\mu_1 k_2^2 E_{2n} - \mu_2 k_1^2 E_{1n} = 0. \quad (5)$$

Если проводимость одной из сред бесконечна, то выражение (5) становится неопределённым, но из (3)

$$E_{1n} = \frac{i\omega \varepsilon_2 - \sigma_2}{\varepsilon_1 \sigma_2 - \varepsilon_2 \sigma_1} \delta, \quad E_{2n} = \frac{i\omega \varepsilon_1 - \sigma_1}{\varepsilon_1 \sigma_2 - \varepsilon_2 \sigma_1} \delta, \quad (6)$$

и в пределе при $\sigma_1 \rightarrow \infty$

$$E_{1n} \rightarrow 0, \quad E_{2n} \rightarrow \frac{1}{\varepsilon_2} \delta, \quad J_{1n} = \sigma_1 E_{1n} \rightarrow \frac{\sigma_2 - i\omega \varepsilon_2}{\varepsilon_2} \delta. \quad (7)$$

Кроме того, из уравнений поля имеем

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{\sigma_1 - i\omega \varepsilon_1} \operatorname{rot} \mathbf{H}_1, \quad \mathbf{H}_1 = \frac{1}{i\omega \mu_1} \operatorname{rot} \mathbf{E}_1, \quad (8)$$

и, таким образом, если, по предположению, напряжённости поля ограничены, то как $\mathbf{E}_1$, так и $\mathbf{H}_1$ стремятся при $\sigma_1 \rightarrow \infty$ к нулю во всех внутренних

точках среды (1). Тангенциальная компонента E при переходе через границу непрерывна, и следовательно, в случае среды с бесконечной проводимостью

$$[n, E_2] = [n, E_1] = 0. \quad (9)$$

Рассмотрим теперь поведение магнитного поля на границе. В общем случае

$$n(B_2 - B_1) = 0, \quad [n, H_2 - H_1] = K, \quad (10)$$

где плотность поверхностных токов K равна нулю во всех случаях, когда проводимость среды у границы не равна бесконечности. Только что было показано, что если σ_1 становится бесконечным, то H_1 исчезает и, следовательно, в этом случае

$$nB_2 = 0, \quad [n, H_2] = K. \quad (11)$$

Дальнейшие полезные граничные условия для магнитного поля в случае идеальной проводимости могут быть выведены следующим образом¹⁾. Пусть граничная поверхность S определяется уравнением

$$\zeta = f_1(x, y, z) = \text{const.} \quad (12)$$

и совпадает с координатной поверхностью ортогональной системы криволинейных координат ξ, η, ζ (см. раздел 1.16). Если $\sigma_1 \rightarrow \infty$, то тангенциальная компонента E_2 и пропорциональная ей тангенциальная компонента $\text{rot } H_2$ стремятся к нулю. Следовательно, согласно (80), стр. 54,

$$\frac{1}{h_\eta h_\zeta} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} (h_\zeta H_\zeta) - \frac{\partial}{\partial \zeta} (h_\eta H_\eta) \right] i_\xi + \frac{1}{h_\xi h_\zeta} \left[\frac{\partial}{\partial \zeta} (h_\xi H_\xi) - \frac{\partial}{\partial \xi} (h_\zeta H_\zeta) \right] i_\eta \rightarrow 0. \quad (13)$$

За нормальную координату принята ζ . Так как σ_1 бесконечна, H_ζ равно нулю; следовательно, поскольку коэффициенты при единичных векторах должны обращаться в нуль независимо друг от друга, мы получаем, непосредственно у поверхности снаружи проводника:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} (h_\eta H_\eta) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \zeta} (h_\xi H_\xi) = 0. \quad (14)$$

Величины $h_\eta H_\eta$ и $h_\xi H_\xi$ являются ковариантными компонентами (см. стр. 54) вектора H_2 вдоль поверхности S . Условие на границе будет, следовательно, таково: *нормальные производные от ковариантных компонент вектора магнитного поля, касательного к границе, стремятся к нулю по мере того, как проводимость с одной стороны границы становится бесконечной.*

Под именем «граничных условий» мы будем рассматривать также и поведение поля на бесконечности. В этом отношении переменное поле явно отличается от статического. Если в случае стационарного состояния все источники расположены на конечном расстоянии от начала отсчёта, то напряжённости поля стремятся к нулю на бесконечности так, что $\lim R^2 E$ и $\lim R^2 H$ остаются конечными при $R \rightarrow \infty$, где R — расстояние от начала. Скалярный потенциал удовлетворяет уравнению $\Delta \varphi = 0$ и $\lim R \varphi$ при $R \rightarrow \infty$ конечен. Любая функция φ , регулярная на бесконечности и удовлетворяющая уравнению Лапласа во всех точках пространства (источников нет), необходимо равна нулю. С другой стороны, если переменные источники расположены на конечном расстоянии от начала, то напряжённости поля исчезают на бесконечности так, что при $R \rightarrow \infty$ остаются конечными $\lim R E$ и $\lim R H$. Скалярный потенциал и прямоугольные компоненты векторного потенциала, а также напряжённостей поля — все удовлетворяют уравнению

$$\Delta \psi + k^2 \psi = 0, \quad (15)$$

во всех точках, в которых плотность источников равна нулю. Кроме того,

¹⁾ Автор обязан E. H. Smith'у за приводимое ниже доказательство.

существуют функции ψ , удовлетворяющие уравнению (15) во всём пространстве и равные нулю на бесконечности, которые *не равны* нулю всюду.

Решение уравнения Лапласа однозначно определяется источниками потенциала и условием регулярности потенциала на бесконечности. Этих двух условий недостаточно для однозначного определения волновой функции ψ , поскольку уравнение (15) допускает возможность как *сходящихся*, так и *расходящихся* волн. Этот вопрос был исследован Зоммерфельдом¹⁾ в связи с функцией Грина уравнения (15) в бесконечном пространстве. К условиям, аналогичным условиям статической задачи, должно быть добавлено так называемое «условие излучения».

Задача формулируется так. Плотность $g(x, y, z)$ распределения источников задана; пусть все эти источники расположены в пределах области конечных размеров. Тогда ψ определено однозначно, если:

а) во всех точках внутри замкнутой поверхности S (которая, в случае необходимости, может быть разложена на ряд изолированных замкнутых поверхностей) ψ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\psi + k^2\psi = -g; \quad (16)$$

б) на поверхности S функция ψ удовлетворяет однородным граничным условиям типа $\alpha\psi + \beta\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0$, где α и β — постоянные числа или заданные функции точки;

с) ψ исчезает на бесконечности таким образом, что $\lim R\psi$ остаётся ограниченным при $R \rightarrow \infty$; это условие мы снова назовём условием регулярности на бесконечности;

д) ψ удовлетворяет условию излучения

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left(\frac{\partial\psi}{\partial R} - ik\psi \right) = 0, \quad (17)$$

которое означает, что на больших расстояниях от источника поле представляет собой *расходящуюся бегущую волну*. Молчаливо было предположено, что время входит только в виде множителя $\exp(-i\omega t)$.

Смысл условия (17) может быть выяснен применением теоремы Грина к уравнению (16) в области, ограниченной изнутри поверхностью S , а извне S_0 . Тогда, как и в разделах 8.1 и 8.13,

$$\begin{aligned} \psi(x', y', z') = & \frac{1}{4\pi} \int_V g \frac{e^{ikR}}{R} dv + \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{\partial\psi}{\partial n} \frac{e^{ikR}}{R} - \psi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) \right] da + \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \left[\frac{\partial\psi}{\partial n} \frac{e^{ikR}}{R} - \psi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) \right] da. \end{aligned} \quad (18)$$

Первые два члена справа представляют бегущую волну, исходящую от источника. Третий же член выражает сумму всех волн, бегущих внутрь от элементов поверхности S_0 , и должен, следовательно, исчезать при удалении S_0 в бесконечность. Если обозначить этот третий член через U , то мы имеем

$$4\pi U = \int_{S_0} \left(\frac{\partial\psi}{\partial n} - ik\psi \frac{\partial R}{\partial n} \right) \frac{e^{ikR}}{R} da + \int_{S_0} \psi e^{ikR} d\Omega, \quad (19)$$

где $d\Omega$ — элемент телесного угла. Второй интеграл в (19) должен быть распространён по конечной области 4π и при $R \rightarrow \infty$ исчезает, если ψ регулярна на бесконечности; как это предположено выше в пункте с).

¹⁾ Sommerfeld, *Jahresber. deut. math. Ver.* 21, 326, 1912.

Для того чтобы U исчезало, достаточно, чтобы

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} - ik\psi \frac{\partial R}{\partial n} \right) = 0. \quad (20)$$

Если на больших расстояниях поверхность S_0 заменить сферой радиуса R , то условие (20) совпадёт с (17)¹⁾.

9.2. Единственность решения. Пусть V будет областью пространства, ограниченной изнутри поверхностью S , а извне — поверхностью S_0 . Поверхность S может быть разложена в случае необходимости на совокупность отдельных замкнутых поверхностей S_i , как это изображено на рис. 18, стр. 104. Тогда область V будет многосвязной (стр. 205), и поверхности S_i будут представлять собой границы различных помещённых в поле инородных тел. Мы предположим на время, что свойства среды в V изотропны, хотя параметры μ , ϵ и σ могут быть произвольными функциями точки. Пусть теперь E_1 , H_1 и E_2 , H_2 будут двумя решениями уравнений поля, которые в момент $t=0$ совпадают во всех точках V . Мы хотим найти минимальное число условий, которые должны быть наложены на компоненты векторов поля на границах S и S_0 для того, чтобы эти два решения оставались тождественными и во все последующие моменты времени $t > 0$.

В силу линейности уравнений поля (ферромагнитные вещества мы из рассмотрения исключаем) разностное поле $E = E_2 - E_1$ и $H = H_2 - H_1$ также будет решением. Не уменьшая общности, мы можем положить, что все источники поля расположены целиком вне области V , поскольку в предыдущей главе было показано, что если заряды и токи заданы, то поле определено однозначно. Или же, если внутри области V источники имеются, то надо считать, что в обоих случаях их распределение и мощность электродвижущих сил одинаковы. Тогда для разностного поля в области V теорема Пойнтинга, стр. 123, даёт

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\epsilon}{2} E^2 + \frac{\mu}{2} H^2 \right) dv + \int_V \frac{1}{\sigma} J^2 dv = - \int_{S+S_0} [E, H] n da. \quad (21)$$

Для того чтобы член в правой части исчезал, достаточно, чтобы либо тангенциальные компоненты E_1 и E_2 , либо тангенциальные компоненты H_1 и H_2 совпадали для всех значений $t > 0$, ибо тогда либо $[n, E] = 0$, либо $[n, H] = 0$ и $[E, H]$ не имеет на границе нормальной компоненты. В этом случае мы имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\epsilon}{2} E^2 + \frac{\mu}{2} H^2 \right) dv = - \int_V \frac{1}{\sigma} J^2 dv. \quad (22)$$

Правая часть всегда меньше нуля или равна нулю. Интеграл слева, выражающий энергию, существенно положителен или равен нулю и исчезает в момент $t=0$. Следовательно, соотношению (22) можно удовлетворить только значениями $E = E_2 - E_1 = 0$, $H = H_2 - H_1 = 0$ для всех $t > 0$; это и требовалось доказать. *Электромагнитное поле в пределах ограниченной области V однозначно определяется для всех моментов времени $t > 0$ начальными значениями электрического и магнитного векторов внутри области V и значениями тангенциальной составляющей электрического (или магнитного) вектора на границе этой области для моментов времени $t \geq 0$.*

При удалении S_0 в бесконечность область V становится неограниченной с внешней стороны. Для того чтобы обеспечить равенство нулю интеграла

¹⁾ Другое доказательство дано в разделе 8.13, стр. 406.

от вектора Пойнтинга по бесконечно удалённой поверхности, необходимо только предположить, что среда обладает некоторой проводимостью, хотя бы очень малой. Если с момента возникновения поля прошёл конечный промежуток времени, то этой трудности мы можем избежать также предположением, что S_0 лежит вне той области, которую поле, распространяющееся с конечной скоростью c , займёт к моменту t . Только что доказанная теорема не учитывает полностью эту конечность скорости распространения электромагнитного поля. Мы установили, что значения E и H в объёме V в момент t однозначно определяются тангенциальными граничными условиями и начальными значениями во всей области V . Физически очевидно, однако, что это больше, чем нам необходимо. Поле распространяется с конечной скоростью, и следовательно, необходимо принимать во внимание только те элементы V , расстояние которых от точки наблюдения $\leq (t - t_0)c$. Классическое доказательство однозначности, данное выше, было в этом смысле разбито Рубиновичем¹⁾.

Теорема применима и к анизотропным телам. В этом случае электрическая и магнитная энергия выражаются в виде дефинитных положительных форм (см. стр. 131), т. е. положительных или равных нулю при всех значениях переменных. В остальном доказательство остаётся без изменений.

Одна сторона теоремы, на первый взгляд, может показаться странной. Мы видели выше, что поле определяется значениями на границе *либо* $[n, E]$, *либо* $[n, H]$, в то время как в задачах, которые мы вскоре рассмотрим, окажется необходимым применить *оба* граничных условия

$$[n, E_2 - E_1] = 0, \quad [n, H_2 - H_1] = 0, \quad (23)$$

где E_2 и E_1 представляют собой значения напряжённости поля по обе стороны границы. Причина кажущегося противоречия заключается, конечно, в том, что $[n, E]$ и $[n, H]$ относятся к тангенциальным компонентам *результатирующего поля* по одну сторону поверхности. Обычно они неизвестны, и цель краевой задачи в том и состоит, чтобы найти их. Уравнения (23) определяют просто изменение векторов поля при переходе через поверхность разрыва и оба вместе позволяют нам аналитически продолжать данное первоначальное поле из одной области в другую. После того как мы определили таким образом полное поле, мы можем утверждать по теореме об однозначности, что иных возможных решений не существует. Если, однако, с одной стороны границы мы имеем среду с бесконечной проводимостью, то значение тангенциальной составляющей полного поля нам известно, так как в этом случае $[n, E] = 0$, и для решения задачи достаточно одного граничного условия.

9.3. Электродинамическое подобие. Ещё со времён Ньютона принцип подобия и теория моделей оказывали большое влияние на развитие прикладной механики. Это справедливо, в частности, в отношении проектирования судов и самолётов, которое в значительной степени направлялось данными, получаемыми из опытов с небольшими моделями в гидродинамических каналах и в аэродинамических трубах. Условия опыта выражаются обычно через некоторые безразмерные величины, как, например, число Рейнольдса. Таким путём результаты единичного опыта над данной моделью могут быть применены к серии объектов подобной формы и отличающихся только по размерам, при условии, что вязкость жидкости и скорость потока изменены так, чтобы число Рейнольдса осталось неизменным.

Аналогичные принципы оказываются полезными и при конструировании электромагнитных аппаратов. Мы напишем прежде всего уравнения поля

¹⁾ Rubinowicz, *Physik. Z.*, 27, 707, 1926.

в безразмерном виде. В однородном изотропном проводнике

$$\operatorname{rot} E + \mu \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{rot} H - \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} - \sigma E = 0. \quad (24)$$

Пусть теперь

$$\begin{aligned} E &= eE, & H &= hH, \\ \varepsilon &= \varepsilon_0 \chi_e, & \mu &= \mu_0 \chi_m, & \sigma &= \sigma_0 s, \\ \text{длина} &= l_0 L, & \text{время} &= t_0 T, \end{aligned} \quad (25)$$

где $E, H, \chi_e, \chi_m, s, L$ и T — безразмерные числа, которыми измеряются переменные поля в системе, в которой единичными величинами являются $e, h, \varepsilon_0, \mu_0, l_0, \sigma_0$ и t_0 . Числа эти удовлетворяют уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} E + \alpha \chi_m \frac{\partial H}{\partial T} &= 0, \\ \operatorname{rot} H - \beta \chi_e \frac{\partial E}{\partial T} - \gamma s E &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

где

$$\alpha = \frac{\mu_0 l_0}{t_0} \frac{h}{e}, \quad \beta = \frac{\varepsilon_0 l_0}{t_0} \frac{e}{h}, \quad \gamma = \sigma_0 l_0 \frac{e}{h} \quad (27)$$

— безразмерные постоянные. Исключая общий множитель e/h , получаем

$$\mu_0 \varepsilon_0 \left(\frac{l_0}{t_0} \right)^2 = \text{const.}, \quad \mu_0 \sigma_0 \frac{l_0^2}{t_0} = \text{const.} \quad (28)$$

Из первого из этих равенств следует, что произведение $\mu_0 \varepsilon_0$ должно иметь размерность, обратную квадрату скорости. Это обстоятельство является, без сомнения, самым существенным в подходе к проблеме единиц и размерностей¹⁾.

Для того чтобы две краевые электромагнитные задачи были подобными, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты $\alpha \chi_m, \beta \chi_e$ и γs были в обеих задачах одинаковы. Возьмём, например, в качестве t_0 период τ поля, а в качестве l_0 — какую-либо длину, характеризующую одно из ряда тел, отличающихся друг от друга только размерами. Так l_0 может быть радиусом системы концентрических сфер или главной осью системы эллипсоидов. Условия подобия требуют, чтобы два характеристических параметра C_1 и C_2

$$\mu \varepsilon \left(\frac{l_0}{\tau} \right)^2 = C_1, \quad \mu \sigma \frac{l_0^2}{\tau} = C_2 \quad (29)$$

были инвариантны при преобразовании масштаба. Предположим, что характеристическая длина l_0 уменьшается вдвое. Тогда обе величины C_1 и C_2 останутся неизменными, если магнитная проницаемость в каждой точке поля учетверится. С практической точки зрения это средство не является удобным, но это — единственный путь, с помощью которого можно воспроизвести состояние, подобное исходному, изменением только одного параметра. Если оставить μ и ε такими, какими они были, то неизменности C_1 можно достигнуть также уменьшением вдвое периода или удвоением частоты, но одно лишь это изменение не сохранит значения C_2 . Для того чтобы вдвое меньшая модель в точности воспроизводила условия, имеющие место при нормальных размерах, необходимо также, чтобы проводимость в каждой точке удвоилась.

Этот принцип может быть иллюстрирован ссылкой на обычный высокочастотный радиогенератор, поддерживающий стоячие электромагнитные

¹⁾ См. разделы 1.8, 4.8 и 4.9.

волны в резонирующей полости с металлическими стенками. Частота колебания существенно определяется размерами полости, в то время как потери зависят преимущественно от проводимости стенок. Если размеры уменьшаются вдвое, то частота примерно удвоится; если проводимость стенок останется при этом неизменной, то вполне возможно, что получившееся в результате *относительное* увеличение потерь перейдёт через критическое значение, так что колебания в приборе половинной величины не возникнут.

ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ НА ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

9.4. Законы Снелля. Пусть две однородные изотропные среды безгранично продолжаются от разделяющей их плоскости S . Единичный вектор $\mathbf{n}$, нормальный к плоскости S , направлен из области $(\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1)$ в область $(\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2)$. Пусть O будет фиксированным началом отсчёта, который для удобства мы расположим на плоскости S . Тогда, если $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведённый из точки O и определяющий положение какой-либо точки области (1) или (2), то плоскость S определится уравнением

$$\mathbf{n}\mathbf{r} = 0. \quad (1)$$

Пусть плоская волна, распространяющаяся в среде (2), падает на S . В соответствии с (27), стр. 243,

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_0 e^{ik_2 \mathbf{n}_0 \mathbf{r} - i\omega t},$$

$$\mathbf{H}_t = \frac{k_2}{\omega \mu_2} [\mathbf{n}_0, \mathbf{E}_t], \quad (2)$$

где $\mathbf{E}_0$ — комплексная амплитуда падающей волны, а $\mathbf{n}_0$ — единичный вектор, который определяет

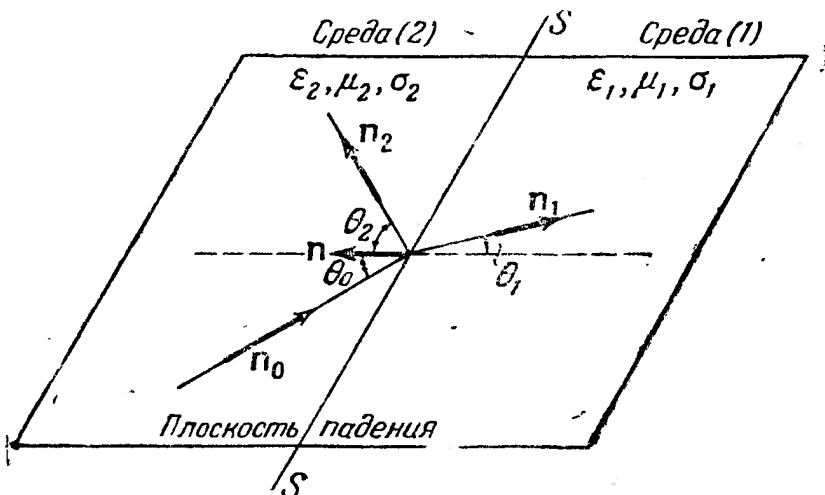


Рис. 89. Отражение и преломление на плоской поверхности S .

направление её распространения¹⁾, как показано на рис. 89. Плоскость, определяемая парой векторов $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}_0$, называется *плоскостью падения*.

Продолжение первичного поля в среду (1) определяется граничными условиями на S . Для того чтобы удовлетворить граничным условиям, мы должны предположить наличие в среде (2) отражённого или вторичного поля. Физически ясно, что первичное поле вызывает колебательное движение свободных и связанных зарядов около плоскости S , которые в свою очередь излучают вторичное поле обратно в среду (2), равно как и вперёд, в среду (1). Мы попробуем предположить, что и отражённая и преломлённая волны являются плоскими, и напомним

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_t &= \mathbf{E}_1 e^{ik_1 \mathbf{n}_1 \mathbf{r} - i\omega t}; & \mathbf{H}_t &= \frac{k_1}{\omega \mu_1} [\mathbf{n}_1, \mathbf{E}_t]; \\ \mathbf{E}_r &= \mathbf{E}_2 e^{ik_2 \mathbf{n}_2 \mathbf{r} - i\omega t}; & \mathbf{H}_r &= \frac{k_2}{\omega \mu_2} [\mathbf{n}_2, \mathbf{E}_r], \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

¹⁾ Очевидно, пока мы рассматриваем данную задачу, было бы более логичным, с точки зрения обозначений, считать падающую волну распространяющейся из среды (1) в среду (2). Вскоре, однако, плоскость S будет заменена замкнутой поверхностью S , охватывающей всё тело. Как мы условились раньше, нормаль $\mathbf{n}$ должна быть направлена наружу из замкнутого объёма, из среды (1) в среду (2). Сделанный выше выбор $\mathbf{n}_0$ облегчит сравнение формул настоящего раздела с формулами дальнейших параграфов.

где единичные векторы $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ определяют направление распространения прошедшей и отражённой волн соответственно, а E_1 и E_2 — комплексные амплитуды; все эти векторы пока ещё не определены. По предположению, E_1 , E_2 и E_0 не зависят от координат, и следовательно, для того чтобы тангенциальные составляющие векторов результирующего поля были непрерывны при переходе через поверхность S , необходимо, чтобы экспоненциальные множители в (2) и (3) тождественно совпадали бы на плоскости $\mathbf{n}\mathbf{r} = 0$. Но

$$\mathbf{r} = (\mathbf{n}\mathbf{r})\mathbf{n} - [\mathbf{n}, [\mathbf{n}, \mathbf{r}]]. \quad (4)$$

Следовательно, в любой точке граничной плоскости $\mathbf{r} = -[\mathbf{n}, [\mathbf{n}, \mathbf{r}]]$. Поэтому

$$\left. \begin{aligned} k_2 \mathbf{n}_0 [\mathbf{n}, [\mathbf{n}, \mathbf{r}]] &= k_2 \mathbf{n}_2 [\mathbf{n}, [\mathbf{n}, \mathbf{r}]], \\ k_2 \mathbf{n}_0 [\mathbf{n}, [\mathbf{n}, \mathbf{r}]] &= k_1 \mathbf{n}_1 [\mathbf{n}, [\mathbf{n}, \mathbf{r}]], \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

или, поскольку $\mathbf{n}_0 [\mathbf{n}, [\mathbf{n}, \mathbf{r}]] = [\mathbf{n}_0, \mathbf{n}] [\mathbf{n}, \mathbf{r}]$, то

$$\left. \begin{aligned} ([\mathbf{n}_0, \mathbf{n}] - [\mathbf{n}_2, \mathbf{n}]) [\mathbf{n}, \mathbf{r}] &= 0, \\ (k_2 [\mathbf{n}_0, \mathbf{n}] - k_1 [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}]) [\mathbf{n}, \mathbf{r}] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Из этих двух соотношений следует, что векторы $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}_0$, $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ компланарны. *Плоскости равной фазы как прошедшей, так и отражённой волн нормальны к плоскости падения.* Из первого соотношения (6) следует также, что

$$\sin \theta_2 = \sin (\pi - \theta_0) = \sin \theta_0, \quad (7)$$

откуда угол падения θ_0 равен углу отражения θ_2 . Из второго соотношения (6) получаем

$$k_2 \sin \theta_0 = k_1 \sin \theta_1. \quad (8)$$

Уравнения (7) и (8) выражают законы Снелля для отражения и преломления.

9.5. Формулы Френеля. Мы используем теперь граничные условия для определения соотношения между амплитудами E_0 , E_1 и E_2 . Во всех точках плоскости S имеем

$$[\mathbf{n}, E_0 + E_2] = [\mathbf{n}, E_1] \quad [\mathbf{n}, H_0 + H_2] = [\mathbf{n}, H_1]. \quad (9)$$

В силу (2) и (3), второе из этих двух уравнений может быть записано через электрические векторы

$$[\mathbf{n}_1 [\mathbf{n}_0, E_0] + [\mathbf{n}_2, E_2]] \frac{k_2}{\mu_2} = [\mathbf{n}, [\mathbf{n}_1, E_1]] \frac{k_1}{\mu_1}. \quad (10)$$

Раскрывая скобки, мы получим члены вида

$$[\mathbf{n}, [\mathbf{n}_0, E_0]] = (\mathbf{n}E_0)\mathbf{n}_0 - (\mathbf{n}\mathbf{n}_0)E_0. \quad (11)$$

Направление первичного вектора E_0 совершенно произвольно, но он всегда может быть разложен на составляющую, нормальную к плоскости падения и, следовательно, касательную к S , и на составляющую, лежащую в плоскости падения (см. раздел 5.4, стр. 248). Исследование значительно упрощается при раздельном рассмотрении этих двух компонент падающей волны.

Случай I. E_0 нормально к плоскости падения.

Тогда

$$\mathbf{n}E_0 = \mathbf{n}_0E_0 = 0.$$

Поскольку среды изотропны, индуцированные электрические векторы прошедшей и отражённой волн должны быть параллельны E_0 и, следовательно,

тоже нормальны к плоскости падения, так что $nE_1 = nE_2 = 0$. Из рис. 89 получаем

$$\left. \begin{aligned} nn_0 &= \cos(\pi - \theta_0) = -\cos \theta_0, \\ nn_1 &= \cos(\pi - \theta_1) = -\cos \theta_1, \\ nn_2 &= \cos \theta_2. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Умножая первое из уравнений (9) векторно на $\mathbf{n}$ и используя (11) и (12), мы находим, что амплитуды должны удовлетворять соотношениям

$$\begin{aligned} E_0 + E_2 &= E_1, \\ \cos \theta_0 E_0 - \cos \theta_2 E_2 &= \frac{\mu_2 k_1}{\mu_1 k_2} \cos \theta_1 E_1. \end{aligned} \quad (13)$$

Относительное направление электрического и магнитного векторов для этого случая показано на рис. 90. Разрешая (13) относительно E_1 и E_2 через амплитуду первичного поля E_0 , получаем

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\mu_1 k_2 (\cos \theta_2 + \cos \theta_0)}{\mu_1 k_2 \cos \theta_2 + \mu_2 k_1 \cos \theta_1} E_0 \\ E_2 &= \frac{\mu_1 k_2 \cos \theta_0 - \mu_2 k_1 \cos \theta_1}{\mu_1 k_2 \cos \theta_2 + \mu_2 k_1 \cos \theta_1} E_0. \end{aligned} \quad (\text{при } nE_0 = 0), \quad (14)$$

Эти соотношения не так просты, как это кажется с первого взгляда, так как если одна из сред [(1) или (2)] является проводящей, то θ_1 будет ком-

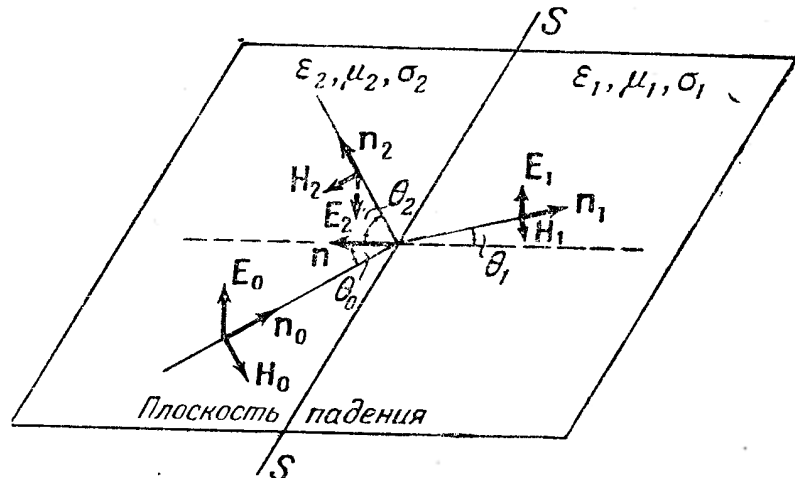


Рис. 90. Падающая волна поляризована нормально к плоскости падения.

плексным; θ_1 может быть комплексным даже в том случае, если обе среды являются диэлектриками. Согласно (7) и (8)

$$\cos \theta_2 = \cos \theta_0, \quad k_1 \cos \theta_1 = \sqrt{k_1^2 - k_2^2 \sin^2 \theta_0}. \quad (15)$$

Углы отражения и преломления могут быть исключены из (14), и мы получим эти соотношения в другом виде:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{2\mu_1 k_2 \cos \theta_0}{\mu_1 k_2 \cos \theta_0 + \mu_2 \sqrt{k_1^2 - k_2^2 \sin^2 \theta_0}} E_0 \\ E_2 &= \frac{\mu_1 k_2 \cos \theta_0 - \mu_2 \sqrt{k_1^2 - k_2^2 \sin^2 \theta_0}}{\mu_1 k_2 \cos \theta_0 + \mu_2 \sqrt{k_1^2 - k_2^2 \sin^2 \theta_0}} E_0. \end{aligned} \quad (\text{при } nE_0 = 0), \quad (16)$$

Комплексные значения коэффициентов при E_0 означают, что сами амплитуды E_1 и E_2 комплексны и что прошедшая и отражённая волны отличаются по фазе от падающей волны.

Случай II. E_0 лежит в плоскости падения. В этом случае нормальны к плоскости падения и параллельны S магнитные векторы

$$nH_0 = nH_1 = nH_2.$$

Из (2) и (3) мы имеем

$$\left. \begin{aligned} E_0 &= -\frac{\omega\mu_2}{k_2} [n_0, H_0], & E_1 &= -\frac{\omega\mu_1}{k_1} [n_1, H_1], \\ E_2 &= -\frac{\omega\mu_2}{k_2} [n_2, H_2], \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

что, после подстановки в (9), даёт следующие условия на границе:

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta_0 H_0 - \cos \theta_2 H_2 &= \frac{\mu_1 k_2}{\mu_2 k_1} \cos \theta_1 H_1, \\ H_0 + H_2 &= H_1. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Относительное расположение электрического и магнитного векторов для этого случая показано на рис. 91. Решение соотношений (18) даёт

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= \frac{\mu_2 k_1 (\cos \theta_2 + \cos \theta_0)}{\mu_2 k_1 \cos \theta_2 + \mu_1 k_2 \cos \theta_1} H_0 \\ H_2 &= \frac{\mu_2 k_1 \cos \theta_0 - \mu_1 k_2 \cos \theta_1}{\mu_2 k_1 \cos \theta_0 + \mu_1 k_2 \cos \theta_1} H_0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{при } nH_0 = 0), \quad (19)$$

или по исключении θ_1 и θ_2 с помощью (15):

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= \frac{2\mu_2 k_1^2 \cos \theta_0}{\mu_2 k_1^2 \cos \theta_0 + \mu_1 k_2 \sqrt{k_1^2 - k_2^2 \sin^2 \theta_0}} H_0 \\ H_2 &= \frac{\mu_2 k_1^2 \cos \theta_0 - \mu_1 k_2 \sqrt{k_1^2 - k_2^2 \sin^2 \theta_0}}{\mu_2 k_1^2 \cos \theta_0 + \mu_1 k_2 \sqrt{k_1^2 - k_2^2 \sin^2 \theta_0}} H_0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{при } nH_0 = 0), \quad (20)$$

Если падение нормальное, то $\theta_0 = 0$, и эти два случая ничем не отличаются друг от друга, а выражения для амплитуд прошедшей и отражённой волн сводятся тогда к та-

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \frac{2\mu_1 k_2}{\mu_1 k_2 + \mu_2 k_1} E_0, \\ E_2 &= \frac{\mu_1 k_2 - \mu_2 k_1}{\mu_1 k_2 + \mu_2 k_1} E_0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Соотношения (14) и (19) были выведены впервые в несколько менее общем виде Френелем в 1823 г. из динамических свойств гипотетического упругого эфира.

9.6. Диэлектрические среды. Мы рассмотрим сначала случай, когда обе проводимости σ_1 и σ_2 равны нулю, т. е. обе среды идеально прозрачны. Магнитные проницаемости исчезающе мало отличаются от μ_0 , и закон

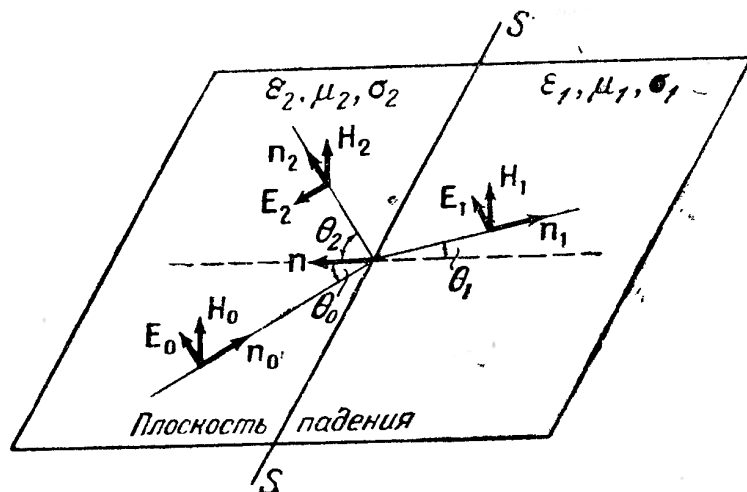


Рис. 91. Падающая волна поляризована параллельно плоскости падения.

Снелля может быть записан в виде

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_0} = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \frac{v_1}{v_2} = n_{12}, \quad (22)$$

где v_1 и v_2 — фазовые скорости, а n_{12} — *относительный* показатель преломления для этих двух сред. Если $\epsilon_1 > \epsilon_2$, то $n_{12} < 1$, и каждому углу падения θ_0 соответствует действительный угол преломления θ_1 . Если, однако, $\epsilon_1 < \epsilon_2$, как, например, в случае волны, выходящей из жидкого или твёрдого диэлектрика в воздух, то тогда θ_1 действительно только для тех значений θ_0 , для которых $n_{12} \sin \theta_0 \leq 1$. При $n_{12} \sin \theta_0 > 1$ возникает явление *полного отражения*; мы исключим на время этот случай и рассмотрим формулы Френеля для действительных углов от 0 до $\pi/2$.

При E , нормальном к плоскости падения, мы получаем из (14)

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \frac{2 \cos \theta_0 \sin \theta_1}{\sin (\theta_1 + \theta_0)} E_0 \\ E_2 &= \frac{\sin (\theta_1 - \theta_0)}{\sin (\theta_1 + \theta_0)} E_0, \end{aligned} \right\} (nE_0 = 0), \quad (23)$$

а для компонент E , лежащих в плоскости падения, получаем из (19)

$$\left. \begin{aligned} [n_1, E_1] &= \frac{2 \cos \theta_0 \sin \theta_1}{\sin (\theta_0 + \theta_1) \cos (\theta_0 - \theta_1)} [n_0, E_0] \\ [n_2, E_2] &= \frac{\operatorname{tg} (\theta_0 - \theta_1)}{\operatorname{tg} (\theta_0 + \theta_1)} [n_0, E_0]. \end{aligned} \right\} (nH_0 = 0), \quad (24)$$

Поскольку коэффициенты при E_0 в (23) и (24) действительны, отражённая и преломлённая волны либо совпадают по фазе с падающей волной, либо сдвинуты на 180° . Очевидно, фаза прошедшей волны в обоих случаях совпадает с фазой падающей. Фаза отражённой волны зависит, однако, от относительной величины θ_0 и θ_1 . Так, если $\epsilon_1 > \epsilon_2$, то $\theta_1 < \theta_0$ и E_2 в (23) имеет направление, противоположное E_0 , т. е. отличается по фазе на 180° . При тех же условиях $\operatorname{tg} (\theta_0 - \theta_1)$ положителен, но знаменатель $\operatorname{tg} (\theta_0 + \theta_1)$ становится отрицательным при $\theta_0 + \theta_1 > \frac{\pi}{2}$, и фаза соответственно скачком меняется.

Средний поток энергии даётся действительной частью комплексного вектора Пойнтинга. В оптике эта величина обычно называется «интенсивностью» света, но этот термин является двусмысленным, так как он применяется также и к амплитуде поля¹⁾. В данном случае

$$\left. \begin{aligned} \bar{S}_i &= \frac{1}{2} [E_i, H_i^*] = \frac{V_{\epsilon_2}}{2} [E_0 [n_0, E_0]] = \frac{V_{\epsilon_2}}{2} E_0^2 n_0, \\ \bar{S}_t &= \frac{V_{\epsilon_1}}{2} E_1^2 n_1, \quad \bar{S}_r = \frac{V_{\epsilon_2}}{2} E_2^2 n_2. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Первичная энергия, падающая за секунду на *единицу* поверхности границы между диэлектриками, равна не вектору $\bar{S}_i$, а лишь нормальной компоненте этого вектора, т. е. $n\bar{S}_i = -\frac{V_{\epsilon_2}}{2} E_0^2 \cos \theta_0$. Аналогично количество энергии, уходящей с единицы площади границы благодаря отражению и преломлению, равно

$$n\bar{S}_r = \frac{V_{\epsilon_2}}{2} E_2^2 \cos \theta_0, \quad n\bar{S}_t = -\frac{V_{\epsilon_1}}{2} E_1^2 \cos \theta_1. \quad (26)$$

¹⁾ Последнее замечание не касается русской терминологии. По-английски интенсивность света — intensity of light, а напряжённость поля — field intensity. Прим. ред.

Согласно закону сохранения энергии, нормальная компонента потока энергии при переходе через границу должна быть непрерывна:

$$n(\bar{S}_i + \bar{S}_r) = n\bar{S}_t, \quad (27)$$

или

$$\sqrt{\epsilon_2} E_0^2 \cos \theta_0 = \sqrt{\epsilon_1} E_1^2 \cos \theta_1 + \sqrt{\epsilon_2} E_2^2 \cos \theta_0. \quad (28)$$

Легко установить, что формулы Френеля (23) и (24) удовлетворяют этому условию. Коэффициенты отражения и прохождения определяются отношениями

$$R = \frac{n\bar{S}_r}{n\bar{S}_i} = \frac{E_2^2}{E_0^2}, \quad T = \frac{n\bar{S}_t}{n\bar{S}_i} = \sqrt{\frac{\epsilon_1 \cos \theta_1}{\epsilon_2 \cos \theta_2}} \frac{E_1^2}{E_0^2}, \quad (29)$$

$$R + T = 1.$$

Если E_0 нормально к плоскости падения, то эти коэффициенты равны

$$R_{\perp} = \frac{\sin^2(\theta_1 - \theta_0)}{\sin^2(\theta_1 + \theta_0)}, \quad T_{\perp} = \frac{\sin 2\theta_0 \sin 2\theta_1}{\sin^2(\theta_1 + \theta_0)}, \quad (30)$$

если же E_0 лежит в плоскости падения, то

$$R_{\parallel} = \frac{\operatorname{tg}^2(\theta_0 - \theta_1)}{\operatorname{tg}^2(\theta_0 + \theta_1)}, \quad T_{\parallel} = \frac{\sin 2\theta_0 \sin 2\theta_1}{\sin^2(\theta_0 + \theta_1) \cos^2(\theta_0 - \theta_1)}. \quad (31)$$

Если падение нормальное, то $\theta_0 = \theta_1 = 0$, и из (21) и (22) следует, что

$$\left. \begin{aligned} R &= \left(\frac{\sqrt{\epsilon_2} - \sqrt{\epsilon_1}}{\sqrt{\epsilon_2} + \sqrt{\epsilon_1}} \right)^2 = \left(\frac{n_{12} - 1}{n_{12} + 1} \right)^2, \\ T &= \frac{4\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}}{(\sqrt{\epsilon_2} + \sqrt{\epsilon_1})^2} = \frac{4n_{12}}{(n_{12} + 1)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Коэффициент отражения равен нулю только в одном случае. При $\theta_0 + \theta_1 \rightarrow \pi/2$ имеем $\operatorname{tg}(\theta_0 + \theta_1) \rightarrow \infty$ и тогда $R_{\parallel} \rightarrow 0$. Отражённый и преломлённый лучи при этом нормальны друг к другу ($n_1 n_2 = 0$) и $\sin \theta_1 = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right) = \cos \theta_0$. Из (22) следует, что

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} = n_{21}. \quad (33)$$

Угол, удовлетворяющий условию (33), известен под названием *угла полной поляризации* или *угла Брюстера*. Как мы видели, волна, падающая на плоскую поверхность, может быть разложена на две составляющие — одну, поляризованную нормально, и другую, поляризованную параллельно плоскости падения. Коэффициенты отражения для этих двух типов компонент различны, и следовательно, поляризация отражённой волны зависит от угла падения. В частности, если падение происходит под углом Брюстера, то отражённая волна полностью поляризована в направлении, нормальном плоскости падения. В оптике иногда используют это явление для получения поляризованного света из естественного, хотя практически этот метод менее эффективен, чем методы, основанные на применении двоякопреломляющих призм.

Оптические показатели преломления по отношению к воздуху обычно порядка $n_{21} = 1,5$; при радиочастотах они могут быть во много раз больше, с чем связано и соответствующее увеличение угла полной поляризации. В случае воды, например, n_{21} увеличивается примерно от 1,33 до 9 при радиочастотах, а угол полной поляризации — от 53° до $84^\circ,6$, что уже близко к скользящему падению. Нерегулярность радиопередач над водными

пространствами в некоторых случаях может быть, без сомнения, приписана этому явлению. Заметим также, что при угле полной поляризации $T_{\parallel}$ равняется единице и что это единственный случай, когда вся энергия первичной волны может войти во вторую среду без потерь на отражение на границе.

9.7. Полное отражение. Мы вернёмся теперь к случаю, исключённому нами в разделе 9.6; пусть волна переходит из среды (2) в среду (1), показатель преломления которой меньше, чем показатель преломления среды (2).

Формулы раздела 9.6 справедливы при любом относительном значении ϵ_1 и ϵ_2 , но если θ_0 таково, что

$$n_{12} \sin \theta_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \sin \theta_0 > 1,$$

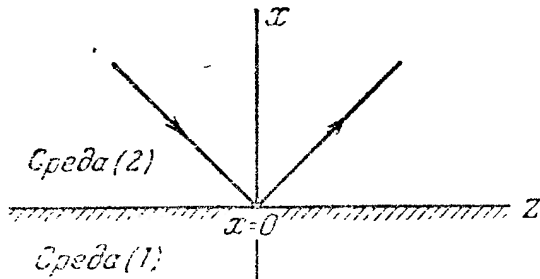


Рис. 92. Полное отражение от поверхности, совпадающей с плоскостью уз.

то им можно удовлетворить только комплексными значениями θ_1 . Физически комплексный угол преломления означает скачок фазы и появление затухающего множителя.

Итак, предположим, что $\sin \theta_1 > 1$. Косинус тогда будет чисто мнимым:

$$\cos \theta_1 = \frac{i}{\sqrt{\epsilon_1}} \sqrt{\epsilon_2 \sin^2 \theta_0 - \epsilon_1} = i n_{12} \sqrt{\sin^2 \theta_0 - n_{21}^2}. \quad (34)$$

Корень имеет два значения, выбор между которыми определяется условием, чтобы поле нигде не становилось бесконечным. Для того чтобы немного упростить дело, предположим, что отражающая поверхность S совпадает с плоскостью $x=0$, как показано на рис. 92. Все точки среды (1) соответствуют отрицательным значениям x . Фаза прошедшей волны будет, следовательно,

$$k_1 n_1 \mathbf{r} = \omega \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} (-x \cos \theta_1 + z \sin \theta_1) = \omega \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} (-ix \sqrt{\sin^2 \theta_0 - n_{21}^2} + z \sin \theta_0), \quad (35)$$

где предположено, что $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$, а напряжённость поля прошедшей волны будет

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_1 e^{\beta_1 x + i z z - i \omega t} \quad (x < 0), \quad (36)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \omega \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} \sin \theta_0, & \omega \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} &= \frac{\omega}{v_2} = \frac{2\pi}{\lambda_2}, \\ \beta_1 &= \omega \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} \sqrt{\sin^2 \theta_0 - n_{21}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Поле, определённое соотношением (36), экспоненциально затухает при $x \rightarrow -\infty$, чем и оправдывается выбор положительного знака в (34).

Амплитуды отражённого и прошедшего поля определяются далее из формул Френеля после исключения θ_1 . Из (14) мы получаем

$$\left. \begin{aligned} E_{1\perp} &= \frac{2 \cos \theta_0}{\cos \theta_0 + i \sqrt{\sin^2 \theta_0 - n_{21}^2}} E_{0\perp}, \\ E_{2\perp} &= \frac{\cos \theta_0 - i \sqrt{\sin^2 \theta_0 - n_{21}^2}}{\cos \theta_0 + i \sqrt{\sin^2 \theta_0 - n_{21}^2}} E_{0\perp}, \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

а из (19) и (3) для случая поляризации в плоскости падения

$$\left. \begin{aligned} [n_1, E_{1\parallel}] &= \frac{2 n_{21} \cos \theta_0}{n_{21}^2 \cos \theta_0 + i \sqrt{\sin^2 \theta_0 - n_{21}^2}} [n_0, E_{0\parallel}], \\ [n_2, E_{2\parallel}] &= \frac{n_{21}^2 \cos \theta_0 - i \sqrt{\sin^2 \theta_0 - n_{21}^2}}{n_{21}^2 \cos \theta_0 + i \sqrt{\sin^2 \theta_0 - n_{21}^2}} [n_0, E_{0\parallel}]. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Поскольку коэффициенты при E_0 комплексны, фазы прошедшей и отражённой волн, очевидно, уже не совпадают у поверхности с фазой падающей волны. Коэффициент отражения, согласно (29), равен $R = E_2 E_2^* / E_0^2$, и из (38) и (39) сразу же следует, что

$$R_{\perp} = R_{\parallel} = 1, \quad T_{\perp} = T_{\parallel} = 0. \quad (40)$$

Интенсивность потока энергии в отражённой волне в точности равна интенсивности падающей волны; таким образом, *поток энергии в среду с меньшим показателем преломления в среднем равен нулю*. Однако *напряжённость поля* в среде (1) вовсе не равна нулю. В действительности мгновенная нормальная компонента потока энергии через поверхность существует, но среднее её значение по времени равно нулю; среднее же значение потока энергии в среде (1), параллельного её поверхности (т. е. в направлении оси z), нулю не равно. Эта последняя компонента не затухает в направлении распространения, но очень быстро спадает по мере увеличения расстояния от поверхности S благодаря множителю $\exp \beta_1 x$. Поверхностями постоянной фазы в прошедшей волне являются плоскости $z = \text{const.}$, которые нормальны к поверхностям постоянной амплитуды $x = \text{const.}$ Ясно, что $E_{\parallel}$ и $H_{\parallel}$ имеют составляющие вдоль оси z , т. е. вдоль направления распространения в среде (1). В случае полного отражения возбуждение в среде (1) представляет собой *непоперечную волну* (которая может быть поперечно-электрической или поперечно-магнитной, стр. 310—311), локализованную в непосредственной близости поверхности раздела.

Проведённый выше анализ не даёт нам ключа к тому, как энергия первоначально вошла в среду (1), так как он основан на предположениях о стационарности процесса и о бесконечной протяжённости, разделяющей диэлектрики поверхности и волновых фронтов. Фактически, падающая волна ограничена как во времени, так и в пространстве. Полное отражение светового луча с конечным сечением было разобрано Пихтом ¹⁾, который показал, что средний поток энергии в направлении, нормальном к границе, в этом случае строго нулю не равен. Всякое изменение, влекущее за собой колебание потока энергии в прошедшей волне, нарушает полноту отражения.

Рисунки, показывающие расположение магнитных силовых линий и линий потока энергии при полном отражении, были опубликованы Эйхенвальдом ²⁾, Шефером ³⁾ и Гроссом ⁴⁾.

Рассмотрим, наконец, относительные сдвиги фазы отражённых волн. Напишем (38) и (39) в виде

$$\left. \begin{aligned} E_{2\perp} &= e^{-i\delta_{\perp}} E_{0\perp}, \\ E_{2\parallel} &= e^{-i\delta_{\parallel}} E_{0\parallel}, \\ |e^{-i\delta_{\perp}}| &= |e^{-i\delta_{\parallel}}| = 1. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Тогда, поскольку

$$\frac{a - ib}{a + ib} = e^{-i\delta}, \quad \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \frac{b}{a}, \quad (42)$$

¹⁾ Picht, *Ann. Physik* 3, 433, 1929; см. также Noether, *ibid.* 11, 141, 1931.

²⁾ А. Эйхенвальд, О движении энергии при полном внутреннем отражении. Изв. имп. моск. инж. уч., ч. 2, вып. 2, 1908. *Прим. ред.*

³⁾ См. Шефер, Теоретическая физика, т. III, ч. 2, Оптика, § 68. *Прим. ред.*

⁴⁾ Schaefer and Gross, Untersuchungen über die Totalreflexion, *Ann. Physik.* 32, 648, 1910.

мы имеем

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\delta_{\perp}}{2} &= \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_0 - n_{21}^2}}{\cos \theta_0}, \\ \operatorname{tg} \frac{\delta_{\parallel}}{2} &= \frac{\sqrt{\sin^2 \theta_0 - n_{21}^2}}{n_{21}^2 \cos \theta_0}. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Предположим, что падающая волна линейно поляризована в направлении, которое не является ни нормальным, ни касательным к плоскости падения. Мы разложим её поэтому на соответствующие компоненты и найдём тогда, что получающаяся в результате отражения волна образуется в результате сложения двух гармонических колебаний, происходящих под прямым углом друг к другу со сдвигом фаз на

$$\delta = \delta_{\parallel} - \delta_{\perp}. \quad (44)$$

Отражённая волна эллиптически поляризована, так как, согласно (43), относительный сдвиг фаз в общем случае не равен нулю:

$$\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\delta_{\parallel}}{2} - \operatorname{tg} \frac{\delta_{\perp}}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\delta_{\parallel}}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\delta_{\perp}}{2}} = \frac{\cos \theta_0 \sqrt{\sin^2 \theta_0 - n_{21}^2}}{\sin^2 \theta_0}. \quad (45)$$

Оба скачка фазы $\delta_{\perp}$ и $\delta_{\parallel}$ исчезают при падении под углом полной поляризации $\theta_0 = \arcsin n_{21}$, а их разность равна нулю также и при скользющем падении, $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$. Между этими пределами относительный сдвиг фаз δ достигает максимума; соответствующий угол может быть получен дифференцированием (45) по θ_0 и приравниванием производной нулю. Максимум получается при

$$\sin^2 \theta_0 = \frac{2n_{21}^2}{1 + n_{21}^2}, \quad (46)$$

что, в результате подстановки в (45), даёт

$$\operatorname{tg} \frac{\delta_{\max}}{2} = \frac{1 - n_{21}^2}{2n_{21}}. \quad (47)$$

Это свойство отражённых волн, имеющих место при полном отражении, было использовано Френелем для получения света, поляризованного по кругу. Для этого прежде всего необходимо, чтобы падающая волна была плоско поляризована под углом в 45° к нормали плоскости падения. При этом амплитуды $E_{2\perp}$ и $E_{2\parallel}$ равны по величине. Относительный показатель преломления n_{21} и угол падения θ_0 должны быть затем подобраны так, чтобы $\delta = \frac{\pi}{2}$ или $\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = 1$. Согласно (47), это условие может быть выполнено только при $1 - n_{21}^2 \geq 2n_{21}$, т. е. $n_{21} < 0,414$ или $n_{12} > 2,41$. Минимальное требуемое значение показателя преломления оказывается больше, чем у какого-либо обычного прозрачного вещества в области видимого спектра. Для того чтобы обойти эту трудность, Френель заставил луч света испытать полное отражение дважды внутри стеклянного параллелепипеда, обладающего соответствующим углом. С другой стороны, в области радиочастот показатель преломления может принимать очень большие значения. Так, например, в случае поверхности, образованной водой и воздухом, $n_{12} = 9$, $n_{21} = 0,11$. Условие $\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = 1$ удовлетворяется при этом либо при угле

$\theta_0 = 6^\circ, 5$, либо при $\theta_0 = 44^\circ, 6$. Последняя цифра была подтверждена измерениями с длиной волны в 250 см^1 .

9.8. Преломление в проводящей среде. При наличии проводимости в той или другой из обеих сред явления отражения и преломления сильно изменяются. Формально закон Снелля и формулы Френеля попрежнему справедливы, но, как и в случае полного отражения, комплексное значение угла θ_1 приводит к совершенно иной физической интерпретации.

Предположим, что среда (2) попрежнему является идеальным диэлектриком, в то время как преломляющая среда (1) будет проводящей. Постоянные распространения определяются соотношениями

$$\left. \begin{aligned} k_1^2 &= \omega^2 \epsilon_1 \mu_1 + i\omega \sigma_1 \mu_1, & k_2^2 &= \omega^2 \epsilon_2 \mu_2, \\ k_1 &= \alpha_1 + i\beta_1, & k_2 &= \alpha_2 = \omega \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}, \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

где α_1 и β_1 выражаются через ϵ_1 , μ_1 и σ_1 формулами (48) и (49), стр. 246. По закону Снелля мы имеем

$$\sin \theta_1 = \frac{k_2}{k_1} \sin \theta_0 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + i\beta_1} (\alpha_2 - i\beta_1) \sin \theta_0, \quad (49)$$

что удобно записать в виде

$$\sin \theta_1 = (a - ib) \sin \theta_0. \quad (50)$$

Комплексный косинус будет тогда

$$\cos \theta_1 = \sqrt{1 - (a^2 - b^2 - 2abi) \sin^2 \theta_0} = \rho e^{i\gamma}. \quad (51)$$

Абсолютная величина ρ и фаза γ получаются путём возведения (51) в квадрат и приравнивания действительной и мнимой частей обеих сторон

$$\left. \begin{aligned} \rho^2 \cos 2\gamma &= \rho^2 (2 \cos^2 \gamma - 1) = 1 - (a^2 - b^2) \sin^2 \theta_0, \\ \rho^2 \sin 2\gamma &= 2\rho^2 \sin \gamma \cos \gamma = 2ab \sin^2 \theta_0. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Фаза, преломлённой волны, как и в (35) и на рис. 92, равна

$$\begin{aligned} k_1 n_1 \mathbf{r} &= (\alpha_1 + i\beta_1) (-x \cos \theta_1 + z \sin \theta_1) = -x\rho (\alpha_1 \cos \gamma - \beta_1 \sin \gamma) - \\ &- i x\rho (\beta_1 \cos \gamma + \alpha_1 \sin \gamma) + z (\alpha\alpha_1 + b\beta_1) \sin \theta_0 + iz (\alpha\beta_1 - b\alpha_1) \sin \theta_0. \end{aligned} \quad (53)$$

Из (49) и (50) легко усмотреть, что $(\alpha\alpha_1 + b\beta_1) \sin \theta_0 = \alpha_2 \sin \theta_0$ и $(\alpha\beta_1 - b\alpha_1) = 0$. Внутри проводящей среды прошедшая волна выражается, следовательно, так:

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_1 e^{px + i(-qx + \alpha_2 z \sin \theta_0 - \omega t)} \quad (x < 0) \quad (54)$$

где

$$\left. \begin{aligned} p &= \rho (\beta_1 \cos \gamma + \alpha_1 \sin \gamma), \\ q &= \rho (\alpha_1 \cos \gamma - \beta_1 \sin \gamma). \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Заметим, что поверхностями равной амплитуды являются плоскости $px = \text{const.}$, а поверхностями равной фазы плоскости $qx + \alpha_2 \sin \theta_0 z = \text{const.}$, и что в общем случае эти два семейства плоскостей не совпадают. В среде (1) поле представляет собой систему неоднородных плоских волн, как и в случае полного отражения. Плоскости равной амплитуды параллельны отражающей поверхности S ; направление же распространения определяется нормалью к поверхностям постоянной фазы. Угол ψ между этой волновой

¹⁾ Bergmann, Die Erzeugung zirkular polarisierter elektrischer Wellen durch einmalige Totalreflexion, *Physik. Z.* 33, 582, 1932.

нормалью и нормалью к плоскости границы (в данном случае — отрицательной осью x) есть действительный угол преломления, определяемый из соотношения

$$-x \cos \psi + z \sin \psi = \text{const.} \quad (56)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \cos \psi &= \frac{q}{\sqrt{q^2 + \alpha_2^2 \sin^2 \theta_0}}, \\ \sin \psi &= \frac{\alpha_2 \sin \theta_0}{\sqrt{q^2 + \alpha_2^2 \sin^2 \theta_0}}. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Соотношение между плоскостями равной амплитуды и поверхностями равной фазы показано на рис. 93.

Изменённый закон Снелля для действительных углов выражается соотношениями (57) или

$$n(\theta_0) = \frac{\sin \theta_0}{\sin \psi} = \frac{1}{\alpha_2} \sqrt{\alpha_2^2 \sin^2 \theta_0 + q^2}. \quad (58)$$

Величина $n(\theta_0)$ представляет собой действительный показатель преломления и зависит от угла падения, в чём видно явное отличие от закона преломления для непоглощающей среды. Фазовая скорость, определяемая как скорость распространения плоскостей равной фазы, будет

$$\begin{aligned} v_1(\theta_0) &= \frac{\omega}{\sqrt{q^2 + \alpha_2^2 \sin^2 \theta_0}} = \\ &= \frac{v_2}{n(\theta_0)}. \end{aligned} \quad (59)$$

Не только эта скорость зависит от угла падения, но, как и в случае полного отражения, имеется также составляющая напряжённости в направлении распространения. Поле внутри проводника не является строго поперечным.

Подсчёт p , q и n через константы среды и угол падения представляет собой элементарную, но скучную задачу. Из (52) и (55), совместно с определением a и b , заключённым в (49), мы получаем следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} p^2(\theta_0) &= \frac{1}{2} \{ -\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \alpha_2^2 \sin^2 \theta_0 + \\ &\quad + \sqrt{4\alpha_1^2 \beta_1^2 + (\alpha_1^2 - \beta_1^2 - \alpha_2^2 \sin^2 \theta_0)^2} \}, \\ q^2(\theta_0) &= \frac{1}{2} \{ \alpha_1^2 - \beta_1^2 - \alpha_2^2 \sin^2 \theta_0 + \\ &\quad + \sqrt{4\alpha_1^2 \beta_1^2 + (\alpha_1^2 - \beta_1^2 - \alpha_2^2 \sin^2 \theta_0)^2} \}, \\ \alpha_2^2 n^2(\theta_0) &= \frac{1}{2} \{ \alpha_1^2 - \beta_1^2 + \alpha_2^2 \sin^2 \theta_0 + \\ &\quad + \sqrt{4\alpha_1^2 \beta_1^2 + (\alpha_1^2 - \beta_1^2 - \alpha_2^2 \sin^2 \theta_0)^2} \}. \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

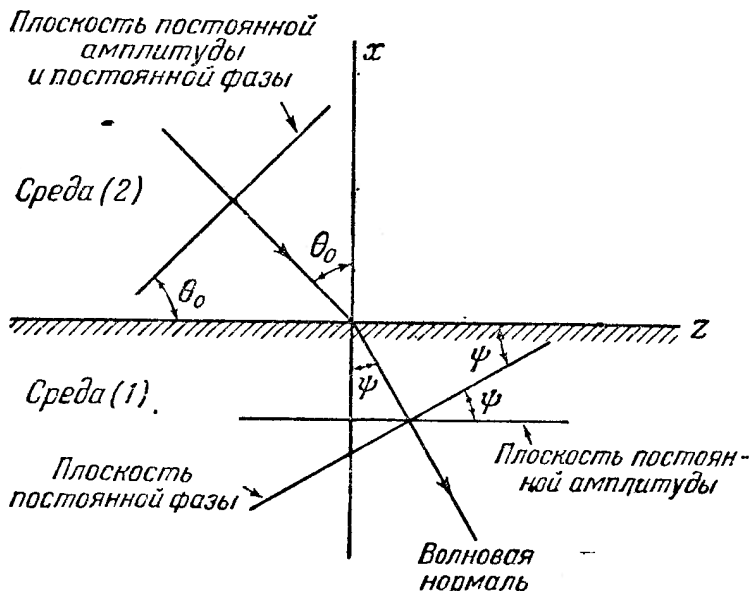


Рис. 93. Преломление на плоской поверхности проводящей среды.

Из этой вспомогательной системы соотношений, известной под названием уравнений Кеттелера, легко вывести, что

$$\left. \begin{aligned} \alpha_2^2 n^2(\theta_0) - p^2(\theta_0) &= \alpha_1^2 - \beta_1^2, \\ p(\theta_0) q(\theta_0) &= \alpha_1 \beta_1, \\ \alpha_2 n(\theta_0) p(\theta_0) &= \frac{\alpha_1 \beta_1}{\cos \psi}. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Общий характер зависимости $n(\theta_0)$ от угла падения и от постоянных α_1 и β_1 , выраженной соотношениями (60), был подтверждён измерениями, проведёнными в видимой части спектра¹⁾. Однако никакой прямой связи между наблюдаемыми значениями α_1 и β_1 при оптических частотах и статическими или квазистатическими значениями параметров ϵ , μ , σ не существует. В действительности α_1 и β_1 при оптических частотах могут принимать такие значения, которые при радиочастотах возможны только для сильно ионизированных сред. Так, например, Ши нашёл, что для меди $\alpha_1/\alpha_2 = 0,48$ — значение, *меньшее единицы*, а $\beta_1/\alpha_2 = 2,61$ вместо весьма большого значения, которого можно было бы ожидать для такого хорошего проводника. В данном случае фазовая скорость в металле больше, чем скорость света. Аномальное поведение этих параметров при оптических частотах приводит к весьма интересным явлениям в области оптики металлов, которые, однако, лежат за пределами, которыми мы ограничились излагаемую здесь теорию²⁾.

Хотя экспериментальные данные, которые могли бы подтвердить уравнения (60) при радиочастотах, по видимому, отсутствуют, имеются все основания, чтобы считать их точными. Мы рассмотрим только тот случай, когда токи проводимости в среде во много раз больше, чем токи смещения. Пусть $\eta = \sigma/\omega\epsilon$. Тогда наше предположение заключается в том, что $\eta_1^2 \gg 1$. Напомним, что при этом условии (стр. 247)

$$\alpha_1 \cong \beta_1 \cong \sqrt{\frac{\omega \mu_1 \sigma_1}{2}}. \quad (62)$$

Из (60) получаем

$$p^2 \cong \frac{\omega^2 \epsilon_2 \mu_2}{2} \left(\sin^2 \theta_0 + \sqrt{\frac{\mu_1^2 \sigma_1^2}{\omega^2 \mu_2^2 \epsilon_2^2} + \sin^4 \theta_0} \right), \quad (63)$$

но так как мы предположили, что η_1^2 гораздо больше, чем максимальное значение $\sin^2 \theta_0$, то мы получаем приближённые формулы

$$p \cong q \cong \sqrt{\frac{\omega \mu_1 \sigma_1}{2}}, \quad n \cong \sqrt{\frac{\mu_1 \sigma_1}{2 \omega \mu_2 \epsilon_2}}, \quad (64)$$

откуда $n \rightarrow \infty$ при $\sigma \rightarrow \infty$ или $\omega \rightarrow 0$. В то же время

$$\sin \psi \cong \sqrt{\frac{2 \omega \mu_2 \epsilon_2}{\mu_1 \sigma_1}} \sin \theta_0, \quad (65)$$

и $\psi \rightarrow 0$. По мере увеличения проводимости или уменьшения частоты плоскости постоянной фазы становятся параллельными плоскостям равной амплитуды, и распространение в проводнике происходит нормально его поверхности.

¹⁾ She a, *Wied. Ann.* 47, 271, 1892; Wilsey, *Phys. Rev.* 8, 391, 1916.

²⁾ Прекрасное изложение вопросов отражения и преломления в оптике дано у König'a в *Handbuch der Physik* в главе, посвящённой электромагнитной теории света, т. XX, стр. 197—253, Springer, 1928.

В случае меди $\sigma_1 = 5,82 \cdot 10 \text{ см}^{-1} \text{ метр}^{-1}$, так что ψ чрезвычайно незначительно отличается от нуля. Каков бы ни был угол падения, прошедшая волна распространяется в направлении нормали. Величина

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_1 \sigma_1}} \quad (66)$$

определяет глубину проникновения. Она является характерной для всех явлений при скин-эффекте и даёт расстояние от поверхности проводника до той точки, в которой амплитуда электрического вектора равна $1/e = 0,3679$ от его величины на поверхности. Отставание по фазе на этом расстоянии равно 180° . Поскольку δ определяет эффективность материала для целей экранирования, представляет интерес порядок её величины. Таблица, приведённая ниже, даёт значения δ для меди при различных частотах. Они получены из приближённой формулы $\delta = 6,6 \cdot \sqrt{\nu} \text{ см}$:

ν колебаний в секунду	δ см
60	0,85
10^3	0,21
10^6	0,007

Глубина проникновения уменьшается с увеличением магнитной проницаемости, но этот эффект обычно перекрывается плохой проводимостью большинства материалов с большой магнитной проницаемостью.

Угол ψ может быть почти равен нулю и для веществ со значительно меньшей проводимостью, чем металлы. В случае морской воды

$$\sigma_1 = 3 \text{ омам}^{-1} \text{ метр}^{-1}, \quad \epsilon_1 = 81 \epsilon_0,$$

откуда находим

$$\eta_{11} \cong \frac{6,7}{\nu} \cdot 10^8, \quad n = \frac{1,64}{\sqrt{\nu}} \cdot 10^5, \quad \delta = \frac{290}{\sqrt{\nu}} \text{ метров}. \quad (67)$$

При $\nu = 10^6$ получаем $n = 164$, $\psi < 0^\circ, 35$ и $\delta = 29 \text{ см}$. Приближение это при $\nu = 10^8$ ещё справедливо, так как в этом случае

$$\eta_{11}^2 = 45 \gg 1; \text{ при этой частоте } n = 16,4, \psi < 3^\circ, 5, \delta = 2,9 \text{ см}.$$

9.9. Отражение от проводящей поверхности. Мы рассмотрим теперь фазу и амплитуду волны, отражённой от плоской поверхности, разделяющей диэлектрик и проводник. По закону Снелля

$$k_1 \cos \theta_1 = \sqrt{k_1^2 - k_2^2 \sin^2 \theta_0}, \quad (68)$$

и из (60) и (61) следует, что

$$\left. \begin{aligned} pq &= \alpha_1 \beta_1, \\ q^2 - p^2 &= \alpha_1^2 - \beta_1^2 - \alpha_2^2 \sin^2 \theta_0, \\ q^2 + p^2 &= \sqrt{4\alpha_1^2 \beta_1^2 + (\alpha_1^2 - \beta_1^2 - \alpha_2^2 \sin^2 \theta_0)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Из этих соотношений легко вывести, что

$$k_1 \cos \theta_1 = \sqrt{q^2 + p^2} e^{\frac{i\varphi}{2}}, \quad (70)$$

где

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{p}{q}, \quad \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{q}{\sqrt{q^2 + p^2}}, \quad \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{p}{\sqrt{q^2 + p^2}}. \quad (71)$$

Подставляя (70) в формулу Френеля (14) для отражённой компоненты электрического вектора, поляризованной нормально к плоскости падения, получаем

$$E_{2\perp} = \frac{\mu_1 \alpha_2 \cos \theta_0 - \mu_2 \sqrt{q^2 + p^2} e^{\frac{i\varphi}{2}}}{\mu_1 \alpha_2 \cos \theta_0 + \mu_2 \sqrt{q^2 + p^2} e^{\frac{i\varphi}{2}}} E_{0\perp}. \quad (72)$$

Для того чтобы получить амплитуду и фазу, надо привести дробь к виду

$$E_{2\perp} = \rho_{\perp} e^{-i\delta_{\perp}} E_{0\perp}, \quad (73)$$

и в результате вычисления мы найдём, что

$$\left. \begin{aligned} \rho_{\perp}^2 &= \frac{(\mu_2 q - \mu_1 \alpha_2 \cos \theta_0)^2 + \mu_2^2 p^2}{(\mu_2 q + \mu_1 \alpha_2 \cos \theta_0)^2 + \mu_2^2 p^2}, \\ \operatorname{tg} \delta_{\perp} &= \frac{2\mu_1 \mu_2 \alpha_2 p \cos \theta_0}{\mu_1^2 \alpha_2^2 \cos^2 \theta_0 - \mu_2^2 (q^2 + p^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

Таким же путём мы найдём и компоненту, поляризованную в другом направлении, хотя подсчёт в этом случае более длинен. Согласно (20), вторая формула Френеля будет

$$H_{2\perp} = \frac{\mu_2 \cos \theta_0 (\alpha_1^2 - \beta_1^2 + 2\alpha_1 \beta_1 i) - \mu_1 \alpha_2 \sqrt{q^2 + p^2} e^{\frac{i\varphi}{2}}}{\mu_2 \cos \theta_0 (\alpha_1^2 - \beta_1^2 + 2\alpha_1 \beta_1 i) + \mu_1 \alpha_2 \sqrt{q^2 + p^2} e^{\frac{i\varphi}{2}}} H_{0\perp}. \quad (75)$$

Длинную процедуру приведения этого комплексного выражения к тригонометрическому виду можно обойти и получить результат сразу же. Вводя сокращение

$$[n_2, E_{2\parallel}] = \rho_{\parallel} e^{-i\delta_{\parallel}} [n_0, E_{0\parallel}], \quad (76)$$

находим

$$\left. \begin{aligned} \rho_{\parallel}^2 &= \frac{\{\mu_2 (\alpha_1^2 - \beta_1^2) \cos \theta_0 - \mu_1 \alpha_2 q\}^2 + (2\mu_2 \alpha_1 \beta_1 \cos \theta_0 - \mu_1 \alpha_2 p)^2}{\{\mu_2 (\alpha_1^2 - \beta_1^2) \cos \theta_0 + \mu_1 \alpha_2 q\}^2 + (2\mu_2 \alpha_1 \beta_1 \cos \theta_0 + \mu_1 \alpha_2 p)^2}, \\ \operatorname{tg} \delta_{\parallel} &= \frac{2\mu_1 \mu_2 \alpha_2 p (q^2 + p^2 - \alpha_2^2 \sin^2 \theta_0) \cos \theta_0}{\mu_1^2 \alpha_2^2 (q^2 + p^2) - \mu_2^2 (\alpha_1^2 + \beta_1^2)^2 \cos^2 \theta_0}. \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Если проводник немагнитный, так что $\mu_1 = \mu_2$, то выражение для амплитуды $\rho_{\parallel}$ переходит в форму, выведенную Пфейфером¹⁾ в его работах по оптике:

$$\rho_{\parallel}^2 = \frac{(q - \alpha_2 \cos \theta_0)^2 + p^2}{(q + \alpha_2 \cos \theta_0)^2 + p^2} \cdot \frac{(q - \alpha_2 \sin \theta_0 \operatorname{tg} \theta_0)^2 + p^2}{(q + \alpha_2 \sin \theta_0 \operatorname{tg} \theta_0)^2 + p^2}. \quad (78)$$

Как и в случае полного отражения, две компоненты падающего излучения, поляризованные в различных направлениях, отражаются по разным законам. Следовательно, *линейно поляризованная волна, направление поляризации которой не совпадает ни с плоскостью падения, ни с нормалью к ней, будет после отражения поляризована эллиптически*. Характер поляризации определяется отношением

$$\frac{\rho_{\parallel}}{\rho_{\perp}} e^{i(\delta_{\parallel} - \delta_{\perp})} = \rho e^{i\delta}. \quad (79)$$

¹⁾ Pfeiffer, Diss. Giessen, 1912, König, *loc. cit.*, стр. 242; см. также Wilsey, *loc. cit.*, стр. 393.

Выражения для ρ и δ приводятся к сравнительно простому виду только в случае немагнитных веществ. Если $\mu_1 = \mu_2$, то, проделав трудоёмкий подсчёт, найдём

$$\left. \begin{aligned} \rho^2 &= \frac{(q - \alpha_2 \sin \theta_0 \operatorname{tg} \theta_0)^2 + p^2}{(q + \alpha_2 \sin \theta_0 \operatorname{tg} \theta_0)^2 + p^2}, \\ \operatorname{tg} \delta &= \frac{2\alpha_2 p \sin \theta_0 \operatorname{tg} \theta_0}{\alpha_2^2 \sin^2 \theta_0 \operatorname{tg}^2 \theta_0 - (q^2 + p^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

Коэффициент отражения мы опять определим как отношение потока энергии падающей волны к потоку энергии отражённой волны. Таким образом

$$R_{\perp} = \rho_{\perp}^2, \quad R_{\parallel} = \rho_{\parallel}^2. \quad (81)$$

В случае нормального падения $R_{\perp} = R_{\parallel} = R$ и

$$R = \frac{(\mu_2 \alpha_1 - \mu_1 \alpha_2)^2 + \mu_2^2 \beta_1^2}{(\mu_2 \alpha_1 + \mu_1 \alpha_2)^2 + \mu_2^2 \beta_1^2}. \quad (82)$$

Степень поляризации обычно измеряется отношением

$$S = \frac{|E_{2\perp}|^2 - |E_{2\parallel}|^2}{|E_{2\perp}|^2 + |E_{2\parallel}|^2} = \frac{1 - \rho^2 g^2}{1 + \rho^2 g^2}, \quad (83)$$

где $g^2 = E_{0\parallel}^2 / E_{0\perp}^2$ — отношение интенсивностей в падающей волне.

Благодаря тому что величины q и p являются функциями как параметров среды, так и угла падения [уравнения (60)], сложность, казалось бы, простейшей задачи об отражении плоской волны от плоской поглощающей поверхности оказывается поистине удивительной. Формулы слишком сложны, чтобы понять их содержание с первого взгляда, и характер явления отражения выясняется только из рассмотрения некоторых предельных случаев. Для теории электричества одним из наиболее важных из них является

Случай I. $\eta_1^2 = \frac{\sigma_1^2}{\omega^2 \epsilon_1^2} \gg 1$. Тогда, как было показано на стр. 443,

$$\alpha_1 \cong \beta_1 \cong q \cong p \cong \sqrt{\frac{\omega \mu_1 \sigma_1}{2}}, \quad (84)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \rho_{\perp}^2 &\cong \frac{\left(1 - \frac{\mu_1 \alpha_2}{\mu_2 \alpha_1} \cos \theta_0\right)^2 + 1}{\left(1 + \frac{\mu_1 \alpha_2}{\mu_2 \alpha_1} \cos \theta_0\right)^2 + 1}, \\ \operatorname{tg} \delta_{\perp} &\cong \frac{\mu_1 \alpha_2}{\mu_2 \alpha_1} \cdot \frac{2 \cos \theta_0}{\left(\frac{\mu_1 \alpha_2}{\mu_2 \alpha_1}\right)^2 \cos^2 \theta_0 - 1}. \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

Так как $\mu_1 / \mu_2 = \mu_1 / \mu_0 = \chi_{m1}$ — относительная магнитная проницаемость проводника, а $\epsilon_2 / \epsilon_0 = \chi_{e1}$ — относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика, мы можем написать

$$x = \frac{\mu_1 \alpha_2}{\mu_2 \alpha_1} = \sqrt{\frac{2\omega \mu_1 \epsilon_2}{\mu_2 \epsilon_1}} = 2,11 \cdot 10^{-4} \sqrt{\frac{\nu \chi_{m1} \chi_{e2}}{c_1}}, \quad (86)$$

где ν — частота. Далее для всех металлических проводников $\mu_1 \alpha_2 / \mu_2 \alpha_1 \ll 1$, и (85) приводится к виду

$$\rho_{\perp}^2 \cong 1 - 2x \cos \theta_0, \quad \operatorname{tg} \delta_{\perp} \cong -2x \cos \theta_0. \quad (87)$$

Это приближение получено применением к (85) формулы бинома и справедливо до тех пор, пока можно пренебречь квадратом $\mu_1\alpha_2/\mu_2x_1$ по сравнению с первой степенью. Аналогично, если поляризация параллельна плоскости падения,

$$\left. \begin{aligned} \rho_{\parallel}^2 &= \frac{2 \cos^2 \theta_0 - 2x \cos \theta_0 + x^2}{2 \cos^2 \theta_0 + 2x \cos \theta_0 + x^2}, \\ \operatorname{tg} \delta_{\parallel} &= \frac{2x \cos \theta_0}{x^2 - 2 \cos^2 \theta_0}. \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

Член с x^2 удержан потому, что при некоторых значениях θ_0 числитель $\rho_{\parallel}^2$ становится очень малым. Этот критический угол является, очевидно, аналогом угла Брюстера, рассмотренного выше. Минимальное значение $\rho_{\parallel}^2$ соответствует углу падения, удовлетворяющему соотношению $\sqrt{2} \cos \theta_0 = x$. Следовательно, если минимум выражен достаточно остро, то значение отношения μ_1/σ_1 может быть определено непосредственно из наблюдения отражательных свойств вещества.

Из полученных результатов ясно, что коэффициент отражения для металлов практически не зависит от угла падения и очень мало отличается от единицы даже для наиболее высоких радиочастот. Так, для границы воздух—медь $\chi_{m1}=1$, $\chi_{e2}=1$, $\sigma_1=5,82 \cdot 10^7$ см⁻¹ метр⁻¹, так что $x=2,77 \cdot 10^{-8} \sqrt{\nu}$. В случае железа проводимость примерно в десять раз меньше, а магнитная проницаемость¹⁾ может быть порядка 10^3 , однако, x попрежнему мало, даже для длин волн в несколько сантиметров. Формула

$$R=1-4,22 \cdot 10^{-4} \sqrt{\frac{\chi_{m1}\chi_{e2}}{\sigma_1}}, \quad (89)$$

к которой приводятся (87) и (88) при нормальном падении, была проверена для инфракрасной области спектра Хагеном и Рубенсом²⁾.

Результаты их измерений приведены в следующей таблице для $\lambda=12 \mu$ и $\lambda=25,5 \mu$, где $1 \mu=10^{-4}$ см.

Металл	1 — R, % при $\lambda=12 \mu$		1 — R, % при $\lambda=25,5 \mu$	
	Измеренное	Вычисленное	Измеренное	Вычисленное
Ag . . .	1,15	1,3	1,13	1,15
Cu . . .	1,6	1,4	1,17	1,27
Al . . .	—	—	1,97	1,60
Au . . .	2,1	1,6	1,56	1,39
Pt . . .	3,5	3,5	2,82	2,96
Ni . . .	4,1	3,6	3,20	3,16
Sn . . .	—	—	3,27	3,23
Hg . . .	—	—	7,66	7,55

Теоретические значения, с которыми сравниваются результаты измерений, подсчитаны на основании электростатических значений проводимости. При длинах волн меньше 12μ отклонения становятся более заметными, а при волнах оптической длины всякое соответствие пропадает. Поведение этих цифр

¹⁾ При ультравысоких частотах магнитная проницаемость может быть намного меньше. Ср. с измерениями, сделанными Glathart, *Phys. Rev.* 55, 833, 1939.

²⁾ Hagen and Rubens, *Ann. Physik* 11, 873, 1903.

в высшей степени многозначительно. Они показывают, что пока мы имеем дело только с металлами, макроскопическая электромагнитная теория справедлива для всех волн, длина которых больше чем примерно 10^{-3} см, т. е. частота меньше примерно $3 \cdot 10^{13}$ колебаний в секунду.

Отражение радиоволн от поверхности моря или земли приводит к результатам иного порядка. Рассмотрим сначала случай поверхности воздух — море, для которой $\kappa_{m1} = \kappa_{e2} = 1$; $\sigma_1 = 3 \text{ ом}^{-1} \text{ метр}^{-1}$ и $\chi = 1,22 \cdot 10^{-4} \sqrt{\nu}$. Поскольку приближения (87) и (88) справедливы только при $\chi \ll 1$, мы ограничены теперь частотами, меньшими 10^6 колебаний в секунду. Возьмём, например, широкоэвещательную частоту в 600 Кц, $\lambda = 500$ м. Тогда $\chi = 0,094$. На

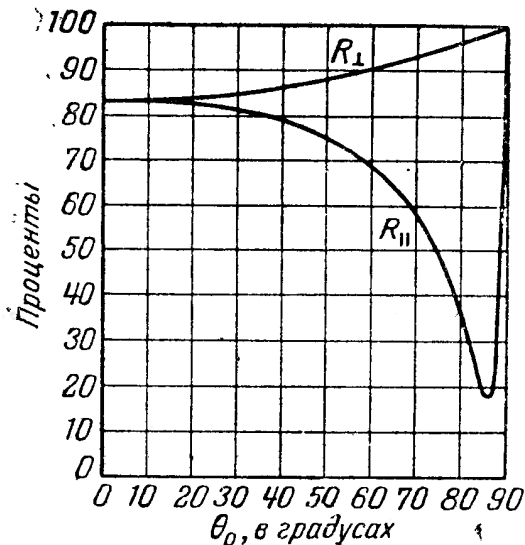


Рис. 94. Коэффициенты отражения плоской радиоволны от поверхности моря.

обычно порядка 10^{-4} и меньше, то приближения (87) и (88) уже непригодны; однако характер явления отражения изменится не очень сильно. Мы должны рассмотреть таким образом

Случай II. $\eta_1^2 = \frac{\sigma_1^2}{\omega^2 \epsilon_1^2} \ll 1$. Согласно (52) и (53), стр. 247

$$\alpha_1 \cong \frac{\omega}{c} \sqrt{\kappa_{e1}}, \quad \beta_1 \cong 188,3 \frac{\sigma_1}{\sqrt{\kappa_{e1}}}. \quad (90)$$

Если частота достаточно велика, то $\alpha_1 \gg \beta_1$, и уравнения (60), приведённые выше, примут вид

$$p^2 \cong 0, \quad q^2 \cong \alpha_1^2 - \alpha_2^2 \sin^2 \theta_0. \quad (91)$$

Поэтому

$$\left. \begin{aligned} r_{\perp} &\cong \frac{(\kappa_{e1} - \kappa_{e2} \sin^2 \theta_0)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{\kappa_{e2}} \cos \theta_0}{(\kappa_{e1} - \kappa_{e2} \sin^2 \theta_0)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\kappa_{e2}} \cos \theta_0}, \\ r_{\parallel} &\cong \frac{\kappa_{e1} \cos \theta_0 - \sqrt{\kappa_{e2}} (\kappa_{e1} - \kappa_{e2} \sin^2 \theta_0)^{\frac{1}{2}}}{\kappa_{e1} \cos \theta_0 + \sqrt{\kappa_{e2}} (\kappa_{e1} - \kappa_{e2} \sin^2 \theta_0)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

рис. 94 нанесены в функции от угла падения значения коэффициентов отражения $R_{\perp}$ и $R_{\parallel}$ для волны, поляризованной нормально и параллельно к плоскости падения. Мы видим, что $R_{\perp} > R_{\parallel}$ и что при $86,2^\circ$ $R_{\parallel}$ достигает своего минимума. Следовательно, если электрический вектор падающей волны линейно поляризован в направлении, не совпадающем ни с плоскостью падения, ни с нормалью к ней, то волна, отражённая от поверхности моря, будет эллиптически поляризована. Кроме того, если антенна передатчика направлена вертикально, то волна будет поляризована в плоскости падения; следовательно, если она встретит морскую поверхность под скользящим углом, то она может почти полностью поглотиться.

Если теперь частота увеличена или же волна падает на поверхность пресной воды или землю, проводимость которых

В этом приближении входят только диэлектрические свойства среды, и формулы (92) тождественны с результатами, полученными в разделе 9.6. Следующий порядок внесёт малые поправки в β_1 ¹⁾.

Возьмём, например, поверхность пресной воды: $\kappa_{e2} = 1$, $\kappa_{e1} = 81$, $\sigma_1 \cong 2 \cdot 10^{-4}$ см⁻¹ метр⁻¹. Тогда

$$\eta_1 = \frac{4,45 \cdot 10^{-4}}{\nu}, \quad \alpha_1 \cong 1,88 \cdot 10^{-7} \nu, \quad \beta_1 \cong 4,18 \cdot 10^{-3}.$$

Приближение (92) справедливо, таким образом, при $\nu > 10^6$. Для почвы и горных пород константы меняются в очень широких пределах, но как типичный случай мы можем взять $\kappa_{e1} = 6$, $\sigma_1 = 10^{-5}$. Тогда

$$\eta_1 = \frac{3 \cdot 10^4}{\nu}, \quad \alpha_1 \cong 5,1 \cdot 10^{-8} \nu, \quad \beta_1 \cong 7,7 \cdot 10^{-4},$$

так что опять-таки (92) справедливо при $\nu > 10^6$. При частотах, больших 10^6 колебаний в секунду, пресная вода, сухая земля и горные породы ведут себя, с точки зрения их отражательных свойств, как диэлектрики. Прошедшая волна, конечно, быстро затухает из-за коэффициента β_1 . Зависимость коэффициентов отражения для этих двух случаев от угла падения показана на рис. 95. Подобные кривые были экспериментально подтверждены Пфаненбергом²⁾.

Хотя в случае металлов формулы и справедливы для частот, заходящих в инфракрасную область, это не имеет места в случае диэлектриков и плохо проводящих веществ. При длине волны порядка нескольких сантиметров большинство диэлектриков обнаруживает заметное увеличение поглощения по причинам иного рода, чем электрическая проводимость. Так, при длине волны в 2,8 см значение β для дистиллированной воды, подсчитанное исходя из электрической проводимости $\sigma = 2 \cdot 10^{-4}$ ом⁻¹ метр⁻¹, равно $4,2 \cdot 10^{-3}$, в то время как измерения³⁾ дают 494 (система MKS, расстояние в метрах!). Этот пример является крайним случаем, соответствующим дипольному резонансу молекул воды, но, очевидно, при подобных обстоятельствах приближение (95) несправедливо. Общие формулы могут быть применены всегда даже в области оптического спектра, при том условии, что взятые значения констант α и β измерены при соответствующей частоте.

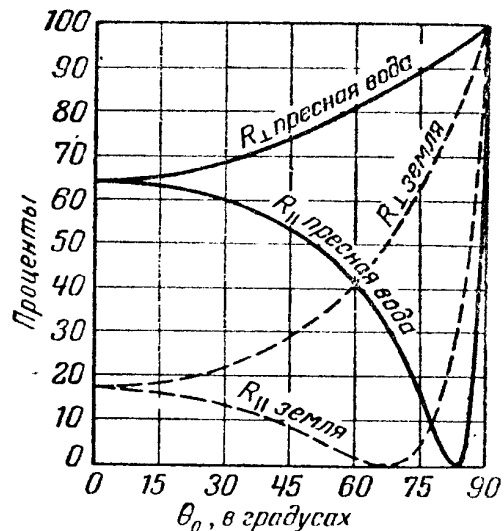


Рис. 95. Коэффициенты отражения плоских радиоволн от поверхности земли и от поверхности пресной воды при частотах, больших чем один мегацикл в секунду.

ПЛОСКИЕ СЛОИ

9.10. Коэффициент отражения и коэффициент прозрачности. Мы рассмотрим только случай нормального падения, имеющий значительный практический интерес. Три произвольные однородные среды, характеризующиеся константами распространения k_1 , k_2 , k_3 , разделены плоскостями, как

1) Обзор различных приближённых формул, применяемых в оптике, дан у Кёнига, *loc. cit.*, стр. 246.

2) Pfannenberger, *Z. Physik* **37**, 758, 1926.

3) Băz, *Physik. Z.* **40**, 394, 1939.

показано на рис. 96. Мы можем рассматривать только абсолютные величины векторов и поэтому для падающей и отражённой волн в среде (1) напомним

$$E_i = E_0 e^{ik_1 z - i\omega t}, \quad H_i = \frac{k_1}{\omega \mu_1} E_i, \quad (1)$$

$$E_r = E_1 e^{-ik_1 z - i\omega t}, \quad H_r = -\frac{k_1}{\omega \mu_1} E_r. \quad (2)$$

Поле внутри слоя (2) должно быть выражено как через положительную, так и через отрицательную волны

$$\left. \begin{aligned} E_m &= (E_2^+ e^{ik_2 z} + E_2^- e^{-ik_2 z}) e^{-i\omega t}, \\ H_m &= \frac{k_2}{\omega \mu_2} (E_2^+ e^{ik_2 z} - E_2^- e^{-ik_2 z}) e^{-i\omega t}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

тогда как прошедшая волна будет

$$E_t = E_3 e^{ik_3 z - i\omega t}, \quad H_t = \frac{k_3}{\omega \mu_3} E_t. \quad (4)$$

Удобно воспользоваться здесь понятием внутреннего импеданса, введённым в разделе 5.6, стр. 251. Для плоской волны в изотропной однородной среде

$$E_j = \pm Z_j H_j, \quad Z_j = \frac{\omega \mu_j}{k_j}. \quad (5)$$

Отношение импедансов мы обозначим через

$$Z_{jk} = \frac{Z_j}{Z_k} = \frac{\mu_j k_k}{\mu_k k_j}, \quad (6)$$

$$Z_{jk} Z_{kj} = 1, \quad Z_{ij} Z_{jk} = Z_{ik}. \quad (7)$$

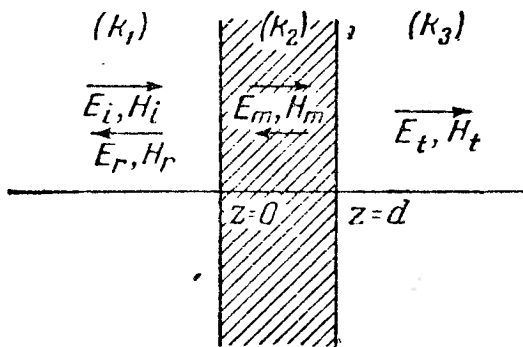


Рис. 96. Отражение и прохождение плоской волны через плоский слой.

Выражая граничные условия через отношения импедансов, мы приходим к четырём соотношениям между пятью амплитудами:

$$\left. \begin{aligned} E_0 + E_1 &= E_2^+ + E_2^-, \\ E_0 - E_1 &= Z_{12} (E_2^+ - E_2^-), \\ E_2^+ e^{ik_2 d} + E_2^- e^{-ik_2 d} &= E_3 e^{ik_3 d}, \\ E_2^+ e^{ik_2 d} - E_2^- e^{-ik_2 d} &= Z_{23} E_3 e^{ik_3 d}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Решая эти уравнения относительно амплитуд отражённой и прошедшей волн, находим

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \frac{(1 - Z_{12})(1 + Z_{23}) + (1 + Z_{12})(1 - Z_{23}) e^{2ik_2 d}}{(1 + Z_{12})(1 + Z_{23}) + (1 - Z_{12})(1 - Z_{23}) e^{2ik_2 d}} E_0, \\ E_3 &= \frac{4e^{-ik_3 d} E_0}{(1 - Z_{12})(1 - Z_{23}) e^{ik_2 d} + (1 + Z_{12})(1 + Z_{23}) e^{-ik_2 d}}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Введём обозначения для комплексных отношений

$$r_{jk} = \frac{1 - Z_{jk}}{1 + Z_{jk}} = \frac{Z_k - Z_j}{Z_k + Z_j} = -r_{kj}. \quad (10)$$

Физический смысл этих отношений станет очевидным, если мы заметим, что

$$r_{jk} = \frac{\mu_k k_j - \mu_j k_k}{\mu_k k_j + \mu_j k_k}, \quad (11)$$

$$|r_{jk}|^2 = \frac{(\mu_k \alpha_j - \mu_j \alpha_k)^2 + (\mu_k \beta_j - \mu_j \beta_k)^2}{(\mu_k \alpha_j + \mu_j \alpha_k)^2 + (\mu_k \beta_j + \mu_j \beta_k)^2} = R_{jk}. \quad (12)$$

Величина R_{jk} является коэффициентом отражения от плоской поверхности, разделяющей две полубесконечные среды при нормальном падении [уравнение (82), стр. 446]; величина r_{jk} представляет собой комплексное отношение амплитуд отражённой и падающей волн. Коэффициент отражения от границы равен нулю, если внутренние импедансы соприкасающихся сред равны.

С помощью величин r_{jk} соотношения (9) преобразуются к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{E_1}{E_0} &= \frac{r_{12} + r_{23} e^{2ik_2 d}}{1 + r_{12} r_{23} e^{2ik_2 d}}, \\ \frac{E_3}{E_0} &= \frac{1}{(1 + Z_{12})(1 + Z_{23})} \cdot \frac{4e^{i(k_2 - k_3)d}}{1 + r_{12} r_{23} e^{2ik_2 d}}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Коэффициент отражения и коэффициент прозрачности слоя равны квадратам абсолютных величин этих отношений. Написав

$$\left. \begin{aligned} Z_{jk} &= \frac{\mu_j}{\mu_k} \sqrt{\frac{\alpha_j^2 + \beta_k^2}{\alpha_k^2 + \beta_j^2}} e^{i\gamma_{jk}}, \\ \operatorname{tg} \gamma_{jk} &= \frac{\alpha_j \beta_k - \alpha_k \beta_j}{\alpha_j \alpha_k + \beta_j \beta_k}, \\ r_{jk} &= |r_{jk}| e^{i\delta_{jk}}, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\operatorname{tg} \delta_{jk} = \frac{2\mu_j \mu_k (\alpha_k \beta_j - \alpha_j \beta_k)}{\mu_k^2 (\alpha_j^2 + \beta_j^2) - \mu_j^2 (\alpha_k^2 + \beta_k^2)}, \quad (15)$$

мы замечаем, что $\gamma_{jk} = -\gamma_{kj}$, а $\delta_{jk} = +\delta_{kj}$. Вводя эти фазовые углы в (13) и умножая затем каждое из этих отношений на сопряжённое ему, мы получаем

$$R = \left| \frac{E_1}{E_0} \right|^2 = \frac{R_{12} + 2\sqrt{R_{12}R_{23}} e^{-2\beta_2 d} \cos(\delta_{23} - \delta_{12} + 2\alpha_2 d) + R_{23} e^{-4\beta_2 d}}{1 + 2\sqrt{R_{12}R_{23}} e^{-2\beta_2 d} \cos(\delta_{12} + \delta_{23} + 2\alpha_2 d) + R_{12}R_{23} e^{-4\beta_2 d}}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} T = \left| \frac{E_3}{E_0} \right|^2 &= \frac{\mu_2^2 \mu_3^2 (\alpha_1^2 + \beta_1^2) (\alpha_2^2 + \beta_2^2)}{[(\mu_2 \alpha_1 + \mu_1 \alpha_2)^2 + (\mu_2 \beta_1 + \mu_1 \beta_2)^2] [(\mu_3 \alpha_2 + \mu_2 \alpha_3)^2 + (\mu_3 \beta_2 + \mu_2 \beta_3)^2]} \times \\ &\times \frac{16e^{-2(\beta_1 - \beta_3)d}}{1 + 2\sqrt{R_{12}R_{23}} e^{-2\beta_2 d} \cos(\delta_{12} + \delta_{23} + 2\alpha_2 d) + R_{12}R_{23} e^{-4\beta_2 d}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Уравнение (17) может быть преобразовано к виду

$$\begin{aligned} T &= \frac{\mu_3}{\mu_1} \frac{\alpha_1^2 + \beta_1^2}{\alpha_1 \alpha_3 + \beta_1 \beta_3} \times \\ &\times \frac{[(1 - R_{12})(1 - R_{23}) - 4\sqrt{R_{12}R_{23}} \sin \delta_{12} \sin \delta_{23}] e^{-2(\beta_1 - \beta_3)d}}{1 + 2\sqrt{R_{12}R_{23}} e^{-2\beta_2 d} \cos(\delta_{12} + \delta_{23} + 2\alpha_2 d) + R_{12}R_{23} e^{-4\beta_2 d}} \end{aligned} \quad (18)$$

применением формул

$$\sqrt{R_{jk}} \sin \delta_{jk} = \frac{2\mu_j \mu_k (\alpha_k \beta_j - \alpha_j \beta_k)}{(\mu_k \alpha_j + \mu_j \alpha_k)^2 + (\mu_k \beta_j + \mu_j \beta_k)^2}, \quad (19)$$

$$1 - R_{jk} = \frac{4\mu_j \mu_k (\alpha_j \alpha_k + \beta_j \beta_k)}{(\mu_k \alpha_j + \mu_j \alpha_k)^2 + (\mu_k \beta_j + \mu_j \beta_k)^2}. \quad (20)$$

9.11. Применение к диэлектрическим средам. Явления интерференции, выражаемые формулами (16) и (18), часто применялись для определения оптических констант веществ в инфракрасной и электрической областях

спектра с таким же успехом, как и в видимой области¹⁾. Для того чтобы физически уяснить поведение коэффициента отражения при изменении толщины слоя, мы рассмотрим простой случай тонкого диэлектрического слоя, разделяющего два полубесконечных диэлектрика, как показано на рис. 96. Диэлектрические проницаемости трёх сред равны $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ и, следовательно, $\delta_{12} = \delta_{23} = 0$. Тогда

$$R_{jk} = \left(\frac{\alpha_j - \alpha_k}{\alpha_j + \alpha_k} \right)^2 = \left(\frac{V_{\epsilon_j} - V_{\epsilon_k}}{V_{\epsilon_j} + V_{\epsilon_k}} \right)^2 = r_{jk}^2, \quad (21)$$

$$R = \frac{(r_{12} + r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23} \sin^2 \alpha_2 d}{(1 + r_{12}r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23} \sin^2 \alpha_2 d}, \quad (22)$$

причём $\alpha_2 = 2\pi/\lambda_2$, где λ_2 — длина волны в слое. Если величина ϵ_2 лежит между ϵ_1 и ϵ_3 , то произведение $r_{12}r_{23}$ положительно и R — осциллирующая функция d . Минимальное значение R имеет место при $d = \lambda_2/4$ и равно нулю, если $r_{12} = r_{23}$, т. е. в том случае, когда ϵ_2 является геометрическим

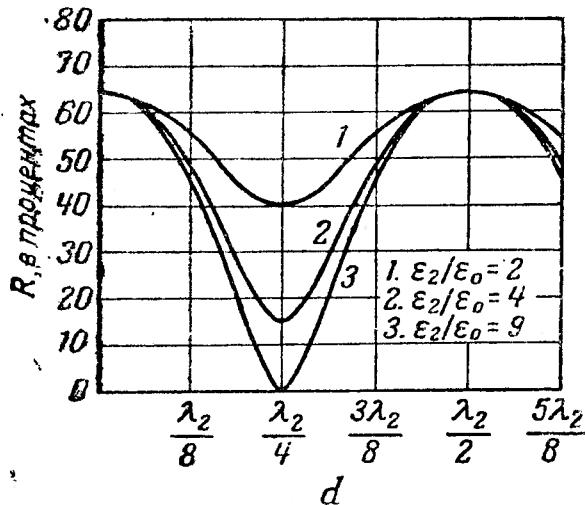


Рис. 97. Коэффициенты отражения от плоских диэлектрических слоёв в зависимости от их толщины и диэлектрической проницаемости.

средним между ϵ_1 и ϵ_3 ($\epsilon_2 = \sqrt{\epsilon_1 \epsilon_3}$). При этих условиях от поверхности ничего не отражается, и вся энергия проходит из среды (1) в среду (2). Введение слоя толщиной в четверть волны с соответствующей диэлектрической проницаемостью играет ту же роль, что и подбор импеданса в месте соединения двух передаточных электрических линий. На рис. 97 нанесены кривые, показывающие влияние диэлектрического слоя на поверхности раздела воздуха и воды.

Этот принцип был недавно применён для производства оптически «невидимого» стекла. В результате покрытия плёнкой с соответствующим показателем преломления отражение света от поверхности стекла уменьшается почти до нуля.

9.12. Поглощающие слои. Если среда по обе стороны слоя одна и та же, то уравнения (16) и (18) принимают вид

$$R = \frac{R_{12} [(1 - e^{-2\beta_2 d})^2 + 4e^{-2\beta_2 d} \sin^2 \alpha_2 d]}{(1 - R_{12} e^{-2\beta_2 d})^2 + 4R_{12} e^{-2\beta_2 d} \sin^2 (\alpha_{12} + \alpha_2 d)}, \quad (23)$$

$$T = \frac{[(1 - R_{12})^2 + 4R_{12} \sin^2 \delta_{12}] e^{-2(\beta_2 - \beta_1) d}}{(1 - R_{12} e^{-2\beta_2 d})^2 + 4R_{12} e^{-2\beta_2 d} \sin^2 (\delta_{12} + \alpha_2 d)}. \quad (24)$$

Дальнейшего упрощения мы достигнем, положив

$$s_{12} = -\frac{1}{2} \ln R_{12}, \quad (25)$$

¹⁾ См., например, у Drude, *Lehrbuch der Optik*, гл. II, 1900. П. Друде, *Оптика*, М.—Л., ОНТИ, 1935. В инфракрасной области этот метод применялся Черни и его студентами: Czerny, *Z. Physik* 65, 600, 1930; Barnes und Czerny, *Phys. Rev.* 38, 338, 1931; Cartwright and Czerny, *Z. Physik* 85, 269, 1933; Woltersdorf, *ibid.* Недавно тот же метод был применён к ультракоротким радиоволнам. См., например, Bätz, *Phys. Z.* 40, 394, 1939 и Pfister und Roth, *Hochfreq. und Elektroak.* 51, 156, 1938, которые распространили формулу для коэффициента отражения на случай произвольного угла падения.

что после подстановки в (23) и (24) даёт

$$R = \frac{\sin^2 \alpha_2 d + \operatorname{sh}^2 \beta_2 d}{\sin^2 (\alpha_2 d + \delta_{12}) + \operatorname{sh}^2 (\beta_2 d + s_{12})}, \quad (26)$$

$$T = \frac{(\sin^2 \delta_{12} + \operatorname{sh}^2 s_{12}) e^{\beta_1 d}}{\sin^2 (\alpha_2 d + \delta_{12}) + \operatorname{sh}^2 (\beta_2 d + s_{12})}. \quad (27)$$

Коэффициенты отражения и прозрачности снова являются осциллирующими функциями толщины слоя d , но амплитуда колебаний уже не остаётся постоянной. На рис. 98 представлена зависимость R от d для тонкого слоя воды в воздухе при длине волны 9,35 см (воздух по обе стороны слоя). Выше мы заметили, что коэффициент затухания для воды в этой области значительно больше, чем даёт учёт одной только электрической проводимости. Наблюдённые значения составляют $\alpha_2 = 595$ метров⁻¹, $\beta_2 = 45,6$ мегра⁻¹. Внутри слоя длина волны $\lambda_2 = \alpha_0 \lambda_0 / \alpha_2 = 1,05$ см, и минимумы получаются на расстояниях примерно в полволны. В общем, чем меньше коэффициент затухания, тем точнее совпадают минимумы с точками, расположенными друг от друга на расстоянии в полволны. Для промышленных изоляторов α_2 по меньшей мере в 10^4 раз превышает β_2 , так что λ_2 , а следовательно и α_2 , могут быть определены непосредственно из наблюдаемых колебаний коэффициента отражения. Численная величина минимумов определяется потерями в слое, и кривая, подобная начерченной на рис. 98, даёт один из наилучших способов определения β_2 при сверхвысоких частотах.

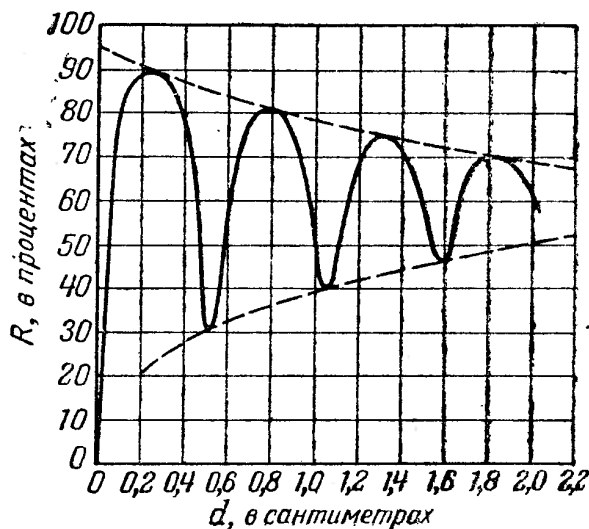


Рис. 98. Коэффициент отражения от плоского слоя воды толщины d см при $\lambda_0 = 9,35$ см; $\alpha_2 = 5,95$ см⁻¹, $\beta_2 = 0,456$ см⁻¹.

В случае металлического слоя затухание настолько велико и коэффициент отражения настолько близок к единице, что даже для тончайших листов прозрачностью можно пренебречь. Например, коэффициент прозрачности медного листка толщиной в 1 м (10^{-4} см) при частоте 10^8 колебаний в секунду меньше 10^{-6} . Этот подсчёт даёт, однако, совершенно ошибочное представление об эффективности экранирования, поскольку он относится только к бесконечной плоской поверхности. При отражении от поверхности, радиус кривизны которой мал по сравнению с длиной волны, потери на отражение отнюдь не являются всегда большими¹⁾. Единственный общий критерий, имеющий значение в этом случае, это — величина коэффициента затухания β_2 или обратная ему величина — глубина скин-слоя, определённая на стр. 444.

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ

9.13. Комплексный угол падения. Возможности, предоставляемые формулами Френеля, далеко не исчерпаны тем, что было рассмотрено в предыдущих разделах, так как мы ограничивались только действительными углами падения. Формулы эти представляют собой формальное решение задачи с определёнными краевыми условиями, аналитически справедливое для комплексных

¹⁾ Для цилиндрических экранов это обстоятельство хорошо показал Щелкунов, *Bell System Techn. J.* 13, 532, 1934.

углов в той же мере, как и для действительных. Комплексные углы преломления уже встречались нам в связи с явлениями полного отражения и отражения от проводящих поверхностей. Получающиеся здесь плоские волны оказались неоднородными: плоскости равной амплитуды не совпадали с плоскостями равной фазы. Есть все основания ожидать поэтому, что комплексный угол падения будет связан с неоднородной первичной волной. Мы не будем рассматривать здесь, как подобные волны получаются, но напомним, что в разделах 6.8 и 7.7 было показано, что в наиболее общем случае цилиндрические и сферические волны могут быть представлены в виде суперпозиции плоских волн, направляющие косинусы которых принимают как действительные, так и комплексные значения.

При действительном угле падения первичная волна в общем случае даёт начало волне, отражённой от поверхности разрыва. Только в случае плоской волны, поляризованной в плоскости падения и падающей на границу раздела двух полубесконечных диэлектриков под углом Брюстера (стр. 437), мы имеем исключение из этого правила. Если одна из сред является проводящей, то отражённая волна получается всегда.

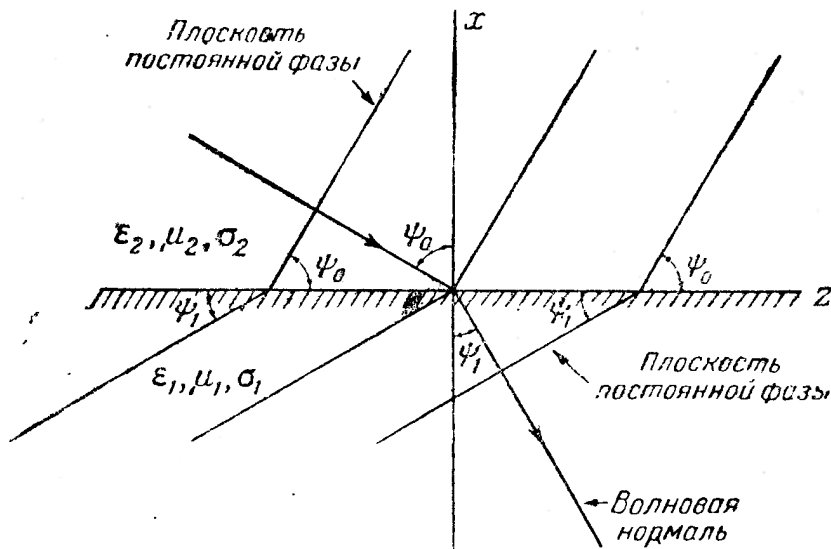


Рис. 99. Преломление плоскостей равной фазы, характерное для поверхностной волны.

Если, однако, допустить комплексный угол падения, то коэффициент отражения может оказаться равным нулю при любых свойствах соприкасающихся сред.

Мы рассмотрим несколько подробнее тот случай, когда электрический вектор параллелен плоскости падения. Пусть, как и в формуле (15), стр. 451, $r_{\parallel}$ представляет отношение магнитных векторов падающей и отражённой волн. Тогда формула Френеля (19), стр. 435, даёт

$$r_{\parallel} = \frac{\cos \theta_0 - Z_{12} \cos \theta_1}{\cos \theta_0 + Z_{12} \cos \theta_1}, \quad (1)$$

где

$$Z_{12} = \frac{\mu_1 k_2}{\mu_2 k_1}, \quad Z_{21} = \frac{1}{Z_{12}}, \quad (2)$$

как было принято на стр. 450. Для того чтобы отражённая волна отсутствовала, числитель в (1) должен обратиться в нуль. Это условие, совместно с законом Снелля, приводит к двум соотношениям

$$\cos \theta_1 = Z_{21} \cos \theta_0, \quad \sin \theta_1 = \frac{\mu_2}{\mu_1} Z_{12} \sin \theta_0, \quad (3)$$

которые определяют углы падения и преломления. Исключая θ_1 , получаем

$$\sin^2 \theta_0 = \frac{1 - Z_{12}^2}{1 - \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 Z_{12}^4}, \quad \cos^2 \theta_0 = Z_{12}^2 \frac{1 - \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 Z_{12}^2}{1 - \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 Z_{12}^4}. \quad (4)$$

Для упрощения мы предположим, что поверхность соприкосновения двух сред совпадает с плоскостью $x = 0$. Ось x нормальна к этой поверх-

ности и направлена из среды (1) в среду (2), как показано на рис. 99. Плоскость падения параллельна плоскости xz : следовательно, магнитное поле имеет только компоненту H_y . Электрический вектор лежит в плоскости падения и имеет в общем случае обе составляющие E_x и E_z . Поле является, таким образом, поперечно-магнитным¹⁾. Поскольку магнитный вектор касателен к поверхности разрыва, при переходе из одной среды в другую он остаётся непрерывным, следовательно, согласно разделу 9.4.

$$\left. \begin{aligned} H_y &= C e^{ik_2(-x \cos \theta_0 + z \sin \theta_0) - i\omega t} & (x > 0), \\ H_y &= C e^{ik_1(-x \cos \theta_1 + z \sin \theta_1) - i\omega t} & (x < 0), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где C — произвольная постоянная.

Положим далее:

$$h = k_2 \sin \theta_0 = k_1 \sin \theta_1, \quad (6)$$

и определим действительную и мнимую части коэффициента, стоящего в показателе (5), следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} h &= \alpha + i\beta, \\ ik_2 \cos \theta_0 &= -i \sqrt{k_2^2 - h^2} = p_2 + iq_2, \\ ik_1 \cos \theta_1 &= +i \sqrt{k_1^2 - h^2} = -p_1 + iq_1. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Знаки при радикалах выбраны так, чтобы при бесконечных значениях $\pm x$ поле исчезало. Тогда в обозначениях (7) получим

$$\left. \begin{aligned} H_y &= C \Psi_2 & (x > 0), \\ H_y &= C \Psi_1 & (x < 0), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1 &= \exp [+ p_1 x - \beta z + i(-q_1 x + \alpha z) - i\omega t], \\ \Psi_2 &= \exp [- p_2 x - \beta z + i(-q_2 x + \alpha z) - i\omega t]. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Рассмотрим прежде всего характер падающей волны. Плоскости постоянной фазы определяются уравнением

$$-q_2 x + \alpha z = \text{const.}, \quad (10)$$

в то время как плоскости равной амплитуды удовлетворяют уравнению

$$-p_2 x - \beta z = \text{const.} \quad (11)$$

Плоскости равной фазы и равной амплитуды не совпадают. Действительный угол падения ψ_0 есть угол между нормалью к плоскости постоянной фазы и положительной осью x . Он удовлетворяет соотношению

$$x \cos \psi_0 + z \sin \psi_0 = \text{const.}, \quad (12)$$

откуда

$$\cos \psi_0 = \frac{q_2}{\sqrt{\alpha^2 + q_2^2}}, \quad \sin \psi_0 = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + q_2^2}}. \quad (13)$$

Плоскости постоянной фазы распространяются в направлении их положительной нормали с фазовой скоростью

$$v_2 = \frac{\omega}{\sqrt{\alpha^2 + q_2^2}}, \quad (14)$$

¹⁾ См. раздел 6.1, стр. 309 и след.

которая *меньше*, чем нормальная скорость однородной плоской волны в бесконечной среде с теми же свойствами. С другой стороны, скорость данной точки на фазовой плоскости, параллельная оси z , может быть *больше*, чем скорость в свободном пространстве. Причина этого ясна из рис. 100. Длина волны λ_2 определяется расстоянием между двумя плоскостями с одной и той же фазой, измеренным по нормали

$$\lambda_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 + q_2^2}}. \quad (15)$$

Расстояния между теми же двумя плоскостями, измеренные вдоль осей x и z , равны соответственно

$$\lambda_{2x} = \frac{\lambda_2}{\cos \psi_0} = \frac{2\pi}{q_2}, \quad \lambda_{2z} = \frac{\lambda_2}{\sin \psi_0} = \frac{2\pi}{\alpha}. \quad (16)$$

Точка на фазовой плоскости должна проходить эти расстояния за один период, так что кажущиеся скорости равны

$$v_{2x} = -\frac{\omega}{q_2}, \quad v_{2z} = \frac{\omega}{\alpha}, \quad (17)$$

а значения этих величин лежат между v_2 и бесконечностью. Нормаль к плоскостям равной амплитуды образует с осью x угол ψ'_0 , удовлетворяющий соотношению

$$-x \cos \psi'_0 + z \sin \psi'_0 = \text{const.}, \quad (18)$$

Рис. 100. Компонента фазовой скорости, параллельная оси z , может быть больше скорости света.

откуда

$$\text{tg } \psi'_0 = -\frac{\beta}{p_2}. \quad (19)$$

Плоскости равной амплитуды, которые в случае большой проводимости почти перпендикулярны к плоскостям постоянной фазы, на рис. 99 не показаны.

Обращаясь теперь к прошедшей волне в области $x < 0$, мы видим из (9), что плоскости равной фазы и плоскости равной амплитуды определяются соответственно выражениями

$$-q_1 x + \alpha z = \text{const.} \quad (20)$$

и

$$p_1 x - \beta z = \text{const.} \quad (21)$$

и нормали к ним образуют с отрицательной осью x углы ψ_1 и ψ'_1 , определяемые соотношениями

$$\text{tg } \psi_1 = -\frac{\alpha}{q_1}, \quad \text{tg } \psi'_1 = \frac{\beta}{p_1}. \quad (22)$$

Фазовая скорость равна

$$v_1 = \frac{\omega}{\sqrt{\alpha^2 + q_1^2}}. \quad (23)$$

Компоненты электрического вектора проще всего подсчитать из уравнения поля

$$\mathbf{E} = \frac{i\omega\mu}{k^2} \text{rot } \mathbf{H}, \quad (24)$$

которое в прямоугольных компонентах даёт

$$E_x = -\frac{i\omega\mu}{k^2} \frac{\partial H_y}{\partial z}, \quad E_z = \frac{i\omega\mu}{k^2} \frac{\partial H_y}{\partial x}. \quad (25)$$

Из (8) и (9) следует, что

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \frac{\omega\mu_2}{k_2^2} (\alpha + i\beta) C\Psi_2, \\ E_z &= -\frac{i\omega\mu_2}{k_2^2} (p_2 + iq_2) C\Psi_2, \end{aligned} \right\} (x > 0) \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \frac{\omega\mu_1}{k_1^2} (\alpha + i\beta) C\Psi_1, \\ E_z &= \frac{i\omega\mu_1}{k_1^2} (p_1 - iq_1) C\Psi_1. \end{aligned} \right\} (x < 0) \quad (27)$$

Физически поле, описываемое уравнениями (8), (26) и (27), связано с током, текущим в направлении оси z , распределение которого вдоль оси u однородно. Подобное поле является магнитно-поперечным, а продольная составляющая электрического поля зависит от потерь в каждой из сред, так как произведение $E_z H_y$ представляет собой нормальную составляющую потока энергии к границе раздела. С другой стороны, поперечная компонента E_x приводит к потоку энергии, параллельному границе. Всю задачу в целом можно сравнить с предельным случаем тока, текущего вдоль проводника, радиус которого становится бесконечным. Рассмотрение другой составляющей падающей волны, соответствующей условию $r_1 = 0$, приводит к волнам поперечно-электрическим и может быть интерпретировано как предельный случай задачи о распространении вдоль соленоида бесконечно большого радиуса. В этом случае ток перпендикулярен к элементам цилиндрической поверхности.

9.14. Скин-эффект. Если обе среды являются идеальными диэлектриками, то угол θ_0 в случае $r_{||} = 0$ действителен и соответствует углу полной поляризации Брюстера. Значительно больший практический интерес представляет тот случай, когда среда (1) является проводником, а среда (2) диэлектриком. Тогда мы можем положить $|Z_{12}|^2 \ll 1$. Согласно (4) и (6),

$$h^2 = k_2^2 \frac{1 - Z_{12}^2}{1 - \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 Z_{12}^4}. \quad (28)$$

Выражение это можно разложить по степеням Z_{12} :

$$h = k_2 \left[1 - \frac{1}{2} Z_{12}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_2^2}{\mu_1^2} - \frac{1}{8} \right) Z_{12}^4 - \dots \right]. \quad (29)$$

В рассматриваемом приближении мы сохраним в этом разложении только квадратичные члены. Поскольку, по предположению, проводимость среды (2) равна нулю, мы можем написать

$$Z_{12} = \frac{\mu_1^2}{\mu_2^2} \frac{\varepsilon_2 \mu_2 \omega^2}{\varepsilon_1 \mu_1 \omega^2 + i\sigma_1 \mu_1 \omega} = \frac{\mu_1 \varepsilon_2}{\mu_2 \varepsilon_1} \frac{1 - i\eta_1}{1 + \eta_1^2}, \quad (30)$$

где, как и раньше, $\eta_1 = \sigma_1 / \varepsilon_1 \omega$. Тогда

$$h \simeq k_2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_2 \mu_1}{\varepsilon_1 \mu_2} \frac{1}{1 + \eta_1^2} + \frac{i\varepsilon_2 \mu_1}{2\varepsilon_1 \mu_2} \frac{\eta_1}{1 + \eta_1^2} \right). \quad (31)$$

Заметим, что α — действительная часть этого выражения — меньше k_2 и, следовательно, скорость точки на плоскости постоянной фазы в направлении оси z больше скорости свободной волны в диэлектрике. Мы видели выше, что это только кажущаяся скорость и что действительная фазовая скорость меньше скорости, определяемой коэффициентом k_2 .

Сделаем теперь дальнейшее предположение, что $\eta_1^2 \gg 1$ и что, следовательно, величиной $1/\eta_1^2$ можно пренебречь по сравнению с $1/\eta_1$. В этом приближении

$$\alpha \simeq \omega \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}, \quad \beta \simeq \frac{\omega^2 \epsilon_2 \mu_1}{2\sigma_1} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}}. \quad (32)$$

Таким образом, скорость в направлении оси z в основном характеризует фазовую скорость в среде, а коэффициент затухания стремится к нулю с увеличением проводимости.

В том же приближении

$$k_2^2 - h^2 \simeq \frac{\epsilon_2 \mu_1}{\epsilon_1 \mu_2} \frac{k_2^2}{1 + \eta_1^2} (1 - i\eta_1), \quad (33)$$

что, согласно (7), даёт

$$q_2 \simeq p_2 \simeq \omega \epsilon_2 \sqrt{\frac{\mu_1 \omega}{2\sigma_1}}. \quad (34)$$

Аналогично

$$k_1^2 - h^2 \simeq \omega^2 (\epsilon_1 \mu_1 - \epsilon_2 \mu_2) + i\omega \mu_1 \sigma_1, \quad (35)$$

$$q_1 \simeq p_1 \simeq \sqrt{\frac{\omega \mu_1 \sigma_1}{2}}. \quad (36)$$

Из полученных результатов мы прежде всего замечаем, что

$$\frac{\alpha}{q_2} \simeq \frac{p_2}{\beta} \simeq \sqrt{\frac{2\mu_2 \sigma_1}{\mu_1 \epsilon_2 \omega}}, \quad (37)$$

откуда согласно (13) и (19) следует, что *в падающей волне плоскости равной амплитуды нормальны к плоскостям постоянной фазы*. При $\sigma_1 \rightarrow \infty$ $\text{tg } \psi_0 \rightarrow \infty$ и $\psi_0 \rightarrow \pi/2$. По мере увеличения проводимости плоскости постоянной фазы в диэлектрике становятся почти нормальными к поверхности проводника.

Соответствующие соотношения для проводника определяются из (22):

$$\text{tg } \psi_1 \simeq -\sqrt{\frac{2\omega \epsilon_2 \mu_2}{\mu_1 \sigma_1}}, \quad \text{tg } \psi'_1 \simeq \sqrt{\frac{\mu_1 \omega^3 \epsilon_2^3}{\mu_2 \sigma_1^3}}. \quad (38)$$

При $\sigma_1 \rightarrow \infty$ оба угла ψ_1 и ψ'_1 стремятся к нулю. *Плоскости равной амплитуды и плоскости постоянной фазы в проводнике почти параллельны его поверхности*. В то же время длина волны становится очень малой, так как

$$\lambda_1 = \frac{v_1}{\nu} \simeq 2\pi \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_1 \sigma_1}}. \quad (39)$$

Напомним, что для металлов σ_1 имеет порядок 10^7 ом⁻¹метр⁻¹. Отклонениями ψ_0 от $\pi/2$ и ψ_1 от нуля можно поэтому полностью пренебречь,

и длина волны в металле составит по порядку величины $\sqrt{\frac{1}{2}}$ м. Даже над поверхностью морской воды при частоте в 1 мегацикл/сек угол наклона плоскостей постоянной фазы всего лишь порядка $10'$. Наклон радиоволн вперёд при распространении над поверхностью сухой земли может быть

более значительным. Соотношение между плоскостями постоянной фазы и плоскостями равной амплитуды в этом случае подобно тому, какое изображено на рис. 101. Необходимо помнить, однако, что условие $\eta_1^2 \gg 1$ здесь уже не обязательно выполняется.

Подставляя приближённые соотношения (32), (34) и (36) в (26), мы получаем для компонент поля выражения

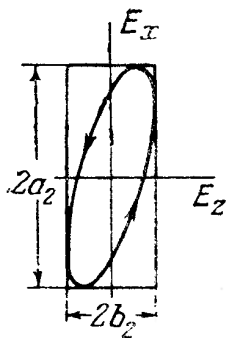
$$E_x \simeq \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} C \Psi_2, \quad E_z \simeq \sqrt{\frac{\mu_1 \omega}{\sigma_1}} e^{-i \frac{\pi}{4}} C \Psi_2 \quad (x > 0), \quad (40)$$

$$E_x \simeq \frac{\omega \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}}{\varepsilon_1} e^{-i \frac{\pi}{2}} C \Psi_1, \quad E_z \simeq \sqrt{\frac{\mu_1 \omega}{\sigma_1}} e^{-i \frac{\pi}{4}} C \Psi_1 \quad (x < 0). \quad (41)$$

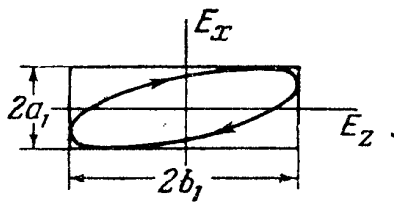
Заметим, что тангенциальная компонента E_z на границе $x=0$ непрерывна и в $(\mu_1 \omega / \sigma_1)^{\frac{1}{2}}$ раз больше тангенциальной компоненты магнитного поля. При $\sigma_1 \rightarrow \infty$ продольное электрическое поле исчезает.

Нормальная и тангенциальная компоненты E различаются по фазе на 45° (более точный расчёт показывает, что в случае плохих проводников угол меньше 45°). Следовательно, конец результирующего электрического вектора описывает в каждой точке эллипс. В точке диэлектрика

непосредственно над поверхностью проводника эллипс этот вписывается в прямоугольник со сторонами $2a_2 = 2(\mu_2/\varepsilon_2)^{1/2}$, $2b_2 = 2(\mu_1 \omega / \sigma_1)^{1/2}$, $b_2 \ll a_2$, как показано на рис. 102, а. Поскольку величина z роли не играет, координаты эллипса равны



а



б

Рис. 102. а — геометрическое место точек, описываемых концом электрического вектора в какой-либо точке диэлектрика; б — геометрическое место точек, описываемых концом электрического вектора в какой-либо точке проводника.

в прямоугольник со сторонами $2a_1 = 2\omega(\varepsilon_2 \mu_2)^{1/2} / \sigma_1$, $2b_1 = 2(\mu_1 \omega / \sigma)^{1/2}$, $b_1 \gg a_1$ (см. рис. 102, б). Координаты эллипса равны

$$E_x = a \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \quad E_z = b_1 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right). \quad (43)$$

Здесь E_z отстаёт от E_x и, соответственно, электрический вектор в проводнике вращается по часовой стрелке.

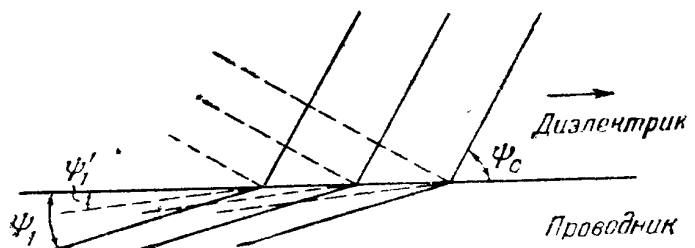


Рис. 101. Сплошные линии — поверхности равной фазы; пунктирные — поверхности постоянной амплитуды.

Электрический вектор в диэлектрике вращается против часовой стрелки. В остальных точках диэлектрика эллипс по форме такой же, но имеет меньшие размеры в соответствии с затуханием.

В проводнике эллипс, описываемый концом электрического вектора, вписывается

Глубина проникновения поля в проводник определяется фактором затухания p_1 ; обратная ему величина $\frac{1}{p_1}$ в точности равна величине δ , которая была определена на стр. 444. Плотность тока в направлении оси z будет $J_z = \sigma_1 E_z$, а полный ток, проходящий через бесконечную полосу в проводнике, параллельную плоскости xu и равную по ширине 1 м, будет .

$$I = \sigma_1 \int_0^1 \int_{-\infty}^0 E_x dx dy = Ce^{-\beta z + i(\alpha z - \omega t)}. \quad (44)$$

С другой стороны, ток через подобную полосу глубины d равен

$$\Delta I = I(1 - e^{-p_1 d + i q_1 d}). \quad (45)$$

Так как для хороших проводников p_1 очень велико, ток почти полностью ограничивается тонким поверхностным слоем (скин-кожа). Следует, однако, отметить, что фаза нитей тока с глубиной меняется. Явление скин-эффекта может быть выражено и с помощью понятия внутренней самоиндукции ¹⁾.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВДОЛЬ КРУГЛОГО ЦИЛИНДРА

9.15. Собственные виды волн. Бесконечно длинный круглый цилиндр радиуса a помещён в неограниченную однородную среду с постоянной распространения k_2 , в то время как постоянная распространения внутри цилиндра равна k_1 . На проводимость цилиндра и среды никаких ограничений пока не налагается. Компоненты поля в круговых цилиндрических координатах были выведены в разделе 6.6. Поле в центре должно быть конечно, и следовательно, волновые функции внутри проводника должны быть построены из бесселевых функций первого рода. Вне цилиндра требуемое поведение на бесконечности обеспечивают функции Ганкеля $H_n^{(1)}$.

Согласно (36) и (37), стр. 318—319, для внутренних точек проводника ($r < a$) мы имеем

$$\left. \begin{aligned} E_r^i &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{ih}{\lambda_1} J'_n(\lambda_1 r) a_n^i - \frac{\mu_1 \omega n}{\lambda_1^2 r} J_n(\lambda_1 r) b_n^i \right] F_n, \\ E_\theta^i &= - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{nh}{\lambda_1^2 r} J_n(\lambda_1 r) a_n^i + \frac{i\mu_1 \omega}{\lambda_1} J'_n(\lambda_1 r) b_n^i \right] F_n, \\ E_z^i &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [J_n(\lambda_1 r) a_n^i] F_n, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} H_r^i &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{nk_1^2}{\mu_1 \omega \lambda_1^2 r} J_n(\lambda_1 r) a_n^i + \frac{ih}{\lambda_1} J'_n(\lambda_1 r) b_n^i \right] F_n, \\ H_\theta^i &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{ik_1^2}{\mu_1 \omega \lambda_1} J'_n(\lambda_1 r) a_n^i - \frac{nh}{\lambda_1^2 r} J_n(\lambda_1 r) b_n^i \right] F_n, \\ H_z^i &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [J_n(\lambda_1 r) b_n^i] F_n. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

¹⁾ См. изложение этого вопроса Зоммерфельдом в книге Франк-Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, 1937, стр. 911 и далее.

Во всех внешних точках ($r > a$)

$$\left. \begin{aligned} E_r^e &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{ih}{\lambda_2} H_n^{(1)'}(\lambda_2 r) a_n^e - \frac{\mu_2 \omega n}{\lambda_2^2 r} H_n^{(1)}(\lambda_2 r) b_n^e \right] F_n, \\ E_\theta^e &= - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{nh}{\lambda_2^2 r} H_n^{(1)}(\lambda_2 r) a_n^e + \frac{i\mu_2 \omega}{\lambda_2} H_n^{(1)'}(\lambda_2 r) b_n^e \right] F_n, \\ E_z^e &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [H_n^{(1)}(\lambda_2 r) a_n^e] F_n, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} H_r^e &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{nk_2^2}{\mu_2 \omega \lambda_2^2 r} H_n^{(1)}(\lambda_2 r) a_n^e + \frac{ih}{\lambda_2} H_n^{(1)'}(\lambda_2 r) b_n^e \right] F_n, \\ H_\theta^e &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{ik_2^2}{\mu_2 \omega \lambda_2} H_n^{(1)'}(\lambda_2 r) a_n^e - \frac{nh}{\lambda_2^2 r} H_n^{(1)}(\lambda_2 r) b_n^e \right] F_n, \\ H_z^e &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [H_n^{(1)}(\lambda_2 r) b_n^e] F_n. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

В этих соотношениях

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1^2 &= k_1^2 - h^2, \quad \lambda_2^2 = k_2^2 - h^2, \\ F_n &= \exp(in\theta + ihz - i\omega t), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

а штрихи при цилиндрических функциях обозначают дифференцирование по аргументу λr .

Коэффициенты разложения и постоянная распространения h остаются пока неопределёнными. Однако на границе $r = a$ тангенциальные компоненты напряжённости поля должны быть непрерывны, и это условие приводит к определённым соотношениям между коэффициентами разложения. Из непрерывности тангенциальных компонент E мы получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{nh}{u^2} J_n(u) a_n^i + \frac{i\mu_1 \omega}{u} J_n'(u) b_n^i &= \frac{nh}{v^2} H_n^{(1)}(v) a_n^e + \frac{i\mu_2 \omega}{v} H_n^{(1)'}(v) b_n^e, \\ J_n(u) a_n^i &= B_n^{(1)}(v) a_n^e, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

а из непрерывности тангенциальных компонент H :

$$\left. \begin{aligned} \frac{ik_1^2}{\mu_1 \omega u} J_n'(u) a_n^i - \frac{nh}{u^2} J_n(u) b_n^i &= \frac{ik_2^2}{\mu_2 \omega v} H_n^{(1)'}(v) a_n^e - \frac{nh}{v^2} H_n^{(1)}(v) b_n^e, \\ J_n(u) b_n^i &= H_n^{(1)}(v) b_n^e, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где

$$u = \lambda_1 a, \quad v = \lambda_2 a. \quad (8)$$

Соотношения (6) и (7) образуют систему однородных линейных уравнений, которым удовлетворяют четыре коэффициента $a_n^i, b_n^i, a_n^e, b_n^e$. Система допускает нетривиальное решение только в том случае, если детерминант её равен нулю. Постоянная распространения h определяется из условия равенства нулю детерминанта системы (6) и (7). Раскрывая этот детерминант, мы приходим к трансцендентному уравнению

$$\left[\frac{\mu_1 J_n'(u)}{u J_n(u)} - \frac{\mu_2 H_n^{(1)'}(v)}{v H_n^{(1)}(v)} \right] \left[\frac{k_1^2 J_n'(u)}{\mu_1 u J_n(u)} - \frac{k_2^2 H_n^{(1)'}(v)}{\mu_2 v H_n^{(1)}(v)} \right] = n^2 h^2 \left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{u^2} \right)^2, \quad (9)$$

корни которого дают возможные значения постоянной распространения и определяют таким образом характеристические или собственные волны, могущие распространяться вдоль цилиндра. Корни эти дискретны и образуют двумерное бесконечное многообразие. Функции Бесселя трансцендентны, и для каждого значения n имеется бесчисленное множество корней, каждый из которых может быть обозначен индексом m . Каждый корень уравнения (9) может быть поэтому записан в виде h_{nm} .

Общего метода для нахождения корней уравнений (9) указать нельзя, но, к счастью для практических задач, связанных с распространением волн вдоль металлических проводников, можно допустить приближения, значительно упрощающие решение. Из уравнения (6) мы замечаем, что *при конечной проводимости для удовлетворения граничным условиям всегда необходима суперпозиция волн электрического и магнитного типов, за исключением симметричного случая $n=0$* . Поле не является поперечным ни по отношению к электрическому вектору, ни по отношению к магнитному. Если, однако, проводимость одной из сред бесконечна, то граничные условия могут быть удовлетворены либо поперечно-магнитным, либо поперечно-электрическим полем. В этом случае задача полностью определена либо условиями

$$E_\theta = 0, \quad E_z = 0 \quad (r = a), \quad (10)$$

либо условиями

$$\frac{\partial}{\partial r} (rH_\theta) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} H_z = 0 \quad (r = a), \quad (11)$$

которые получаются из выражений (14), стр. 427, если тангенциальная компонента $\mathbf{H}$ не равна нулю. В случае идеально проводящего цилиндра, помещённого в диэлектрик, виды собственных поперечно-магнитных и поперечно-электрических волн определяются соответственно корнями уравнений

$$\frac{H_n^{(1)}(v)}{H_n^{(1)'}(v)} = 0, \quad \frac{H_n^{(1)'}(v)}{H_n^{(1)}(v)} = 0. \quad (12)$$

Амплитуды a_n^e и b_n^e теперь совершенно независимы и определяются исключительно способом возбуждения. В обратном случае диэлектрического цилиндра, окружённого идеальным проводником, виды поперечно-магнитных и поперечно-электрических волн определяются соответственно корнями уравнений

$$\frac{J_n(u)}{J_n'(u)} = 0, \quad \frac{J_n'(u)}{J_n(u)} = 0. \quad (13)$$

Практически проводимость металла хотя и не бесконечна, но столь велика, что внутри него цилиндрические функции могут быть заменены их асимптотическими представлениями. Тогда оказывается, что в каждом из возможных видов волн превалирует либо поперечно-магнитный тип, либо поперечно-электрический. Небольшая компонента противоположного типа, «портящая» поперечность, может рассматриваться как малый поправочный член, учитывающий конечность проводимости.

Если возбуждается только симметричный вид $n=0$, то поле не зависит от θ , и коэффициенты a_0 и b_0 независимы друг от друга при любой проводимости. Из (6) ясно, что в этом случае поперечно-магнитная волна удовлетворяет на границе соотношениям

$$J_0(u) a_0^i = H_0^{(1)}(v) a_0^e, \\ \frac{k_1^2}{\mu_1 u} J_1(u) a_0^i = \frac{k_2^2}{\mu_2 v} H_1^{(1)}(v) a_0^e, \quad (14)$$

в то время как для поперечно-электрической волны

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mu_1}{u} J(u) b_0^i &= \frac{\mu_2}{v} H_1^{(1)}(v) b_0^e, \\ J_0(u) b_0^i &= H_0^{(1)}(v) b_0^e. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Допустимые виды поперечно-магнитных волн определяются, следовательно, корнями h_{0m} трансцендентного уравнения

$$\frac{k_1^2}{\mu_1 u} \frac{J_1(u)}{J_0(u)} = \frac{k_2^2}{\mu_2 v} \frac{H_1^{(1)}(v)}{H_0^{(1)}(v)}, \quad (16)$$

а виды поперечно-электрических волн получаются из уравнения

$$\frac{\mu_1}{u} \frac{J_1(u)}{J_0(u)} = \frac{\mu_2}{v} \frac{H_1^{(1)}(v)}{H_0^{(1)}(v)}. \quad (17)$$

9.16. Проводник, помещённый в диэлектрик. Мы рассмотрим только случай волн, в которых преобладает поперечно-магнитный тип, что соответствует практически важной задаче об осевом токе в длинном прямом проводе¹⁾. Прежде всего мы рассмотрим аксиально-симметричное решение $n=0$. Затем мы покажем, что асимметричные виды волн, если и возбуждаются, то немедленно затухают, так что никакого влияния на распространение тока вдоль сплошного проводника они не оказывают.

Предположим сначала, что проводимость цилиндра бесконечно велика. Согласно (12), постоянная распространения определяется тогда из уравнения

$$\frac{H_0^{(1)}(v)}{H_1^{(1)}(v)} = 0. \quad (18)$$

Если v очень мало, то $H_0^{(1)}(v)$ может быть аппроксимировано выражением

$$H_0^{(1)}(v) \simeq \frac{2i}{\pi} \ln \frac{\gamma v}{2i}, \quad \frac{dH_0^{(1)}(v)}{dv} \simeq \frac{2i}{\pi v}, \quad (19)$$

где $\gamma = 1,781$. Эти выражения получаются в результате оценки интеграла (39), стр. 324, в окрестности начала координат. Функция Ганкеля, конечно, многозначна, но мы берём, как и в случае логарифма, только её главное значение. Это главное значение проще всего может быть определено асимптотическим выражением

$$H_p^{(1)}(v) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi v}} e^{i(v - \frac{2p+1}{4}\pi)}, \quad (20)$$

которое справедливо при $v \gg 1$, $p \ll v$. Если положить $v = |v| e^{i\varphi}$, то главные значения $H_p^{(1)}(v)$ будут лежать в пределах $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$. Главное значение или ветвь $H_p^{(1)}(v)$ обращается в нуль во всех бесконечно удалённых точках положительной мнимой полуплоскости. Это имеет место только для корней главной ветви, которая нас и интересует; можно показать далее, что в пределах своих главных ветвей $H_0^{(1)}(v)$ и $H_1^{(1)}(v)$

¹⁾ В случае поперечно-электрических волн линии тока представляют собой концентрические окружности с центрами на оси проводника. Это решение может быть, таким образом, применено при исследовании распространения вдоль идеального соленоида. См. Sommerfeld, *Ann. Physik* 15, 673, 1904. В случае сплошного проводника поперечно-электрические волны быстро затухают.

корней не имеют ¹⁾. Следовательно, отношение

$$\frac{H_0^{(1)}(v)}{H_1^{(1)}(v)} \simeq -v \ln \frac{\gamma v}{2i} = 0 \quad (21)$$

имеет только одно решение $v=0$, а значит $h=k_2$. Если проводимость цилиндра бесконечна, то скорость распространения поля вдоль оси цилиндра определяется исключительно свойствами окружающей среды. Если это пустое пространство, то волны распространяются вдоль цилиндра со скоростью света и без затухания.

Если проводимость цилиндра хотя и не бесконечна, но, как у металлов, очень велика, то h отличается от k_2 . Однако существует по крайней мере один вид волн, для которого эта разница очень мала, так что $v = a\sqrt{k_2^2 - h^2}$ является малой величиной. Приближение (21) попрежнему справедливо для правой части (16). Что касается левой части, то мы видим, что $|k_1| \gg k_2$, поскольку $k_2 \simeq |h|$, $u \simeq k_1 a \gg 1$. Функции Бесселя $J_0(u)$ и $J_1(u)$ могут быть заменены, следовательно, их асимптотическими представлениями. Мнимая часть u положительна. Следует помнить, что $k_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ и что $\alpha_1 \simeq \beta_1$ при очень больших σ_1 . Тогда, в силу (18), стр. 317:

$$\lim_{\beta_1 \rightarrow \infty} \frac{J_1(u)}{J_0(u)} = \lim_{\beta_1 \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \left[a \left(\alpha_1 + i\beta_1 - \frac{\pi}{4a} \right) \right] = +i. \quad (22)$$

Уравнение (16) принимает теперь вид

$$v^2 \ln \frac{\gamma v}{2i} = i \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{k_2^2 a}{k_1}, \quad (23)$$

где правая часть от h не зависит.

Это уравнение для h может быть легко разрешено посредством последовательных приближений. Метод, предложенный Зоммерфельдом ²⁾, состоит в следующем: пусть

$$\xi = \left(\frac{\gamma v}{2i} \right)^2, \quad \eta = -\frac{i\gamma^2 \mu_1 k_2^2 a}{2 \mu_2 k_1}.$$

Тогда (23) принимает вид

$$\xi \ln \xi = \eta. \quad (24)$$

Величина η является известной, и мы хотим определить ξ .

Логарифм от ξ является по отношению к ξ медленно меняющейся функцией. Следовательно, если мы нашли n -е приближение, то $n+1$ приближение можно получить из

$$\xi_{n+1} \ln \xi_n = \eta, \quad (25)$$

или

$$\xi = \frac{\eta}{\ln \frac{\eta}{\ln \frac{\eta}{\ln \frac{\eta}{\ln \frac{\eta}{\dots}}}}} \quad (26)$$

Можно показать сходимость этого выражения как для комплексных, так и для действительных значений η . Корни уравнения (24), лежащие вблизи

¹⁾ Зоммерфельд. В книге Франк-Мизес, *loc. cit.*, стр. 869—870.

²⁾ *Göttinger Nachr.*, 1899. см. Франк-Мизес, *loc. cit.*, стр. 926.

$\xi = 1$ или вне главной ветви логарифма, из рассмотрения исключаются. Оказывается, что $\ln \xi$ является отрицательным числом порядка -20 ; принимая это значение в качестве $\ln \xi_0$, можно ускорить сходимость полученного выражения. Из (24) в соответствующем приближении получаем

$$\eta \cong (1+i) 1,75 \cdot 10^{-13} a \sqrt{\frac{\gamma_{1m} \gamma_{2e} \nu}{\sigma_1}}, \quad (27)$$

где ν — частота, а a выражено в метрах.

Для иллюстрации изложенного мы приведём следующий численный пример, заимствованный у Зоммерфельда¹⁾. Медный провод диаметром 2 мм окружён воздухом. Частота колебаний равна 10^9 герц. Тогда из (27) имеем

$$\eta = -(1+i) 7,25 \cdot 10^{-7}.$$

Полагая $\ln \xi_0 = -20$ в качестве первого приближения, получаем

$$\xi_1 = (1+i) 3,6 \cdot 10^{-8},$$

$$\ln \xi_1 = -16,8 + i \frac{\pi}{4} = -(16,8 - 0,78 i).$$

Аналогично

$$\xi_2 = \frac{\eta}{\ln \xi_1} = (4,1 + 4,5 i) \cdot 10^{-8},$$

$$\ln \xi_2 = -(16,7 - 0,83 i),$$

$$\xi_3 = \frac{\eta}{\ln \xi_2} = (4,2 + 4,5 i) \cdot 10^{-8}.$$

ξ_3 очень мало отличается от ξ_2 и на нём мы можем остановиться. Малость ξ оправдывает первоначально принятые приближённые выражения для функций Бесселя и Ганкеля. Возвращаясь к выражениям (24), мы находим ν , а следовательно, и постоянную распространения h для $a = 1$ мм:

$$h \cong k_2 \{1 + (6,0 + 6,4 i) \cdot 10^{-5}\} = \alpha + i\beta.$$

Фазовая скорость распространения вдоль провода равна

$$V \cong c(1 - 6,0 \cdot 10^{-5}),$$

в то время как расстояние, на котором амплитуда волны затухает до $1/e$ от своей первоначальной величины, составляет $z = 770$ м. Хотя полученная скорость распространения отличается от скорости в свободном пространстве на незначительную величину, но затухание для столь высокой частоты и для данного диаметра провода, с точки зрения применения для линий связи, относительно велико.

Если радиус a очень мал, то величина $u \cong ak_1$ может также оказаться малой, несмотря на большую проводимость. Для иллюстрации этого Зоммерфельд разобрал случай платиновой проволоки, проводимость которой равна $1/8$ проводимости меди, а радиус $a = 2\mu = 2 \cdot 10^{-6}$ метра и $\nu = 3 \cdot 10^8$ циклов в сек. Для u получаем $u \cong (1+i) 0,19$, и, следовательно, бесселевы функции $J_0(u)$ и $J_1(u)$ не могут быть заменены их асимптотическими выражениями. В рассматриваемом случае значение u настолько мало, что мы можем приближённо положить $J_0(u) = 1$, $J_1(u) = \frac{u}{2}$ и после этого поступать в соответствии с приведённым выше методом. Тогда мы получим

$$h \cong 0,08 + 0,061 i.$$

¹⁾ См. Франк-Мизес, *loc. cit.*, стр. 926.

Фазовая скорость оказывается равной только 76% от скорости в пустом пространстве, а затухание настолько большим, что амплитуда уменьшается в $1/e$ раз на расстоянии $z = 16$ см.

До сих пор мы рассматривали только один корень уравнения (16), корень, который в случае большой проводимости даёт $h \cong k_2$ и приводит к волне, которую мы назовём *основной волной*. Имеются, однако, и другие корни, для которых $v = a \sqrt{k_2^2 - h^2}$ очень велико. С помощью асимптотических выражений (22), стр. 317, для функций Ганкеля мы можем теперь аппроксимировать (16) уравнением

$$v \cong -i \frac{\mu_2 k_1^2}{\mu_1 k_2^2} \frac{1}{u} \frac{J_0(u)}{J_1(u)}. \quad (28)$$

Если левая часть (28) очень велика, то корни его в первом приближении даются уравнением $J_1(u) = 0$. Но корни $J_1(u)$ лежат на действительной оси u -плоскости. Следовательно, мнимая часть h^2 должна равняться мнимой части k_1^2 . Это означает, что в случае металлических проводников коэффициент затухания β в $h = \alpha + i\beta$ будет порядка $2 \cdot 10^{-3} \sqrt{\omega \mu_1 \chi_{1m}}$, и, следовательно, *дополнительные волны, соответствующие другим корням уравнения (16), немедленно затухают.*

Корни уравнения (17), которые дают аксиально симметричные виды поперечно-электрических волн, могут быть исследованы тем же способом. Однако, поскольку не существует «магнитной проводимости», здесь нет и основной волны, характеризующейся малым затуханием. Все аксиально-симметричные поперечно-электрические волны в сплошном проводнике затухают слишком быстро, чтобы их можно было заметить.

Мы видели, что в асимметричном случае поле является линейной комбинацией поперечно-магнитных и поперечно-электрических видов волн. Существование основной волны предполагает, что $h \cong k_{21}$, $v \ll 1$. Так как теперь n отлично от нуля, то получаются чрезвычайно большие значения правой части условия (9), которое может быть выполнено только при почти бесконечной проводимости σ_1 . Оказывается, что даже при проводимости меди мнимая часть постоянной распространения h всё ещё очень велика, и затухание таково, что исключает возможность существования асимметричных волн на сколько-нибудь заметном расстоянии от источника.

Результаты нашего анализа могут быть подытожены следующим образом. Имеется бесконечное количество видов волн, могущих распространяться вдоль сплошного проводящего цилиндра. Амплитудами этих волн являются коэффициенты a_n и b_n , значения которых определяются первичным возбуждением, т. е. свойствами источника. Однако из всех этих видов волн только один основной вид, соответствующий симметричной поперечно-магнитной волне, обладает сравнительно малым затуханием. Все остальные виды волн затухают в пределах одного-двух сантиметров от источника даже для столь малых частот, как 60 циклов в сек¹⁾. В следующем разделе мы увидим, что поле основной волны стремится внутри проводника сконцентрироваться в тонком слое у его поверхности. При высоких частотах середина проводника почти свободна от поля и тока, чему соответствует незначительный переход энергии в тепло. С другой стороны, поле и распределение тока в цилиндре, соответствующие дополнительным волнам, почти однородны. Скин-эффект является в этом случае как бы «внешним», а переход энергии в тепло соответственно значительным. По мере уменьшения проводимости цилиндра затухание основ-

¹⁾ Стандартная частота, принятая для переменного тока в США. Прим. ред.

ной волны возрастает, в то время как затухание дополнительных волн уменьшается, пока, наконец, в пределе, в случае идеального диэлектрического цилиндра, основная волна не исчезает совсем, а дополнительные волны не начинают распространяться без затухания.

9. 17. Дальнейшее рассмотрение основной волны. Мы видели, что в случае сплошного проводящего цилиндра имеет существенное значение только основная волна. Следующая наша задача состоит в том, чтобы привести полученные результаты к виду, наиболее удобному для численного рассмотрения. Прежде всего мы выразим коэффициенты a_0^i и a_0^e через полный ток проводимости в цилиндре, так как обычно он является наиболее легко измеримой величиной. Вектор плотности тока в любой точке внутри цилиндра параллелен его оси и равен $J_z = \sigma_1 E_z^i$; полный ток будет, следовательно,

$$I = \int_0^a \int_0^{2\pi} J_z r dr d\theta = 2\pi a_0^i \sigma_1 \int_0^a J_0(\lambda_1 r) r dr e^{ihz - i\omega t}. \quad (29)$$

Согласно (26), стр. 317,

$$\int_0^a J_0(\lambda_1 r) r dr = \frac{r}{\lambda_1} J_1(\lambda_1 r) \Big|_0^a = \frac{a}{\lambda_1} J_1(\lambda_1 a), \quad (30)$$

и таким образом

$$I = \frac{2\pi a \sigma_1}{\lambda_1} a_0^i J_1(\lambda_1 a) e^{ihz - i\omega t}. \quad (31)$$

Амплитуда полного тока определяется из выражения

$$I = I_0 e^{ihz - i\omega t}, \quad (32)$$

и следовательно,

$$a_0^i = \frac{\lambda_1 I_0}{2\pi a \sigma_1 J_1(\lambda_1 a)}. \quad (33)$$

Аналогично, согласно (14),

$$a_0^e = \frac{\lambda_2 \mu_2 k_1^2 I_0}{2\pi a \sigma_1 \mu_1 k_2^2 H_1^{(1)}(\lambda_2 a)}. \quad (34)$$

Продольный и поперечный импедансы были определены на стр. 313 соотношениями

$$E_r = Z_z H_\theta, \quad E_z = -Z_r H_\theta. \quad (35)$$

Следовательно, из уравнения (30), стр. 318, или непосредственно из уравнений (1) — (4) раздела 9.15 мы получаем

$$Z_z^i = \frac{\omega \mu_1 h}{k_1^2}, \quad Z_r^i = \frac{\omega \mu_1 \lambda_1}{ik_1^2} \frac{J_0(\lambda_1 r)}{J_1(\lambda_1 r)} \quad (r < a), \quad (36)$$

$$Z_z^e = \frac{\omega \mu_2 h}{k_2^2}, \quad Z_r^e = \frac{\omega \mu_2 \lambda_2}{ik_2^2} \frac{H_0^{(1)}(\lambda_2 r)}{H_1^{(1)}(\lambda_2 r)} \quad (r > a). \quad (37)$$

Заметим мимоходом, что, согласно (16),

$$Z_r^i = Z_r^e \quad \text{при} \quad r = a. \quad (38)$$

Непрерывность тангенциальных компонент векторов E и H на границе обеспечивается равенством радиальных импедансов при $r = a$.

Поверхностный импеданс Z_s определяется как отношение продольной э. д. с., измеренной на поверхности проводника, к полному току:

$$E_z = Z_s I \quad \text{при} \quad r = a, \quad (39)$$

откуда, согласно (1) и (33),

$$Z_s = \frac{\lambda_1}{2\pi a \sigma_1} \frac{J_0(\lambda_1 a)}{J_1(\lambda_1 a)}. \quad (40)$$

Наконец, подставляя выражения для a_0^i и a_0^e в (2) и (4), мы получаем

$$\left. \begin{aligned} H_0^i &= -\frac{ik_1^2 I}{2\pi a \omega \mu_1 \sigma_1} \frac{J_1(\lambda_1 r)}{J_1(\lambda_1 a)}, \\ H_0^e &= -\frac{ik_1^2 I}{2\pi a \omega \mu_1 \sigma_1} \frac{H_1^{(1)}(\lambda_2 r)}{H_1^{(1)}(\lambda_2 a)}. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Из этих соотношений и соответствующих формул для импедансов можно определить компоненты поля в любой точке.

Для всех металлических проводников справедливо соотношение $\sigma_1/\varepsilon_1\omega \gg 1$. Поэтому во всех практических случаях можно принять, что

$$\begin{aligned} k_1^2 &\simeq i\omega\mu_1\sigma_1, & k_1 &\simeq \sqrt{i\omega\mu_1\sigma_1}, \\ |k_1| &\gg k_2 \simeq h, & \lambda_1 &\simeq k_1. \end{aligned} \quad (42)$$

Для продольных импедансов получаем таким образом

$$Z_z^i \simeq -\frac{i\omega \sqrt{\mu_2\varepsilon_2}}{\sigma_1}, \quad Z_z^e \simeq \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}. \quad (43)$$

Вне цилиндра продольный импеданс стремится к внутреннему импедансу окружающего диэлектрика. Внутри цилиндра он чисто мнимый; следовательно, средний поток энергии вдоль оси внутри цилиндра равен нулю. Действительно,

$$\bar{S}_z^i = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} (E_r H_0^{*i}) = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} (Z_z^i |H_0^i|^2) \simeq 0. \quad (44)$$

Перенос энергии вдоль цилиндра происходит исключительно во внешнем диэлектрике. Энергия внутри цилиндра колеблется вдоль оси и восполняет потери на джоулево тепло.

Поперечный импеданс во внутренних точках приводится к виду

$$Z_r^i \simeq -\sqrt{\frac{\omega\mu_1}{\sigma_1}} \frac{J_0(r \sqrt{\omega\mu_1\sigma_1 i})}{J_1(r \sqrt{\omega\mu_1\sigma_1 i})} e^{i\frac{\pi}{4}}. \quad (45)$$

Если $r = \sqrt{\omega\mu_1\sigma_1} \rightarrow \infty$, то, как и ранее в (22), отношение $J_0(\lambda_1 r)/J_1(\lambda_1 r) \rightarrow -i$, что даёт в пределе

$$Z_r^i \longrightarrow -\sqrt{\frac{\omega\mu_1}{\sigma_1}} e^{-i\frac{\pi}{4}}, \quad (46)$$

т. е. точно то же выражение, которое мы получили в формуле (40) на стр. 459 для случая волны, распространяющейся вдоль бесконечной плоскости. Заключение, которое можно сделать из полученного результата, имеет большое практическое значение. Если под r мы будем подразумевать радиус кривизны некоторой хорошо проводящей поверхности, то вполне правдоподобным является предположение, что при $r \sqrt{\omega\mu_1\sigma_1} \gg 1$ можно приближённо принять

$$E_s = \sqrt{\frac{\omega\mu_1}{\sigma_1}} e^{-i\frac{\pi}{4}} H_2, \quad (47)$$

где E_s и H_2 — компоненты векторов поля, касательные к поверхности и ортогональные друг к другу. В том же приближении можно принять, что

напряжённость магнитного поля на поверхности металлического проводника ничтожно мало отличается от напряжённости в той же точке при бесконечной проводимости. Следовательно, задача, связанная с металлическими проводниками, может быть в первом приближении решена в предположении идеальной проводимости. Приближённое значение для соответствующей величины тангенциальной компоненты вектора E находится затем из (47), после чего можно определить потери в системе, подсчитав поток энергии, направленный в проводник, и полагая, что эта энергия полностью переходит в тепло. Пример подобного вычисления будет дан ниже ¹⁾.

На рис. 103 нанесены величина и фазовый угол отношения

$$\frac{J_0(x\sqrt{i})}{J_1(x\sqrt{i})} = \rho e^{-i\varphi} \quad (48)$$

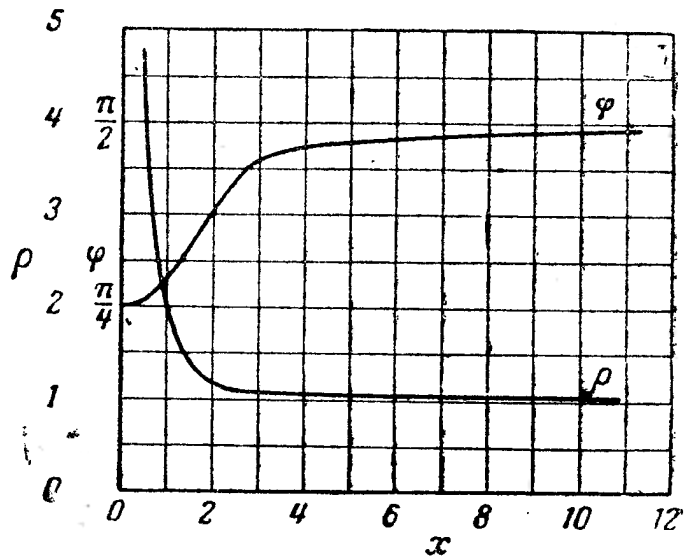


Рис. 103. График функции $\frac{J_0(x\sqrt{i})}{J_1(x\sqrt{i})} = \rho e^{-i\varphi}$.

в функции от $x = r\sqrt{\omega\mu_1\sigma_1}$. Значения взяты из таблицы Янке и Эмде ²⁾. Мы видим, что даже при $x=3$ отклонение от асимптотического значения— i очень мало. В системе MKS

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\omega\mu_1\sigma_1} &= 2,81 \cdot 10^{-3} \sqrt{\nu\kappa_{1m}\sigma_1}, \\ \sqrt{\frac{\omega\mu_1}{\sigma_1}} &= 2,81 \cdot 10^{-3} \sqrt{\frac{\nu\kappa_{1m}}{\sigma_1}}, \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

и проводимость металлов порядка 10^7 ом⁻¹ метр⁻¹. Радиус провода должен быть выражен также в метрах. Следовательно, при не слишком большом радиусе и при малых частотах x может быть намного меньше единицы. Рассмотрим, например, случай медного провода №12 с радиусом $r=1,026$ мм. Тогда $x=0,022\sqrt{\nu}$. При $\nu=60$ циклов в сек $x=0,17$. При $\nu=10^5$ герц $x=6,9$, и из кривых рис. 103 видно, что для этой и для всех более высоких частот поле вблизи поверхности провода почти такое же, как и вблизи бесконечной плоскости.

С помощью (21) выражение (37) для внешнего радиального импеданса приводит к виду

$$Z_r^e \simeq -\sqrt{\frac{\omega\mu_1}{\sigma_1}} e^{-\frac{\pi i}{4}} \frac{r}{a} + i\omega\mu_2 \left(1 - \frac{h^2}{k_2^2}\right) r \ln \frac{r}{a}. \quad (50)$$

¹⁾ Изложенные здесь соображения были развиты в работах советских авторов ещё в 1940 г.; см. С. М. Рытов, К расчёту поглощения электромагнитных волн в трубах, ЖЭТФ 10, 176, 1940 и Расчёт скин-эффекта методом возмущений, ЖЭТФ 10, 180, 1940. Как указал М. А. Леонтович, из этой последней работы вполне строго следует условие (4) для тангенциальных компонент E и H на не слишком искривлённой поверхности хорошего проводника. В дальнейшем это условие Леонтовича было применено в ряде работ (см. Я. Л. Альперт, ЖТФ 10, 1358, 1940; С. М. Рытов, ДАН 51, 107, 1946, а также примечание редактора на стр. 502, п. 4). Прим. ред.

²⁾ Tables of Functions, 2-е изд. стр. 316—317, 1933.

Магнитное поле внутри проводника дается приближенным выражением

$$H_0^i \simeq \frac{I}{2\pi a} \frac{J_1(r\sqrt{\omega\mu_1\sigma_1 i})}{J_1(a\sqrt{\omega\mu_1\sigma_1 i})}, \quad (51)$$

в то время как вне проводника при не слишком большом r

$$H_0^e \simeq \frac{I}{2\pi r}. \quad (52)$$

Можно представить себе структуру поля более наглядно, заметив, что $|Z_z^i| \ll |Z_r^i|$, $|Z_z^e| \gg |Z_r^e|$, и, соответственно, $|E_r^i| \ll |E_z^i|$ и $|E_r^e| \gg |E_z^e|$. Внутри цилиндра линии вектора $\mathbf{E}$ идут почти параллельно его оси, отставая от волн; вне проводника

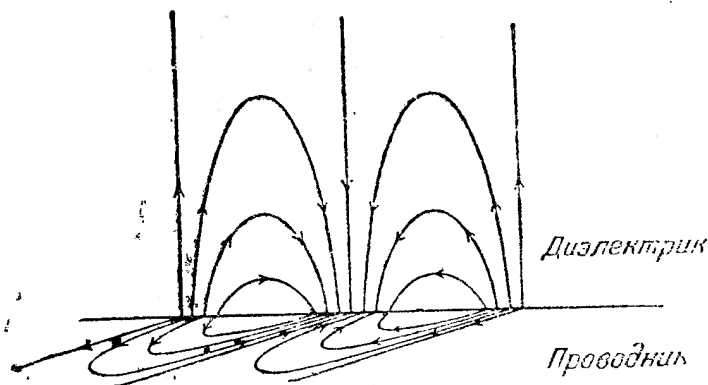


Рис. 104. Структура поля вблизи поверхности, разделяющей проводник и диэлектрик.

они выходят почти радиально, с очень небольшим наклоном вперед. Заряды на поверхности проводника распространяются подобно волне в направлении его оси. Таким образом мы имеем попеременно пучности-положительных и отрицательных зарядов, движущиеся вместе с полем. Линии вектора $\mathbf{E}$ выходят из пучностей положительных зарядов и кончаются в соседних пучностях отри-

цательных зарядов. Небольшая часть линий начинается или кончается в бесконечности. Примерная картина поля показана на рис. 104.

Распределение тока внутри цилиндра дается величиной

$$U = \frac{J_0(k_1 r)}{J_0(k_1 a)} \simeq \frac{J_0(x\sqrt{i})}{J_0(x_0\sqrt{i})}, \quad (53)$$

которая представляет собой отношение плотности тока в какой-либо внутренней точке r к плотности тока на поверхности проводника. Здесь, как и раньше, $x = r\sqrt{\omega\mu_1\sigma_1}$, а $x_0 = a\sqrt{\omega\mu_1\sigma_1}$. Если $x \ll 1$, то U может быть подсчитано с помощью представления бесселевых функций в виде степенных рядов. При $x \gg 1$ можно использовать асимптотические выражения. Таблицы значений этого отношения даны у Янке и Эмде и приведены также во многих справочниках и учебниках по электротехнике. На рис. 105 показано отношение плотностей тока в функции от радиуса для различных значений параметра x_0 . При достаточно больших значениях x_0 и x асимптотическое выражение для U будет

$$U \simeq \sqrt{\frac{a}{r}} e^{\frac{(i-1)(a-r)}{\delta}}, \quad (54)$$

где $\delta = \sqrt{2/\omega\mu_1\sigma_1}$ — глубина проникновения, определенная выше, на стр. 444. Абсолютная величина отношения плотностей тока будет, следовательно,

$$|U| \simeq \sqrt{\frac{a}{r}} e^{-\frac{a-r}{\delta}}. \quad (55)$$

Плотность тока экспоненциально уменьшается от поверхности внутрь про-

водника совершенно так же в данном приближении, как и поле вблизи бесконечного плоского проводника. Если $a \gg \delta$, то на оси цилиндра токов практически нет; если $a < \delta$, то один слой токов налагается на другой. Для проводника с поперечным сечением любой формы мы можем считать, что распределение токов и поле вблизи его поверхности лишь незначительно отличаются от токов и поля вблизи поверхности бесконечной плоскости, при условии, что радиус кривизны сечения во много раз больше глубины проникновения.

В заключение мы выведем классическое выражение для сопротивления цилиндра переменному току. Согласно (39), поверхностный импеданс Z_s равен отношению продольной компоненты напряжённости электрического поля в точке на поверхности проводника к полному току. Для единицы длины линии мы имеем уравнение

$$E_s = RI + L \frac{dI}{dt} = (R - i\omega L) I, \quad (56)$$

где R — активное сопротивление переменному току, а L — внутренняя самоиндукция единицы длины. Таким образом

$$Z_s = R - i\omega L = \frac{\lambda_1}{2\pi a \sigma_1} \frac{J_0(\lambda_1 a)}{J_1(\lambda_1 a)} \quad (57)$$

и, следовательно,

$$\frac{R - i\omega L}{R_0} \simeq \frac{x_0 J_0(x_0 \sqrt{i})}{2 J_1(x_0 \sqrt{i})} e^{\frac{i\pi}{4}}, \quad (58)$$

где опять $x_0 = a \sqrt{\omega \mu_1 \sigma_1}$, а $R_0 = 1/\pi a^2 \sigma_1$ — сопротивление единицы длины постоянному току. Величину и фазу отношения бесселевых функций можно взять непосредственно из рис. 103. Если $x_0 \ll 1$, то мы получаем

$$\frac{R - i\omega L}{R_0} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{x_0}{2}\right)^2 i + \frac{1}{12} \left(\frac{x_0}{2}\right)^4 + \dots, \quad (59)$$

или

$$\frac{R}{R_0} \simeq 1 + \frac{1}{12} \left(\frac{x_0}{2}\right)^4, \quad \frac{\omega L}{R_0} \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{x_0}{2}\right)^2. \quad (60)$$

Если, как это имеет место при сильно выраженном скин-эффекте, $x_0 \gg 1$ то асимптотическое разложение выражения (58) приводит к формуле Релея

$$\frac{R - i\omega L}{R_0} \simeq \frac{1-i}{2} \frac{x_0}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} (1-i) \frac{a}{\delta}. \quad (61)$$

9.18. Волны в полых трубах. Общая теория, развитая в разделе 9.15, получила интересное приложение к распространению волн вдоль диэлектрических цилиндров, ограниченных извне средой с иной диэлектрической проницаемостью или же покрытых металлической оболочкой. Распространение электромагнитных волн по трубам впервые было подробно рассмотрено Релеем¹⁾, теория же распространения вдоль диэлектрического провода была рассмотрена на несколько лет позже Гондросом и Дебаем²⁾ и подтверждена

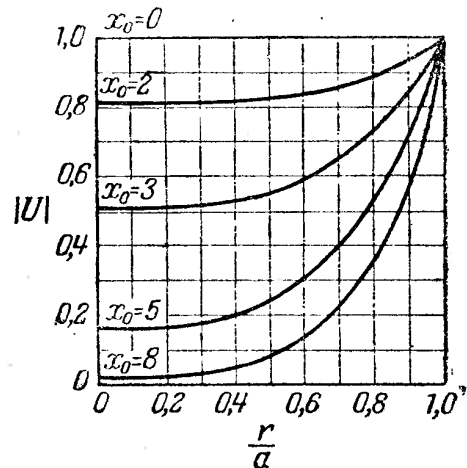


Рис. 105. Распределение тока в круговом цилиндре

$$u = \frac{J_0(x \sqrt{i})}{J_1(x \sqrt{i})},$$

$$x = r \sqrt{\omega \mu_1 \sigma_1}, \quad x_0 = a \sqrt{\omega \mu_1 \sigma_1}.$$

¹⁾ Rayleigh. *Phil. Mag.* 43, 125, 1897.

²⁾ Hondros and Debye, *Ann. Physik* 32, 465, 1910.

экспериментально Шривером¹⁾. До недавнего времени эти работы не имели большого практического значения из-за трудностей генерирования колебаний достаточно высокой частоты. Прогресс в развитии коротковолновых генераторов полностью устранил эту трудность, и возможности подобного способа направленной передачи волн были в 1936 г. независимо исследованы сотрудниками лаборатории Белла²⁾ и Барроу³⁾. С тех пор появились многочисленные исследования по этому вопросу.

При очень высоких частотах потери становятся заметными даже в лучших промышленных диэлектриках; поэтому вполне очевидны преимущества таких направляющих волн устройств, в которых диэлектрические опоры полностью устранены из поля. Этого можно достигнуть, направив волны по пологому цилиндру с хорошо проводящими стенками. Другим преимуществом подобных устройств является отсутствие полей рассеяния вне металлического цилиндра. При тех крайне высоких частотах, применение которых оказывается необходимым, даже очень тонкие покрытия ведут себя как идеальный экран. Мы можем считать поэтому, что полость цилиндра является идеальным диэлектриком, который окружён бесконечной проводящей средой. Возможные собственные виды волн даются в общем случае формулой (9). Если проводимость внешнего цилиндра конечна, то всегда будет иметь место некоторая связь между поперечно-магнитными и поперечно-электрическими видами волн, за исключением аксиально-симметричного случая. Однако практически проводимость металлов настолько велика, что этим эффектом можно пренебречь и рассматривать каждый вид волн как принадлежащий к какому-либо одному из этих типов. Волна, которая является по преимуществу поперечно-магнитной, обычно называется теперь E -волной (имеется продольная компонента вектора E), а волна, по преимуществу поперечно-электрическая, называется H -волной (имеется продольная компонента вектора H).

Прежде всего мы рассмотрим случай без рассеяния энергии, при котором, следовательно, проводимость внешней среды бесконечна. Возможные виды E - и H -волн даются корнями уравнения (13), и мы сразу же видим фундаментальное отличие от рассмотренного ранее случая сплошного металлического цилиндра. Выше мы отмечали, что на главных ветвях функций Ганкеля $H_0^{(1)}(v)$ и $H_1^{(1)}(v)$ нулей нет и что поэтому их отношение равно нулю только при $v = 0$. В результате мы получали основную волну, для которой $h \simeq k_2$. В случае конечной проводимости проводника дополнительные волны, которые могли быть возбуждены, тут же исчезли вследствие большого их затухания. Теперь же положение как раз обратное. Для действительных значений u функции $J_n(u)$ и $J'_n(u)$ имеют бесконечный ряд нулей на действительной оси, причём можно показать, что нули $J_n(u)$ и $J'_{n+1}(u)$ чередуются (разделяют друг друга)⁴⁾. Следовательно, $J_n(u)$ и $J'_n(u)$ не могут равняться нулю одновременно, и виды E -волн определяются уравнением

$$J_n(u) = 0, \quad (62)$$

тогда как виды H -волн даются корнями уравнения

$$J'_n(u) = 0, \quad (63)$$

¹⁾ Zahn, *Ann. Physik*, **49**, 907 1916; Schrieffer, *Ann. Physik*, **63**, 645, 1920.

²⁾ Southworth, *Bell System Tech. J.* **15**, 284, 1936; Carson, Mead and Schelkunoff, *ibid.*, p. 310.

³⁾ Barrow, *Proc. Inst. Radio Engrs.* **24**, 1928, 1936.

⁴⁾ Watson, *Theory of Bessel Functions*, гл. XV, Cambridge University Press, 1922. Р. О. Кузьмин, Бесселевы функции. ОНТИ, 1935, гл. III § 7. Прим. ред.)

где $u = \lambda_1 a = a \sqrt{k_1^2 - h^2}$. Далее, $u = 0$ не является корнем $J_0(u) = 0$. Это значение u удовлетворяет $J_n(u) = 0$ при $n > 0$, но в этом случае исчезает само поле, как это видно из уравнений (1), стр. 460. Следовательно, в полых трубах основной волны нет. Для того чтобы подобные проводники были практически пригодны для целей связи, необходимо показать, что затухание тех видов волн, которые допускаются соотношениями (62) и (63) и соответствуют дополнительным волнам предыдущего случая, относительно невелико.

Для каждого числа n уравнение (62) имеет бесчисленное количество корней, которые мы будем обозначать через u_{nm} . Постоянная распространения h_{nm} , соответствующая данному виду E -волны, будет, следовательно,

$$h_{nm} = \sqrt{k_1^2 - \left(\frac{u_{nm}}{a}\right)^2}. \quad (64)$$

Если k_1 действительно и больше чем u_{nm}/a , то h_{nm} также действительно, и волна распространяется без затухания. Если $k_1 < \frac{u_{nm}}{a}$, то h_{nm} — чисто мнимое, и затухание настолько велико, что данный вид волны сразу гасится. В этом смысле труба ведёт себя как высоко селективный волновой фильтр. Граница пропускания соответствует критической частоте ν_{nm} . Для диэлектрика $k_1 = a \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}$; следовательно

$$\nu_{nm} = \frac{u_{nm}}{2\pi a \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}. \quad (65)$$

Это же соотношение может быть выражено и через длину критической волны λ_{nm} :

$$\lambda_{nm} = \frac{2\pi a}{u_{nm}}, \quad (66)$$

где под λ_{nm} подразумевается длина волны при частоте ν_{nm} , распространяющейся в неограниченной среде k_1 . Если частота меньше ν_{nm} или же длина свободной волны больше λ_{nm} , то соответствующий вид волны гасится. Первые несколько корней (62) равны

$$\left. \begin{aligned} u_{01} &= 2,405, & u_{02} &= 5,520, & u_{03} &= 8,654, \\ u_{11} &= 3,832, & u_{12} &= 7,016, & \dots &, \\ u_{21} &= 5,136, & \dots &, & \dots &. \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Наибольшая свободная длина критической волны соответствует виду u_{01} и равна

$$\lambda_{01} = 2,61a. \quad (68)$$

Этот предел, грубо говоря, равен диаметру трубы, так что волноводы в виде полых труб могут быть практически использованы только в сантиметровом диапазоне волн.

Возможные виды поперечно-электрических или H -волн определяются тем же путём. Обозначая корни (63) через u'_{nm} , мы получаем

$$\left. \begin{aligned} u'_{01} &= 3,832, & u'_{02} &= 7,016, & \dots, \\ u'_{11} &= 1,84, & u'_{12} &= 5,33, & \dots \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Формулы для постоянной распространения и для критической частоты тождественны с (64) и (65). Оказывается, что из всех возможных видов H -волн H_{11} имеет наибольшую критическую длину свободной волны; однако на практике это преимущество перекрывается тем обстоятельством, что

она испытывает также и более сильное затухание, чем какие-либо другие виды волн.

Характер распространения вблизи критической частоты можно выяснить с помощью графиков фазовой и групповой скоростей. Напишем постоянную распространения какого-либо допустимого вида волн следующим образом:

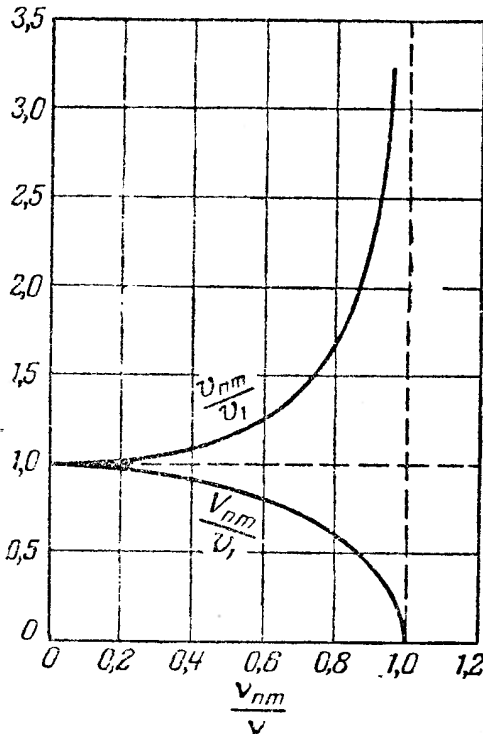


Рис. 106. Фазовая и групповая скорости в полой трубе, $v = 1/\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}$.

Зависимость фазовой и групповой скоростей от частоты распространяющихся волн показана на рис. 106. Мы видим, что фазовая скорость в трубе всегда больше, нежели в такой же безграничной среде. Она растёт с уменьшением частоты и вблизи критической частоты стремится к бесконечности. Групповая скорость падает с уменьшением частоты и при $v = v_{nm}$ равна нулю. Мы имеем, таким образом, нормальную дисперсию, которая вблизи критической частоты v_{nm} становится очень большой.

Компоненты поля внутри трубы могут быть выписаны непосредственно из уравнений (1) и (2), стр. 460—461. В силу (70) и (65) мы имеем

$$\lambda_1 = k_1 \frac{v_{nm}}{v} = \frac{u_{nm}}{a}. \quad (74)$$

Для всякого вида волн типа E поле будет

$$\left. \begin{aligned} E_r &= i a_{nm} \sqrt{\left(\frac{v}{v_{nm}}\right)^2 - 1} J'_n \left(\frac{r}{a} u_{nm}\right) \cos n\theta \\ E_\theta &= \pm i a_{nm} \frac{na}{r u_{nm}} \sqrt{\left(\frac{v}{v_{nm}}\right)^2 - 1} J_n \left(\frac{r}{a} u_{nm}\right) \sin n\theta \\ E_z &= a_{nm} J_n \left(\frac{r}{a} u_{nm}\right) \cos n\theta \end{aligned} \right\} e^{i h_{nm} z - i \omega t}, \quad (75)$$

$$\left. \begin{aligned} H_r &= \mp i a_{nm} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \frac{nv}{v_{nm}} \frac{a}{r u_{nm}} J_n \left(\frac{r}{a} u_{nm}\right) \cos n\theta \\ H_\theta &= i a_{nm} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \frac{v}{v_{nm}} J'_n \left(\frac{r}{a} u_{nm}\right) \sin n\theta \end{aligned} \right\} e^{i h_{nm} z - i \omega t}. \quad (76)$$

Для всякого вида волн типа H мы получим

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \pm ib_{nm} \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1} \frac{v}{v'_{nm}}} \frac{a}{ru'_{nm}} J_n \left(\frac{r}{a} u'_{nm} \right) \cos n\theta \\ E_\theta &= -ib_{nm} \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1} \frac{v}{v'_{nm}}} J'_n \left(\frac{r}{a} u'_{nm} \right) \sin n\theta \end{aligned} \right\} e^{ih'_{nm}z - i\omega t}, \quad (77)$$

$$\left. \begin{aligned} H_r &= ib_{nm} \sqrt{\left(\frac{v}{v'_{nm}} \right)^2 - 1} J'_n \left(\frac{r}{a} u'_{nm} \right) \sin n\theta \\ H_\theta &= \pm ib_{nm} \frac{na}{ru'_{nm}} \sqrt{\left(\frac{v}{v'_{nm}} \right)^2 - 1} J_n \left(\frac{r}{a} u'_{nm} \right) \cos n\theta \\ H_z &= b_{nm} J_n \left(\frac{r}{a} u'_{nm} \right) \sin n\theta \end{aligned} \right\} e^{ih'_{nm}z - i\omega t}. \quad (78)$$

Произвольные амплитуды a_{nm} и b_{nm} определяются условиями возбуждения. Существуют теоремы, аналогичные теоремам о разложениях Фурье, согласно которым функцию $f(r/a)$ можно разложить по бесселевым функциям. Предположим, что $f(t)$ — произвольная функция, определённая в интервале $0 \leq t \leq 1$ и такая, что существует интеграл $\int_0^1 |t^{\frac{1}{2}} f(t)| dt$. Обозначим

$$a_{nm} = \frac{2}{J_{n+1}^2(u_{nm})} \int_0^1 t f(t) J_n(tu_{nm}) dt. \quad (79)$$

Пусть $x = r/a$ — какая-либо точка интервала (x_1, x_2) , где $0 < x_1 < x_2 < 1$, причём полная вариация функции $f(t)$ в интервале (x_1, x_2) ограничена. Тогда ряд Фурье-Бесселя

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} J_n(xu_{nm}) = \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)] \quad (80)$$

будет сходиться и сумма его будет равна правой части (80)¹⁾. Из возбуждённых видов волн распространяться будут только те, у которых постоянные распространения h_{nm} действительны.

Заметим мимоходом, что при критической частоте $v = v_{nm}$ поток энергии имеет место только в поперечной плоскости; поток, параллельный оси цилиндра, отсутствует. Продольный импеданс для E -волн равен

$$Z_z = \frac{E_r}{H_\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{v_{nm}}{v} \right)^2} \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \quad (81)$$

и стремится к нулю при $v \rightarrow v_{nm}$.

Для H -волн имеем

$$Z_z = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_{nm}}{v} \right)^2}} \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}. \quad (82)$$

Подсчитаем теперь полный поток энергии в направлении оси трубы. Среднее по времени значение этого потока равно

$$\bar{W}_z = \int_0^a \int_0^{2\pi} \bar{S}_z r d\theta dr, \quad (83)$$

¹⁾ Watson, *loc. cit.*, гл. XVIII.

где

$$\bar{S}_z = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (E_r H_\theta^* - E_\theta H_r^*). \quad (84)$$

Для E -волн

$$\bar{S}_z = \frac{|a_{nm}|^2}{2} \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_1}} \sqrt{1 - \left(\frac{v_{nm}}{v}\right)^2} \left(\frac{v}{v_{nm}}\right)^2 \left\{ \left[J'_n \left(\frac{r}{a} u_{nm} \right) \right]^2 \frac{\sin^2 n\theta}{\cos^2 n\theta} + \right. \\ \left. + \left(\frac{na}{ru_{nm}} \right)^2 \left[J_n \left(\frac{r}{a} u_{nm} \right) \right]^2 \frac{\cos^2 n\theta}{\sin^2 n\theta} \right\}. \quad (85)$$

После интегрирования множители $\sin^2 n\theta$ и $\cos^2 n\theta$ дают коэффициент π . Пусть $r = ax$. Тогда, в силу рекуррентных формул (24) и (25), стр. 317, и условия $J_{nm}(u_{nm}) = 0$ мы получаем

$$\int_0^a \left\{ \left[J'_n \left(\frac{r}{a} u_{nm} \right) \right]^2 + \left(\frac{na}{ru_{nm}} \right)^2 \left[J_n \left(\frac{r}{a} u_{nm} \right) \right]^2 \right\} r dr = \\ = \frac{a^2}{2} \int_0^1 [J_{n-1}^2(xu_{nm}) + J_{n+1}^2(xu_{nm})] x dx = \frac{a^2}{2} J_{n+1}^2(u_{nm}) \quad (86)$$

и, следовательно,

$$\bar{W}_z = \frac{\pi}{4} |a_{nm}|^2 a^2 \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_1}} \sqrt{1 - \left(\frac{v_{nm}}{v}\right)^2} \left(\frac{v}{v_{nm}}\right)^2 J_{n+1}^2(u_{nm}). \quad (87)$$

Для H -волн аналогично

$$\bar{S}_z = \frac{1}{2} |b_{nm}|^2 \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \sqrt{1 - \left(\frac{v'_{nm}}{v}\right)^2} \left(\frac{v}{v'_{nm}}\right)^2 \left\{ \left[J'_n \left(\frac{r}{a} u'_{nm} \right) \right]^2 \frac{\sin^2 n\theta}{\cos^2 n\theta} + \right. \\ \left. + \left(\frac{na}{ru'_{nm}} \right)^2 \left[J_n \left(\frac{r}{a} u'_{nm} \right) \right]^2 \frac{\cos^2 n\theta}{\sin^2 n\theta} \right\}. \quad (88)$$

Пользуясь теми же рекуррентными формулами и соотношением $J'(u'_{nm}) = 0$, получаем после интегрирования для полного потока энергии

$$\bar{W}_z = \frac{\pi}{4} |b_{nm}|^2 a^2 \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \sqrt{1 - \left(\frac{v'_{nm}}{v}\right)^2} \left(\frac{v}{v'_{nm}}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{n}{u'_{nm}}\right)^2 \right] J_n^2(u'_{nm}). \quad (89)$$

Остаётся вопрос о рассеянии энергии. Если проводимость стенок конечна, то постоянные распространения h_{nm} имеют небольшую мнимую часть, которая обуславливает затухание поля по мере его перемещения вдоль оси трубы. Эти комплексные постоянные распространения должны быть определены теперь из уравнения (9). Вычисление до некоторой степени упрощается тем обстоятельством, что, благодаря большой проводимости внешнего металлического цилиндра, функции Ганкеля могут быть заменены их асимптотическими представлениями. Корни уравнения (9) будут поэтому лишь на небольшую величину отличаться от значений, получаемых из (62) и (63) для случая бесконечной проводимости. Их без труда можно определить, разлагая функции $J_n(u)$ и $J'_n(u)$ вблизи точек u_{nm} и u'_{nm} в ряды.

Однако более поучительным будет подсчёт затухания с помощью приближённого метода, описанного на стр. 469. Если проводимость бесконечна, то тангенциальные компоненты E_z и E_θ равны нулю при $r = a$; в случае металлического цилиндра глубина скин-слоя δ будет, очевидно,

намного меньше радиуса a . Тогда при $r=a$ с большой точностью можно принять

$$E_z \simeq \sqrt{\frac{\omega \mu_2}{\sigma_2}} H_0 e^{-\frac{i\pi}{4}}, \quad E_\theta \simeq -\sqrt{\frac{\omega \mu_2}{\sigma_2}} H_z e^{-\frac{i\pi}{4}}. \quad (90)$$

Таким образом мы можем подсчитать радиальный поток энергии, направленный в металл; поскольку этот поток идёт за счёт потока внутри трубы, мы тем самым можем найти и затухание. Напишем постоянную распространения в виде

$$h_{nm} = \alpha_{nm} + i\beta_{nm}. \quad (91)$$

Средний радиальный поток энергии на единицу длины трубы на поверхности цилиндра равен

$$\bar{W}_r = \int_0^{2\pi} \bar{S}_r a d\theta, \quad (92)$$

где

$$\bar{S}_r = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (E_\theta H_z^* - E_z H_\theta^*). \quad (93)$$

Для E -волн

$$\bar{W}_r = -\frac{\pi}{2} |a_{nm}|^2 a \frac{\varepsilon_1}{\mu_1} \sqrt{\frac{\omega \mu_2}{2\sigma_2}} \left(\frac{v}{v_{nm}}\right)^2 J_{n+1}^2(u_{nm}) e^{-2\beta_{nm}z}, \quad (94)$$

а для поперечно-электрических или H -волн

$$\begin{aligned} \bar{W}_r \simeq -\frac{\pi}{2} |b_{nm}|^2 a \sqrt{\frac{\omega \mu_2}{2\sigma_2}} \left[1 - \left(\frac{n}{u'_{nm}}\right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{nv}{u'_{nm} v'_{nm}}\right)^2 \right] J_n^2(u'_{nm}) e^{-2\beta'_{nm}z}. \end{aligned} \quad (95)$$

В том же приближении поток энергии вдоль оси попрежнему даётся выражениями (87) и (89), если их умножить на затухающий коэффициент в виде $\exp(-2\beta_{nm}z)$ или $\exp(-2\beta'_{nm}z)$. Энергия, рассеивающаяся на единицы длины, равна

$$\frac{d\bar{W}_z}{dz} = -2\beta_{nm} \bar{W}_z = \bar{W}_r. \quad (96)$$

Следовательно, коэффициент затухания для E -волн будет

$$\beta_{nm} = -\frac{1}{2} \frac{\bar{W}_r}{\bar{W}_z} \simeq \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi \varepsilon_1 \mu_2 v}{\mu_1 \sigma_2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_{nm}}{v}\right)^2}}, \quad (97)$$

а для H -волн

$$\beta'_{nm} \simeq \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi \varepsilon_1 \mu_2 v}{\mu_1 \sigma_2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v'_{nm}}{v}\right)^2}} \left[\left(\frac{v'_{nm}}{v}\right)^2 + \frac{\left(\frac{n}{u'_{nm}}\right)^2}{1 - \left(\frac{n}{u'_{nm}}\right)^2} \right]. \quad (98)$$

Результаты эти справедливы только в том случае, когда v больше критической частоты.

Если a или v стремятся к бесконечности, то коэффициент затухания для E -волн, стремится к пределу β_0 :

$$\beta_0 = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi \varepsilon_1 \mu_2 v}{\mu_1 \sigma_2}}, \quad (99)$$

который растёт обычным образом как квадратный корень из частоты. На рис. 107 нанесены отношения коэффициентов затухания β_{nm}/β_0 и β'_{nm}/β_0 в функции от ν_{01}/ν для двух первых видов E и H -волн. ν_{01} — критическая частота основной волны E_{01} . Вблизи критических частот затухание растёт очень быстро. Наиболее интересным является поведение кривой коэффициента затухания волны H_{01} , который уменьшается с увеличением частоты

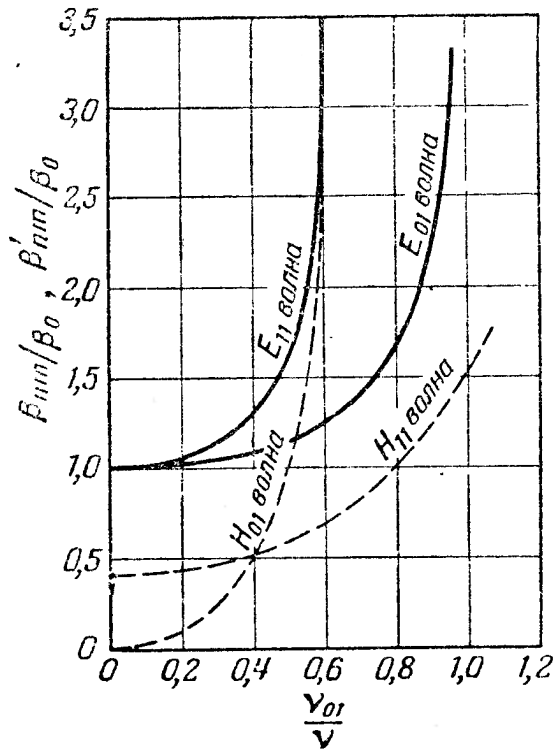


Рис. 107. Отношение коэффициентов затухания E -волн и H -волн; ν_{01} — критическая частота для волны E_{01} .

и при $\nu \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Дальнейшее исследование показывает, однако, что подобное anomальное поведение не является общим для всех полых труб, а присуще лишь определённым симметричным поперечным сечениям, как, например, круг или квадрат. Стабильность первых тонов по отношению к малым изменениям поперечного сечения была рассмотрена Бриллюэном¹⁾ и Чу²⁾ в связи с распространением волн в полых трубах эллиптического и прямоугольного поперечного сечения.

КОАКСИАЛЬНЫЕ ЛИНИИ

9. 19. Постоянная распространения.

Наиболее серьёзным недостатком полых волноводов является отсутствие основного вида колебаний и соответствующее ограничение длины волны, которая должна быть порядка диаметра трубы или меньше. Эту трудность можно преодолеть введением осевого проводника. В этом случае основной вид колебания существует

и делает возможным распространение волн всех частот в промежутке между двумя концентрическими цилиндрами. Для коаксиальных линий сохраняется основное достоинство полого волновода, заключающееся в том, что поле ограничено только внутренней его областью и тем самым исключено взаимодействие с внешними высокочастотными контурами. С другой стороны, потери подобного устройства выше из-за скин-эффекта в центральном проводнике и несовершенной изоляции в тех местах, где он закреплён.

На практике толщина внешнего цилиндра, конечно, не бесконечна. При низких частотах глубина проникновения поля может превышать толщину, и поле в этом случае будет проникать во внешнее пространство. Задача устранения «перекрёстных помех» между телефонными кабелями и помех, индуцированных в линиях связи экранированными силовыми кабелями, является весьма серьёзной. Мы не даём здесь, однако, исчерпывающего рассмотрения подобных проблем, поскольку нашей целью является лишь иллюстрация применений электромагнитной теории. Коаксиальные линии играют в настоящее время важную роль в радио и телефонной связи при частотах выше 100 кц/сек; в этом разделе рассмотрение и будет ограничено частотами такого порядка.

Мы предполагаем, таким образом, что глубина скин-слоя во много раз меньше толщины внешнего проводящего цилиндра, которую мы можем

¹⁾ Brillouin, *Electrical Communication*, 16, 350, 1938.

²⁾ Chu, *J. Applied Phys.* 9, 583, 1938. См. также Chu and Barrow, *Proc. Inst Radio Engrs.* 26, 1520, 1938.

поэтому принять бесконечной. На рис. 108 проводящие концентрические цилиндры (1) и (3) разделены диэлектриком (2), которому, однако, можно в случае надобности приписать небольшую проводимость. Внутренний и внешний радиусы равны соответственно a_1 и a_2 . Нам нужно рассмотреть только симметричные поперечно-магнитные виды волн (E -волны). Асимметричные виды хотя и могут быть возбуждены, но если длина их волны будет того же порядка, что и разность $a_2 - a_1$, то их постоянная распространения будет чисто мнимой и они тотчас же будут затухать. Компоненты поля можно взять непосредственно из формул (36) и (37), стр. 318, положив $n = 0$. Пусть I будет полный ток в центральном проводнике, а I_0 — его амплитуда

$$I = I_0 e^{ihz - i\omega t} \quad (1)$$

Тогда, точно так же, как и в разделе 9.17, для центрального проводника, при $r < a_1$, мы имеем

$$H_0^{(1)} = - \frac{ik_1^2 I}{2\pi a_1 \omega \mu_1 \epsilon_1} \frac{J_1(\lambda_1 r)}{J_1(\lambda_1 a_1)}. \quad (2)$$

Продольный и радиальный импедансы определяются соотношениями

$$E_r = Z_z H_0, \quad E_z = -Z_r H_0. \quad (3)$$

Для области (1), как и в разделе 9.17, мы имеем

$$Z_z^{(1)} = \frac{\omega \mu_1 h}{k_1^2}, \quad Z_r = \frac{\omega \mu_1 \lambda_1}{ik_1^2} \frac{J_0(\lambda_1 r)}{J_1(\lambda_1 r)}. \quad (4)$$

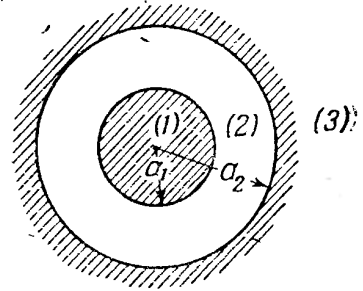


Рис. 108. Поперечное сечение коаксиальной линии.

Для того чтобы построить решение, соответствующее промежуточной области (2), которое можно было бы согласовать с условиями как на внутренней, так и на внешней границе, необходимо использовать две независимые функции Бесселя. Какие именно — безразлично, так как каждое решение может быть представлено в виде линейной комбинации двух любых независимых решений. Если радиусы a_1 и a_2 очень велики, то область (2) фактически ограничена двумя параллельными плоскими поверхностями. При этих условиях для построения решения мы, конечно, должны были бы применить простые гармонические функции — косинус и синус. Напомним теперь (стр. 317), что если аргумент ρ становится очень большим, то $\sqrt{\rho} J_0(\rho) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right)$, в то время как функция второго рода $\sqrt{\rho} N_0(\rho) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\rho - \frac{\pi}{4}\right)$. Следовательно, для области $a_1 < r < a_2$ мы должны написать

$$H_0^{(2)} = - \frac{ik_2^2}{\omega \mu_2 \lambda_2} [AJ_1(\lambda_2 r) + BN_1(\lambda_2 r)] e^{ihz - i\omega t}, \quad (5)$$

где A и B — пока неопределённые коэффициенты. Компоненты вектора $E^{(2)}$ получаются затем из формул (3) и из соотношений

$$\left. \begin{aligned} Z_z^{(2)} &= \frac{\omega \mu_2 h}{k_2^2}, \\ Z_r^{(2)} &= \frac{\omega \mu_2 \lambda_2}{ik_2^2} \frac{AJ_0(\lambda_2 r) + BN_0(\lambda_2 r)}{AJ_1(\lambda_2 r) + BN_1(\lambda_2 r)}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Во внешнем цилиндре требуемое поведение поля на бесконечности получится, если мы возьмём, как и в разделе 9.15 функции Ганкеля.

Таким образом, при $r > a_2$

$$H_0^{(3)} = -\frac{ik_3^2}{\omega\mu_3\lambda_3} CH_1^{(1)}(\lambda_3 r) e^{i\lambda_3 z - i\omega t}, \quad (7)$$

$$Z_z^{(3)} = \frac{\omega\mu_3 h}{k_3^2}, \quad Z_r^{(3)} = \frac{\omega\mu_3 H_0^{(1)}(\lambda_3 r)}{ik_3^2 H_1^{(1)}(\lambda_3 r)}. \quad (8)$$

Коэффициенты $A_1 B$ и C определяются из граничных условий. Как при $r = a_1$, так и при $r = a_2$ должны быть непрерывны z — компоненты вектора E и θ — компоненты вектора H . Эти два условия равносильны требованию непрерывности радиальных импедансов. Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} Z_r^{(1)} &= Z_r^{(2)} \quad \text{при } r = a_1, \\ Z_r^{(2)} &= Z_r^{(3)} \quad \text{при } r = a_2 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mu_1 \lambda_1}{k_1^2} \frac{J_0(\lambda_1 a_1)}{J_1(\lambda_1 a_1)} &= \frac{\mu_2 \lambda_2}{k_2^2} \frac{AJ_0(\lambda_2 a_1) + BN_0(\lambda_2 a_1)}{AJ_1(\lambda_2 a_1) + BN_1(\lambda_2 a_1)}, \\ \frac{\mu_3 \lambda_3}{k_3^2} \frac{H_0^{(1)}(\lambda_3 a_2)}{H_1^{(1)}(\lambda_3 a_2)} &= \frac{\mu_2 \lambda_2}{k_2^2} \frac{AJ_0(\lambda_2 a_2) + BN_0(\lambda_2 a_2)}{AJ_1(\lambda_2 a_2) + BN_1(\lambda_2 a_2)} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Эти два однородных относительно A и B уравнения дают нам лишь их отношение, но не независимые значения. Из (10) следует

$$\begin{aligned} -\frac{A}{B} &= \frac{N_0(\lambda_2 a_1) - \frac{\mu_1 \lambda_1 k_2^2}{\mu_2 \lambda_2 k_1^2} \frac{J_0(\lambda_1 a_1)}{J_1(\lambda_1 a_1)} N_1(\lambda_2 a_1)}{J_0(\lambda_2 a_1) - \frac{\mu_1 \lambda_1 k_2^2}{\mu_2 \lambda_2 k_1^2} \frac{J_0(\lambda_1 a_1)}{J_1(\lambda_1 a_1)} J_1(\lambda_2 a_1)} = \\ &= \frac{N_0(\lambda_2 a_2) - \frac{\mu_3 \lambda_3 k_2^2}{\mu_2 \lambda_2 k_3^2} \frac{H_0^{(1)}(\lambda_3 a_2)}{H_1^{(1)}(\lambda_3 a_2)} N_1(\lambda_2 a_2)}{J_0(\lambda_2 a_2) - \frac{\mu_3 \lambda_3 k_2^2}{\mu_2 \lambda_2 k_3^2} \frac{H_0^{(1)}(\lambda_3 a_2)}{H_1^{(1)}(\lambda_3 a_2)} J_1(\lambda_2 a_2)}. \quad (11) \end{aligned}$$

Корнями детерминанта этих уравнений будут характеристические значения h_{0m} ($m = 1, 2, 3, \dots$), которые и определяют допустимые симметричные виды волн.

9. 20. Бесконечная проводимость. Выражение (11) настолько сложно, что для определения корней приходится прибегать к приближенным методам. Рассмотрим сначала относительно простой случай, когда внешний и внутренний цилиндры являются идеально проводящими. Напомним, что $\lambda_1^2 = k_1^2 - h^2$, а $\lambda_3^2 = k_3^2 - h^2$. Мнимая часть h должна оставаться конечной, так как в противном случае распространения волны вообще не будет. Следовательно, когда проводимость стремится к бесконечности, $\lambda_1 \rightarrow k_1$, $\lambda_3 \rightarrow k_3$, в то же время абсолютные значения k_1 и k_2 стремятся к бесконечности и (11) принимает вид

$$-\frac{A}{B} = \frac{N_0(\lambda_2 a_1)}{J_0(\lambda_2 a_1)} = \frac{N_0(\lambda_2 a_2)}{J_0(\lambda_2 a_2)}. \quad (12)$$

Если λ_2 очень мало, то $J_0(\lambda_2 a_1) \simeq J_0(\lambda_2 a_2) \simeq 1$; для функций же N_0 мы воспользуемся приближенными выражениями (12), стр. 316. Тогда становится очевидным, что главный корень (12) соответствует $h = 0$ или

$$h = k_2. \quad (13)$$

Таким образом, в этом случае *имеется основная волна, постоянная распространения которой совпадает с постоянной распространения в той среде, которая ограничена двумя бесконечно проводящими цилиндрами.*

Кроме того, имеются также и дополнительные волны. Если λ_2 очень велико, то справедливы асимптотические представления (18) и (19), стр. 317, и уравнение (12) принимает вид

$$\sin \lambda_2 (a_2 - a_1) \simeq 0. \quad (14)$$

Корни этого уравнения равны

$$h_{0m} \simeq \sqrt{k_2^2 - \left(\frac{m\pi}{a_2 - a_1}\right)^2} \quad (m = 1, 2, 3, \dots). \quad (15)$$

Если k_2 действительно и больше, чем $\frac{m\pi}{a_2 - a_1}$, то h_{0m} действительно, и соответствующая волна распространяется без затухания. Но если k_2 меньше $\frac{m\pi}{a_2 - a_1}$, то h_{0m} является чисто мнимым, и затухание настолько велико, что волны сразу же гасятся. Все эти результаты могут быть сопоставимы с результатами, полученными для полых труб в разделе 9.18. Критические частоты получаются равными

$$\nu_{0m} \simeq \frac{m\pi}{2\pi (a_2 - a_1) \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}}, \quad (16)$$

а критические длины волн равны

$$\lambda_{0m} = \frac{2(a_2 - a_1)}{m}. \quad (17)$$

В практических линиях связи расстояние $a_2 - a_1$ обычно не больше нескольких сантиметров, и дополнительные волны совершенно исключены. Те же рассуждения применимы и к асимметричным видам волн, так что далее мы займёмся только основной волной.

При $\lambda_2 \rightarrow 0$ имеем $N_1(\lambda_2 r) \rightarrow -\frac{2}{\pi \lambda_2 r}$ и, следовательно, ввиду (12) первым членом в (5) можно пренебречь. Таким образом, для достаточно малых значений λ_2 магнитное поле между проводниками будет:

$$H_0^{(2)} = -\frac{2ik_2^2}{\pi \omega \mu_2 \lambda_2^2} \frac{B}{r} e^{ik_2 z - i\omega t}. \quad (18)$$

Большая часть тока проводимости течёт по поверхности внешнего и внутреннего цилиндров. Если промежуточный диэлектрик обладает некоторой проводимостью, то будет также и поперечная составляющая тока от одного цилиндра к другому, в результате чего получится уменьшение амплитуды тока вдоль линии. Продольный ток, текущий по внутреннему цилиндру, может быть найден непосредственно из закона Ампера. Он равен $2\pi a_1 H_0^{(2)}$, где $H_0^{(2)}$ взято при $r = a_1$. Следовательно,

$$B = \frac{i\omega \mu_2 \lambda_2^2}{4k_2^2} I_0, \quad (19)$$

где I_0 — амплитуда тока проводимости вдоль внутреннего проводника. Таким образом

$$H_0^{(2)} = \frac{I_0}{2\pi r} e^{ik_2 z - i\omega t} = \frac{I}{2\pi r}, \quad (20)$$

$$Z_z^{(2)} = \frac{\omega \mu_2}{k_2}, \quad Z_r^{(2)} = 0, \quad (21)$$

$$E_r^{(2)} = \frac{\omega \mu_2}{2\pi k_2} \frac{I}{r}, \quad E_z^{(2)} = 0. \quad (22)$$

Поперечное напряжение в какой-либо точке линии по определению равно

$$V = \int_{a_1}^{a_2} E_r^{(2)} dr = \frac{\omega \mu_2}{2\pi k_2} \ln \frac{a_2}{a_1} I, \quad (23)$$

отношение же поперечного напряжения к току в бесконечной линии называется её *характеристическим импедансом* Z_c :

$$Z_c = \frac{Z_0}{2\pi} \ln \frac{a_2}{a_1}, \quad (24)$$

где $Z_0 = \omega \mu_2 / k_2$ — внутренний импеданс среды с постоянной распространения k_2 , определённый формулой (83), стр. 252.

Рассмотрим линию с распределёнными параметрами, схематически представленную на рис. 109. L — последовательная самоиндукция, R — последовательное сопротивление, C — параллельная ёмкость, G — утечка; все величины взяты на единицу длины линии и предполагаются равномерно распределёнными. Легко показать, что уравнения, которым подчинены распределения тока и поперечного напряжения вдоль линии, будут

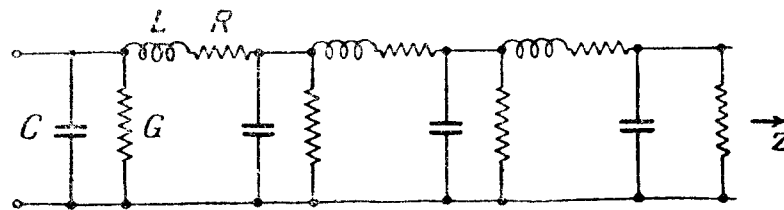


Рис. 109. Схема передаточной линии с распределёнными параметрами.

довательное сопротивление, C — параллельная ёмкость, G — утечка; все величины взяты на единицу длины линии и предполагаются равномерно распределёнными. Легко показать, что уравнения, которым подчинены распределения тока и поперечного напряжения вдоль линии, будут

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -L \frac{\partial I}{\partial t} - RI = -(R - i\omega L) I, \quad (25)$$

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -C \frac{\partial V}{\partial t} - GV = -(G - i\omega C) V. \quad (26)$$

Величина $Z = R - i\omega L$ — последовательный импеданс, а $Y = G - i\omega C$ — шунтовой адмитанс линии. Разрешая совместно (25) и (26), мы получим так называемое «уравнение телеграфистов»:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - (LG + RC) \frac{\partial V}{\partial t} - RGV = 0, \quad (27)$$

или

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = ZYV \quad (28)$$

и идентичное уравнение для тока. Постоянная распространения равна $i\sqrt{YZ}$, а характеристический импеданс, как и в разделе 5.6, равен $\sqrt{Z/Y}$.

Если мы продифференцируем теперь (26) по z , то получим

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{i\omega \mu_2}{2\pi} \ln \frac{a_2}{a_1} I. \quad (29)$$

В рассматриваемом нами случае последовательное сопротивление равно нулю; отсюда получается, что последовательная индуктивность на единицу длины коаксиальной линии равна

$$L = \frac{\mu_2}{2\pi} \ln \frac{a_2}{a_1} \text{ генри/метр}. \quad (30)$$

Постоянная распространения равна k_2 , откуда находим, что шунтовой адмитанс равен

$$Y = \frac{2\pi k_2^2}{i\omega\mu_2} \frac{1}{\ln \frac{a_2}{a_1}} = \frac{2\pi}{\ln \frac{a_2}{a_1}} (\sigma_2 - i\omega\epsilon_2). \quad (31)$$

Утечка и параллельная ёмкость равны, следовательно,

$$G = \frac{2\pi\sigma_2}{\ln \frac{a_2}{a_1}} \text{ ом}^{-1} \text{ метр}^{-1}, \quad C = \frac{2\pi\epsilon_2}{\ln \frac{a_2}{a_1}} \text{ фарад. метр}^{-1}. \quad (32)$$

Отсюда видно, что L и C удовлетворяют соотношению

$$LC = \epsilon_2 \mu_2. \quad (33)$$

9.21. Конечная проводимость. Практически цилиндрические проводники изготавливаются из металла, проводимость которого хотя и не бесконечна, но очень велика. Распределение поля между коаксиальными цилиндрами с большой точностью такое же, как и в случае идеальных проводников, но, для того чтобы учесть дополнительное затухание, постоянная распространения должна быть несколько изменена. Для упрощения задачи мы предположим, что внутренний и внешний цилиндры сделаны, как это обычно и бывает, из одного и того же материала. Тогда

$$\left. \begin{aligned} k_1^2 &= k_3^2 \simeq i\omega\mu_1\sigma_1, \\ \lambda_1 &= \lambda_3 \simeq k_1. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Так как λ_2 , хотя теперь и не равно нулю, но всё ещё очень мало, приближение (12), стр. 317, справедливо:

$$\left. \begin{aligned} N_0(\lambda_2 a_1) &\simeq -\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma \lambda_2 a_1}, \\ N_1(\lambda_2 a_1) &\simeq -\frac{2}{\pi} \frac{1}{\lambda_2 a_1}, \\ \gamma &= 1,781. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Применительно к (11) мы имеем

$$\frac{\mu_1 \lambda_1 k_2^2}{\mu_2 \lambda_2 k_1^2} N_1(\lambda_2 a_1) \simeq -\frac{2}{\pi} \frac{k_2^2}{\mu_2 \lambda_2^2} \sqrt{\frac{\mu_1}{i\omega\sigma_1}} \frac{1}{a_1}, \quad (36)$$

$$\frac{\mu_1 \lambda_1 k_2^2}{\mu_2 \lambda_2 k_1^2} J_1(\lambda_2 a_1) \simeq \frac{k_2^2}{2\mu_2} \sqrt{\frac{\mu_1}{i\omega\sigma_1}} a_1. \quad (37)$$

Хотя мы и допустили возможность наличия некоторой проводимости у промежуточного диэлектрика k_2 , но при оценке порядков величин ею можно пренебречь. Тогда, полагая $k_2 \simeq \omega/c$, мы получаем для меди

$$\frac{k_2^2}{2\mu_2} \sqrt{\frac{\mu_1}{\omega\sigma_1}} \simeq 10^{-17} \gamma^{3/2}. \quad (38)$$

Паматуя, что a_1 и a_2 измеряются в метрах и, следовательно, также являются малыми величинами, мы видим, что знаменатели детерминантного уравнения (11) могут быть заменены единицей и поэтому

$$\begin{aligned} -\frac{A}{B} \frac{\pi}{2} &\simeq -\ln \frac{2}{\gamma \lambda_2 a_1} + \frac{k_2^2}{\mu_2 \lambda_2^2} \sqrt{\frac{\mu_1}{i\omega\sigma_1}} \frac{1}{a_1} \frac{J_0(\lambda_1 a_1)}{J_1(\lambda_1 a_1)} \simeq \\ &\simeq -\ln \frac{2}{\gamma \lambda_2 a_2} + \frac{k_2^2}{\mu_2 \lambda_2^2} \sqrt{\frac{\mu_1}{i\omega\sigma_1}} \frac{1}{a_2} \frac{H_0^{(1)}(\lambda_1 a_2)}{H_1^{(1)}(\lambda_1 a_2)}, \end{aligned} \quad (39)$$

откуда мы получаем

$$\lambda_2^2 \simeq \frac{1}{\ln \frac{a_2}{a_1}} \frac{k_2^2}{\mu_2} \sqrt{\frac{\mu_1}{i\omega\sigma_1}} \left[\frac{1}{a_1} \frac{J_0(x_1 \sqrt{i})}{J_1(x_1 \sqrt{i})} - \frac{1}{a_2} \frac{H_0^{(1)}(x_2 \sqrt{i})}{H_1^{(1)}(x_2 \sqrt{i})} \right], \quad (40)$$

$$x_1 = a_1 \sqrt{\omega\mu_1\sigma_1}, \quad x_2 = a_2 \sqrt{\omega\mu_1\sigma_1}. \quad (41)$$

Но $\lambda_2^2 = k_2^2 - h^2$ и, следовательно, окончательно

$$h = k_2 - \frac{k_2}{2\mu_2} \sqrt{\frac{\mu_1}{i\omega\sigma_1}} \frac{1}{\ln \frac{a_2}{a_1}} \left[\frac{1}{a_1} \frac{J_0(x_1 \sqrt{i})}{J_1(x_1 \sqrt{i})} - \frac{1}{a_2} \frac{H_0^{(1)}(x_2 \sqrt{i})}{H_1^{(1)}(x_2 \sqrt{i})} \right] = k_2(1 - \Delta k). \quad (42)$$

Приближённое значение отношения A/B может быть теперь из (39) подставлено в (5) для определения магнитного поля в какой-либо точке диэлектрика. Мы получаем

$$H_0^{(2)} \simeq \frac{2}{\pi} \frac{ik_2^2}{\omega\mu_2\lambda_2^2} B \left[\frac{1}{r} + \frac{k_2^2}{2\mu_2} \sqrt{\frac{\mu_1}{i\omega\sigma_1}} \frac{J_0(x_1 \sqrt{i})}{J_1(x_1 \sqrt{i})} \frac{r}{a_1} \right] e^{ihz - i\omega t}. \quad (43)$$

Логарифмический член как явно малый был отброшен. Проводимость диэлектрика σ_2 мы предполагаем очень малой, если только она вовсе не равна нулю. Второй член в (43) возрастает, следовательно, в основном пропорционально частоте в степени три вторых. Простой подсчёт показывает, что, как и в (38), этим вторым членом можно пренебречь по сравнению с первым даже для частот порядка 10^{10} циклов/сек, если только a_1 не очень мало или r не очень велико. Постоянная B определяется из условия, что на поверхности внутреннего проводника $2\pi a_1 H_0^{(2)} = I$, так что с большой точностью

$$H_0^{(2)} \simeq \frac{1}{2\pi r}, \quad (44)$$

как и в предыдущем случае идеального проводника. Физически это означает, что токами проводимости и токами смещения в диэлектрике можно пренебречь по сравнению с токами проводимости в центральном проводнике.

Радиальное электрическое поле будет

$$E_r^{(2)} = \frac{\omega\mu_2 h}{k_2^2} H_0^{(2)} \simeq \frac{\omega\mu_2}{k_2} (1 - \Delta k) \frac{I}{2\pi r}, \quad (45)$$

а поперечное напряжение равно

$$V = \int_{a_1}^{a_2} E_r^{(2)} dr = \frac{\omega\mu_2}{2\pi k_2} (1 - \Delta k) \ln \frac{a_2}{a_1} I. \quad (46)$$

Для характеристического импеданса это даёт

$$Z_c = \frac{\omega\mu_2}{2\pi k_2} (1 - \Delta k) \ln \frac{a_2}{a_1}. \quad (47)$$

Последовательный импеданс и шунтовый адмитанс получаются непосредственно из соотношений

$$\left. \begin{aligned} h^2 &= -YZ, & Z_c^2 &= \frac{Z}{Y}, \\ Z &= -ihZ_c, & Y &= -i \frac{h}{Z_c}. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Приближённое выражение для шунтового адмитанса, дающее практически вполне достаточную точность, равно

$$Y \simeq \frac{2\pi k_2^2}{i\omega\mu_2} \frac{1}{\ln \frac{a_2}{a_1}} = \frac{2\pi}{\ln \frac{a_2}{a_1}} (\sigma_2 - i\omega\varepsilon_2), \quad (49)$$

т. е. точно тому же выражению, что и в случае идеальных проводников. С другой стороны, для последовательного импеданса мы получаем

$$Z \simeq -\frac{i\omega\mu_2}{2\pi} (1 - \Delta k)^2 \ln \frac{a_2}{a_1} = R - i\omega L. \quad (50)$$

С технической точки зрения поведение линий полностью определено теперь уравнениями (25) и (26).

Если, как это обычно бывает, $x_1 \gg 1$, то цилиндрические функции можно заменить их асимптотическими значениями

$$\frac{J_0(x_1 \sqrt{i})}{J_1(x_1 \sqrt{i})} \simeq -i, \quad \frac{H_0^{(1)}(x_2 \sqrt{i})}{H_1^{(1)}(x_2 \sqrt{i})} \simeq +i. \quad (51)$$

Тогда

$$\Delta k = -\frac{(1+i)}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\mu_2} \sqrt{\frac{\mu_1}{\omega\sigma_1}} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) \frac{1}{\ln \frac{a_2}{a_1}}. \quad (52)$$

Этот поправочный член настолько мал, что $(\Delta k)^2$ можно отбросить. Последовательное сопротивление и индуктивность будут тогда

$$\left. \begin{aligned} R &\simeq \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{\frac{\mu_1}{\sigma_1}} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) \frac{\text{ом}}{\text{метр}}, \\ L &\simeq \frac{\mu_2}{2\pi} \left[\ln \frac{a_2}{a_1} + \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{\mu_2} \sqrt{\frac{\mu_1}{\sigma_1}} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) \right] \frac{\text{генри}}{\text{метр}}. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Для проводников из меди $\sigma_1 = 5,8 \cdot 10^7 \frac{1}{\text{ом} \cdot \text{метр}}$, и мы получаем

$$\left. \begin{aligned} R &\simeq 0,416 \cdot 10^{-7} \sqrt{\frac{1}{\sigma_1}} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) \frac{\text{ом}}{\text{метр}}, \\ L &\simeq 2 \cdot 10^{-7} \left[\ln \frac{a_2}{a_1} + \frac{1}{30,2} \sqrt{\frac{1}{\sigma_1}} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) \right] \frac{\text{генри}}{\text{метр}}. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Затухание определяется из постоянной распространения

$$h = k_2 (1 - \Delta k) = \alpha + i\beta.$$

При очень больших частотах потери в диэлектрических перегородках очень быстро возрастают, но при частотах меньше мега-цикла утечкой правильно сконструированной линии можно обычно пренебречь. Если мы положим, что $k_2 = \omega \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}$, то выражение для коэффициента затухания примет вид

$$\beta \simeq \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega\mu_1\varepsilon_2}{\sigma_1\mu_2}} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right) \frac{1}{\ln \frac{a_2}{a_1}}. \quad (55)$$

В инженерной практике принято выражать затухание через логарифм отношения мощностей. Десятикратный десятичный логарифм отношения выходящей мощности к входящей даёт нам затухание в децибелах. Поскольку отношение мощностей равно $\exp(-2\beta z)$, то затухание на единицу длины линии в децибелах будет

$$N_{\text{дб}} = -20 \beta \lg e = -8,686 \beta \frac{\text{децибел}}{\text{метр}}. \quad (56)$$

КОЛЕБАНИЯ СФЕРЫ

9.22. Собственные колебания. Рассмотренные выше задачи с плоскостью и цилиндром касались бесконечных поверхностей, которые служили в качестве направляющих для бегущих волн. Сфера даёт нам пример тела, ограниченного замкнутой поверхностью, внутри которой может существовать система стоячих волн.

Мы будем предполагать, что сфера радиуса a , характеризующаяся в отношении электрических свойств постоянной k_1 , помещена в неограниченную однородную среду k_2 . Поле мы будем выражать через сферические волновые функции, рассмотренные в разделах 7.11—7.14. Согласно уравнению (12), стр. 347,

$$\mathbf{E} = - \sum_n (a_n \mathbf{M}_n + b_n \mathbf{N}_n), \quad \mathbf{H} = - \sum_n \frac{k}{i\omega\mu} (a_n \mathbf{N}_n + b_n \mathbf{M}_n). \quad (1)$$

Индекс n стоит здесь вместо всех индексов, которых в данном случае имеется три. Функции могут быть нечётными или чётными, и индексы m и n определяют число узлов относительно сферических углов φ и θ . Напомним, что радиальная компонента любой функции M_{emn} равна нулю. Следовательно,

если возбуждены только члены с b_n , а все a_n равны нулю, то электрический вектор поля имеет радиальную компоненту, магнитный же вектор всегда перпендикулярен к радиусу-вектору. На поверхности сферы должны быть поэтому распределены электрические заряды. *Колебания, амплитуды которых выражаются только через коэффициенты b_n , являются колебаниями электрического типа.* Раньше мы их называли также *поперечно-магнитными* или *E-волнами*. Если, наоборот, возбуждены только коэффициенты a_n , то поле будет такое, какое создали бы переменные магнитные заряды, расположенные на поверхности сферы, и называется полем *магнитного типа*. Эти колебания можно также назвать *поперечно-электрическими* или *H-волнами*.

Рассмотрим сначала колебание магнитного типа

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= - (A_{emn} \mathbf{M}_{emn} + A_{omn} \mathbf{M}_{omn}), \\ \mathbf{H} &= - \frac{k}{i\omega\mu} (A_{emn} \mathbf{N}_{emn} + A_{omn} \mathbf{N}_{omn}). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Коэффициенты A_{emn} пока что произвольны, а частота ω вскоре определится из граничных условий. Функции M_{emn} и N_{emn} должны быть выбраны так, чтобы поле было конечно в центре и регулярно на бесконечности. Согласно (11) и (12), стр. 367, при $R < a$ мы имеем

$$\left. \begin{aligned} E_R^i &= 0, \\ E_\theta^i &= - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{mn}^i}{\partial \varphi} j_n(k_1 R) e^{-i\omega t}, \\ E_\varphi^i &= - \frac{\partial Y_{mn}^i}{\partial \theta} j_n(k_1 R) e^{-i\omega t}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} H_R^i &= - \frac{n(n+1)}{i\omega\mu_1} Y_{mn}^i \frac{1}{R} j_n(k_1 R) e^{-i\omega t}, \\ H_\theta^i &= - \frac{1}{i\omega\mu_1} \frac{\partial Y_{mn}^i}{\partial \theta} \frac{1}{R} [k_1 R j_n(k_1 R)]' e^{-i\omega t}, \\ H_\varphi^i &= - \frac{1}{i\omega\mu_1} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{mn}^i}{\partial \varphi} \frac{1}{R} [k_1 R j_n(k_1 R)]' e^{-i\omega t}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где Y_{mn}^i — тессеральная сферическая функция

$$Y_{mn}^i = (A_{emn}^i \cos m\varphi + A_{omn}^i \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta), \quad (5)$$

а штрихи в (4) означают дифференцирование по аргументу $k_1 R$.

Внешнее поле в области $R > a$ получается заменой в (3) и (4) Y_{mn}^i на Y_{mn}^e :

$$Y_{mn}^e = (A_{emn}^e \cos m\varphi + A_{omn}^e \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta), \quad (6)$$

k_1 и μ_1 на k_2 и μ_2 и $j_n(k_1 R)$ на $h_n^{(1)}(k_2 R)$.

На поверхности сферы непрерывность тангенциальных компонент приводит к соотношениям

$$\left. \begin{aligned} E_\theta^i &= E_\theta^e, & E_\varphi^i &= E_\varphi^e, \\ H_\theta^i &= H_\theta^e, & H_\varphi^i &= H_\varphi^e \end{aligned} \right\} \quad (r = a), \quad (7)$$

которые приводятся к условиям

$$\left. \begin{aligned} A_{emn}^i j_n(k_1 a) &= A_{emn}^e h_n^{(1)}(k_2 a), \\ \frac{1}{\mu_1} A_{emn}^i [k_1 a j_n(k_1 a)]' &= \frac{1}{\mu_2} A_{emn}^e [k_2 a h_n^{(1)}(k_2 a)]' \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

и к паре таких же условий для нечётных коэффициентов A_{omn}^i и A_{omn}^e . Положим

$$\rho = k_2 a, \quad k_1 = N k_2, \quad k_1 a = N \rho. \quad (9)$$

Условия (8) выполняются только для дискретного ряда характеристических значений ρ_{ns} , являющихся корнями трансцендентного уравнения

$$\frac{[N \rho j_n(N \rho)]'}{\mu_1 j_n(N \rho)} = \frac{[\rho h_n^{(1)}(\rho)]'}{\mu_2 h_n^{(1)}(\rho)}. \quad (10)$$

Поскольку допустимые значения ρ образуют дискретный ряд, постольку мы имеем соответствующий ряд собственных частот или собственных колебаний. Согласно (9),

$$\rho_{ns}^2 = (\omega_{ns}^2 \varepsilon_2 \mu_2 + i \omega_{ns} \mu_2 \sigma_2) a^2; \quad (11)$$

следовательно, собственные частоты магнитных колебаний будут

$$\omega_{ns} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_2 \rho_{ns}^2}{a^2} - \frac{\mu_2^2 \sigma_2^2}{4}} - i \frac{\mu_2 \sigma_2}{2}. \quad (12)$$

Как и во всякой задаче о характеристических значениях, амплитуды допустимых видов колебаний определяются начальным распределением поля. Предположим, что в момент $t = 0$ радиальная компонента H^i является заданной функцией вида $f_1(\theta, \varphi) f_2(k)$. Прежде всего мы замечаем, что собственные частоты ω_{ns} не зависят от распределения по углу φ . Как и в (18), стр. 355, коэффициенты A_{omn}^i однозначно определены функцией $f(\theta, \varphi)$. Ряд

$$H_R^i = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta(n+1)}{i \omega_{ns} \mu_1} Y_n^i \frac{j_n(k_1 R)}{R} e^{-i \omega_{ns} t}, \quad (13)$$

где $Y_n^i = \sum_{m=0}^{\infty} Y_{mn}^i$ будет тогда зависеть требуемым образом от θ и φ при $t = 0$.

Мы можем построить бесконечное число таких рядов — по одному для каждого корня s уравнения (10); каждый из этих рядов можно умножить на свой

коэффициент A_s^i и произвести суммирование по s :

$$H_R^i = - \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_s^i \frac{n(n+1)}{i\omega_{ns}\mu_1} Y_n^i \frac{j_n(k_1 R)}{R} e^{-i\omega_{ns}t}, \quad (14)$$

где A_s^i должны быть определены так, чтобы в момент $t=0$ (14) переходило в $f_2(R)$. Представление произвольной функции в виде ряда Фурье-Бесселя рассматривается у Ватсона¹⁾; теория может быть применена и к сферическим бесселевым функциям $j_n(k_1 R)$. Заметим, наконец, что можно до суммирования умножить каждое частное решение на $k_1 R$ и затем продифференцировать по этому аргументу. Коэффициенты A_{emn}^i менять не нужно, но суммирование по s надо видоизменить таким образом, чтобы удовлетворить условиям, наложенным на H_0^i или на H_φ^i . Таким путём находится поле, которое удовлетворяет условиям, заданным внутри сферы для момента $t=0$. Множитель $\exp(-i\omega_{ns}t)$ определяет поведение этого поля во все последующие моменты времени, а в силу теоремы раздела 9.2 об однозначности решения поле определено также и для всех внешних точек. Колебания электрического типа совершенно не зависят от магнитных, но поля и собственные частоты определяются совершенно так же. В этом случае вместо (2) мы имеем

$$\left. \begin{aligned} E &= -(B_{emn} N_{emn} + B_{omn} N_{omn}), \\ H &= -\frac{k}{i\omega\mu} (B_{emn} M_{emn} + B_{omn} M_{omn}), \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

и поле в какой-либо внутренней точке $R < a$ будет

$$\left. \begin{aligned} E_R^i &= -n(n+1) Y_{mn}^i \frac{j_n(k_1 R)}{k_1 R} e^{-i\omega t}, \\ E_\theta^i &= -\frac{\partial Y_{mn}^i}{\partial \theta} \frac{1}{k_1 R} [k_1 R j_n(k_1 R)]' e^{-i\omega t}, \\ E_\varphi^i &= -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{mn}^i}{\partial \varphi} \frac{1}{k_1 R} [k_1 R j_n(k_1 R)]' e^{-i\omega t}, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} H_R^i &= 0, \\ H_\theta^i &= -\frac{k_1}{i\omega\mu_1} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{mn}^i}{\partial \varphi} j_n(k_1 R) e^{-i\omega t}, \\ H_\varphi^i &= \frac{k_1}{i\omega\mu} \frac{\partial Y_{mn}^i}{\partial \theta} j_n(k_1 R) e^{-i\omega t}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Амплитуды внешних и внутренних полей связаны граничными условиями

$$\left. \begin{aligned} \frac{k_1}{\mu_1} B_{emn}^i j_n(k_1 a) &= \frac{k_2}{\mu_2} B_{emn}^e h_n^{(1)}(k_2 a), \\ \frac{1}{k_1} B_{emn}^i [k_1 a j_n(k_1 a)]' &= \frac{1}{k_2} B_{emn}^e [k_2 a h_n^{(1)}(k_2 a)]', \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

которые приводят к трансцендентному уравнению

$$\frac{[N_\rho j_n(N\rho)]'}{N^2 j_n(N\rho)} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{[\rho h_n^{(1)}(\rho)]'}{h_n^{(1)}(\rho)}, \quad (19)$$

определяющему характеристические значения ρ_{ns} . Собственные частоты ω_{ns} получаются затем из (12).

¹⁾ Watson, *loc. cit.*, глава XVIII.

9.23. Колебания проводящей сферы. Мы предположим, что проводящая сфера помещена в идеальный диэлектрик¹⁾. Рассмотрим сначала предельный случай $\sigma_1 \rightarrow \infty$. Два детерминантных уравнения (10) и (19) принимают тогда вид

$$h_n^{(1)}(\rho) = 0, \quad [\rho h_n^{(1)}(\rho)]' = 0; \quad (20)$$

корни этих уравнений являются характеристическими значениями для магнитных и электрических видов колебаний соответственно. Каждая функция $h_n^{(1)}(\rho)$ может быть, однако, представлена в виде умноженного на экспонент полинома (раздел 7.4, стр. 356). Рассматриваемые корни являются корнями этих полиномов, и, следовательно, число их для любой из функций конечного порядка n конечно. Рассмотрим, например, первое электрическое колебание, для которого $n = 1$. Согласно (31), стр. 357,

$$h_1^{(1)}(\rho) = -\frac{1}{\rho} e^{i\rho} \left(1 + \frac{i}{\rho}\right), \quad (21)$$

$$[\rho h_1^{(1)}(\rho)]' = -\frac{i}{\rho^2} e^{i\rho} (\rho^2 + i\rho - 1), \quad (22)$$

и искомые корни являются корнями уравнения $\rho^2 + i\rho - 1 = 0$, т. е. $\rho_{11} = 0,86 - i 0,5$, $\rho_{12} = -0,86 - i 0,5$. Так как $\sigma_2 = 0$, то собственные частоты получаются из

$$\omega_{ns} = \frac{\rho_{ns}}{a} \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}, \quad (23)$$

и следовательно, для наинизшего электрического колебания

$$e^{-i\omega t} = e^{-\frac{0,5}{a} \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} t \pm \frac{i 0,86}{a} \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} t}. \quad (24)$$

Амплитуда уменьшается до доли $\frac{1}{e}$ от своей первоначальной величины за время, необходимое для прохождения волной расстояния, равного диаметру сферы. Длина волны во внешней среде равна $\lambda = \frac{2\pi}{0,86} a = 7,3a$. Поскольку проводимость бесконечна, затухание должно быть приписано полностью потере энергии на излучение. Потеря эта происходит очень быстро даже в случае наинизшего колебания; в только что рассмотренном примере амплитуда уменьшается до доли $\frac{1}{e}$ от своей первоначальной величины за время, равное 0,27 полного периода.

	Магнитные колебания	Электрические колебания
$-i\rho_1$ {	-1	$-0,50 + i 0,86$ $-0,50 - i 0,86$
$-i\rho_2$ {	$-1,50 + i 0,86$ $-1,50 - i 0,86$	-1,60 $-0,70 + i 1,81$ $-0,70 - i 1,81$
$-i\rho_3$ {	-2,26 $-1,87 + i 1,75$ $-1,87 - i 1,75$	$-2,17 + i 0,87$ $-2,17 - i 0,87$ $-0,83 + i 2,77$ $-0,83 - i 2,77$

В таблице приведены несколько первых характеристических значений для случая бесконечно проводящей сферы. Минимальный коэффициент затухания соответствует низшему электрическому колебанию.

¹⁾ Debye, *Ann. Physik* 30, 57, 1909.

Если мы имеем металлическую сферу, то проводимость конечна, но N всё же очень велико. Мы можем ожидать поэтому, что корни (10) и (19) окажутся близки к корням (20). Если $|Nr| \gg 1$, то асимптотическим представлением (10) будет

$$Nr \operatorname{tg} \left(Nr - \frac{n+1}{2} \pi \right) \simeq - \frac{\mu_1 [\rho h_n^{(1)}(\rho)]'}{\mu_2 h_n^{(1)}(\rho)}. \quad (25)$$

Пусть отклонение от какого-либо корня ρ_{ns} уравнения $h_n^{(1)}(\rho) = 0$ равно $\Delta\rho_{ns}$. Разлагая правую часть (25) в ряд Тэйлора около точки $\rho = \rho_{ns}$ и сохраняя только линейные члены, мы получаем

$$\Delta\rho_{ns} \simeq - \frac{\mu_1}{\mu_2 N \operatorname{tg} \left(Nr_{ns} - \frac{n+1}{2} \pi \right)}. \quad (26)$$

Это выражение даёт нам те поправки, которые необходимо внести в собственные частоты магнитных колебаний. Аналогично, для электрических колебаний мы заменяем (19) на

$$\frac{\rho}{N} \operatorname{tg} \left(Nr - \frac{n+1}{2} \pi \right) \simeq - \frac{\mu_2 [\rho h_n^{(1)}(\rho)]'}{\mu_1 h_n^{(1)}(\rho)}. \quad (27)$$

Пусть ρ_{ns} — корень уравнения $[\rho h_n^{(1)}(\rho)]' = 0$, а $\Delta\rho_{ns}$ — отклонение, вызванное конечной проводимостью. Имеем

$$[\rho h_n^{(1)}(\rho)]' = [\rho h_n^{(1)}(\rho)]''_{\rho=\rho_{ns}} \Delta\rho_{ns} + \dots \quad (28)$$

Из уравнения (4), стр. 352,

$$\rho [\rho h_n^{(1)}(\rho)]'' + [\rho^2 - n(n+1)] h_n^{(1)}(\rho) = 0, \quad (29)$$

откуда

$$\Delta\rho_{ns} \simeq \frac{\mu_1}{\mu_2 N} \frac{\rho_{ns}^2}{\rho_{ns}^2 - n(n+1)} \operatorname{tg} \left(Nr_{ns} - \frac{n+1}{2} \pi \right). \quad (30)$$

Таким образом, поскольку тангенс очень большого комплексного числа равен $\pm i$, для основного электрического колебания мы получаем

$$-i\rho_1 \simeq -0,50 \pm i 0,86 \left(1 - \frac{2}{3} \frac{\mu_1}{\mu_2 N} \right). \quad (31)$$

В случае металлической сферы

$$\frac{\mu_1}{\mu_2 N} \simeq \frac{1 - i \omega \varepsilon_2}{\sqrt{2} \sigma_1}. \quad (32)$$

Напомним, наконец, что при рассмотрении собственных видов волн, распространяющихся вдоль цилиндра, основная волна соответствовала следующим условиям: $\lambda_1 a$ очень велико внутри цилиндра, а $\lambda_2 a$ почти равно нулю вне его. Было показано также существование системы дополнительных волн, для которых $\lambda_1 a$ было, однако, малым. Подобное же положение вещей получается и в случае сферы. Как показал Дебай, система корней (10) и (19) такова, что Nr остаётся конечным, даже если N очень велико. Если проводимость сферы конечна, то, как и в случае дополнительных цилиндрических волн, затухание колебаний очень велико.

9.24. Колебания в сферической полости. Насколько можно в настоящее время предвидеть, сверхвысокочастотные радиоконтурь сведутся, повидимому, к трубчатым волноводам и полым резонаторам. Последние являются

электромагнитными аналогами резонаторов Гельмгольца, применяемых в акустике. Подобные системы не излучают; мы можем, следовательно, приписать определённые значения их электрической и магнитной энергии и, соответственно, определённые эффективные индуктивность, ёмкость и сопротивление, которые будут зависеть только от конфигурации. Затухание возникает в результате проникновения поля в металлические стенки на расстояние, равное примерно глубине скин-слоя.

Характер колебаний в резонаторе может быть иллюстрирован на примере сферической полости. Предположим, что внутри сферы — идеальный диэлектрик, так что $k_1 = \omega \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}$, в то время как внешняя область обладает бесконечной проводимостью. Тогда $N=0$, и характеристические значения для магнитных и электрических видов колебаний определяются соответственно из соотношений

$$j_n(k_1 a) = 0, \quad [k_1 a j_n(k_1 a)]' = 0. \quad (33)$$

Пусть u_{ns} будут корни уравнения $j_n(k_1 a) = 0$. Первые из этих корней равны

$$\left. \begin{aligned} u_{11} &= 4,50, & u_{12} &= 7,64, \\ u_{21} &= 5,8, & \dots & \dots \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Поскольку $k_1 a = \omega \sqrt{\epsilon_1 \mu_1} a$, характеристические частоты для магнитных колебаний даются соотношением

$$\nu_{ns} = \frac{u_{ns}}{2\pi a \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}. \quad (35)$$

Формально это соотношение тождественно с уравнением (65), стр. 473, для характеристических частот полой трубы. Длина свободной волны, т. е. длина волны той же частоты в безграничной среде, равна

$$\lambda_{ns} = \frac{2\pi a}{u_{ns}}. \quad (36)$$

Наибольшая допустимая длина волны для магнитных колебаний равна $\lambda_{11} = 2\pi a/4,5 = 1,4a$. В этом случае векторы поля имеют только компоненты E_ϕ , H_R и H_θ и потоки зарядов направлены параллельно линиям широты. Распределение электрических и магнитных силовых линий в меридиональной плоскости показано на рис. 110.

Корни второго из уравнений (33) мы будем обозначать через u'_{ns} , а характеристические частоты электрических колебаний — через ν'_{ns} . Формулы (35) и (36) остаются справедливыми и при наличии штрихов, а для длины свободной волны основного электрического колебания подсчёт даёт

$$\lambda'_{11} = 2\pi a/2,75 = 2,28a.$$

Это — наинизший из всех возможных видов колебаний как электрических, так и магнитных. Аксиально-симметричный случай соответствует переменному

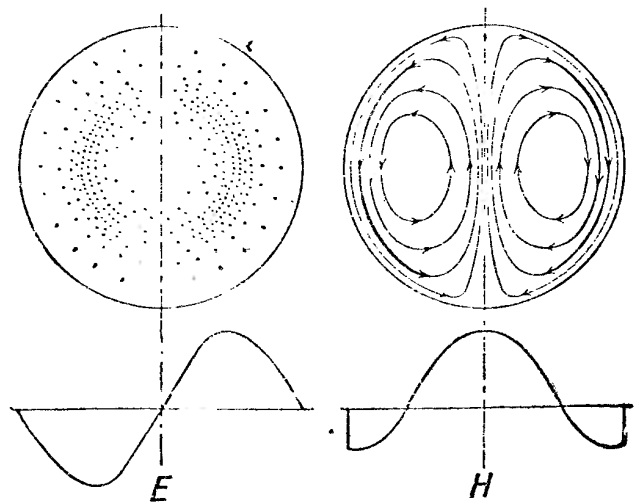


Рис. 110. Поле в меридиональной плоскости сферического резонатора для наинизшего магнитного вида колебаний.

потоку зарядов вдоль меридианов, от одного полюса к другому; магнитные силовые линии направлены вдоль широтных параллелей. Силовые линии в меридиональной плоскости показаны на рис. 111. Для какой-либо внутренней точки сферы из (16) и (17) при $m=0$, $n=1$ мы имеем

$$\left. \begin{aligned} E_R &= -\frac{2Aa}{2,75R} \cos \theta j_1 \left(2,75 \frac{R}{a} \right) e^{-i\omega'_{11}t}, \\ E_\theta &= \frac{Aa}{2,75R} \sin \theta \left[2,75 \frac{R}{a} j_1 \left(2,75 \frac{R}{a} \right) \right]' e^{-i\omega'_{11}t}, \\ H_\varphi &= i \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} A \sin \theta j_1 \left(2,75 \frac{R}{a} \right) e^{-i\omega'_{11}t}, \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

где $\omega'_{11} = 2,75/a \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}$.

Плотность поверхностных токов $\mathbf{K}$ в любой точке на стенке полости равна $\mathbf{K} = [\mathbf{n}, \mathbf{H}]$, где $\mathbf{n}$ — единичный вектор, направленный по радиусу внутрь, а значение $\mathbf{H}$ берётся на поверхности со стороны полости. Поскольку имеется только компонента H_φ , вектор поверхностной плотности тока направлен вдоль меридианов. Полный ток, пересекающий экватор за секунду, равен

$$I = 2\pi a K = 2\pi a i \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} A j_1(2,75) e^{-i\omega'_{11}t}. \quad (38)$$

Эквивалентные индуктивность и сопротивление осциллирующей системы могут быть определены через этот полный ток ¹⁾. Средняя магнитная энергия внутри полости равна

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \frac{\mu_1}{4} \int \mathbf{H} \mathbf{H}^* dv = \\ &= \frac{2\pi\varepsilon_1}{4} A^2 \int_0^a \int_0^\pi \left[j_1 \left(2,75 \frac{R}{a} \right) \right]^2 R^2 \sin^3 \theta d\theta dR = \\ &= \frac{2\pi}{3} \varepsilon_1 A^2 \int_0^a \left[j_1 \left(2,75 \frac{R}{a} \right) \right]^2 R^2 dR. \end{aligned} \quad (39)$$

Интеграл можно без труда вычислить, применяя общие формулы для интегрирования цилиндрических бесселевых функций, или же непосредственно, замечая, что

$$j_1(k_1 R) = -\frac{1}{k_1 R} (\cos k_1 R - \frac{1}{k_1 R} \sin k_1 R). \quad (40)$$

Мы находим, что

$$\int_0^a j_1^2(x) x^2 dx = \frac{x^3}{2} [j_1^2(x) - j_0(x) j_2(x)], \quad (41)$$

откуда

$$\bar{T} = \frac{2\pi}{2} \varepsilon_1 A^2 a^3 \cdot 0,054. \quad (42)$$

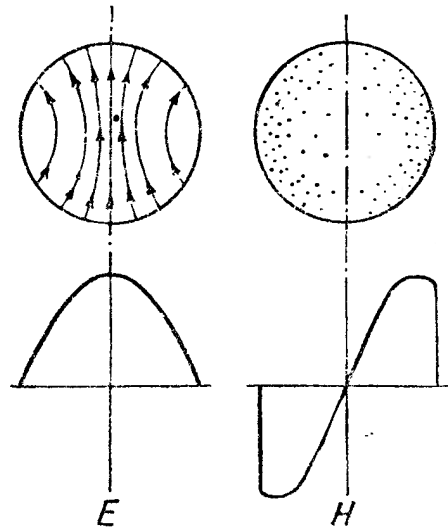


Рис. 111. Поле в меридиональной плоскости сферического резонатора для наинизшего электрического вида колебаний.

¹⁾ Hansen, J. *Applied Phys.* 9, 654, 1938.

Индуктивность L мы определяем далее по формуле

$$\bar{T} = \frac{1}{2} L \bar{I}^2 = \frac{1}{4} L I I^*. \quad (43)$$

Если для тока в (43) мы совершенно произвольно возьмём ток, пересекающий экватор, то, согласно (38), (42) и (43), эквивалентная индуктивность будет

$$L = 0,077 \mu_1 a \text{ генри}. \quad (44)$$

До сих пор мы предполагали, что проводимость стенок бесконечна, так что компонента E_θ при $R = a$ равнялась нулю и затухание отсутствовало. Если стенки маталлические, то тангенциальная компонента E на их поверхности может быть получена из приближённого соотношения (47), стр. 468. При $R = a$

$$E \simeq \sqrt{\frac{\omega_{12}}{c_2}} H_\varphi e^{-\frac{i\pi}{4}} \simeq iA \sqrt{\frac{\omega_{11} \varepsilon_1 \mu_2}{\sigma_2 \mu_1}} \sin \theta j_1(2,75) e^{-\frac{i\pi}{4} - i\omega'_{11} t}. \quad (45)$$

Таким образом, теперь появляется направленный в металл радиальный поток энергии, средняя плотность которого равна

$$\bar{S}_R = \text{Re} S_R^+ = \frac{A^2}{2\sqrt{2}} \frac{\varepsilon_1}{\mu_1} \sqrt{\frac{\omega_{11} \mu_2}{\sigma_2}} \sin^2 \theta j_1^2(2,75). \quad (46)$$

Потеря энергии за единицу времени получается интегрированием (46) по поверхности сферы

$$W = a^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \bar{S}_R \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{4\pi a^2 \varepsilon_1}{3\sigma_2 \mu_1} \frac{A^2}{\delta} j_1^2(2,75), \quad (47)$$

где $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega_{11} \mu_2 \sigma_2}}$ — глубина скин-слоя, определённая на стр. 444. Эквивалентное последовательное сопротивление $\mathfrak{R}$ определяется соотношением

$$W = \mathfrak{R} \bar{I}^2 = \mathfrak{R} I I^*, \quad (48)$$

откуда

$$\mathfrak{R} = \frac{2}{3\pi\sigma_2} \frac{1}{\delta} = \frac{0,212}{c_2} \frac{1}{\delta}. \quad (49)$$

Для характеристики эффективности контура часто применяется параметр Q^1), определяемый как отношение индуктивного сопротивления к последовательному омическому сопротивлению. Для основной частоты колебаний в полой сфере Q равно

$$Q = \frac{\omega'_{11} L}{\mathfrak{R}} = 0,725 \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{a}{\delta}. \quad (50)$$

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА СФЕРЕ.

9.25. Разложение дифрагированного поля. Периодическая волна, падающая на материальное тело, вызывает, независимо от природы этого тела, вынужденные колебания свободных и связанных зарядов, синхронные с колебаниями приложенного поля. Эти вынужденные колебания зарядов создают в свою очередь вторичное поле внутри и вне тела. Вектор резуль-

¹⁾ Q называется добротностью контура. Прим. ред.

тирующего поля в какой-либо точке является, следовательно, суммой векторов первичного и вторичного полей. В общем случае эти вынужденные колебания не удовлетворяют условиям, существующим в момент возникновения первичного поля. Для того чтобы удовлетворить граничным условиям во все моменты времени, необходимо добавить член, выражающий процесс установления и состоящий из собственных колебаний, взятых с соответствующими амплитудами. Однако эти колебания очень быстро затухают из-за поглощения и потерь на излучение и остаются лишь стационарные синхронные члены.

Простейшей и в то же время имеющей большой практический интерес задачей этого типа является задача о плоской волне, падающей на сферу. Как и в предыдущем разделе, мы предположим, что сфера радиуса a с постоянной распространения k_1 находится в безграничной однородной среде с постоянной распространения k_2 . Плоская волна, электрический вектор которой линейно поляризован в направлении оси x , распространяется в положительном направлении оси z . Разложение первичного поля на векторные сферические волновые функции было дано в формуле (36), стр. 370

$$\left. \begin{aligned} E_i &= a_x E_0 e^{i k_1 z - i \omega t} = E_0 e^{-i \omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} (m_{01n}^{(1)} - i n_{e1n}^{(1)}), \\ H_i &= a_y \frac{k_2}{\mu_2 \omega} E_0 e^{i k_1 z - i \omega t} = - \frac{k_2 \Gamma_0}{\mu_2 \omega} e^{-i \omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} (m_{e1n}^{(1)} + i n_{01n}^{(1)}), \end{aligned} \right\} (1)$$

где E_0 — амплитуда, а

$$m_{e1n}^{(1)} = \pm \frac{1}{\sin \theta} j_n(k_2 R) P_n^1(\cos \theta) \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} i_2 - j_n(k_2 R) \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} i_3, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} n_{e1n}^{(1)} &= \frac{n(n+1)}{k_2 R} j_n(k_2 R) P_n^1(\cos \theta) \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} i_1 + \\ &+ \frac{1}{k_2 R} [k_2 R j_n(k_2 R)]' \frac{dP_n^1(\cos \theta)}{d\theta} \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} i_2 \pm \\ &\pm \frac{1}{k_2 R \sin \theta} [k_2 R j_n(k_2 R)]' P_n^1(\cos \theta) \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} i_3. \end{aligned} \quad (3)$$

Штрихи означают дифференцирование по аргументу $k_2 R$.

Вторичное индуцированное поле должно быть составлено из двух частей — одной, относящейся к точкам внутри сферы, и другой, обладающей требуемой регулярностью на бесконечности, для точек вне сферы. По аналогии с задачей о плоской границе, рассмотренной в разделах 9.4—9.9, мы будем называть эти две части прошедшей и отражённой волнами, хотя, строго говоря, эти термины применимы лишь тогда, когда длина волны намного меньше радиуса сферы. Запишем отражённую и прошедшую волны в виде

$$\left. \begin{aligned} E_r &= E_0 e^{-i \omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} (a_n^r m_{01n}^{(3)} - i b_n^r n_{e1n}^{(3)}), \\ H_r &= - \frac{k_2}{\omega \mu_2} E_0 e^{-i \omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} (b_n^r m_{e1n}^{(3)} + i a_n^r n_{01n}^{(3)}), \end{aligned} \right\} (4)$$

при $R > a$ (отражённая волна) и

$$\left. \begin{aligned} E_t &= E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} (a_n^t m_{o1n}^{(1)} - i b_n^t n_{e1n}^{(1)}), \\ H_t &= -\frac{k_1}{\omega \mu_1} E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{2n+1}{n(n+1)} (b_n^t m_{e1n}^{(1)} + i a_n^t n_{o1n}^{(1)}) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

при $R < a$ (прошедшая волна). Функции $m_{o1n}^{(3)}$ и $n_{e1n}^{(3)}$ получаются из (2)

и (3) заменой $j_n(k_2 R)$ на $h_n^{(1)}(k_2 R)$. В (5) вместо k_2 следует писать k_1 .

Граничные условия при $R = a$

$$\left. \begin{aligned} [i_1, (E_i + E_r)] &= [i_1, E_t], \\ [i_1, (H_i + H_r)] &= [i_1, H_t] \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

приводят к двум парам *неоднородных* уравнений для коэффициентов разложения

$$\left. \begin{aligned} a_n^t j_n(N\rho) - a_n^r h_n^{(1)}(\rho) &= j_n(\rho), \\ \mu_2 a_n^t [N\rho j_n(N\rho)]' - \mu_1 a_n^r [\rho h_n^{(1)}(\rho)]' &= \mu_1 [\rho j_n(\rho)]', \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \mu_2 N b_n^t j_n(N\rho) - \mu_1 b_n^r h_n^{(1)}(\rho) &= \mu_1 j_n(\rho), \\ b_n^t [N\rho j_n(N\rho)]' - N b_n^r [\rho h_n^{(1)}(\rho)]' &= N [\rho j_n(\rho)]', \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где попрежнему

$$k_1 = N k_2, \quad \rho = k_2 a, \quad k_1 a = N \rho. \quad (9)$$

Решая эту систему относительно коэффициентов отражённого поля, получаем

$$a_n^r = -\frac{\mu_1 j_n(N\rho) [\rho j_n(\rho)]' - \mu_2 j_n(\rho) [N\rho j_n(N\rho)]'}{\mu_1 j_n(N\rho) [\rho h_n^{(1)}(\rho)]' - \mu_2 h_n^{(1)}(\rho) [N\rho j_n(N\rho)]'}, \quad (10)$$

$$b_n^r = -\frac{\mu_1 j_n(\rho) [N\rho j_n(N\rho)]' - \mu_2 N^2 j_n(N\rho) [\rho j_n(\rho)]'}{\mu_1 h_n^{(1)}(\rho) [N\rho j_n(N\rho)]' - \mu_2 N^2 j_n(N\rho) [\rho h_n^{(1)}(\rho)]'}. \quad (11)$$

Если проводимость или проницаемость сферы велики по сравнению с их значениями в окружающей среде и в то же время радиус a не слишком мал, то $|N\rho| \gg 1$ и (10) и (11) можно значительно упростить, воспользовавшись асимптотическими выражениями

$$\left. \begin{aligned} j_n(N\rho) &\simeq \frac{1}{N\rho} \cos\left(N\rho - \frac{n+1}{2}\pi\right), \\ [N\rho j_n(N\rho)]' &\simeq -\sin\left(N\rho - \frac{n+1}{2}\pi\right). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

В этом случае

$$a_n^r \simeq -\frac{j_n(\rho)}{h_n^{(1)}(\rho)}, \quad b_n^r \simeq -\frac{[\rho j_n(\rho)]'}{[\rho h_n^{(1)}(\rho)]'}. \quad (13)$$

Поскольку $h_n^{(1)}(\rho) = j_n(\rho) + i n_n(\rho)$, коэффициенты эти могут быть также представлены в виде

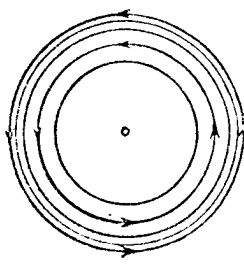
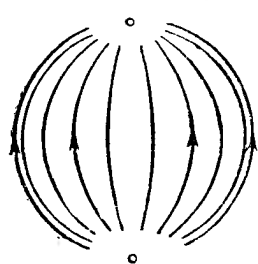
$$a_n^r \simeq i e^{i\gamma_n} \sin \gamma_n, \quad b_n^r \simeq i e^{i\gamma'_n} \sin \gamma'_n, \quad (14)$$

где

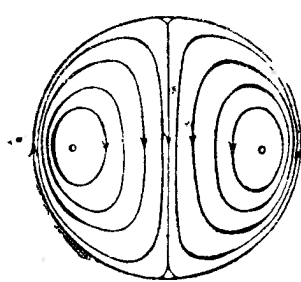
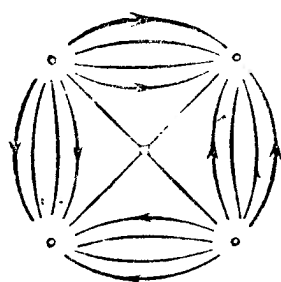
$$\operatorname{tg} \gamma_n = \frac{j_n(\rho)}{n_n(\rho)}, \quad \operatorname{tg} \gamma'_n = \frac{[\rho j_n(\rho)]'}{[\rho n_n(\rho)]'}. \quad (15)$$

Резюмируем. Мы нашли, что первичная волна возбуждает определённые колебания в сфере. Эти колебания не являются собственными колебаниями,

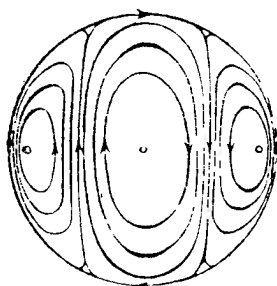
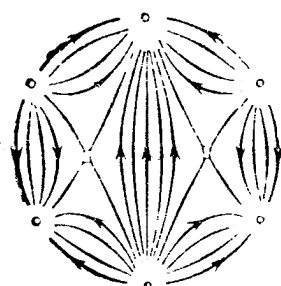
рассмотренными в разделе 9.22, так как все они синхронны с приложенным полем. Эти частные колебания и связанные с ними поля могут быть, однако,



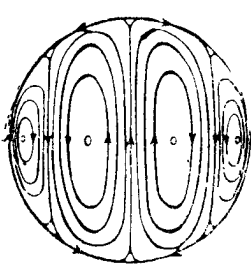
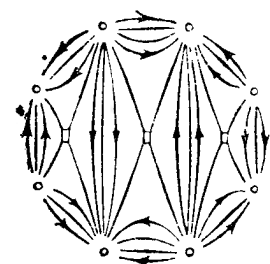
Первый вид



Второй вид



Третий вид



Четвертый вид

Рис. 112. Силовые линии, соответствующие первым четырём колебаниям электрического типа. Слева — электрические силовые линии, справа — магнитные.

радиальная компонента вторичного поля исчезает, как $1/R^2$, в то время как тангенциальные компоненты $E_{r\theta}$ и $E_{r\varphi}$ убывают, как $1/R$. В этой волновой зоне поле поперечно к направлению распространения. Кроме того, компоненты $E_{r\theta}$ и $E_{r\varphi}$ перпендикулярны друг к другу и в общем случае сдвинуты по фазе. Вторичное поле, излучаемое сферой, эллиптически поляризовано. Два направления являются исключительными. При $\varphi = 0$ $E_{r\varphi} = 0$, а при

разделены на электрический и магнитный типы на тех же самых основаниях, которые были указаны в разделе 9.22. Коэффициенты a_n представляют собой амплитуды колебаний магнитного типа, а b_n — электрического. Если частота приложенных колебаний ω приближается к какой-либо характеристической частоте ω_{ns} свободных колебаний, то возникает явление резонанса. В разделе 9.22 было показано, что характеристические частоты магнитных колебаний удовлетворяют приведённому там соотношению (10). Но это как раз то условие, при котором знаменатель в выражении (10) для a_n обращается в нуль. Подобным же образом собственные частоты колебаний электрического типа удовлетворяют соотношению (19) раздела 9.22, которое является в то же время условием обращения в нуль знаменателя в выражении для b_n^r . Заметим, однако, что ω_{ns} всегда комплексны, в то время как частота ω приложенного поля действительна. Следовательно, знаменатели a_n^r и b_n^r могут быть сведены к их минимальным значениям, но не могут быть сделаны равными нулю, так что катастрофа — появление бесконечных амплитуд — благополучно избегнута.

На рис. 112 показаны электрические и магнитные силовые линии для первых четырёх частичных колебаний электрического типа. Рисунки заимствованы из оригинальной работы Ми¹⁾.

Падающая волна линейно поляризована так, что её электрический вектор параллелен оси x . На очень больших расстояниях от сферы ра-

¹⁾ Mie, *Ann. Physik*, 25, 377, 1908.

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ $E_{r\theta} = 0$. Следовательно, при наблюдении вдоль оси x или оси y вторичное излучение линейно поляризовано. Обратно, если первичная волна не поляризована, как это имеет место в случае естественного света, то вторичное поле имеет частичную поляризацию, зависящую от направления наблюдения. Это явление было изучено в связи с рассеянием света взвешными коллоидных частиц. Наиболее полное численное исследование задачи, по крайней мере для области видимого спектра, было проведено Блюмером ¹⁾.

9.26. Полное излучение. Полное поле в любой точке вне сферы является суммой первичного и вторичного полей

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_r. \quad (16)$$

Радиальная компонента полного комплексного вектора Пойнтинга равна

$$S_R^+ = \frac{1}{2} (E_\theta H_\varphi^* - E_\varphi H_\theta^*) \quad (17)$$

и, в силу (16), может быть разложена на три группы членов

$$S_R^+ = \frac{1}{2} (E_{i\theta} H_{i\varphi}^* - E_{i\varphi} H_{i\theta}^*) + \frac{1}{2} (E_{r\theta} H_{r\varphi}^* - E_{r\varphi} H_{r\theta}^*) + \\ + \frac{1}{2} (E_{i\theta} H_{r\varphi}^* + E_{r\theta} H_{i\varphi}^* - E_{i\varphi} H_{r\theta}^* - E_{r\varphi} H_{i\theta}^*). \quad (18)$$

Опишем вокруг сферы, вызывающей дифракцию, концентрическую сферическую поверхность радиуса R . Интеграл по этой сфере от действительной части вектора S_R^+ равен потоку энергии через поверхность сферы. Для упрощения мы предположим, что внешняя среда (2) — идеальный диэлектрик, так что $k_2 = \omega \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}$. Если сфера, вызывающая дифракцию, также непроводящая, то поток энергии через любую поверхность, охватывающую сферу, должен быть равен нулю. Если же внутри сферы происходит переход электрической энергии в тепло, то поток энергии должен быть направлен внутрь и равен количеству поглощённой энергии. Поглощающуюся в сфере энергию мы будем обозначать через W_a :

$$W_a = -\operatorname{Re} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} S_R^+ R^2 \sin \theta \, d\varphi \, d\theta. \quad (19)$$

Первый член в правой части выражения (18) даёт поток энергии в падающей волне. Если $\sigma_2 = 0$, то интеграл от этого члена по замкнутой поверхности равен нулю. Второй член даёт, очевидно, направленный наружу поток вторичной или рассеянной от сферы энергии; полная величина рассеянной энергии равна

$$W_s = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (E_{r\theta} H_{r\varphi}^* - E_{r\varphi} H_{r\theta}^*) R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi. \quad (20)$$

Для сохранения энергетического баланса интеграл от третьего члена в (18) должен быть равен сумме поглощённой и рассеянной энергии

$$W_t = W_a + W_s = \\ = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (E_{i\theta} H_{r\varphi}^* + E_{r\theta} H_{i\varphi}^* - E_{i\varphi} H_{r\theta}^* - E_{r\varphi} H_{i\theta}^*) R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi. \quad (21)$$

W_t равно, следовательно, полной энергии, извлечённой из первичной волны и затраченной в виде тепла и рассеянного излучения.

¹⁾ Blumer, *Z. Physik* 32, 119, 1925; 38, 304, 1926; 38, 920, 1926; 39, 195, 1926.

Для того чтобы подсчитать W_s и W_t , мы возьмём R очень большим и воспользуемся асимптотическими разложениями

$$j_n(\rho) \simeq \frac{1}{\rho} \cos\left(\rho - \frac{n+1}{2} \pi\right), \quad h_n^{(1)}(\rho) \simeq \frac{1}{\rho} (-i)^{n+1} e^{i\rho}. \quad (22)$$

После подстановки (22) в (2) и (3), мы можем подсчитать интеграл с помощью уравнения (20), стр. 368:

$$\int_0^\pi \left(\frac{dP_n^1}{d\theta} \frac{dP_m^1}{d\theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} P_n^1 P_m^1 \right) \sin \theta d\theta = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq m, \\ \frac{2}{2n+1} \frac{(n+1)!}{(n-1)!} n(n+1), & \text{если } n = m \end{cases} \quad (23)$$

и соотношения

$$\int_0^\pi \left(\frac{P_m^1}{\sin \theta} \frac{dP_n^1}{d\theta} + \frac{P_n^1}{\sin \theta} \frac{dP_m^1}{d\theta} \right) \sin \theta d\theta = 0. \quad (24)$$

Для энергии, рассеянной в виде излучения, мы найдём

$$W_s = \pi \frac{E_0^2}{k_2^2} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (|a_n^r|^2 + |b_n^r|^2), \quad (25)$$

а для суммы поглощённой и рассеянной энергий

$$W_t = \pi \frac{E_0^2}{k_2^2} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (a_n^r + b_n^r). \quad (26)$$

Средний поток энергии в падающей волне *через единицу площади* равен

$$\bar{S}_z = \frac{1}{2} E_0^2 \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}}. \quad (27)$$

Поперечное сечение рассеяния определяется как отношение полной энергии, рассеянной за секунду, к плотности потока энергии падающей волны:

$$Q_s = \frac{2\pi}{k_2^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (|a_n^r|^2 + |b_n^r|^2) \text{ метров}^2. \quad (28)$$

Аналогично мы можем определить поперечное сечение Q_t :

$$Q_t = \frac{2\pi}{k_2^2} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (a_n^r + b_n^r) \text{ метров}^2. \quad (29)$$

Если проводимость или проницаемость сферы настолько велики, что $N\rho \gg 1$, то в выражения для поперечных сечений можно ввести приближения (14) и (15), и эти выражения примут вид

$$Q_s = \frac{2\pi}{k_2^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (\sin^2 \gamma_n + \sin^2 \gamma'_n), \quad (30)$$

$$Q_t = \frac{2\pi}{k_2^2} \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} i (2n+1) (e^{i\gamma_n} \sin \gamma_n + e^{i\gamma'_n} \sin \gamma'_n). \quad (31)$$

В случае непоглощающей сферы γ_n и γ'_n действительны [и, очевидно, тогда $Q_s = -Q_t$].

9.27. Предельные случаи. Хотя предшествующие формулы и кажутся, на первый взгляд, очень простыми, вычисление коэффициентов является обычно довольно трудоёмкой задачей. В двух предельных случаях рассмотрение упрощается. Если $\rho = |k_1 a| \gg 1$, то функции $j_n(\rho)$ и $h_n^{(1)}(\rho)$ могут быть заменены их асимптотическими значениями. Величина ρ представляет собой с точностью до множителя 2π отношение радиуса сферы к длине волны; таким образом, это тот случай, когда радиус сферы намного больше длины волны. Результаты, получаемые только что указанным методом, должны приближаться к тем, которые были получены в разделах 8.13—8.15, исходя из принципа Гюйгенса-Кирхгофа. Другой предельный случай получается при длине волны, намного большей радиуса сферы, так что $|\rho| \ll 1$ и радиальные функции могут быть заменены одним-двумя первыми членами их разложения по степеням ρ .

Случай I. $\rho \gg 1$. Подставляя асимптотические выражения (12) и (22) в (10) и (11), мы получаем для коэффициентов выражения

$$a_n^r \simeq i^n e^{-i\rho} \frac{\mu_1 \sin x - \mu_2 N \cos x \operatorname{tg} y}{\mu_1 - i\mu_2 N \operatorname{tg} y}, \quad (32)$$

$$b_n^r \simeq -i^{n+1} e^{-i\rho} \frac{\mu_1 \cos x \operatorname{tg} y - \mu_2 N \sin x}{\mu_1 \operatorname{tg} y + i\mu_2 N}, \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} x &= \rho - \frac{n+1}{2} \pi, \\ y &= N\rho - \frac{n+1}{2} \pi. \end{aligned} \quad (34)$$

То, что верно в этом примере, справедливо и в общем случае: коэффициенты разложения являются осциллирующими функциями от ρ и от порядка n . Небольшие изменения ρ или n могут привести к значительным колебаниям значений коэффициентов. Абсолютная величина коэффициентов разложения колеблется между нулём и единицей.

Если заменить в (32) n на $n+1$, то нетрудно усмотреть, что $a_{n+1}^r \simeq b_n^r$. Амплитуда колебаний электрического типа n -го порядка примерно совпадает с амплитудой колебаний магнитного типа на единицу высшего порядка.

Асимптотические выражения, применённые при выводе (32) и (33), справедливы только до тех пор, пока порядок n во много раз меньше значений аргументов $|\rho|$ и $|N\rho|$. Асимптотические формулы для бесселевых функций, справедливые для всех порядков, были найдены Дебаем, который показал также, что число членов разложения, которое надо удерживать, как раз равно численной величине $|\rho|$ ¹⁾. Различные приёмы суммирования коэффициентов были рассмотрены Иобстом²⁾.

Случай II. $\rho \ll 1$. Возьмём из раздела 7.4, стр. 356, разложения радиальных функций по степеням ρ или $N\rho$

$$j_n(\rho) = 2^n \frac{n!}{(2n+1)!} \rho^n \left(1 - \frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)} \rho^2 + \dots \right), \quad (35)$$

$$h_n^{(1)}(\rho) = \frac{i}{2n} \frac{(2n)!}{n!} \frac{1}{\rho^{n+1}} + \dots \quad (36)$$

¹⁾ Debye, loc. cit.

²⁾ Jobst, Ann. Physik 76, 863, 1925; 78, 158, 1925.

Коэффициенты также разлагаются по степеням ρ :

$$a_n^r \simeq -i \frac{2^{2n} n! (n+1)! \rho^{2n+1}}{(2n)! (2n+1)! [\mu_1 n + \mu_2 (n+1)]} \times \\ \times \left\{ \mu_2 - \mu_1 - \frac{\mu_2 [(n+1) + (n+3) N^2] - \mu_1 [(n+3) + (n+1) N^2]}{(2n+2)(2n+3)} \rho^2 \right\}, \quad (37)$$

$$b_n^r \simeq i \frac{2^{2n} n! (n+1)!}{(2n)! (2n+1)!} \frac{\rho^{2n+1}}{\mu_1 (n+1) + \mu_2 N^2 n} \times \\ \times \left\{ \mu_1 - \mu_2 N^2 - \frac{\mu_1 [(n+1) + (n+3) N^2] - \mu_2 N^2 [(n+3) + (n+1) N^2]}{(2n+2)(2n+3)} \rho^2 \right\}. \quad (38)$$

Если $|\rho|$ настолько мало, что можно пренебречь всеми степенями выше пятой, то достаточно рассмотреть только первые четыре коэффициента:

$$\left. \begin{aligned} a_1^r &\simeq \frac{i}{3} \frac{\rho^3}{\mu_1 + 2\mu_2} \left\{ \mu_1 - \mu_2 - \frac{1}{5} [\mu_2 (2 + N^2) - \mu_2 (1 + 2N^2)] \rho^2 \right\}, \\ a_2^r &\simeq \frac{i}{15} \frac{\mu_1 - \mu_2}{2\mu_1 + 3\mu_2} \rho^5, \\ b_1^r &\simeq \frac{2i}{3} \frac{\rho^3}{2\mu_1 + \mu_2 N^2} \left\{ \mu_1 - \mu_2 N^2 - \frac{1}{10} [\mu_1 (1 + 2N^2) - \mu_2 N^2 (2 + N^2)] \rho^2 \right\}, \\ b_2^r &\simeq \frac{i}{15} \frac{\mu_1 - \mu_2 N^2}{3\mu_1 + 2\mu_2 N^2} \rho^5. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Если, кроме того, $\mu_1 = \mu_2$, то эти выражения принимают вид

$$\left. \begin{aligned} a_1^r &\simeq \frac{i}{45} (N^2 - 1) \rho^5, \\ b_1^r &\simeq -\frac{2i}{3} \left(\frac{N^2 - 1}{N^2 + 2} \rho^3 - \frac{1}{10} \frac{N^4 - 1}{N^2 + 2} \rho^5 \right), \\ b_2^r &\simeq -\frac{i}{15} \frac{N^2 - 1}{2N^2 + 3} \rho^5. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Правило, согласно которому амплитуда колебаний магнитного типа $n+1$ -го порядка такова же, как и амплитуда колебаний электрического типа n -го порядка, остаётся справедливым до тех пор, пока проводимость конечна.

Если отношение радиуса сферы к длине волны настолько мало, что можно пренебречь ρ^5 по сравнению с ρ^3 , то можно ограничиться только колебаниями электрического типа первого порядка. Этот случай был впервые рассмотрен лордом Релеем. Амплитуда колебаний в этом случае равна

$$b_1^r \simeq -\frac{2i}{3} \frac{N^2 - 1}{N^2 + 2} \rho^3. \quad (41)$$

Если подставить это значение в выражения (2), (3) и (4) и сравнить полученный результат с выражением (30) на стр. 385, то мы увидим, что поле основного колебания совпадает с полем электрического диполя, ориентированного вдоль оси x и обладающего дипольным моментом

$$p = 4\pi\epsilon_2 \frac{N^2 - 1}{N^2 + 2} a^3 E_0. \quad (42)$$

Сравнение с формулой (32), стр. 192, показывает, что это выражение тождественно с результатом, полученным в электростатическом случае. Таким образом, амплитуда рассеянного или дифрагированного малой сферой излучения на больших расстояниях от сферы увеличивается пропорционально квадрату частоты, а энергия — пропорционально четвёртой степени. Это и есть знаменитый *релеевский закон рассеяния*, применённый его автором для

объяснения синевы неба. Если наблюдатель смотрит не непосредственно на солнце, то в его глаз попадает лишь свет, рассеянный частицами пыли или молекулами атмосферы. Так как длина волны видимого света намного больше радиуса подобных субмикроскопических частиц, закон четвёртой степени справедлив, и коротковолновая часть солнечного света рассеивается сильнее, нежели более близкая к красному концу спектра. Если смотреть непосредственно на солнце, то наблюдается противоположный эффект, ибо если синие лучи рассеиваются сильнее красных, то они будут представлены в прямом свете относительно слабее, и преобладать будет уже красный цвет. Этот эффект особенно проявляется тогда, когда солнце находится вблизи горизонта и лучи его проходят через слои воздуха, насыщенные частицами пыли¹⁾.

Таким же путём можно объяснить различные оттенки туманов и дымов; хорошо известно, что цвета коллоидных суспензий металлических частиц в жидкостях или газах часто совершенно отличны от истинного цвета самого металла. Однако по мере увеличения радиуса частиц, члены высшего порядка начинают играть всё большую роль. Сильно селективный характер релеевского рассеяния исчезает, и предсказать диаграмму направленности рассеянного излучения становится возможно только в результате сложных расчётов. Члены высшего порядка могут быть интерпретированы как излучение электрических и магнитных мультиполей²⁾. Экспериментальная проверка теории для радиоволн была выполнена Шефером³⁾.

Дифракция плоской волны на эллипсоидальном теле может быть рассмотрена тем же способом, как и на сфере, но аналитические свойства волновых функций в этом случае значительно сложнее. Приближённое решение было дано Гансом⁴⁾ и более строго Герцфельдом⁵⁾. Наиболее полными до настоящего времени являются исследования Мёглиха⁶⁾. Однако ни в одном случае численные расчёты не были проведены настолько полно, чтобы дать результаты, применимые в специальных задачах, многочисленные же практические приложения теории делают дальнейшую работу в этом направлении весьма желательной.

ВЛИЯНИЕ ЗЕМЛИ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

9.28. Решение Зоммерфельда. В 1909 г. было опубликовано классическое исследование Арнольда Зоммерфельда о влиянии бесконечной проводящей плоскости на излучение осциллирующего диполя⁷⁾. С тех пор на эту тему появилось чрезвычайно большое количество работ. Без преувеличения можно сказать, что ни одна другая сторона вопроса о распространении

¹⁾ Автор становится здесь на первоначальную точку зрения Релея, согласно которой рассеяние в атмосфере и голубой цвет неба объясняются запылённостью воздуха, т. е. дифракцией на взвешенных частицах (эффект Тиндаля). Однако уже со времён классических работ Мандельштама (*Ann. Physik* 23, 626, 1907) и Смолуховского (*Ann. Physik* 25, 205, 1908) известно, что причиной рассеяния в атмосфере является *прежде всего* оптическая неоднородность воздуха, обусловленная флуктуациями его плотности. Тиндалевское рассеяние на взвешенных частицах происходит лишь в нижних слоях и играет подчинённую роль. Изложение автора представляется поэтому несколько странным. *Прим. ред.*

²⁾ Gans and Harpel, *Ann. Physik*, 29, 277, 1909.

³⁾ Schaefer and Wilmsen, *Z. Physik*, 24, 345, 1924.

⁴⁾ Gans, *Ann. Physik*, 37, 881, 1912; 47, 270, 1915, 61, 465, 1920.

⁵⁾ Herzfeld, *Wiener Ber.* 120, 1587, 1911.

⁶⁾ Möglich, *Ann. Physik*, 83, 609, 1927.

⁷⁾ Sommerfeld, *Ann. Physik* 28, 665, 1909; *Jahrbuch d. drahtl. Telegraphie* 4, 157, 1911. Эти ранние статьи содержат ошибку в знаке, которая была поправлена в *Ann. Physik* 81, 1135, 1926. То же и у Riemann — Weber, *loc. cit.*; стр. 542. Однако некоторые следствия этой ошибки оказались незамеченными.

радиоволн не привлекала такого внимания¹⁾. Дать исчерпывающее изложение теории в пределах этой главы невозможно, но представляется небесполезным посмотреть, как ставится задача. Как и во всех дифракционных задачах, за исключением разве простейших из них, основные трудности возникают в связи с необходимостью перехода от формального решения к такому его виду, который позволял бы проводить численные расчёты.

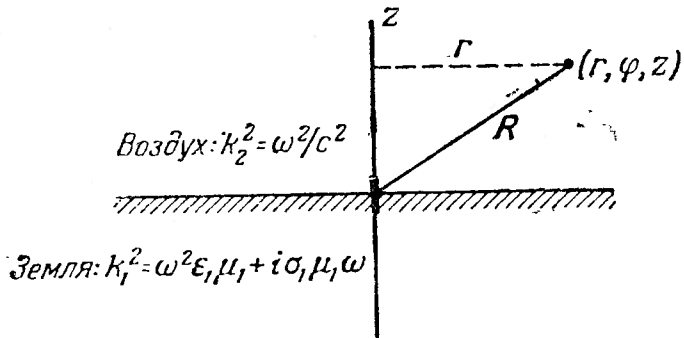


Рис. 113. Вертикальный электрический диполь, расположенный на поверхности плоской земли с конечной проводимостью.

В первой задаче, разобранной Зоммерфельдом, рассматривался вертикальный диполь, расположенный на поверхности плоской земли, обладающей конечной проводимостью. Ось диполя совпадает с осью z прямоугольной системы координат, а плоскость $z=0$ представляет поверхность земли. Все точки, для которых $z < 0$, лежат внутри земли, постоянная распространения которой равна k_1 . Постоянная распространения воздуха в области $z > 0$ равна $k_2 = \omega/c$. Точка наблюдения определяется цилиндрическими координатами r, φ, z и её расстояние от начала координат равно (рис. 113)

$$R = \sqrt{r^2 + z^2}. \quad (1)$$

¹⁾ Основные из этих работ можно разбить на следующие группы: 1) исследования, в которых выводятся в замкнутой форме строгие выражения для поля над поверхностью земли — плоской (Sommerfeld, *loc. cit.*; Weyl, *Ann. Physik* 60, 481, 1919; Van der Pol, *Physica* 2, 843, 1935; В. А. Фок, гл. XXIII в книге Ф. Франк и Р. Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ОНТИ, 1937) или сферической (Watson, см. Б. А. Введенский, Основы теории распространения радиоволн, 1934; В. А. Фок, Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности, изд. АН СССР, 1946). Земля предполагается однородной. Эти строгие выражения, однако, столь громоздки или непрозрачны, что из них непосредственно можно извлечь лишь очень немного следствий для сравнения с опытом. 2) Исследования, в которых указанного рода строгие решения преобразуются или приспособляются к частным задачам, в результате чего становится возможным анализ структуры поля, сравнение с экспериментом и т. п. (Для плоской земли — цитируемые далее автором работы Ниссена, Ван дер Поля, Бэрроуза, Уайза, Райса, Нортон, Рольфа, Стретта, а также работы П. А. Рязина, см. Сборник статей «Новейшие исследования распространения радиоволн» под ред. Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси, Гостехиздат, 1946. Для сферической земли — Б. А. Введенский, Ван дер Поля и особенно В. А. Фок, *loc. cit.*) 3) Исследования, в которых вместо отыскания точных решений с последующим выводом приближённых формул, для практически особенно важного случая больших значений $|k_1|^2/k_2^2$ (см. далее) преобразуются путём отбрасывания малых членов исходные дифференциальные уравнения и граничные условия, после чего решение получается весьма просто (для плоской земли — М. А. Леонтович, Изв. АН СССР, серия физ., 8, 1, 1944; для сферической земли — М. А. Леонтович и В. А. Фок, ЖЭТФ 16, 1946). 4) Исследования, в которых рассматриваются проблемы, вообще не поддающиеся строгому решению, например, распространение над электрически неоднородной поверхностью земли (в частности, явления береговой рефракции), распространение над неровной поверхностью. Здесь оказалось продуктивным применение приближённого метода, указанного в п. 3. (Г. А. Гринберг, Е. Л. Фейнберг, см. статьи во II сборнике «Новейшие исследования распространения радиоволн», Изд. АН СССР, 1948). 5) Исследования распространения в плоскопараллельном слое между двумя средами. Случай идеально проводящих сред см. R. Weirich, *Ann. Physik* 85, 5, 1928; общее решение и дискуссия ряда частных случаев — П. А. Рязин и Л. М. Бреховских, Изв. АН СССР, серия физ., 10, 285, 1946. Прим. ред.

Поле обладает цилиндрической симметрией относительно оси z , а вблизи начала координат должно обращаться в бесконечность, как поле диполя. Напомним, что поле диполя [см. (7), стр. 381] может быть выражено с помощью направленного по оси вектора Герца, который при $R \rightarrow 0$ обращается в бесконечность, как $1/R$. Поэтому z -компоненту вектора Герца для результирующего поля мы напомним в виде суммы двух частей

$$\left. \begin{aligned} \Pi_1(r, z) &= \frac{1}{R} e^{ik_1 R} + F_1(k_1; r, z) & (z < 0), \\ \Pi_2(r, z) &= \frac{1}{R} e^{ik_2 R} + F_2(k_2; r, z) & (z > 0). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Первый член учитывает особенность в начале координат. Дипольный момент совершенно произвольно выбран так, чтобы коэффициент при этом члене был равен единице, а обычный временной множитель в виде $\exp(-i\omega t)$ опущен. Функции F_1 и F_2 , конечные всюду, включая точку $R=0$, удовлетворяют волновому уравнению и условию излучения на бесконечности¹⁾. Они дают слагаемые, связанные с дифрагированной волной, и должны быть подобраны таким образом, чтобы выполнялись граничные условия на плоскости $z=0$. Векторы поля получаются из вектора Герца с помощью соотношений

$$\mathbf{E} = \text{grad div } \Pi + k^2 \Pi, \quad \mathbf{H} = \frac{k^2}{i\omega\mu} \text{rot } \Pi, \quad (3)$$

которые для тангенциальных компонент дают

$$E_r = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r \partial z}, \quad H_\varphi = -\frac{k^2}{i\omega\mu} \frac{\partial \Pi}{\partial r}. \quad (4)$$

Для земли можно положить $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$. В любой точке плоскости $z=0$ функции (2) должны удовлетворять условиям

$$\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial r \partial z} = \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial r \partial z}, \quad k_1^2 \frac{\partial \Pi_1}{\partial r} = k_2^2 \frac{\partial \Pi_2}{\partial r} \quad (z=0). \quad (5)$$

Эти условия справедливы для всех значений r и, следовательно, могут быть проинтегрированы по r . И функции и их производные при $r \rightarrow \infty$ стремятся к нулю, так что постоянная интегрирования должна быть равна нулю. Таким образом, граничные условия принимают вид

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial z} = \frac{\partial \Pi_2}{\partial z}, \quad k_1^2 \Pi_1 = k_2^2 \Pi_2 \quad (z=0). \quad (6)$$

¹⁾ Как отметил В. А. Фок (Франк и Мизес, гл. XXIII), это неверно. Желая выделить из Π_1 и Π_2 члены, содержащие особенность при $R=0$, следует писать

$$\begin{aligned} \Pi_1(r, z) &= \frac{k_2^2}{k_1^2 + k_2^2} \frac{e^{ik_1 R}}{R} + \varphi_1(k_1; r, z), \\ \Pi_2(r, z) &= \frac{k_1^2}{k_1^2 + k_2^2} \frac{e^{ik_2 R}}{R} + \varphi_2(k_2; r, z). \end{aligned}$$

Только при таком выборе коэффициентов у первых членов функции φ_1 и φ_2 будут всюду ограничены, так как выделенные члены, имеющие особенность в $R=0$, сами удовлетворяют приводимым ниже граничным условиям (6). В формулах (2) это не имеет места, но дальнейшие выкладки приводят автора к правильной окончательной формуле (21). Как видно из этой формулы, при $|k_1|^2/k_2^2 \rightarrow \infty$ имеем $\Pi_1 \rightarrow 2 \frac{e^{ik_1 R}}{R}$ и, следовательно, $F_1 \rightarrow \frac{e^{ik_1 R}}{R}$. Прим. ред.

Для того чтобы найти функции F_1 и F_2 , удовлетворяющие этим условиям, мы должны разложить «первичное возбуждение» e^{ikR}/R и «вторичное возбуждение» F по цилиндрическим волновым функциям. В разделе 6.6 было показано, что любое электромагнитное поле в однородной изотропной среде может быть представлено в виде суперпозиции элементарных цилиндрических волн типа

$$\psi(r, \varphi, z) = e^{in\varphi} J_n(\sqrt{k^2 - h^2} r) e^{ihz}. \quad (7)$$

В нашем случае поле обладает осевой симметрией и, следовательно, $n=0$. В качестве параметра разложения мы возьмём $\lambda^2 = k^2 - h^2$ вместо h и каждую волновую функцию умножим на амплитуду $f(\lambda)$, зависящую от λ . Параметр λ может принимать любое комплексное значение. Знак корня $ih = \pm \sqrt{\lambda^2 - k^2}$ должен быть выбран таким, чтобы при $z \rightarrow \pm \infty$ поле исчезало. Мы сделаем этот выбор, считая, что действительная часть $\sqrt{\lambda^2 - k^2}$ всегда положительна. Тогда условиям в начале координат и в бесконечности удовлетворяет разрывный вектор Герца, радиальная и азимутальная компоненты которого равны нулю, а z -компонента равна

$$\left. \begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{1}{R} e^{ikh_1 R} + \int_0^\infty f_1(\lambda) J_0(\lambda r) e^{+V\lambda^2 - k^2 z} d\lambda \quad (z < 0), \\ \Pi_2 &= \frac{1}{R} e^{ikh_2 R} + \int_0^\infty f_2(\lambda) J_0(\lambda r) e^{-V\lambda^2 - k^2 z} d\lambda \quad (z > 0). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Следующий шаг состоит в том, чтобы представить таким же образом и известное нам первичное возбуждение. Для этого мы используем теорему Фурье-Бесселя, формула (53), стр. 327. Если при $r \rightarrow \infty$ функция $f(r)$ стремится к нулю таким образом, что интеграл от $f(r)\sqrt{r}$ абсолютно сходится, то

$$f(r) = \int_0^\infty \lambda d\lambda \int_0^\infty \rho d\rho f(\rho) J_0(\lambda \rho) J_0(\lambda r). \quad (9)$$

В качестве функции $f(r)$ возьмём сначала e^{ikr}/r :

$$\frac{e^{ikr}}{r} = \int_0^\infty \lambda d\lambda J_0(\lambda r) \int_0^\infty \rho d\rho e^{ik\rho} J_0(\lambda \rho). \quad (10)$$

Интегрирование по ρ можно выполнить, если Бесселеву функцию $J_0(\lambda \rho)$ заменить её интегральным представлением (37), стр. 323:

$$\int_0^\infty e^{ik\rho} J_0(\lambda \rho) d\rho = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\beta \int_0^\infty d\rho e^{i(k + \lambda \cos \beta)\rho} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\beta}{k + \lambda \cos \beta}. \quad (11)$$

Мы предположили здесь, что мнимая часть k положительна, так что при верхнем пределе подинтегральное выражение обращается в нуль. В реальных условиях k_2 действительно, но в целях упрощения интеграции мы можем приписать атмосфере очень малую проводимость, которую после вычисления интеграла можно будет положить равной нулю. Последний интеграл эквивалентен интегралу по замкнутому контуру. Пусть

$$u = e^{i\beta}, \quad du = iu d\beta. \quad (12)$$

Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\beta}{k + \lambda \cos \beta} = \frac{1}{\pi} \oint \frac{du}{2ku + \lambda(1 + u^2)} = \frac{1}{\pi\lambda} \oint \frac{du}{(u - u_1)(u - u_2)}, \quad (13)$$

где интегрирование производится в комплексной u -плоскости по единичной окружности с центром в начале координат и где u_1 и u_2 — корни уравнения

$$u^2 + \frac{2ku}{\lambda} + 1 = 0. \quad (14)$$

Произведение корней равно единице, и, следовательно, u_1 лежит внутри круга, а u_2 — снаружи. Согласно теореме Коши, формула (133), стр. 280,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi\lambda} \oint \frac{du}{(u - u_1)(u - u_2)} &= \frac{1}{\pi\lambda(u_1 - u_2)} \oint \frac{du}{u - u_1} = \\ &= \frac{2i}{\lambda(u_1 - u_2)} = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Следовательно,

$$\frac{e^{ikr}}{r} = \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \lambda d\lambda. \quad (16)$$

Это выражение даёт нам первичное возбуждение e^{ikR}/R во всех точках плоскости $z=0$ в виде суммы элементарных цилиндрических волн, амплитуды которых выражаются функцией $\lambda(\lambda^2 - k^2)^{-1/2}$. Выражение для любых других точек следует непосредственно из (7)

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R} e^{ik_1 R} &= \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r) e^{V\lambda^2 - k_1^2 z}}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} \lambda d\lambda & (z < 0), \\ \frac{1}{R} e^{ik_2 R} &= \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r) e^{-V\lambda^2 - k_2^2 z}}{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} \lambda d\lambda & (z > 0). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Для вектора Герца результирующего поля мы имеем

$$\left. \begin{aligned} \Pi_1 &= \int_0^\infty \left[\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} + f_1(\lambda) \right] J_0(\lambda r) e^{V\lambda^2 - k_1^2 z} d\lambda & (z < 0), \\ \Pi_2 &= \int_0^\infty \left[\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} + f_2(\lambda) \right] J_0(\lambda r) e^{-V\lambda^2 - k_2^2 z} d\lambda & (z > 0). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Функции $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ должны быть теперь определены из граничных условий (6). Некоторые трудности связаны с первым из этих условий, так как, если мы проинтегрируем (17) под знаком интеграла по z и затем положим z равным нулю, то интегралы разойдутся. Зоммерфельд указал, однако, что

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) \right]_{z=0} = \left[\frac{d}{dR} \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) \frac{z}{R} \right]_{z=0} = 0. \quad (19)$$

Следовательно, в этом случае в (18) первичное возбуждение можно отбросить. Простое вычисление даёт нам тогда следующий результат:

$$\left. \begin{aligned} f_1(\lambda) &= \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} \left(\frac{k_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_1^2} - k_1^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}}{k_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_1^2} + k_1^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} \right), \\ f_2(\lambda) &= \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} \left(\frac{k_1^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} - k_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}}{k_1^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} + k_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Подставляя эти выражения в (18), мы получаем окончательно

$$\left. \begin{aligned} \Pi_1 &= 2k_2^2 \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)}{N} e^{V\lambda^2 - k_1^2 z} \lambda d\lambda \quad (z < 0), \\ \Pi_2 &= 2k_1^2 \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)}{N} e^{-V\lambda^2 - k_2^2 z} \lambda d\lambda \quad (z > 0), \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где

$$N = k_1^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} + k_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}. \quad (22)$$

Формально решение получено в виде интегралов в бесконечных пределах, выражающих вектор Герца результирующего поля во всех точках как над, так и под поверхностью¹⁾.

9.29. Решение Вейля. Зоммерфельдом было с самого начала указано, что его решение может быть интерпретировано как система плоских волн, падающих на поверхность земли под различными углами и отражаемых и преломляемых ею. Эта точка зрения была развита позднее Вейлем²⁾. Основой его решения является интегральное представление функции $h_0^{(1)}(kR)$, полученное в разделе 7.7. Согласно (66), стр. 362,

$$h_0^{(1)}(kR)_i = \frac{e^{ikR}}{ikR} = \int_{-\infty}^1 e^{ikR\eta} d\eta. \quad (23)$$

Как и на рис. 70, стр. 358, волновая нормаль каждой из элементарных волн образует угол α с осью z и угол β с осью x . Точка наблюдения P задаётся сферическими координатами (R, θ, φ) , а угол между радиусом-вектором R и волновой нормалью k равен γ . Таким образом $(kR) = kR \cos \gamma$ и

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \cos \gamma = \sin \theta \sin \alpha \cos(\varphi - \beta) + \cos \theta \cos \alpha, \\ R \cos \gamma &= x \sin \alpha \cos \beta + y \sin \alpha \sin \beta + z \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

¹⁾ Заметим, что при $|k_1^2| \gg k_2^2$ (очень длинные волны или очень большая проводимость земли) Π_2 становится исчезающе малым по сравнению с Π_1 , причём $\Pi_1 \approx 2 \frac{e^{ik_2 R}}{R}$. Если же $k_1^2 = k_2^2$ (обе среды — воздух), то $\Pi_1 \approx \Pi_2 \approx \frac{e^{ik_2 R}}{R}$. Таким образом, только при $|k_1|^2 \gg k_2^2$ поле над поверхностью вдвое больше того, которое данный диполь создавал бы в воздухе. *Прим. ред.*

²⁾ Weyl, *Ann. Physik* 60, 481, 1919.

Переходя в (23) от переменной интегрирования η к γ , мы получаем

$$\frac{e^{ikR}}{ikR} = \int_0^{\frac{\pi}{2} - i\infty} e^{ikR \cos \gamma} \sin \gamma d\gamma = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2} - i\infty} e^{ikR \cos \gamma} \sin \gamma d\gamma d\psi, \quad (25)$$

где ψ — экваториальный угол системы полярных координат, ось которой совпадает с радиусом-вектором R . Но $\sin \gamma d\gamma d\psi$ является элементом площади на единичной сфере с центром в начале координат, а значение интеграла инвариантно относительно поворота координатных осей. Следовательно,

$$\frac{e^{ikR}}{R} = \frac{ik}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2} - i\infty} e^{ikR \cos \gamma} \sin \alpha d\alpha d\beta. \quad (26)$$

Это и есть представление сферической волновой функции через плоские волны. Зоммерфельдовские соотношения (17) получаются из (26) интегрированием по β . Вейль указал, однако, что, поступая подобным образом, мы теряем возможность произвольного поворота системы координат в положение, наиболее облегчающее интегрирование. Для последнего более удобной является ось системы координат, направленная вдоль радиуса-вектора R , а не вдоль нормальной к поверхности земли оси z .

Предположим, что диполь расположен на расстоянии z_0 от поверхности земли. В любой точке, для которой $z > 0$, результирующее поле Π_2 может быть выражено в виде суммы прямого или первичного поля Π_0 и отражённого поля Π_2 . В области $0 \leq z \leq z_0$ между диполем и поверхностью земли первичное излучение дается выражением

$$\Pi_0 = \frac{e^{ik_2 R}}{R} = \frac{ik_2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2} - i\infty} e^{ik_2 [x \sin \alpha_2 \cos \beta_2 + y \sin \alpha_2 \sin \beta_2 + (z_0 - z) \cos \alpha_2]} d\Omega_2, \quad (27)$$

где

$$d\Omega_2 = \sin \alpha_2 d\alpha_2 d\beta_2. \quad (28)$$

Для этой области α_2 представляет угол между волновой нормалью и отрицательным направлением оси z , как показано на рис. 114. Он является в то же время углом, под которым элементарная первичная плоская волна падает на поверхность земли.

Таким же образом можно построить из плоских волн и потенциал Герца Π для отражённого поля. Каждая из элементарных волн пучка будет иметь вид

$$f_2 e^{ik_2 [x \sin \alpha_2 \cos \beta_2 + y \sin \alpha_2 \sin \beta_2 + (z_0 + z) \cos \alpha_2]}.$$

Аналогично, преломлённое или прошедшее поле в области $z < 0$ может быть построено из элементарных волн

$$f_1 e^{ik_1 z_0 \cos \alpha_1} e^{ik_1 [x \sin \alpha_1 \cos \beta_1 + y \sin \alpha_1 \sin \beta_1 - z \cos \alpha_1]}.$$

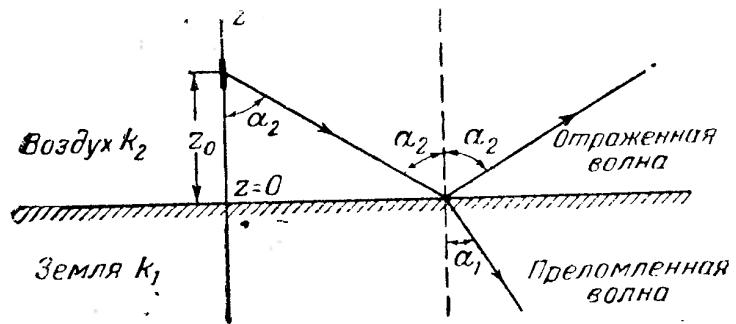


Рис. 114. Излучение диполя может быть представлено суперпозицией плоских волн, отражаемых и преломляемых поверхностью земли.

Оставшиеся пока неопределёнными функции f_r и f_t являются соответственно коэффициентами отражения и преломления. Для упрощения обозначений положим

$$\left. \begin{aligned} k_2 \mathbf{r} &= k_2 (x \sin \alpha_2 \cos \beta_2 + y \sin \alpha_2 \sin \beta_2), \\ k_1 \mathbf{r} &= k_1 (x \sin \alpha_1 \cos \beta_1 + y \sin \alpha_1 \sin \beta_1). \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Тогда во всех точках области $0 \leq z \leq z_0$ результирующее поле будет

$$\Pi_2 = \frac{ik_2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2} - i\infty} (f_r e^{ik_2 z \cos \alpha_2} + e^{-ik_2 z \cos \alpha_2}) e^{ik_2 \mathbf{r} + ik_2 z_0 \cos \alpha_2} d\Omega_2. \quad (30)$$

Во всех точках, для которых $z \leq 0$,

$$\Pi_1 = \frac{ik_1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2} - i\infty} f_t e^{ik_1 \mathbf{r} - ik_1 z \cos \alpha_1 + ik_2 z_0 \cos \alpha_2} d\Omega_2. \quad (31)$$

Граничные условия при $z = 0$ дают

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial z} = \frac{\partial \Pi_2}{\partial z}, \quad k_1^2 \Pi_1 = k_2^2 \Pi_2. \quad (32)$$

Налагая эти условия на (30) и (31), мы получаем прежде всего, что

$$k_1 \sin \alpha_1 = k_2 \sin \alpha_2, \quad \beta_1 = \beta_2. \quad (33)$$

Элементарные волны образуют круговой конус вокруг оси z , а углы отражения и преломления удовлетворяют закону Снелля (8), стр. 433. Дальнейшее вычисление даёт для коэффициентов отражения и преломления

$$\left. \begin{aligned} f_r &= \frac{k_1 \cos \alpha_2 - k_2 \cos \alpha_1}{k_1 \cos \alpha_2 + k_2 \cos \alpha_1} = \frac{Z_{21}^2 \cos \alpha_2 - \sqrt{Z_{21}^2 - 1 + \cos^2 \alpha_2}}{Z_{21}^2 \cos \alpha_2 + \sqrt{Z_{21}^2 - 1 + \cos^2 \alpha_2}}, \\ f_t &= \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^3 \frac{2k_1 \cos \alpha_2}{k_1 \cos \alpha_2 + k_2 \cos \alpha_1} = \frac{1}{Z_{21}^3} \frac{2Z_{21}^2 \cos \alpha_2}{Z_{21}^2 \cos \alpha_2 + \sqrt{Z_{21}^2 - 1 + \cos^2 \alpha_2}}, \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

где $Z_{21} = \mu_2 k_1 / \mu_1 k_2$. Силовые линии магнитного поля являются окружностями, центры которых лежат на оси z . Меридиональные плоскости на рис. 114 являются в то же время и плоскостями падения, отсюда очевидно, что магнитный вектор каждой из элементарных волн перпендикулярен к плоскости падения, а электрический вектор параллелен этой плоскости, хотя и не перпендикулярен к направлению распространения. Если мы обратимся к формулам (19), стр. 435, то увидим, что с точностью до коэффициента при f_t функции f_r и f_t совпадают с френелевскими коэффициентами отражения и преломления для плоской волны.

При $z > z_0$ выражение (30) должно быть видоизменено так, чтобы на бесконечности оно должным образом обращалось в нуль. Измеряя теперь α от положительно направленной оси z , мы пишем

$$\Pi_2 = \frac{ik_2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2} - i\infty} (f_r e^{ik_2 z_0 \cos \alpha_2} + e^{-ik_2 z_0 \cos \alpha_2}) e^{ik_2 \mathbf{r} + ik_2 z \cos \alpha_2} d\Omega_2. \quad (35)$$

Если, наконец, $z_0 = 0$, то это выражение принимает вид

$$\Pi_2 = \frac{ik_1^3}{2\pi k_2^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2} - i\infty} f_t(\alpha_2) e^{ik_2[r \sin \alpha_2 \cos(\varphi - \beta_2) + z \cos \alpha_2]} \sin \alpha_2 d\alpha_2 d\beta_2, \quad (36)$$

тогда как под поверхностью мы имеем в этом случае

$$\Pi_1 = \frac{ik_1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2} - i\infty} f_t(\alpha_2) e^{ik_2[r \sin \alpha_2 \cos(\varphi - \beta_2) - \sqrt{k_1^2 - k_2^2 \sin^2 \alpha_2} \sin \alpha_2]} d\alpha_2 d\beta_2. \quad (37)$$

Теперь легко произвести переход к решению Зоммерфельда. Согласно соотношению (80), стр. 364, мы имеем

$$J_0(\lambda r) e^{ihz} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\lambda r \cos(\varphi - \beta) + ihz} d\beta. \quad (38)$$

Пусть

$$\lambda = k_2 \sin \alpha_2, \quad h = k_2 \cos \alpha_2 = i \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}. \quad (39)$$

При $\alpha_2 = 0$ имеем $\lambda = 0$, а при $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - i\infty$ имеем $\lambda = \infty$. В силу этих соотношений (36) преобразуется в виду

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= \frac{ik_1^3}{k_2^2} \int_0^{\frac{\pi}{2} - i\infty} f_t(\alpha_2) J_0(k_2 r \sin \alpha_2) e^{ik_2 z \cos \alpha_2} \sin \alpha_2 d\alpha_2 = \\ &= 2k_1^2 \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)}{N} e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} z} \lambda d\lambda; \end{aligned} \quad (40)$$

выражение (37) та же подстановка преобразует к виду

$$\Pi_1 = 2k_2^2 \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)}{N} e^{+\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z} \lambda d\lambda, \quad (41)$$

где N — функция, определённая по (22). Таким образом, решение Вейля формально тождественно с решением Зоммерфельда для частного случая $z_0 = 0$.

В общем случае, когда $z_0 \neq 0$, мы должны заменить f_r в (35) на

$$f_r = \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^3 f_t - 1. \quad (42)$$

После этого (35) может быть разложено на три части, которые, в силу (27) и (40), приводятся к виду

$$\Pi_2 = \frac{e^{ik_2 R_2}}{R_2} - \frac{e^{ik_2 R_1}}{R_1} + 2k_1^2 \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)}{N} e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} (z + z_0)} \lambda d\lambda, \quad (43)$$

где R_1 и R_2 — расстояния, указанные на рис. 115. Это выражение справедливо при всех значениях $z > 0$. Результирующее поле в точке наблюдения состоит, следовательно, из слагаемого, непосредственно от вертикального диполя, расположенного в точке $z = -z_0$, слагаемого от его изображения в точке $z = -z_0$ и дополнительного члена, который учитывает влияние

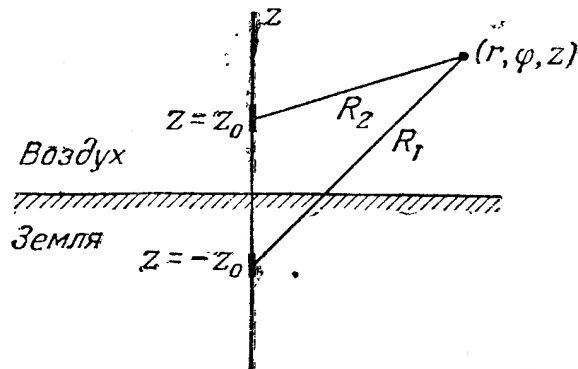


Рис. 115. Изображение диполя, расположенное в земле, в точке $z = -z_0$.

конечной проводимости земли¹⁾. При $k_1 \rightarrow \infty$ последний член в (43) имеет пределом

$$\lim_{k_1 \rightarrow \infty} 2k_1^2 \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda r)}{N} e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}(z+z_0)} \lambda d\lambda = \frac{2e^{ik_1 R_1}}{R_1} \quad (44)$$

и, в силу уравнения (17),

$$\Pi_2 \rightarrow \frac{e^{ik_1 R_2}}{R_2} + \frac{e^{ik_1 R_1}}{R_1}. \quad (45)$$

Тождественные результаты были получены и Ниссен²⁾, применившим метод Гюйгенса-Кирхгофа, рассмотренный в разделе 8.13. Поверхностные интегралы должны быть распространены по поверхности земли и по малым сферам, исключаяющим особенности, имеющиеся в источнике и в точке наблюдения.

9.30. Решение Ван дер Поля. Интересное и практически важное преобразование выражений Вейля-Зоммерфельда было найдено Ван дер Полем³⁾. Отправляясь от интеграла для отражённого поля

$$\Pi_r = \int_0^\infty \frac{k_1^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} - k_2^2}{k_1^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} + k_2^2} \frac{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}}{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} \frac{J_0(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}(z+z_0)}}{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2}} \lambda d\lambda, \quad (46)$$

получаемого из (18) и (20), Ван дер Поль показал, что полное поле — первичное и отражённое — в любой точке над поверхностью земли может быть представлено в виде объёмного интеграла, распространённого по некоторой области действительного пространства. Последовательные этапы доказательства опираются на свойства бесселевых функций, рассмотренные на предшествующих страницах этой книги. Подробности мы здесь опустим. Для всех значений $z > 0$ Ван дер Поль получает выражение

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= \frac{e^{ik_1 R_2}}{R_2} - \frac{e^{ik_1 R_1}}{R_1} + \frac{1}{\pi} \int_V \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{e^{ik_1 R_i}}{R_i} \right) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{e^{ik_1 p}}{p} \right) dv = \\ &= \frac{e^{ik_1 R_2}}{R_2} + \frac{e^{ik_1 R_1}}{R_1} - \frac{1}{\pi} \int_V \frac{e^{ik_1 R_i}}{R_i} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \left(\frac{e^{ik_1 p}}{p} \right) dv. \end{aligned} \quad (47)$$

Элемент объёма есть $dv = \rho d\rho d\zeta d\beta$, а пределы интегрирования $0 \leq \rho \leq \infty$,

¹⁾ Очевидно, такая трактовка неправильна, так как второй член имеет фазу обратную фазе волны от изображения диполя, третий же член при $k_1 \rightarrow \infty$ не исчезает. Впрочем, это непосредственно видно из (44) и (45). *Прим. ред.*

²⁾ Niessen, *Ann. Phys.* 18, 893, 1933.

³⁾ Van der Pol, *Physica* 2, 843, 1935.

$0 \leq \zeta \leq \infty, 0 \leq \beta \leq 2\pi$. Расстояние $p = \sqrt{\rho^2 + \zeta^2}$, а величина R_i представляет собой «комплексное расстояние», определяемое соотношением

$$R_i = \sqrt{\rho^2 + 2pr \cos \beta + r^2 + \left(z + z_0 + \frac{k_1^2}{k_2^2} \zeta\right)^2}. \quad (48)$$

Предполагается, что k_2 действительно, а знак у корня выбран так, чтобы действительная часть в (48) была положительной. Область интегрирования может быть интерпретирована как полупространство под геометрическим изображением источника; она представлена заштрихованной частью рис. 116. Переменные ρ, ζ, β — цилиндрические координаты, начало которых взято в точке $z = -z_0$, в которой расположено изображение источника. Ось ζ направлена вниз.

Если проводимость земли велика, то постоянная распространения k_1 имеет большую мнимую часть. Соответственно, волна $\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \left(\frac{e^{ik_1 p}}{p} \right)$ быстро затухает и её роль в интеграле заметна только при малых p . Иными словами, *вторичные волны посылаются к наблюдателю только той частью нижней среды (земли), которая расположена в непосредственной близости к геометрическому изображению источника, но ниже его*. В пределе при бесконечной проводимости область, в которой находятся источники, фактически дающие вторичное излучение, сжимается в точку, совпадающую с самим геометрическим изображением.

Аналогичное, но несколько более простое решение дано Ван дер Полем и для случая магнитного диполя; метод может быть распространён и на горизонтальные диполи. Ввиду того, что любой источник электромагнитного излучения может быть представлен в виде некоторого распределения электрических и магнитных диполей, применимость этих расчётов ко многим другим задачам физической оптики и электромагнитной теории очевидна. Можно упомянуть, например, довольно сложные явления, связанные с полным отражением, которое мы рассмотрели только в идеализированном случае бесконечной плоской волны.

9.31. Приближённые выражения интегралов. Легко показать, что интегральные представления поля или, точнее говоря, вектора Герца этого поля, к которым приводят все различные способы подхода к задаче об отражении от плоской поверхности, тождественны между собой. Значительно более трудной является задача, привлекавшая внимание многих исследователей и состоящая в том, чтобы привести эти интегралы к практическим формулам для напряжённости поля. Метод Зоммерфельда основывался на деформировании пути интегрирования в комплексной плоскости λ . Функция $1/N$, определённая соотношением (22), имеет точки ветвления при $\lambda = \pm k_1$ и при $\lambda = \pm k_2$ и полюс при

$$\lambda_0 = \pm \frac{k_1 k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}. \quad (49)$$

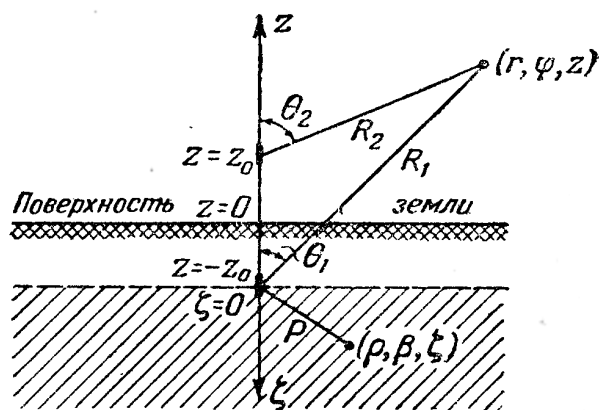


Рис. 116. В решении Ван дер Поля область интегрирования является полупространство, расположенное ниже плоскости $z = -z_0$.

Соответствующая риманова поверхность имеет четыре листка; только на одном из них выполняются условия в бесконечности, необходимые для сходимости интеграла. Согласно Зоммерфельду, путь интегрирования на этом листке может быть разложен на три части: первая часть — петля, идущая из бесконечности вокруг точки ветвления $\lambda = +k_1$, вторая часть — подобная же петля вокруг точки ветвления $\lambda = +k_2$ и третья часть — небольшая окружность вокруг полюса в точке $\lambda = \lambda_0$. Обозначим слагаемые интегрирования по петлям вокруг точек ветвления через Q_1 и Q_2 , а вычет при интегрировании по окружности — вокруг полюса P ; таким образом, $\Pi_2 = Q_1 + Q_2 + P$. Члены Q_1 и Q_2 были разложены Зоммерфельдом по обратным степеням расстояния от диполя, причём главные члены этих рядов пропорциональны соответственно $e^{ik_1 R}/R$ и $e^{ik_2 R}/R$. Поэтому Q_1 и Q_2 были интерпретированы как «пространственные волны». С другой стороны, для P Зоммерфельд получил функцию вида

$$\left. \begin{aligned} P &\sim \frac{1}{\sqrt{r}} e^{i\lambda_0 r - \sqrt{\lambda_0^2 - k_1^2} z} & (z > 0), \\ P &\sim \frac{1}{\sqrt{r}} e^{i\lambda_0 r + \sqrt{\lambda_0^2 - k_1^2} z} & (z < 0), \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

которая была интерпретирована им как «поверхностная волна».

Исторически эти поверхностные волны имеют значительный интерес. Направляющее действие плоской поверхности раздела диэлектрика и хорошего проводника на распространение плоской волны, повидимому, было впервые исследовано Коном¹⁾ и вскоре затем Уллером²⁾. Ценнек³⁾ указал на связь этих исследований с вопросом о распространении радиоволн и показал, что уравнения поля допускают решение, которое может быть интерпретировано как поверхностная волна, направляемая плоской поверхностью раздела двух любых сред. Это решение тождественно с поверхностной волной, полученной нами иным путём в разделе 9.13. Ценнеку были совершенно ясны ограничения, которым подчинялись его результаты. Он показал, что волна, фронт которой имеет некоторый наклон вперёд и которая следует вдоль плоской поверхности земли, затухая, как в горизонтальном, так и в вертикальном направлении, совместима с уравнениями Максвелла и что подобными волнами объясняется множество явлений, наблюдаемых при распространении радиоволн. С другой стороны, до сих пор не доказано, что радиоантенна действительно возбуждает волны подобного типа. Зоммерфельдовская работа 1909 г. была написана с тем, чтобы завершить доказательство этого, и член P в уравнении (50) он интерпретировал как поверхностную волну (в цилиндрических координатах).

Впервые сомнения в правильности зоммерфельдовского расчленения решения были высказаны Вейлем в его работе 1919 г. Применяя к интегралу (36) «метод перевала» (стр. 324—325), Вейль получил представление дифрагированного поля в виде асимптотического ряда. При $|k_1|/k_2 \gg 1$ решение Вейля также приводится к виду, в котором оно может быть интерпретировано как суперпозиция пространственной и поверхностной волн. Но поверхностная волна Вейля нетождественна с поверхностной волной Зоммерфельда и Ценнека.

Расхождение между двумя видами решения было в последние годы исследовано более внимательно, но едва ли можно сказать, что задача пол-

¹⁾ Cohn, Das elektromagnetische Feld, Leipzig, 1900.

²⁾ Uller, Rostock Diss., 1903.

³⁾ Zenneck, Ann. Physik 23, 846, 1907.

ностью разрешена¹⁾. Бёрроуз²⁾ указал на то, что в числовом отношении формулы для распространения, полученные на основании решения Зоммерфельда, отличаются от соответствующих формул Вейля как раз членом P , дающим поверхностную волну, и произвёл тщательные измерения, которые подтвердили результаты Вейля. Расхождение велико только в том случае, когда токи смещения в почве сравнимы с токами проводимости. Асимптотические разложения были даны Уайзом³⁾ и Райсом⁴⁾, которые показали, что если учесть все члены в разложениях Q_1 , Q_2 и P в решении Зоммерфельда, то член P сокращается. Наконец, Нортон⁵⁾ обратил внимание на ошибку в знаке, которая имела в работе Зоммерфельда 1909 г. В работе 1926 г. эта ошибка устранена, но приведённые в ней числовые результаты являются точными лишь при большой проводимости земли.

С точки зрения практики мы можем в итоге сказать следующее. Если токи смещения сравнимы с токами проводимости, как это имеет место в случае ультракоротких волн, то на решение Зоммерфельда и основанные на нём диаграммы Рольфа⁶⁾ полагаться нельзя. Формулы Ван дер Поля, Ниссена, Бёрроуза и Нортон⁷⁾ являются в большей своей части развитием результатов Вейля. Напряжённости поля, подсчитанные по этим формулам, согласуются друг с другом и, повидимому, находятся в хорошем согласии с опытом. То же справедливо и в отношении результатов, полученных Стрёмом⁸⁾, который применил для получения асимптотического решения другой метод.

¹⁾ В свете последних работ советских авторов (экспериментальные—см. сборник «Новейшие исследования распространения радиоволн», изд. АН СССР, 1945; теоретические—В. А. Фок, глава XXIII в книге Франк и Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ОНТИ, 1937; П. А. Рязин, сборник «Новейшие исследования . . .») положение полностью разъяснилось.

Ценнек в 1907 г. показал, что поверхностная волна, экспоненциально убывающая с расстояниями и движущаяся с фазовой скоростью, зависящей от свойств земли, является решением уравнений Максвелла, удовлетворяющим граничным условиям. Наглядность этой простой картины оказала влияние на все дальнейшие исследования и даже побудила авторов, шедших по верному пути, искать в своих формулах эту поверхностную волну. Однако решение Ценнека не отвечало физической задаче, так как прежде всего оно ничего не говорило о способе возбуждения указанной поверхностной волны и, соответственно, не содержало особенности в месте расположения диполя. Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси с сотрудниками доказали экспериментально, что реальные излучатели никакой ценнековской волны не дают. Они показали, что скорость распространения с увеличением расстояния от излучателя перестаёт зависеть от свойств почвы и стремится к значению скорости в воздухе, что никакого экспоненциального убывания поля нет.

В. А. Фок повторил (совершенно строгий по идее) вывод Зоммерфельда и показал, что в ходе вычислений Зоммерфельд допустил ошибку, устранение которой даёт результат, совпадающий с формулой Вейля и не совпадающий с зоммерфельдовской формулой 1909 г. (противоположное замечание в книге Франка и Мизеса на стр. 954 после формулы (75) сохранилось после внесённого Фоком исправления выкладок по недоразумению). Разбиение поля на поверхностные и пространственные волны типа (50) совершенно ошибочно и не отвечает реальным фактам. Наконец, Рязин путём разложения точного решения в ряды, вычислил поле и получил целый ряд его характеристик, которые полностью совпали с упомянутыми выше экспериментальными результатами.

С другой стороны, приводимые далее формулы (64) и (65) правильны, но содержащееся в них разбиение на поверхностные и пространственные волны имеет совершенно иной характер, чем у Ценнека. В частности, отдельно взятая «поверхностная волна» (65) не удовлетворяет граничным условиям (4). *Прим. ред.*

²⁾ Burrows, *Nature*, Aug. 15, 1936; *Proc. Inst. Radio Engrs.* 25, 219, 1937.

³⁾ Wise, *Bell System Tech. J.* 16, 35, 1937.

⁴⁾ Rice, *Bell System Tech. J.* 16, 101, 1937.

⁵⁾ Norton, *Nature* 135, 954, June 8, 1935; *Proc. Inst. Radio Engrs.* 25, 1192, 1937.

⁶⁾ Rolf, *Proc. Inst. Radio Engrs.* 18, 391, 1930.

⁷⁾ Norton, *Proc. Inst. Radio Engrs.* 24, 1367, 1936; 25, 1203, 1937.

⁸⁾ Strutt, *Ann. Physik* 1, 721, 1929; 4, 1, 1930; 9, 67, 1931.

Для того чтобы дать некоторое представление о характере формул, применяющихся для практических расчётов, мы приведём вкратце результаты, полученные Норманом для вертикального электрического диполя. Вектор Герца результирующего поля в любой точке над поверхностью земли равен

$$\Pi_2 = \frac{e^{ik_2 R_2}}{R_2} - \frac{e^{ik_2 R_1}}{R_1} + V, \quad (51)$$

где V — интеграл в бесконечных пределах, соответствующий третьему члену формулы (43). Приближённая формула, предложенная для V , такова:

$$V = [(1 - R_v)F + 1 + R_v] \frac{e^{ik_2 R_1}}{R_1}, \quad (52)$$

где

$$R_v = \frac{Z_{21}^2 \cos \theta_1 - \sqrt{Z_{21}^2 - \sin^2 \theta_1}}{Z_{21}^2 \cos \theta_1 + \sqrt{Z_{21}^2 - \sin^2 \theta_1}}, \quad (53)$$

$$\cos \theta_1 = \frac{z + z_0}{R_1}, \quad Z_{21} = \frac{k_1}{k_2}. \quad (54)$$

R_v — френелевский коэффициент отражения для плоской волны, падающей под углом θ_1 . Кажущийся источник расположен в данном случае *под* поверхностью земли на расстоянии z_0 (см. рис. 115). Функция F выражается так:

$$F = [1 + i\sqrt{\pi w} e^{-w} \operatorname{erfc}(-i\sqrt{w})], \quad (55)$$

где

$$\operatorname{erfc}(-i\sqrt{w}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-i\sqrt{w}}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_{i\infty}^{\sqrt{w}} e^{x^2} dx, \quad (56)$$

$$w = p_1 \left(1 + \frac{Z_{21}^2 \cos \theta_1}{\sqrt{Z_{21}^2 - \sin^2 \theta_1}} \right)^2 = \frac{4p_1}{(1 - R_v)^2}. \quad (57)$$

$$p_1 = \frac{ik_2 R_1}{2Z_{21}^4} (Z_{21}^2 - \sin^2 \theta_1) = pe^{ib}. \quad (58)$$

Так как

$$Z_{21}^2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \left(1 + \frac{i\sigma_1}{\omega \varepsilon_1} \right) = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} (1 + i\eta), \quad (59)$$

то мы можем написать также, что

$$p_1 = \frac{\pi R_1}{\lambda} \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} \left[-\eta + i \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} \sin^2 \theta_1 \right) \right] \frac{1}{(1 + i\eta)^2}, \quad (60)$$

где λ — длина волны в свободном пространстве. У Нормана дано подробное численное исследование функции F .

Для того чтобы окончательная формула давала напряжённость поля от элемента тока, вектор Герца умножается на соответствующий амплитудный фактор. Согласно (44), стр. 380, вектор Герца для линейного элемента тока Idz равен

$$d\Pi = \frac{i}{4\pi\omega\varepsilon} \frac{e^{ikR}}{R} Idz. \quad (61)$$

Умножая (51) на $iIdz/4\pi\omega\varepsilon_2$ и применяя (3), Нортон получает следующее

выражение для z -компоненты напряжённости электрического поля в вольтах на метр:

$$dE_z = \frac{i\omega\mu_0}{4\pi} Idz \left[\sin^2 \theta_2 \frac{e^{ik_2 R_2}}{R_2} + R_v \sin^2 \theta_1 \frac{e^{ik_2 R_1}}{R_1} + \right. \\ \left. + \frac{(1-R_v)}{Z_{21}^4} (Z_{21}^4 - Z_{21}^2 + \sin^2 \theta_1) F \frac{e^{ik_2 R_1}}{R_1} + \right. \\ \left. + \text{члены высшего порядка по отношению к } \frac{1}{R_2} \right]. \quad (62)$$

Члены с $1/R_2^2$ и $1/R_2^3$ относятся к «статическому» и «индукционному» полям, и ими можно пренебречь на расстояниях порядка десятка длин волн от источника. Угол θ_2 определяется соотношением

$$\cos \theta_2 = \frac{z - z_0}{R_2}. \quad (63)$$

Аналогичное выражение может быть получено и для компоненты dE_r , которая, совместно с (62), определяет наклон или поляризацию поля.

В частном случае, когда элемент тока расположен на поверхности земли или очень близко от неё, $z_0 = 0$ и $R_1 = R_2 = R$, $\theta_1 = \theta_2 = \theta$. Полная напряжённость поля в любой точке, для которой $R \gg \lambda$, может быть теперь выражена в виде некоторой суммы двух компонент:

$$dE_{\text{пространств}} = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi} Idz \sin \theta (1 + R_v) \frac{e^{ik_2 R}}{R} a_\theta, \quad (64)$$

$$dE_{\text{поверхности}} = \frac{i\omega\mu_0}{4\pi} Idz (1 - R_v) F \frac{e^{ik_2 R}}{R} \times \\ \times \left[a_z + a_r \frac{\sin \theta}{Z_{21}^2} \left(1 + \frac{\cos^2 \theta}{2} \right) \sqrt{Z_{21}^2 - \sin^2 \theta} \right], \quad (65)$$

где a_θ — единичный вектор, касательный к меридиану, проходящему через точку наблюдения в направлении увеличения угла θ и, следовательно, перпендикулярному к радиусу-вектору R , тогда как a_z и a_r — единичные векторы цилиндрической системы координат, параллельные z - и r -направлениям. Если проводимость земли стремится к бесконечности, то $R_v \rightarrow 1$. Компонента (65) тогда исчезает, и полное поле (64) сводится в каждой точке к полю диполя и его изображения. В случае конечной проводимости $R_v \rightarrow -1$ при $\theta \rightarrow \pi/2$. Вблизи поверхности земли теперь исчезает компонента (64), и полное поле выражается одним только членом (65). Поскольку поле распадается на две такие части, мы должны согласиться с Нортон, что термины «пространственная» и «поверхностная» волны полностью оправданы, хотя поверхностная волна (65) и не совпадает с поверхностной волной, предсказанной Ценнеком и Зоммерфельдом. Уравнение (65) представляет собой выражение для «земной волны», которой объясняется в главной своей части длинноволновая радиосвязь, в то время как (64) соответствует излучению под большими углами к поверхности земли, которое отражается от ионосферы и даёт сильные сигналы на больших расстояниях.

Распространение формального решения от случая плоской земли на случай сферической не представляет серьёзных затруднений. Поле диполя или элемента тока может быть выражено с помощью сферических волновых функций методами, подобными рассмотренным в главе VIII. Однако, поскольку радиус земли гораздо больше длины волны, получающиеся ряды сходятся очень плохо, и трудности сведения формального решения к практически применимым формулам становятся действительно грандиозными. В последнее

время был достигнут значительный прогресс в преодолении этих чисто аналитических трудностей; детальное рассмотрение дифракции поля диполя на бесконечно проводящей сфере для всех значений отношения радиуса сферы к длине волны было дано Ван дер Полем и Бреммером¹⁾.

ЗАДАЧИ

1. Нормально падающая плоская волна, отражённая от плоской поверхности, выражается формулой

$$\psi = A(e^{ikz} + re^{-ikz})e^{-i\omega t},$$

где r — коэффициент отражения, равный отношению амплитуды отражённой волны к амплитуде падающей. Полагая

$$r = -e^{-2\gamma},$$

показать, что

$$\psi = 2iAe^{-\gamma} \sin(kz - i\gamma).$$

Заметьте, что сдвиг фаз падающей и отражённой волн при $z=0$ равен удвоенной мнимой части γ , а отношение амплитуды (безотносительно к фазе) равно $e^{-2\operatorname{Re}(\gamma)}$.

2. Плоские волны отражаются от плоской границы, разделяющей два диэлектрика. Пусть первичная волна падает из среды (1) и преломляется в среду (2); относительный показатель преломления $n = \sqrt{\epsilon_1/\epsilon_2}$. Пусть r — отношение амплитуд электрического вектора отражённой волны и электрического вектора падающей волны. Показать, что при E , перпендикулярном к плоскости падения,

$$r_{\perp} = \frac{n \cos \theta_0 - \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \theta_0}}{n \cos \theta_0 + \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \theta_0}},$$

а при E , параллельном к плоскости падения,

$$r_{\parallel} = \frac{\cos \theta_0 - n \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \theta_0}}{\cos \theta_0 + n \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \theta_0}},$$

где θ_0 — угол падения.

3. Плоская волна отражается от плоской поверхности раздела двух диэлектриков, диэлектрические проницаемости которых отличаются на очень малую величину. Применяя обозначения предыдущей задачи и полагая $n = 1 + \Delta n$, показать, что $r_{\perp} \approx r_{\parallel}$ и оба приближённо равны

$$r \approx \frac{1 - \sqrt{1 - 2\Delta n \operatorname{tg}^2 \theta_0}}{1 + \sqrt{1 - 2\Delta n \operatorname{tg}^2 \theta_0}} \approx \frac{\varphi - \sqrt{\varphi^2 - 0,657 \cdot 10^{-4} \Delta n}}{\varphi + \sqrt{\varphi^2 - 0,657 \cdot 10^{-4} \Delta n}},$$

где $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta_0$ и во второй формуле выражено в градусах.

Применить этот результат к отражению радиоволн от границы между различными воздушными массами в тропосфере. Начертить r в функции от φ , полагая $\Delta n = \pm 10^{-4}$. При каких условиях может наступить полное отражение?

4. Нормально падающая плоская волна отражается от поверхности земли. Начертить величину скачка фазы при отражении от поверхности в функции проводимости для волн длиной в 10 и 500 м, полагая диэлектрическую проницаемость земли равной 9, а проводимость — от 10^{-2} до 10^{-8} обратных омов на метр (в зависимости от влажности).

¹⁾ Van der Pol и Bremmer, *Phil. Mag.* 24, 141, 825, 1937; 25, 817, 1938. Проблема дифракции вокруг земли в настоящее время решена полностью благодаря работам В. А. Фока, (Дифракция радиоволн вокруг земли, изд. АН СССР, 1946). Формально правильное разложение в ряд по сферическим функциям, которое само по себе получается весьма просто, здесь бесполезно, так как число членов ряда, которые необходимо учесть при вычислениях, имеет порядок удвоенного числа длин волн, укладываемых на окружности земли. Фок преобразовал это решение и свёл его к квадратурам, дав как асимптотические выражения для крайних случаев, так и табулированные функции для промежуточных случаев. *Прим. ред.*

5. Воспользовавшись развитой в разделе 9.7 теорией полного отражения, вычислить для предыдущего случая средние по времени потоки энергии параллельно и нормально к поверхности отражения в обеих средах.

6. Волна радиоальтиметра в 20 см падает нормально на ледяное поле, образовавшееся на поверхности солёной воды. Вычислить примерную толщину льда, при которой коэффициент отражения будет минимальным. Каково это минимальное значение коэффициента отражения? Проводимость льда предполагается пренебрежимо малой.

7. Пусть на плоской границе раздела двух диэлектриков мы имеем поверхностные волны типа, описанного в разделе 9.13. Рассмотреть поле этих волн и свойства потока энергии. Показать, что угол падения, необходимый для возникновения подобных волн, совпадает в этом случае с углом Брюстера.

8. Вопрос о влиянии переменного переходного слоя на отражение волн, идущих из одной среды в другую, имеет большое значение, и приближённые решения могут привести к ошибочным заключениям. Истинный характер этого явления был выяснен благодаря исследованиям Валлота (Wallot, *Ann. Physik* 60, 734, 1919)¹⁾.

Предположим, что среды (1), (2) и (3) отделены друг от друга плоскими поверхностями раздела $z=0$ и $z=d$, как это показано на рис. 96, стр. 450. Проводимость всех трёх сред равна нулю. Диэлектрик в областях (1) и (3) однороден, и диэлектрические проницаемости равны соответственно ϵ_1 и ϵ_3 . Диэлектрическая проницаемость среды (2) зависит от z по закону

$$\epsilon_2 = \epsilon_1 (1 + az)^n,$$

где константа a связана с толщиной слоя d соотношением

$$ad = \left(\frac{\epsilon_3}{\epsilon_1} \right)^{\frac{1}{n}} - 1.$$

Линейно поляризованная волна проходит из среды (1) в среду (2) нормально к поверхности раздела. Пусть

$$E_x = E(z)e^{-i\omega t}, \quad H_y = H(z)e^{-i\omega t}.$$

Вводя новую переменную w , определяемую соотношением

$$w - w_0 = \int_0^z \sqrt{\epsilon} dz,$$

показать, что уравнения поля будут иметь вид

$$\frac{dE}{dw} = \frac{i\omega\mu}{\sqrt{\epsilon}} H, \quad \frac{dH}{dw} = i\omega \sqrt{\epsilon} E$$

или

$$\ddot{E} + \frac{\dot{\epsilon}}{2\epsilon} \dot{E} + \omega^2 \mu E = 0, \quad \ddot{H} - \frac{\dot{\epsilon}}{2\epsilon} \dot{H} + \omega^2 \mu H = 0,$$

где точки обозначают дифференцирование по w . Для принятого нами закона изменения ϵ_1 мы имеем

$$w = \frac{2\sqrt{\epsilon_1}}{a(n+2)} (1+az)^{\frac{n+2}{2}} = w_0 (1+az)^{\frac{n+2}{2}}$$

или

$$\epsilon_2 = \epsilon_1 \left(\frac{w}{w_0} \right)^{\frac{2n}{n+2}}$$

Полагая

$$p = \frac{n+1}{n+2}, \quad n = \frac{2p-1}{1-p},$$

¹⁾ Валлот, повидимому, не знал о классической работе Релея, в которой гораздо более простым путём, чем в данной задаче (т.е. у Валлота), ещё в 1880 г. были совершенно строго получены те же результаты. См. Rayleigh, *Proc. Lond. Math. Soc.* 11 51, 1880 или *Sci. Pap.* т. I, 460 (1889). *Прим. ред.*

получить уравнения поля в виде

$$\ddot{E} + \frac{2p-1}{w} \dot{E} + \omega^2 \mu E = 0,$$

$$\ddot{H} + \frac{1-2p'}{w} \dot{H} + \omega^2 \mu H = 0$$

и показать, что в переходном слое

$$E = \left(\frac{w}{w_0}\right)^{1-p} [AH_{p-1}^{(1)}(\omega \sqrt{\mu} w) + BH_{p-1}^{(2)}(\omega \sqrt{\mu} w)],$$

$$H = i \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu}} \left(\frac{w}{w_0}\right)^p [AH_p^{(1)}(\omega \sqrt{\mu} w) + BH_p^{(2)}(\omega \sqrt{\mu} w)].$$

Определить из граничных условий константы A и B и получить выражения для отношений амплитуд отражённой и прошедшей волн к амплитуде падающей волны. Показать, что отражение имеет заметную величину только в том случае, когда толщина переходного слоя порядка длины волны, и что в пределе для бесконечно тонкого слоя мы получаем классическое выражение для коэффициента отражения. Обратит внимание на то, что эта теория применима также к распространению тока и напряжения вдоль передаточной линии с переменными параметрами.

9. Плоская бесконечная плита толщины $2a$ помещена в диэлектрик. Постоянные распространения внутри плиты и во внешней среде равны соответственно k_1 и k_2 . Показать, что вдоль плиты могут распространяться как поперечно-электрические, так и поперечно-магнитные волны. Показать, что в случае поперечно-магнитных волн с вектором H , параллельным плите, постоянная распространения h , определяющая фазовую скорость и затухание допустимых волн в направлении их распространения, определяется корнями уравнения

$$\operatorname{th} a \sqrt{h^2 - k_1^2} = \frac{\mu_1 k_2^2}{\mu_2 k_1^2} \sqrt{\frac{k_1^2 - h^2}{k_2^2 - h^2}}.$$

Задача эта решается быстрее всего посредством волновых функций задачи 1 главы VI и путём приравнивания нормальных волновых импедансов на каждой из поверхностей.

10. Определить давление, оказываемое плоской электромагнитной волной падающей на плоскую поверхность, в зависимости от угла падения и вида поляризации.

11. Плоская волна падает под углом θ на бесконечную плоскопараллельную плиту толщины d . ϵ, μ, σ — электрические постоянные плиты, по обе стороны от которой находится свободное пространство. Вычислить давление, оказываемое волной на плиту. (Debye, *Ann. Physik* 30, 57, 1909; Lebedew, *Ann. Physik* 6, 433, 1901; Nichols и Hull, *Ann. Physik* 12, 225, 1903).

12. Вертикальный электрический диполь расположен в среде (1), постоянная распространения которой равна k_1 , в точке с координатами $x = z_0, r = 0$. Среда (2) имеет вид бесконечной плоскопараллельной плиты с постоянной распространения k_2 , граничные поверхности которой имеют координаты $z = a < z_0$ и $z = 0$. Полу-пространство $z < 0$ заполнено веществом с бесконечной проводимостью. Полагая,

что первичное поле имеет вид $\frac{\exp(ikR)}{R}$, показать, что вектор Герца вторичного (отражённого) поля в первой среде равен

$$\Pi_{\text{вторич.}} = \int_0^\infty f_r J_0(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}(z + z_0 - 2a)} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}},$$

$$f_r = \frac{k_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_1^2} - k_1^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} \operatorname{th} \left(\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} a \right)}{k_2^2 \sqrt{\lambda^2 - k_1^2} + k_1^2 \sqrt{\lambda^2 - k_2^2} \operatorname{th} \left(\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} a \right)},$$

где r — расстояние по горизонтали от источника до точки наблюдения (Van der Pol und Bremmer, *Phil. Mag.* 24, 825, 1937).

13. В большинстве практических случаев, даже при очень высоких радиочастотах, поле и распределение тока в металлическом проводнике могут быть с достаточной точностью найдены из уравнений

$$E = i\omega A, \quad B = \text{rot } A, \quad J = i\omega \sigma A,$$

$$\Delta A + i\omega \mu \sigma A = 0, \quad \text{div } A = 0$$

(см. задачу 20, гл. V). Здесь полностью пренебрегается влияние внешнего поля на постоянную распространения волн внутри проводника и считается, что время входит в виде множителя $\exp(-i\omega t)$; J и A должны быть всюду конечны, а на поверхности, разделяющей проводник и диэлектрик, нормальная компонента J должна быть равна нулю.

14. С помощью этих уравнений найти распределение продольных токов по поперечному сечению очень длинного прямого круглого провода. Получить выражение для продольной компоненты напряжённости поля E в виде

$$E_z = RI + L_i \frac{dI}{dt},$$

где I — полный ток, R и L_i — сопротивление и внутренняя самоиндукция, рассчитанные на единицу длины.

15. Переменное магнитное поле направлено перпендикулярно к длинному проводящему цилиндру радиуса b . В рассматриваемой области поле однородно, а длина волны намного больше a . Рассчитать мощность, рассеиваемую в единице длины проводника индуцированными в нём токами Фуко. (См. Френкель. Электродинамика, т. II).

16. Тонкий бесконечный плоский проводящий лист помещён в однородное переменное магнитное поле. Частота поля настолько мала, что толщина «скин-слоя» намного больше толщины листа. Найти выражение для векторного потенциала индуцированных в листе токов Фуко и рассеиваемую на единицу площади мощность.

17. Следуя общей теории, развитой в разделе 6.2, рассмотреть распространение волн вдоль идеального цилиндрического проводника. Показать, что в ортогональной системе цилиндрических координат u^1, u^2, z , в предположении $E_z = H_z = 0$ остальные компоненты поля могут быть получены из двух скалярных функций φ и ψ по формулам

$$E_1 = -\frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u^1}, \quad E_2 = -\frac{1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial u^2},$$

$$B_1 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial u^2}, \quad B_2 = -\frac{1}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial u^1},$$

причём эти потенциальная и токовая функции удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0, \quad \frac{1}{\mu} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u^1} \right) + \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial u^2} \right) = 0,$$

$$\psi = \sqrt{\mu \epsilon} \varphi, \quad \varphi = f(u^1, u^2) g(z - vt), \quad v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}},$$

где μ и ϵ относятся к внешнему диэлектрику.

Пусть q — заряд на единицу длины, I — ток в каком-либо проводнике, а C — замкнутый контур, охватывающий только этот проводник и лежащий в плоскости $z = \text{const}$. Показать, что

$$q = -\epsilon \int_C \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds, \quad I = -\frac{1}{\mu} \int_C \frac{\partial \psi}{\partial n} ds = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} q,$$

где дифференцирование производится по внешней нормали.

Теория эта применима к любому числу параллельных проводников произвольного, но постоянного поперечного сечения, при условии, что сумма зарядов q в любой перпендикулярной плоскости равна нулю. В противном случае функции

φ и ψ нерегулярны (логарифмически) на бесконечности. В случае двух параллельных проводников a и b мы имеем $q_a = -q_b$. Ёмкость и индуктивность на единицу длины определяются выражениями

$$C = \frac{q_a}{\varphi_a - \varphi_b}, \quad L = \frac{\psi_a - \psi_b}{I_a},$$

такими же, как и для статического режима. Показать, что в системе единиц MKS

$$\mu\epsilon = LC$$

и что ток и заряд удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} \frac{\partial q}{\partial z} + L \frac{\partial I}{\partial t} &= 0, & \frac{\partial I}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} &= 0, & \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned}$$

18. Теория распространения электромагнитного поля вдоль параллельных цилиндрических проводников, рассмотренная в задаче 17, была распространена Абрагамом на случай конечной проводимости. Данное им приближённое решение достаточно точно и вполне применимо в большинстве практически важных случаев.

а) Предполагается, что волны поперечно-магнитные. Мы видели в разделе 9.15, что во всех случаях, когда поле не обладает аксиальной симметрией, это, строго говоря, неверно; однако допускаемая при этом ошибка в общем очень мала. Предполагается далее, что поле гармоническое. Взяв для скалярного потенциала выражение

$$\varphi = -\frac{\partial \Pi_z}{\partial z} = f(u^1, u^2) e^{i\gamma z - i\omega t},$$

показать, что в любой точке проводника или диэлектрика компоненты поля могут быть получены из соотношений

$$\begin{aligned} E_1 &= -\frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u^1}, & E_2 &= -\frac{1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial u^2}, \\ H_1 &= -\frac{\omega\epsilon + i\sigma}{\gamma} E_2, & H_2 &= \frac{\omega\epsilon + i\sigma}{\gamma} E_1, & H_z &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial u^1} \right) + \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial u^2} \right) &= i h_1 h_2 \gamma E_z. \end{aligned}$$

Вычислить z -компоненту комплексного вектора Пойнтинга S^+ и проинтегрировать её по всей x, y -плоскости, перпендикулярной к проводнику. Пусть величина этого интеграла равна W^+ . Показать, что

$$\begin{aligned} W^+ &= \frac{2\gamma}{\omega\mu_e\epsilon} \times \text{магнитная энергия диэлектрика} + \frac{2\gamma}{i\sigma\mu_i} \times \text{магнитная энергия проводника} \\ -\frac{\partial W^+}{\partial z} &= \text{джоулеву теплу} + 2i\omega (\text{электрическая энергия} - \text{магнитная энергия}), \end{aligned}$$

где индекс e отмечает величины, относящиеся к внешней среде, а индекс i — величины, относящиеся к проводнику, а все остальные величины рассчитаны на единицу длины проводника. Сделаем теперь следующие предположения:

б) В диэлектрике продольная компонента γE_z очень мала по сравнению с поперечным полем и, следовательно, для внешней среды значения компонент E_1, E_2, H_1, H_2 совпадают с теми, которые получаются для случая идеального проводника. Кроме того, значения ёмкости C и внешней индуктивности L_e остаются неизменными, причём, как и в задаче 17, $\mu_e\epsilon = L_e C$. Электрической энергией диэлектрика, входящейся на продольное поле, можно пренебречь.

с) В металле можно пренебречь поперечной компонентой электрического поля по сравнению с продольной и электрической энергией по сравнению с магнитной.

Рассмотрим пару проводников, по которым текут равные токи противоположного направления. Пусть R будет удвоенным сопротивлением переменному току единицы длины проводника, L_i — внутренняя индуктивность единицы длины обоих проводников. Обе эти величины являются функциями частоты и зависят как от расстояния между проводниками, так и от размеров их поперечных сечений. Прибли-

жённо они могут быть получены методом, указанным в задаче 13. Учитывая, что рассматриваемые энергии являются средними по времени, показать, что

$$\begin{aligned} W^+ &= \frac{\gamma}{\omega \mu_e \epsilon} \frac{1}{2} L_e I I^* + \frac{\gamma}{i \sigma \mu_i} \frac{1}{2} L_i I I^*, \\ -\frac{\partial W^+}{\partial z} &= \frac{1}{2} R I I^* + i \omega \left(\frac{\gamma \gamma^*}{\omega^2 \mu_e \epsilon} - 1 \right) \frac{1}{2} L_e I I^* - \frac{i \omega}{2} L_i I I^*, \\ \frac{\partial W^+}{\partial z} &= i (\gamma - \gamma^*) W^+. \end{aligned}$$

Вторым членом в W^+ можно пренебречь, и тогда для постоянной распространения мы получаем

$$\gamma^2 = \omega^2 \mu_e \epsilon \left[\left(1 + \frac{L_i}{L_e} \right) + \frac{i R}{\omega L_e} \right].$$

19. Согласно задаче 18, для волн, распространяющихся вдоль пары параллельных цилиндрических проводников, мы имеем для постоянной распространения выражение

$$\gamma^2 = \omega^2 \mu_e \epsilon \left[\left(1 + \frac{L_i}{L_e} \right) + i \frac{R}{\omega L_e} \right].$$

Полагая $\gamma = \alpha + i\beta$ и $L = L_i + L_e$, где L — полная индуктивность единицы длины, показать, что

$$\begin{aligned} \alpha &= \omega \left\{ \frac{LC}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\omega L} \right)^2} + 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}, \\ \beta &= \omega \left\{ \frac{LC}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\omega L} \right)^2} - 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Если $\left(\frac{R}{\omega L} \right)^2 \gg 1$, то

$$\alpha \simeq \beta \simeq \sqrt{\frac{RC\omega}{2}}.$$

Если $\left(\frac{R}{\omega L} \right)^2 \ll 1$, то

$$\alpha \simeq \omega \sqrt{LC} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{R}{\omega L} \right)^2 \right], \quad \beta \simeq \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

20. Система Лехера состоит из двух длинных проводов круглого сечения, натянутых параллельно друг другу. Пусть радиус каждого из проводов равен b , а расстояние между их центрами $2a$. Показать, что ёмкость и внутренняя самоиндукция равны соответственно

$$\begin{aligned} C &= \frac{\pi \epsilon}{\ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right)} \text{ фарад/метр}, \\ L_e &= \frac{\mu}{\pi} \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \right) \text{ генри/метр}. \end{aligned}$$

Если $a \gg b$, то влиянием одного из проводников на распределение тока в другом можно пренебречь, и сопротивление и внутренняя самоиндукция на единицу длины проводника приближённо даются формулами, приведёнными в конце раздела 9.17. Для того чтобы получить представление о порядке величин, предположим, что проволоки медные радиуса 2 мм, а расстояние между ними 10 см. Вычислить C , L_e , L_i и R для частот 10^8 , 10^5 и 10^2 циклов в сек. и определить затухание в децибелах на метр. Рассмотреть зависимость различных параметров от расстояния между проводниками и от их радиуса.

21. Если в предыдущих задачах мы учтём утечку через диэлектрик, то для распространения токов вдоль пары параллельных проводников общим уравнением будет уравнение (27), стр. 482:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - (LG + RC) \frac{\partial I}{\partial t} - RGI = 0.$$

Это уравнение было подробно изучено впервые лордом Кельвином в связи с подводными кабелями. С помощью преобразований Фурье или Лапласа, рассмотренных в главе V, найти общее решение, выраженное через начальные условия, налагаемые на токи и напряжение. Показать, что при соответствующем выборе параметров скорость распространения волн и их затухание могут быть сделаны не зависящими от частоты, так что сигналы будут распространяться без искажения.

22. Возможность прокладки трансатлантического кабеля была впервые доказана лордом Кельвином в его теоретической работе, опубликованной в 1885 г. В рассматриваемом случае можно пренебречь самоиндукцией и утечкой по сравнению с сопротивлением провода; потенциал по отношению к земле удовлетворяет уравнению

$$CR \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

По Кельвину, время, необходимое для того, чтобы данный потенциал возник на расстоянии z от начала, пропорционально произведению CR на квадрат расстояния. Получить этот результат.

23. Задача, состоящая в избавлении от перекрёстных помех («cross talk») между двумя телефонными линиями с помощью цилиндрических экранов, имеет большое техническое значение. Для того чтобы привести задачу к такому виду, в котором и она может быть удовлетворительно разрешена, предполагают обычно, что изменением поля вдоль линии можно пренебречь, так что поле является двумерным. Это предположение справедливо до тех пор, пока длина волны намного больше расстояния между проводниками и между проводником и экраном. Показать прежде всего, что при этих предположениях уравнения поля распадаются на две группы:

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \frac{i\omega\mu}{k^2} \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta}, \\ E_\theta &= -\frac{i\omega\mu}{k^2} \frac{\partial H_z}{\partial r}, \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (rE_\theta) - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right] &= i\omega\mu H_z. \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

$$\left. \begin{aligned} H_r &= \frac{1}{i\omega\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \theta}, \\ H_\theta &= -\frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial E_z}{\partial r}, \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (rH_\theta) - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right] &= \frac{k^2}{i\omega\mu} E_z. \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

Помехи от полей первого типа обычно называются «электростатическими» перекрёстными помехами, а связанные с полями второго типа — «электромагнитными». Эти термины совершенно неудачны и могут привести к путанице, но они укоренились в технической литературе.

Вторая группа уравнений представляет собой поле одной или нескольких нитей переменного тока. Показать, что поле, связанное с одиночной нитью I , равно

$$H_\theta = \frac{ikI}{4} H_1^{(1)}(kr) e^{-i\omega t}, \quad E_z = -\frac{\omega\mu I}{4} H_0^{(1)}(kr) e^{-i\omega t}$$

и что его радиальный импеданс равен

$$Z_r = -\frac{E_z}{H_\theta} = -\frac{i\omega\mu}{k} \frac{H_0^{(1)}(kr)}{H_1^{(1)}(kr)}$$

Соленоидальные или вихревые линии тока создают поля первого типа, но точно такие же поля могут быть созданы и двумя заряженными нитями с зарядами противоположного знака, откуда и происходит название «электростатическая» помеха.

24. Передаточная линия состоит из двух проводников радиуса b , расстояние между центрами которых равно $2a$. Индуктивность и ёмкость единицы длины известны из результатов задачи 20. В отношении внешнего поля система эквивалентна паре нитей тока силы I и противоположных знаков и паре заряженных нитей с зарядом q на единицу длины и противоположных знаков. Рассмотреть задачу в биполярных координатах и показать, что положение этих нитей не совпадает с центрами проводников, но что влиянием этого отклонения на поле можно пренебречь, за исключением, быть может, непосредственной окрестности самих проводников. Пусть

линия, проходящая посредине между проводниками, совпадает с осью z цилиндрической системы координат. На расстояниях от этой оси, намного меньших длины волны, поле подчиняется уравнениям задачи 23.

Показать, что в точках, для которых расстояние r от центральной оси $\gg a$, поле пары токов равно

$$\begin{aligned} E_z &= -\frac{\omega\mu k}{2} a I H_1^{(1)}(kr) \cos\theta e^{-i\omega t}, \\ H_r &= -\frac{ik}{2} \frac{aI}{r} H_1^{(1)}(kr) \sin\theta e^{-i\omega t}, \\ H_\theta &= \frac{ik}{2} \frac{aI}{r} [H_1^{(1)}(kr) - kr H_0^{(1)}(kr)] \cos\theta e^{-i\omega t}. \end{aligned}$$

Найти поле соответствующей пары заряженных нитей.

25. Расширить результаты задачи 24 с помощью формулы (11) раздела 6.11 и показать, что любая пара эксцентричных нитей может быть заменена системой линейных источников, расположенных на центральной оси и испускающих цилиндрические волны разных порядков.

26. Передаточная линия, описанная в задаче 24, окружена коаксиальным медным экраном с внутренним радиусом c и толщины δ . Полагая $c \gg a$, найти выражения для поля, проникающего через экран. Рассмотреть зависимость этого поля от его частоты и от размеров системы как для электрического, так и для магнитного типов волн. (По поводу этой и предыдущих задач см. дискуссию и библиографию у Щелкунова, Schelkunoff, *Bell System Tech. Journ.* 13, 532, 1934.)

27. Полая труба прямоугольного сечения ограничена толстыми металлическими стенками. Внутренние размеры $x = a$, $y = b$. Считая сначала стенки идеально проводящими, найти выражения для допустимых видов волн поперечно-электрического поля (H -волны) и для соответствующих поперечно-магнитных видов волн (E -волны). Компоненты поля могут быть написаны непосредственно из результатов задачи 1 главы VI. Если тангенциальная компонента E должна на границе исчезать, то поле должно быть периодически в направлении x - и y -осей. Следовательно, $h_1 = m\pi/a$, $h_2 = n\pi/b$. Соответственно с этим различные порядки E -волн обозначаются через $E_{m,n}$, а различные порядки H -волн — через $H_{m,n}$.

Найти выражения для фазовой и групповой скоростей и для длины волны в трубе, для критической частоты и для критической длины волны. Нарисовать силовые линии электрического и магнитного полей нескольких первых порядков для E - и H -волн. Поле $H_{0,1}$ имеет простейшую структуру, наименьшую критическую частоту и наименьшее затухание в случае труб с конечной проводимостью. По этой причине этот вид волн чаще всего и используется на практике.

Полагая, что стенки металлические и имеют конечную проводимость, вывести приближённое выражение для затухания волн $H_{0,1}$ в децибелах на метр. Показать, что имеются оптимальные значения отношения a/b и частоты, при которых затухание минимально.

28. Найти наименьшую собственную частоту для электромагнитных колебаний в полости, которая имеет форму прямого кругового цилиндра радиуса a и длины l . Металлические стенки обладают проводимостью σ . Вычислить эквивалентные индуктивность, сопротивление и добротность Q для этого собственного колебания. При решении придерживаться пути, изложенного в разделе 9.24.

29. Распространить распространение поперечно-электрических и поперечно-магнитных волн по полой трубе эллиптического сечения.

30. Ось бесконечно длинного кругового цилиндра совпадает с осью z координатной системы. Постоянная распространения для цилиндра равна k_1 , а для внешней среды k_2 . На цилиндр в направлении оси x падает плоская волна. Найти выражение для дифрагированного поля и для поперечного сечения рассеяния. Получить приближённые формулы для случая $a/\lambda \ll 1$. Рассмотреть два случая:

а) Электрический вектор падающей волны параллелен z -оси.

б) Магнитный вектор падающей волны параллелен z -оси.

Теория была экспериментально подтверждена Шефером (Schaefer, *Ann. Physik*, 31, 455, 1910; *Zeit. Physik* 13, 166, 1923).

31. Плоская линейно поляризованная волна рассеивается сферическим телом радиуса a . Постоянная распространения для вещества сферы k_1 , а для внешней среды, которая предполагается непроводящей, k_2 . Пусть $\mathbf{R}$ — радиус-вектор, проведённый из центра сферы к точке наблюдения. Плоскость, проходящая через вектор $\mathbf{R}$ и ось распространения, называется *плоскостью наблюдения*. Плоскость, проходящая через направление поляризации падающей волны и ось распространения, называется *плоскостью колебаний*. Пусть φ — угол между плоскостью наблюдения и плоскостью

колебаний, а θ — угол между $\mathbf{R}$ и осью распространения. Показать, что при $\lambda \gg a$, где λ — длина падающей волны во внешней среде, интенсивность релеевского рассеянного излучения даётся формулой

$$\frac{\bar{S}}{\bar{S}_0} = (2\pi)^4 \frac{a^6}{\lambda^4 R^2} \left| \frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1^2 + 2k_2^2} \right| (\cos^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi),$$

где $\bar{S}$ — среднее значение интенсивности рассеянного излучения, а $\bar{S}_0$ — среднее значение интенсивности падающей волны. Рассмотреть поляризацию рассеянного излучения.

32. Линейно поляризованный свет рассеивается очень малыми непроводящими частицами. Показать, что в направлении, параллельном электрическому вектору падающей волны, интенсивность рассеянного света меняется обратно пропорционально восьмой степени длины волны. Голубой цвет рассеянного в этом направлении поляризованного белого света кажется более чистым, чем при наблюдении по другим направлениям. Это явление называется «голубым светом Тиндала».

33. Рассмотреть затухание радиоволн сверхвысоких частот, вызываемое рассеянием на дожде и тумане, воспользовавшись следующими данными, взятыми из книги Гемфриса «Физика воздуха» (Humphreys, Physics of the Air):

	Радиус капель в метрах	Число капель на метр ³
Туман	$5 \cdot 10^{-6}$	107
Мелкий дождь	$2 \cdot 10^{-4}$	4000
Дождь	$5 \cdot 10^{-4}$	500
Ливень	10^{-3}	450

Выразить спадание интенсивности в децибелах на километр.

34. Вычислить силу, действующую на диэлектрическую сферу при падении на неё плоской линейно поляризованной волны, считая, что длина волны очень велика по сравнению с радиусом сферы (Debye, *Ann. Physik* 30, 57, 1909).

35. На идеально проводящую сферу падает плоская линейно поляризованная электромагнитная волна. Найти полную силу, действующую на сферу, считая, что радиус сферы очень мал по сравнению с длиной падающей волны (Debye, *Ann. Physik* 30, 57, 1909).

Оценить изменение результата для случая медной сферы.

36. Сферическая полость радиуса 17,5 см, подобная описанной в разделе 9.24, ограничена толстыми медными стенками. Найти частоту и логарифмический декремент затухания для наинизшего из возможных видов колебаний. Сделать то же самое для сферы вдвое меньшего радиуса.

37. На расстоянии b от центра сферы радиуса a , так что $a < b$, помещён переменный электрический диполь, ориентированный по радиусу. Постоянная распространения для сферы равна k_1 , а для внешней среды k_2 . Показать, что вектор Герца, удовлетворяющий граничным условиям и ведущий себя в месте нахождения диполя как $e^{ik_2 R}/ik_2 R$, при $r > a$ равен

$$\Pi = \frac{e^{ik_2 R}}{ik_2 R} + \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) R_n \frac{j_n(k_2 a)}{h_n^{(1)}(k_2 a)} h_n^{(1)}(k_2 b) h_n^{(1)}(k_2 r) P_n(\cos \theta),$$

а при $r < a$

$$\Pi = \frac{k_2^2}{k_1^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) (1+R_n) \frac{j_n(k_1 a)}{h_n^{(1)}(k_1 a)} h_n^{(1)}(k_2 b) j_n(k_1 r) P_n(\cos \theta),$$

где

$$R_n = \frac{-\left[\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \ln [x j_n(x)] \right]_{x=k_2 a} + \left[\frac{1}{y} \frac{d}{dy} \ln [y j_n(y)] \right]_{y=k_1 a}}{\left[\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \ln [x h_n^{(1)}(x)] \right]_{x=k_2 a} - \left[\frac{1}{y} \frac{d}{dy} \ln [y j_n(y)] \right]_{y=k_1 a}}$$

и где R — расстояние от диполя до наблюдателя, r — расстояние от центра сферы до наблюдателя, а θ — полярный угол, откладываемый от оси диполя. Вектор Герца направлен по радиусу.

38. Ось бесконечного идеально проводящего прямого кругового конуса совпадает с отрицательной осью z координатной системы. Вершина конуса совпадает с началом координат, а угол между его образующей и положительным направлением оси z равен $\theta = \theta_0$. Внешняя среда — диэлектрик. Исследовать собственные виды волн, могущие распространяться по конусу (Macdonald, *Electric Waves*, Cambridge University Press, 1902).

39. Рассмотреть излучение с открытого конца полубесконечного прямого провода, по которому течёт переменный ток, полагая в результате задачи 38 $\theta_0 \rightarrow \pi$. Сравнить с задачей 9 главы VIII.

40. В задаче 9 главы VII было найдено выражение для поля, обладающего симметрией вращения в сфероидальных координатах. Применить эти выражения к идеально проводящему вытянутому сфероиду, эксцентриситет которого очень мало отличается от единицы. Рассчитать частоты основных собственных колебаний и написать приближённые выражения, достаточные для подсчёта затухания вследствие излучения (Abram, *Mat. Ann.*, 52, 81, 1899).

41. По круговому проволочному витку радиуса 15 м протекает переменный ток частоты 60 циклов в секунду и силой в 10 ампер. Виток лежит на плоской поверхности земли, для которой $\epsilon/\epsilon_0 = 4$, $\sigma = 10^{-4}$ 1/ом метр.

а) Найти напряжённость электрического поля в вольтах на метр в точке на поверхности земли, расстояние которой от центра витка равно r .

б) Каково эффективное сопротивление витка? Потери в проводнике пренебречь и считать, что все потери обусловлены конечной проводимостью земли.

(Примечание. При столь малых частотах виток эквивалентен вертикальному магнитному диполю. Поле может быть подсчитано методами, изложенными в разделах 9.28 — 9.31, а потери могут быть подсчитаны из среднего вертикального потока энергии на поверхности земли.)

42. Рассмотрим систему проводников и диэлектриков, характеризуемых параметрами ϵ , μ , δ . Среда предполагается изотропной, но не обязательно однородной. Поверхности скачкообразного изменения параметров могут быть заменены слоями быстрого перехода от одних значений к другим. В этом случае мы имеем два вида действующих сил: силы F_1 , обусловленные поляризацией диэлектрика, и силы F_2 , вызываемые токами проводимости. Таким образом,

$$\mathbf{D} = \epsilon (\mathbf{E} + \mathbf{F}_1), \quad \mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{F}_2).$$

$\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{F}_2$ — непрерывные функции точки. Силы эти возникают в течение бесконечно короткого интервала времени Δt , кончающегося к моменту $t = 0$, после чего остаются постоянными. Пусть

$$A = \int_0^t dt \int_V dv \left(\mathbf{F}_1 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{F}_2 \mathbf{J} \right)$$

будет работой, производимой над системой действующими на неё силами за период от начального момента и до момента t , и пусть

$$W = \int_0^t dt \int_V dv \mathbf{F}_2 \mathbf{J}$$

— полное количество тепла при окончательной мощности, соответствующей конечному значению плотности тока $\mathbf{J}$. Если U и T — электрическая и магнитная энергии поля в конечном состоянии, то показать, что

$$A = W + 2(U - T).$$

Эта теорема была впервые высказана Хийвисайдом в его «*Electrical Papers*», т. II, стр. 412 и доказана Лоренцом, *Proc. Nat. Acad. Sci.* 8, 333, 1922. Аналогичная теорема для электрических цепей приведена у Пирса, *Electric Oscillations*, стр. 40, 1-е изд., 1920.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

А. Числовые значения основных констант

Диэлектрическая проницаемость свободного пространства ϵ_0 :

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \simeq \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \text{ фарад/метр.}$$

Магнитная проницаемость свободного пространства μ_0 :

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ генри/метр.}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 2,998 \cdot 10^8 \simeq 3 \cdot 10^8 \text{ метров/сек.}$$

$$1/\epsilon_0 = 1,129 \cdot 10^{11} \text{ метров/фарад.}$$

$$1/\mu_0 = 7,958 \cdot 10^5 \text{ метров/генри.}$$

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 376,7 \text{ ома.}$$

$$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 59,95 \simeq 60 \text{ омам.}$$

$$\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} = 2,654 \cdot 10^{-3} \text{ мо (1/ом).}$$

Постоянная распространения $k = \alpha + i\beta$,

$$k^2 = \epsilon\mu\omega^2 + i\omega\mu\sigma = \epsilon\mu\omega^2 (1 + i\eta),$$

$$\eta = \frac{\sigma}{\epsilon\omega} = 1,796 \cdot 10^{10} \frac{\sigma}{\nu\chi_e} \simeq 1,8 \cdot 10^{10} \frac{\sigma}{\nu\chi_e},$$

где σ — проводимость в обратных омах на метр, ν — частота и χ_e — относительная диэлектрическая проницаемость ϵ/ϵ_0 . Если $\eta \gg 1$, то

$$\alpha \simeq \beta \simeq 1,987 \cdot 10^{-3} \sqrt{\nu\sigma\chi_m} \simeq 2 \cdot 10^{-3} \sqrt{\nu\sigma\chi_m},$$

$$k = \alpha + i\beta \simeq \sqrt{i\omega\mu\sigma},$$

где χ_m — относительная магнитная проницаемость μ/μ_0 . Если $\eta \ll 1$, то

$$\alpha = \omega \sqrt{\epsilon\mu} (1 + \frac{1}{8}\eta^2 + \dots),$$

$$\beta \simeq \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = 188,3\sigma \sqrt{\frac{\chi_m}{\chi_e}}.$$

В. Размерности электромагнитных величин

Размерности помещённых в нижеследующей таблице величин выражены через массу M , длину L , время T и заряд Q . В системе MKS Джорджи, которой мы только и пользовались в этой книге, масса измеряется в килограммах, длина в метрах, время в секундах и заряд в кулонах.

Величина	Символ	Размерность	Наименование единицы в системе MKS
Сила	—	MLT^{-2}	Ньютон
Энергия	—	ML^2T^{-2}	Джоуль
Мощность	—	ML^2T^{-3}	Ватт
Заряд	q	Q	Кулон
Ток	I	$T^{-1}Q$	Ампер
Плотность заряда	ρ	$L^{-3}Q$	Кулон/куб. метр
Плотность тока	J	$L^{-2}T^{-1}Q$	Ампер/кв. метр
Сопротивление	R	$ML^2T^{-1}Q^{-2}$	Ом
Проводимость	σ	$M^{-1}L^{-3}TQ^2$	Обратные омы · метр
Электрический потенциал	φ	$ML^2T^{-2}Q^{-1}$	Вольт
Напряжённость электрического поля	E	$MLT^{-2}Q^{-1}$	Вольт/метр
Ёмкость	C	$M^{-1}L^{-2}T^2Q^2$	Фарада
Диэлектрическое смещение	D	$L^{-2}Q$	Кулон/кв. метр
Диэлектрическая проницаемость	ϵ	$M^{-1}L^{-3}T^2Q^2$	Фарад/метр
Электрический дипольный момент	p	LQ	Кулон · метр
Магнитный поток	Φ	$ML^2T^{-1}Q^{-1}$	Вебер
Плотность потока	B	$MT^{-1}Q^{-1}$	Вебер/кв. метр
Магнитодвижущая сила	м. д. с.	$T^{-1}Q$	Ампер-витки
Напряжённость магнитного поля	H	$L^{-1}T^{-1}Q$	Ампер-витки/метр
Индуктивность	L	ML^2Q^{-2}	Генри
Магнитная проницаемость	μ	MLQ^{-2}	Генри/метр
Магнитный дипольный момент	m	$L^2T^{-1}Q$	Ампер · кв. метр

С. Таблицы перехода

Умножьте значение величин, перечисленных ниже и выраженных в MKS	на	для того чтобы получить значение этих величин в электромагнитной системе CGS
Ампер	10^{-1}	Ток I
Ампер/метр ²	10^{-5}	Плотность тока J
Кулон	10^{-1}	Заряд q
Кулон/метр ³	10^{-7}	Плотность заряда ρ
Фарада	10^{-9}	Ёмкость C
Генри	10^9	Индуктивность L
Джоуль	10^7	Энергия (эрг) W
Мо/метр	10^{-11}	Проводимость σ
Ньютон	10^5	Сила (дина) F
Ом	10^9	Сопротивление R
Вольт	10^8	Потенциал φ
Вебер	10^8	Магнитный поток (Максвелл) Φ
Вебер/метр ²	10^4	Плотность потока (Гаусс) B

Умножьте значение величин, перечисленных ниже и выраженных в MKS	на	для того чтобы получить значение этих величин в электростатической системе CGS
Ампер	$3 \cdot 10^9$	Ток I
Ампер/метр ²	$3 \cdot 10^5$	Плотность тока J
Кулон	$3 \cdot 10^9$	Заряд q
Кулон/метр ³	$3 \cdot 10^3$	Плотность заряда ρ
Фарада	$9 \cdot 10^{11}$	Емкость C
Генри	$\frac{1}{9} \cdot 10^{-11}$	Индуктивность L
Джоуль	10^7	Энергия (эрг) W
Мо/метр	$9 \cdot 10^9$	Проводимость σ
Ньютон	10^5	Сила (дина) F
Ом	$\frac{1}{9} \cdot 10^{-11}$	Сопротивление R
Вольт	$\frac{1}{3} \cdot 10^{-2}$	Потенциал φ
Вебер	$\frac{1}{3} \cdot 10^{-2}$	Магнитный поток Φ
Вебер/метр ²	$\frac{1}{3} \cdot 10^{-6}$	Плотность потока B

Величины, данные в предыдущих таблицах, не рационализированы. Единицы MKS, применённые в этой книге, рационализированы. Электромагнитная и электростатическая системы CGS обычно не рационализируются. Множители перехода для трёх наиболее важных величин, подвергнутых рационализации, табулированы ниже.

Умножьте рационализированную величину	на	для того чтобы получить нерационализированную единицу в электромагнитной системе CGS
Ампер-витки	$4\pi \cdot 10^{-1}$	Магнитодвижущая сила (джильберт)
Ампер-витки/метр	$4\pi \cdot 10^{-3}$	Напряжённость магнитного поля H (эрстед)
Единица MKS для диэлектрического смещения	$4\pi \cdot 10^{-5}$	Диэлектрическое смещение D

Умножьте рационализированную величину	на	для того чтобы получить нерационализированную единицу в электростатической системе CGS
Ампер-витки	$12\pi \cdot 10^9$	Магнитодвижущая сила
Ампер-витки/метр	$12\pi \cdot 10^7$	Напряжённость магнитного поля H
Единица MKS для диэлектрического смещения	$12\pi \cdot 10^5$	Диэлектрическое смещение D

Если единицы CGS являются также и рациональными, то множитель 4π должен быть опущен.

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Формулы векторного анализа

Латинские буквы обозначают векторы. Скалярные функции обозначаются греческими буквами.

$$(a [b c]) = (b [c a]) = (c [a b]). \quad (1)$$

$$[a [b c]] = (ac) b - (ab) c. \quad (2)$$

$$[a b] [c d] = (a [b [c d]]) = a(b d) c - (bc) d = \\ = (a c) (b d) - (a d) (b c). \quad (3)$$

$$[[a b] [c d]] = ([a b] d) c - ([a b] c) d. \quad (4)$$

$$\text{grad} (\varphi + \psi) = \text{grad} \varphi + \text{grad} \psi. \quad (5)$$

$$\text{grad} (\varphi \psi) = \varphi \text{grad} \psi + \psi \text{grad} \varphi. \quad (6)$$

$$\text{div} (a + b) = \text{div} a + \text{div} b. \quad (7)$$

$$\text{rot} (a + b) = \text{rot} a + \text{rot} b. \quad (8)$$

$$\text{div} \varphi a = a \text{grad} \varphi + \varphi \text{div} a. \quad (9)$$

$$\text{rot} \varphi a = [\text{grad} \varphi a] + \varphi \text{rot} a. \quad (10)$$

$$\text{grad} (a b) = (a \text{grad}) b + (b \text{grad}) a + [a \text{rot} b] + [b \text{rot} a]. \quad (11)$$

$$\text{div} [a b] = (b \text{rot} a) - (a \text{rot} b). \quad (12)$$

$$\text{rot} [a b] = a \text{div} b - b \text{div} a + (b \text{grad}) a - (a \text{grad}) b. \quad (13)$$

$$\text{rot} \text{rot} a = \text{grad} \text{div} a - \text{grad} a. \quad (14)$$

$$\text{rot} \text{grad} \varphi = 0. \quad (15)$$

$$\text{div} \text{rot} a = 0. \quad (16)$$

Если $r = ix + jy + kz$ является радиусом-вектором, проведённым из начала координат в точку (x, y, z) ; то

$$\text{div} r = 3, \quad \text{rot} r = 0. \quad (17)$$

В нижеследующих формулах V является объёмом, ограниченным замкнутой поверхностью S . Единичный вектор n нормален к S и направлен всегда наружу.

$$\int_V \text{grad} \varphi dv = \int_S \varphi n da, \quad (18)$$

$$\int_V \text{div} a dv = \int_S (a n) da, \quad (19)$$

$$\int_V \text{rot} a dv = \int_S [n a] da. \quad (20)$$

Пусть теперь S — незамкнутая поверхность, ограниченная контуром C . Тогда

$$\int_S [n \text{grad} \varphi] da = \int_C \varphi ds, \quad (21)$$

$$\int_S \text{rot} a n da = \int_C a ds. \quad (22)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ III

Проводимости различных материалов

Металлы и сплавы

Материал	Проводимость σ в 1/ом · метр при 20° С
Алюминий, промышленный, холодноотянутый	$3,54 \cdot 10^7$
Вольфрам	$1,81 \cdot 10^7$
Железо 99, 98% чистое	$1,0 \cdot 10^7$
Золото, чистое, тянутое	$4,10 \cdot 10^7$
Константан, 60% Cu, 40% Ni	$0,20 \cdot 10^7$
Магний	$2,17 \cdot 10^7$
Манганин, 84% Cu, 12% Mn 4% Ni	$0,23 \cdot 10^7$
Медь, отожжённая	$5,8005 \cdot 10^7$
Медь, холодноотянутая	$5,65 \cdot 10^7$
Монель-металл	$0,24 \cdot 10^7$
Нейзильбер, 18% Ni	$0,30 \cdot 10^7$
Никель	$1,28 \cdot 10^7$
Нихром	$0,10 \cdot 10^7$
Олово	$0,869 \cdot 10^7$
Ртуть	$0,1044 \cdot 10^7$
Свинец	$0,48 \cdot 10^7$
Серебро 99, 98% чистое	$6,139 \cdot 10^7$
Сталь	$0,5—1,0 \cdot 10^7$
Сталь марганцевая	$0,14 \cdot 10^7$
Цинк, следы Fe	$1,74 \cdot 10^7$

Диэлектрики

Материал	Приблизительная про- водимость в 1/ом · метр при 20° С
Бакелит (средние пределы)	$10^{-8}—10^{-10}$
Глиптоль	10^{-14}
Дерево парафинированное	$10^{-8}—10^{-11}$
Кварц кристаллический оси	10^{-12}
» » ⊥ к оси	$3 \cdot 10^{-15}$
Кварц плавленный	$< 2 \cdot 10^{-17}$
Мрамор	$10^{-7}—10^{-9}$
Парафин	$10^{-14}—10^{-16}$
Резина твёрдая	$10^{-14}—10^{-13}$
Сера	10^{-15}
Слюда	$10^{-11}—10^{-15}$
Смола	$2 \cdot 10^{-13}$
Стекло обычное	10^{-12}
Фарфор	$3 \cdot 10^{-13}$
Фибра твёрдая	$5 \cdot 10^{-9}$
Целлулоид	10^{-8}
Церезин	$< 2 \cdot 10^{-17}$
Шеллак	10^{-14}
Шифер	10^{-6}
Вода дистиллированная 18° С	$2 \cdot 10^{-4}$
Нефть	10^{-14}
Спирт метиловый	$7,1 \cdot 10^{-4}$
Спирт этиловый 15° С	$3,3 \cdot 10^{-4}$

Проводимости геологических материалов изменяются настолько сильно от одного места к другому, что могут быть даны только их приближённые значения. Следующие цифры указывают на порядок величин.

Морская вода от 3 до 5 ом⁻¹ метр⁻¹. Пробы, взятые в Атлантическом океане вдали от побережья Массачусетса и Нью-Джерси, имели проводимость, равную 4,3 ом⁻¹ метр⁻¹.

Пресная вода 10⁻³ ом⁻¹ метр⁻¹. Проводимость маленьких озёр с пресной водой может быть в 5 или 10 раз больше.

Влажная земля — от 10⁻² до 10⁻³ ом⁻¹ метр⁻¹.

Сухая земля — от 10⁻⁴ до 10⁻⁵ ом⁻¹ метр⁻¹.

Относительные диэлектрические постоянные диэлектриков

Значения величин, приведённые ниже, приблизительно не зависят от частоты, пока частота меньше одного мегацикла в секунду. Если нет других указаний, то предполагается, что давление равно атмосферному, а температура 20° С.

Газы		Твёрдые тела	
	ϵ_r		ϵ_r
Водород 0° С	1,000264	Алмаз	16,50
Водяной пар 145° С	1,00705	Асфальт	2,68
Воздух 0° С	1,00059	Бумага (для изоляции в кабе- лях)	2,0—2,5
40 атмосфер	1,0218	Гутапёрча	3,3—4,9
80 атмосфер	1,0439	Дерево	
		красный бук $\perp$ к волокнам	3,6—7,7
		красный бук $\parallel$ волокнам .	2,5—4,8
		дуб $\perp$ к волокнам	3,6—6,8
		дуб $\parallel$ волокнам	2,5—4,2
		Кварц	
		$\perp$ к оси	4,69
		$\parallel$ оси	5,06
		Мрамор	8,3
		Парафин	2,1
		Резина	2,3—4,0
		Сера	
		аморфная	3,98
		литая чистая (свежая) . .	4,22
		Слюда	5,6—6,0
		Стекло	
		флинт, плотность 4,5 . . .	9,90
		флинт, плотность 2,87 . . .	6,61
		свинцовое, плотн. 3,0—3,5 .	5,4—8,0
		Фарфор	5,7
		Шеллак	3,1
		Шифер	6,6—7,4

Жидкости	
Ацетон 0° С	26,6
Бензол	2,29
Вода дистиллированная . . .	81,1
Воздух 191° С	1,43
Глицерин 15° С	56,2

Масла	
Касторовое	4,67
Льняное	3,35
Нефть	2,13

Спирты	
Амиловый	16,0
Метиловый	31,2
Этиловый	25,8

Данные, приведённые в этом приложении, взяты в основном из «Smithsonian Physical Tables» и из «Handbook of Chemistry and Physics». В этих источниках можно найти данные для других материалов и для температурных коэффициентов.

ПРИЛОЖЕНИЕ IV

Присоединённые функции Лежандра

$$P_0(z) = 1.$$

$$P_1(z) = z = \cos \theta.$$

$$P_1^1(z) = (1 - z^2)^{\frac{1}{2}} = \sin \theta.$$

$$P_2(z) = \frac{1}{2} (3z^2 - 1) = \frac{1}{4} (3 \cos 2\theta + 1).$$

$$P_2^1(z) = 3 (1 - z^2)^{\frac{1}{2}} z = \frac{3}{2} \sin 2\theta.$$

$$P_2^2(z) = 3 (1 - z^2) = \frac{3}{2} (1 - \cos 2\theta).$$

$$P_3(z) = \frac{1}{2} (5z^3 - 3z) = \frac{1}{8} (5 \cos 3\theta + 3 \cos \theta).$$

$$P_3^1(z) = \frac{3}{2} (1 - z^2)^{\frac{1}{2}} (5z^2 - 1) = \frac{3}{8} (\sin \theta + 5 \sin 3\theta).$$

$$P_3^2(z) = 15 (1 - z^2) z = \frac{15}{4} (\cos \theta - \cos 3\theta).$$

$$P_3^3(z) = 15 (1 - z^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{15}{4} (3 \sin \theta - \sin 3\theta).$$

$$P_4(z) = \frac{1}{8} (35z^4 - 30z^2 + 3) = \frac{1}{64} (35 \cos 4\theta + 20 \cos 2\theta + 9).$$

$$P_4^1(z) = \frac{5}{2} (1 - z^2)^{\frac{1}{2}} (7z^3 - 3z) = \frac{5}{16} (2 \sin 2\theta + 7 \sin 4\theta).$$

$$P_4^2(z) = \frac{15}{2} (1 - z^2) (7z^2 - 1) = \frac{15}{16} (3 + 4 \cos 2\theta - 7 \cos 4\theta).$$

$$P_4^3(z) = 105 (1 - z^2)^{\frac{3}{2}} z = \frac{105}{8} (2 \sin 2\theta - \sin 4\theta).$$

$$P_4^4(z) = 105 (1 - z^2)^2 = \frac{105}{8} (3 - 4 \cos 2\theta + \cos 4\theta).$$

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абрагам, Abraham 140, 373, 387, 418
 Адамар, Hadamar 253, 406
 Адамс, Adams 139, 387
 Барнес, Barnes 452
 Барроу, Barrow 478
 Без, Bäs 449, 452
 Беккер и Копсон, Baker and Copson 407, 409
 Беккер, Becker 140, 419
 Бергманн, Bergmann 391, 441
 Бетман, Batemann 400, 341, 342
 Бехман, Bechman 400, 404, 405
 Блэк, Blake 387
 Блюмер, Blumer 497
 Бонч-Бруевич, Bontsch-Bruewitsch 394
 Борн, Born 286, 407
 Бохер, Böcher 182
 Бохнер, Bochner 278
 Бреммер, Bremmer 516, 518
 Бреховских 502
 Бриллюэн, Brillouin 296, 400, 476
 Буссинеск, Boussinesq 342
 Бэрроуз, Burrows 513
 Валлот, Wallot 30, 517
 Ван дер Поль, Van der Pol 502, 510
 Ван Флек, Van Vleck 423, 424
 Ватсон, Watson 183, 265, 316, 325
 Введенский 502
 Вейль, Weyl 502, 506
 Вильмот, Wilmot 396
 Вильмсен, Wilmsen 501
 Вильсей, Wilsey 443, 445
 Винер, Winer 278
 Вихерт, Wiechert 418
 Вольтерра, Volterra 420
 Вольтерсдорф, Woltersdorf 452
 Гаген, Hagen 290, 447
 Гагу, Hague 238
 Галлен, Hallén 387
 Ганс, Hans 501
 Гаппель, Happel 501
 Гельмгольц, Helmholtz 135
 Герц, Hertz 37
 Герцфельд, Herzfeld 501
 Гобсон, Hobson 183, 335
 Гольдштейн, Goldstein 331
 Глазбрук, Glazebrook 29
 Глатхарт, Glathart 447
 Гондрос, Hondros 471
 Гринберг 502
 Гросс, Gross 439
 Гюллемин, Guillemain 251
 Гуль, Hull 518
 Гунд, Hund 396
 Дебай, Debye 325, 366, 471, 489, 524
 Джинс, Jeans 177, 183
 Джорджи, Giorgi 29
 Дорсей, Dorsey 28
 Друде, Drude 452
 Дугалл, Dougall 140
 Зельмейер, Sellmeyer 321
 Зильберштейн, Silberstein 40
 Зоммерфельд, Sommerfeld 30, 61, 218, 296, 323, 428, 501
 Зоммерфельд и Рунге, Sommerfeld und Runge 304, 463
 Игнатовский, Ignatowsky 409
 Инс, Ince 191, 275, 330
 Иобст, Iobst 499
 Кавендиш, Cavendish 156
 Карслоу, Carlslaw 255, 265, 352
 Карсон, Carson 472
 Картер, Carter 396
 Картрайт, Cartwright 452
 Келлог, Kellogg 18, 158, 172, 173
 Кельвин, Kelvin 194, 200, 521
 Кеннели, Kenneli 29
 Кениг, König 443, 449
 Кембл, Kemble 139, 203
 Кон, Cohn 512
 Кортвег, Kortweg 135
 Котлер, Kottler 407, 409, 412
 Кэмпбл, Campbell 257, 266
 Кэртис, Curtis 28
 Лабус, Labus 393
 Ламб, Lamb 342
 Лармор, Larmor 136, 200, 409
 Левин, 387
 Ленард, Lenard 418
 Леонтович 387, 502
 Линденблад, Lindenblad 396
 Линдер, Linder 238
 Ливенс, Livens 126, 136
 Лоренц, Lorentz 77, 286
 Ляв, Love 133, 409
 Макдональд, Macdonald 126, 409
 Мак Петри, Mc Petrie 396
 Мандельштамм, Mandelstamm 73, 501
 Маннебек, Manneback 393

Майкельсон, Michelson 74
Мезон и Вивер, Mason and Weaver 105,
126, 177
Ми, Mie 62, 366, 496
Мид, Mead 472
Мимно, Mimno 393
Минковский, Minkowski 62
Моглих, Möglich 501
Морзе, Morse 330, 340, 356, 414
Морлей, Morley 74

Никольс, Nichols 518
Ниссен, Niessen 510
Нортон, Norton 513
Нотер, Noether 200

Паж, Page 387
Паули, Pauli 62, 146
Пирс, Pierce 525
Писталькорс, Pistalkors 400
Пихт, Picht 439
Планк, Planck 407
Покельс, Pockels 132, 133, 136, 406, 408
Пуанкаре, Poincaré 77, 306, 406
Пуассон, Poisson 206
Пфанненберг, Pfannenbergr 449
Пфейфер, Pfeifer 445
Пфистер, Pfister 452

Райс, Rice 513
Релей, Rayleigh 471, 517
Риги, Righi 37
Ритц, Ritz 75
Роза, Rosa 28
Рольф, Rolf 513
Рот, Roth 452
Рубенс, Rubens 290, 447
Рубинович, Rubinowicz 407, 430
Рубинштейн, Rubinstein 414
Рытов 304, 305, 469
Рязин 502

Сакердот, Sacerdote 139
Смит, Smythe 183

Смолуховский, Smoluchowski 501
Соутворт, Southwort 472
Степанов 191
Стретт, Strutt 513
Стреттон, Stratton 331, 387

Тамм, Tamm 73
Тедон, Tedone 409
Тичмарш, Tichmarch 256
Тоноло, Tonolo 409

Уайз, Wise 513
Уллер, Uller 512

Фейнберг 502
Фельд 413
Филиппс, Phillips 158, 172
Фок, Fock 502, 517
Форстерлинг, Försterling 286
Фостер, Foster 257, 266
Фохт, Voight 133
Френкель 419

Хивисайд, Heaviside 306

Цан, Zahn 472
Ценнек, Zennek 512

Черни, Czerny 452
Чу, Chu 387, 414, 478

Шефер, Schaefer 286, 439
Ши, Shea 443

Щелкунов, Schelkunoff 251, 310, 387,
409, 414, 453, 472
Щукин, 293

Эйзенхарт, Eisenhart 309
Эйнштейн, Einstein 77
Эйхенвальд 439
Эпштейн, Epstein 305

Юдкевич 305

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Адмитанс коаксиальной линии 482, 485
Алгебра комплексных чисел 126—128
Антенна вертикальная 501—516
 — горизонтальная, над землёй 511
 — направленная 395—400
 — линейная 387—392, 400—402, 420
Антенны изображение 511

Бесселя уравнение 181
 — функции 315—317
 — — изменённые 343—344
 — — сферические, представления интегральные 361
Био-Савара закон 210, 228
Брюстера угол 437, 447, 454, 457

Вебер, единица потока 31
Вектор аксиальный 68, 72
 — единичный 47, 53
 — поляризации 24
 — полярный 68, 72
Вектор Герца 37—40, 169
 — —, связь с векторной волновой функцией 347
 — — для произвольного источника 379
 — — для цилиндрического поля 309—311

 — — для сферического поля 366
Векторы взаимные 46, 62
 — координатные 46, 62
 — поля комплексные 40, 42
Взаимоиндукция 236
Виток Гельмгольца 235
Волна плоская, неоднородная 301, 318, 450
 — поверхностная 212—215
 — поперечная 242

Волны дополнительные 466
 — — в коаксиальных линиях 481
 — основные в коаксиальных линиях 486
 — — в полых трубах 466
 — — в цилиндрических проводниках 472
Восприимчивость электрическая и магнитная 24
 — — —, измерение 231
Вращающий момент, действующий на диполь 161, 218
 — — — на эллипсоид 195—197

Галилеевы преобразования 77
Ганкеля функции 317
Гармоники зональные 354
 — тессеральные 354, 486
 — эллипсоидальные 180

Гельмгольца резонатор 491
Генри 33
Герца вектор 37—40, 169
 — — для произвольного источника 379
 — — для цилиндрического поля 309—311
 — — для сферического поля 366
 — —, связь с векторной волновой функцией 347
Гистерезис 115, 118, 119, 124
Глубина проникновения 444, 471
Градиент в криволинейных координатах 50, 54
Гюйгенса принцип 377, 405—414, 498, 510

Децибелл 305, 485
Дивергенция 18
 — в криволинейных координатах 51, 54
 —, инвариантность 65, 66
 — тензора 69, 70
Диполь магнитный 212, 511
 — — осциллирующий 382, 386—387
 — электрический 160—161, 164, 166
 — — осциллирующий 382, 383—386
Дирихле задача 406
Дисперсия аномальная 288
 — в диэлектриках 285—289
 — в металлах 289—290
 — нормальная 288
Дифракция поля диполя на сфере 515
 — плоской волны на сфере 493—501
 — — — на эллипсоиде 500
 —, теория Кирхгофа-Гюйгенса 405—414
Диффузия 248, 307
Добротность контура 493

Е-волны 302, 486
 — в коаксиальных линиях 479
 — в полых трубах 471—478
Единицы 28—33, 215—217, 431
 — Гауссовы 217
 — MKS 29—33, 217
 — практические 28, 32
 — рационализированные 215
 — электромагнитные 28, 217
 — электростатические 217

Жордана лемма 289, 279, 418

Задача Дирихле 406
 — Неймана 406

- Закон Био-Савара 210, 228
 — индукции Фарадея 21, 308
 — Клаузиуса-Масотти 130, 138, 140
 — Кулона 256, 260, 164, 215, 217—218
 — Ома 26
 Законы Снеля 433, 441, 508
 — — для проводящей среды 442
 Заряд, сохранение 17
 — , плотность 16—17, 43, 411
 — магнитный 206—208, 217, 409
 — поверхностный, связь с поляризацией 168
 — точечный 100, 150
 — — движущийся 417, 410
 Затухание, приблизительный подсчёт 468, 469
 — вдоль коаксиальной линии 485
 — в полых трубах 476—477
- Излучение антенных устройств 395—400
 — бегущих волн 392
 — квадруполь 383, 423
 — линейной антенны 389, 392
 — магнитного диполя 386—387
 — сферы 497—499
 — электрического диполя 384—385
 Импеданс внутренний сферы 252
 — коаксиальной линии 479—480, 482
 — плоской волны 251—252, 450
 — поверхностный 467
 — характеристический 252, 482
 — — коаксиальной линии 484—485
 — цилиндрического проводника 647 и далее
 Импеданса подбор, связь с граничными условиями 450, 452, 468
 Импульс, сохранение 100
 — электромагнитный 99—100, 145—146
 Инвариантность в пространстве и времени 81
 — лапласиана 65, 66
 — уравнений Максвелла 80
 Индукция длинного прямого провода 471
 — коаксиальной линии 482, 485
 Инерция электромагнитного поля 100
 Интеграл Фурье 256
 Ионосфера 290
 Исчисление операторное 275
- Квадрика деформаций 87
 — напряжений 85
 Квадруполь 162, 164, 166, 382—383, 423
 Колебания полости 491—493
 Компоненты ковариантные 47, 53, 62
 — контравариантные 47, 53, 62
 Координаты биполярные 58
 — криволинейные 45
 — параболические 58
 — параболоидные 60
 — сфероидальные 59, 182
 — тороидальные 137
 — цилиндрические 56—58, 180—181
 — эллипсоидальные 61
 Коэффициент деполяризации 188, 193
 — затухания 246
 — — объёмного расширения 90, 92
- Коэффициент отражения 437, 446, 447, 49, 508, 514
 — — плоского слоя 451—453
 — поглощения 288
 — прохождения 437
 — Пуассона 92
 — распространения для коаксиальной линии 481, 484, 485
 — — для круглого цилиндра 462, 464
 — — для полого цилиндра 473—474
 Коэффициенты Ламэ 53
 — метрические 48
 Кривая регулярная 18
- Лапласа преобразование 275—283
 — уравнение 150, 154
 — — решение в ортогональных координатах 179—183
 — — решение через определённый интеграл 197—198
 Лапласиан в криволинейных координатах 52, 54
 — инвариантность 65, 66
 Лежандра полиномы 159
 — уравнение 181
 Лежандра функции 353—356
 — — присоединённые 166, 532
 Лемма Жордана 289, 297, 418
 Линия коаксиальная 478—486
 — силовая 149
 — тока 16
 Листок магнитный 207
 Лоренца преобразование 77, 78, 80, 419
- Магнит постоянный 121
 Магнитострикция 145
 Международная электротехническая комиссия 29
 Метод перевала 324—325
 Модуль сдвига 92
 — Юнга 92
 Момент магнитный 207
 Мультиполи 150, 162—167, 213, 301, 380—383
- Намагниченность 25, 207, 212, 213—214
 Напряжение 84
 — поперечное 482
 Ньютон, единица силы 31
- Октуполь 165
 Определение Е и Д полостное 194—195
 Оптика металлов 443
 — геометрическая 304
 Оси деформации главные 87, 89
 — напряжения главные 85
 — оптические 302
 Отображение конформное 197, 202
 Отражение диэлектриками 436
 — земной поверхностью 508
 — полное 438—441, 511
 — проводниками 444
- Падение скользящее 448
 Плоскость наблюдения 623
 — — падения 432

- Плотность спектральная 257
 — тока 17
 — — — поверхностная 44, 219, 221—222, 411, 426—427
 — электрического заряда 16—17
 — — — — — поверхностная 43, 411
 — электрической энергии 105, 123
 — магнитной энергии 117, 123
 Поверхность регулярная 18
 Подобие электродинамическое 430—432
 Показатель преломления 245, 285—288, 292, 436
 Поле излучения элемента тока 388—389
 — индукции 515
 — консервативное 101
 — магнитного типа 39, 311, 462, 486, 496
 — магнитное поперечное 310, 439, 455, 457, 462—463, 472, 486
 — соленоида 210—211
 — стационарное 204
 — электрического типа 39, 310, 462, 486, 496
 — электрическое поперечное 311, 439, 462—463, 472, 486
 Полиномы Лежандра 159
 Полость сферическая 187
 — эллипсоидальная 194—195
 Поляризация диэлектрика, движущегося в магнитном поле 238
 — круговая 249, 440
 — линейная 249
 — магнитная 24, 218—220
 — электрическая 24, 167—169
 — эллиптическая 249, 440, 445, 448, 496
 Помехи перекрёстные 478, 521—522
 Поперечное сечение рассеяния 498
 Поперечность 414, 419
 Постоянная распространения k 244, 246
 — фазовая α 246
 Постулаты теории относительности 74—75
 Потенциал запаздывающий 378—379
 — поляризации 36, 169
 — векторный 33—37, 205
 — распределения токов 211—213, 227
 — намагниченного тела 218
 — запаздывающий 378—379
 — комплексный 40—42
 — поляризации 39, 169
 — магнитостатического поля 205—208
 — упругий 91
 — электростатический 148
 — — в двух измерениях 198—199
 Поток магнитный 21
 — энергии в плоской волне 250
 Пойнтинга вектор 124
 — — комплексный 126—128
 — теорема 123—128, 408
 Представления интегральные сферических бесселевых функций 361
 — — функций Бесселя 323, 325, 342
 — — — Ганкеля 323, 342
 — — эллиптических волновых функций 334—342
 Преломление в проводниках 441—444
 — в диэлектриках 436
 Преломление излучения диполя в земле 508—510
 Преломления показатель 245, 285—288, 292
 Преобразование Лапласа 275—283
 — Лоренца 77—78, 80, 419
 Преобразования ортогональные 63, 65
 Принцип Гюйгенса 377, 405—414, 498, 510
 Проводимость 26
 — комплексная 289
 Проводники 104, 151—152, 289
 Произведение тензоров 81
 Проницаемость диэлектрическая 22—24
 — — комплексная 42, 207
 — магнитная 23
 — — при высоких частотах 447
 Пуассона коэффициент 92
 Пуассона-Парсеваля формула 341
 Пуассона уравнение 150, 153—155, 208
 Размерности 431
 Разрыв непрерывности A 222
 — — B 222, 224
 — — E 172, 175, 176
 — — — — — поверхностного распределения 412—414
 — — — — — потенциала 173, 175
 Распределение тока, связь с электростатическим потенциалом 201—202
 Распространение вдоль бесконечной плоской поверхности 454—460
 — вдоль коаксиальной линии 478—485
 — вдоль цилиндрического проводника 463—471, 519—522
 — в ионизированной среде 290—293
 — в однородном диэлектрике 244—246, 260—264
 — в однородном проводнике 247—248, 264—274, 283—285
 — в полых трубах 471—478
 — радиоволн над плоской землёй 501—515
 — — — — — над сферической землёй 515
 Распространения константа k 244, 246
 Рассеяние на сфере 497—499, 500, 524
 Реакция излучения 420
 Резонатор Гельмгольца 491
 Релаксации время 27
 Решение Кирхгофа для волнового уравнения 376—377
 Ротор в криволинейных координатах 51, 52, 54
 — , как антисимметричный тензор 69
 — , определение 20
 — — — — — четыре-вектора 69, 78
 Самоиндукция 236—237
 Свёртывание тензора 69
 Связное пространство 205, 215
 Сжимаемость 92
 Силы, действующие между элементами тока 238
 — — на диполь 161
 — — на распределение зарядов 93, 99
 — — на распределение токов 93, 99

Силы, действующие на тело, взвешенное
в жидкости 140—142, 144, 146
— — на цилиндр в магнитном поле 234
— — на элемент жидкости 130, 135
— — на элемент поверхности 135—139,
144
— — на элемент твёрдого тела 134—
135, 142—144
Скаляры, варианты и инварианты 64,
66
Скин-эффект в цилиндрических провод-
никах 466
— на плоской поверхности 457—460
Скорость групповая 293—296, 300
— — в полых трубах 474
— сигнала 299—301
— фазовая 245, 246, 298—301
— — большая, чем c 455—456
— — в диспергирующей среде 288
— — в ионизированной среде 290, 292
— — в полом цилиндре 474
— — в проводящей среде 442
— фронта волны 297—301
Слои двойные, распределение 172—176
Слой Кеннели-Хивисайда 292
Снелля законы 433, 441, 500
— — для проводящей среды 442
Соппротивление излучения бегущей волны
393
— — линейной антенны 392
— — магнитного диполя 386
Состояние квазистационарное 204, 387
Среда анизотропная 27, 73, 302
— диамагнитная 25
— парамагнитная 25
— ферромагнитная 25, 118, 144
Стокса теорема 20
Сфера в электростатическом поле 183—
188
— , свободные колебания 486—493
Сходимость интегралов, определяющих
потенциал 157—158, 170—171, 186,
187

Тензор 66, 69
— антисимметричный и симметричный 67
— натяжения, электромагнитный 94—95,
137, 143
— , свёртывание 69
Тензоров произведение 81
Теорема Грина 152—153, 175—176, 374,
405
— — в векторной форме 225, 409
— — в четырёх измерениях 416
— взаимности 422
— Иреншоу 110—111
— Коши 289
— Пойнтинга 123—128, 408
— сложения для круговых цилиндриче-
ских волн 328—330
— для полиномов Лежандра 359
— для сферических функций Бесселя
364—365
— для эллиптических волн 340
— Стокса 20
— Томсона 109, 129

Теория квантовая 16
— Киргофа дифракционная 405—414
— макроскопическая, её границы 16, 390
494
Ток конвекционный 17, 78
— магнитный 409
— смещения 22
Томсона теорема 109, 129
Трубы полые, прямоугольные 471—478,
623

Угол Брюстера 437, 447 454, 457
— падения, комплексный 453
— полной поляризации 437
— телесный 173
Условие излучения 428—429
Уравнение Бесселя 181
— Лапласа 150, 154
— — , решение в ортогональных коор-
динатах 179—183
— — , решение через определённый ин-
теграл 197—198
— Лежандра 181
— Матьё 182, 330—332
— непрерывности 19
— — в четырёх измерениях 73
— Пуассона 150, 153—155, 208
— телеграфное 306, 482
— Френеля 433—435, 436, 441, 453—455,
516
Условия граничные 42—45
— — однородные 482

Фаза плоской волны 245
Фазовая константа α 246
Faltung-теорема 278—279, 285
Фарада 32
Фарадея закон индукции 21, 308
Формула Пуассона-Парсеваля 341
Формулировка электростатической зада-
чи 177—178
Френеля уравнение 433—435, 436, 441,
453—455, 516
Функции Бесселя 315—317
— волновые векторные 346, 347
— — сферические 365—369
— — цилиндрические 348—352
— Ганкеля 317
— гармонические 167, 315—318
— Лежандра 353—356
— — присоединённые 166, 532
Функция импульсная 259, 375
— кусочно-непрерывная 254
— Матьё 331—334
— ошибок 258, 514
— ступенчатая 257, 281
Фурье-Бесселя интеграл 325—327
— — для сферических функций 363
Фурье — Бесселя ряд 575
Фурье интеграл 256—260
Фурье представление 504
Фурье ряд 253—255

Характеристические значения 331
— — для сферы 487, 489—492

Характеристический импеданс 252, 482

— — коаксиальной линии 484—485

Н-волны 302, 313

— в полых трубах 472—478

Холл-эффект 26

Четыре-вектор 65

Четыре-потенциал 73, 78, 81, 415—417

Четыре-тензор 69

Четыре-ток 70, 78, 81, 415

Шести-вектор 70

Эйконал 98

Электрострикция 139—140

Эллипсоид в магнитостатическом поле
231

Эллипсоид в электростатическом поле
188—197

— намагниченный 230

Энергии поток 123—128

— — в плоской волне 250—251

Энергия магнитная в сферической поло-
сти 492

— магнитостатическая 112—125

— — анизотропной среды 142

— , скорость распространения 303

— упругая 90

— электростатическая 100—112

— — анизотропной среды 131

Эфир 98

Юнга модуль 92

ОГИЗ при Совете Министров СССР

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
„ГОСТЕХИЗДАТ“

Москва, Орликов пер., 3

ИМЕЮТСЯ В ПРОДАЖЕ НОВЫЕ КНИГИ

Баранов С. С. Поляроидные полярископы в исследовании напряжений. Стр. 132. Цена 4 руб.

Волькенштейн Ф. Ф. Электропроводность полупроводников. Стр. 352, Цена 14 р. 25 к.

Мезон. Монография, составленная коллективом сотрудников Физического Института им. П. Н. Лебедева Академии Наук СССР под ред. И. Е. Тамма. Стр. 272. Цена 11 р.

Паули В. Общие принципы волновой механики. Перевод с нем. под ред. К. В. Никольского. Стр. 332. Цена 14 р. 50 к.

Паули В. Теория относительности. Перевод с нем. В. Л. Гинзбурга и Л. М. Левина. Стр. 300. Цена 11 руб.

Шаронов В. В. Измерение и расчёт видимости далёких предметов. Стр. 284. Цена 12 р.

Книги продаются в книжных магазинах КОГИЗа и других книготорговых организациях.

Книги высылаются также наложенным платежом без задатка.

Заказы шлите по адресу: Москва, центр, Куйбышевский проезд, дом № 8. МОГИЗ. „Книга-почтой“.

Опечатки

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть	По чьей вине
189	ф-ла (7)	$\int_{-\infty}^{\infty}$	$\int_{\xi_1}^{\infty}$	Тип.
193	ф-ла (38)	$\frac{1 + \frac{abc}{2} \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_2} \int_{-\infty}^{\xi} \frac{ds}{(s+a^2) R_s}}{1 + \frac{abc}{2} \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_2} \int_0^{\infty} \frac{ds}{(s+a^2) R_s}}$	$\frac{1 + \frac{abc}{2} \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_2} \int_{-\infty}^{\xi} \frac{ds}{(s+a^2) R_s}}{1 + \frac{a}{2} \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_2} \int_0^{\infty} \frac{ds}{(s+a^2) R_s}}$	Авт.
250	ф-ла (71)	S_z^+	S_z^+	Тип.
288	подпись к рис. 58	части	частоты	Ред.
312	ф-ла (26)	$\frac{\partial A^*}{\partial u}$	$\frac{\partial A^*}{\partial u^2}$	Тип.
312	ф-ла (27)	$-\mu\sigma \frac{\partial \psi}{\partial t}$	$-\mu\sigma \frac{\partial \psi}{\partial t}$	"
325	ф-ла (42)	$e^{-p \frac{\pi}{2}}$	$e^{-ip \frac{\pi}{2}}$	Ред.
371	12 стр.	$(\xi^2 - 1) \frac{\partial \psi}{\partial \eta}$	$(\xi^2 - 1) \frac{\partial \psi}{\partial \xi}$	"

Заказ 593. Стрэттон. "Теория электромагнетизма".